7.9. Новый класс матриц Фибоначчи

Введение в теорию матриц

Еще одной математической теорией прикладного характера, разработку которой я начал в Ливии, а завершил ее в Мозамбике, является новая теория кодирования, основанная на так называемых матрицах Фибоначчи. Но чтобы понять эту теорию, я призываю моих читателей еще раз окунуться в мир математики, в частности, такой ее современный раздел, как «теория матриц».

Прежде всего введем понятие «матрицы». Под матрицей A мы будем понимать следующую прямоугольную таблицу чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что матрица A состоит из m горизонтальных «кортежей» типа

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}),$$

называемых *строками* матрицы A, и n вертикальных «кортежей» типа

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

называемых *столбцами* матрицы A. Заметим, что элемент a_{ij} находится на пересечении i-й строки и j-го столбца. Часто матрица обозначается как $A = (a_{ij})$.

Матрица с m строками и n столбцами называется матрицей m на n и записывается $m \times n$. Пара чисел m и n называется *размером* матрицы. Две матрицы A и B считаются *равными,* то есть $A = B$, если они имеют один и тот же размер и соответствующие элементы матриц равны.

Нас в дальнейшем будут интересовать так называемые *квадратные матрицы,* в которых число строк равно числу столбцов, то есть, $m=n$. Квадратная матрица с n строками и n столбцами называется матрицей порядка n. *Главная диагональ* или просто *диагональ* квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ состоит из чисел:

$$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

Квадратная матрица порядка n, содержащая 1 в главной диагонали и 0 на всех остальных позициях, называется *единичной матрицей* и обозначается через I:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицы можно складывать и умножать по определенным правилам. При этом единичная матрица играет ту же самую роль в матричном умножении как число 1 в традиционном умножении чисел, то есть:

$$AI = IA = A$$

Квадратные матрицы можно даже возводить в степень. Мы сможем определить степени квадратной матрицы следующим образом:

$$A^2 = AA,\ A^3 = A^2 A,\ \ldots,\ A^0 = I.$$

Квадратная матрица считается *обратимой*, если существует матрица B со следующим свойством:

$$AB = BA = I.$$

Такая матрица B является единственной; она называется *инверсной матрицей* и обозначается через A^{-1}.

Каждой квадратной матрице $A = (a_{ij})$ порядка n мы приписываем некоторое специальное число, называемое *детерминантом A,* обозначаемом Det A. Детерминанты матриц первого, и второго порядка определяются следующим образом:

$$\text{Det}\,(a_{11}) = |a_{11}| = a_{11}$$

$$Det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

то есть, детерминант квадратной матрицы 2-го порядка вычисляется очень просто: для этого достаточно перемножить диагональные элементы a_{11} a_{22} и вычесть из них произведение оставшихся элементов a_{12} a_{21} . Для матриц более высокого порядка вычисление детерминанта осуществляется по более сложным формулам.

Важное свойство детерминантов состоит в следующем:

$$\text{Det}\,(AB) = (\text{Det}\,A)\times(\text{Det}\,B),$$

то есть, детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов.

Если теперь применить это правило для матрицы A^n, то есть для матрицы A, возведенной в степень n, то мы получим следующий изящный результат:

$$\text{Det}\,(A^n) = (\text{Det}\,A)^n. \qquad (1)$$

После такого предварительного введения мы можем перейти к специальному классу квадратных матриц, названных *матрицами Фибоначчи*.

Классическая «фибоначчиева» матрица

Простейшая матрица Фибоначчи, называемая *Q-матрицей,* представляет собой квадратную матрицу размером 2×2 следующего вида:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Заметим, что детерминант Q-матрицы равен -1, так как

$$\text{Det}\,Q = 1\times0 - 1\times1 = -1.$$

Но какое отношение Q-матрица имеет к числам Фибоначчи? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо возвести Q-матрицу в n-ю степень. Проделав эту операцию, математики –фибоначчисты пришли к удивительному результату. Они доказали, что

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где элементы матрицы F_{n-1} , F_n , F_{n+1} есть ни что иное, как числа Фибоначчи!

Естественно, что это вызвало огромный энтузиазм у фибоначчистов, прежде всего у создателя Фибоначчи-Ассоциации Верненра Хогатта, и они достаточно быстро разработали теорию Q-матрицы. Оказалось, что Q-матрица является уникальной матрицей и играет среди квадратных матриц такую же роль, как число «золотая пропорция» среди действительных чисел.

Рассмотрим некоторые свойства Q-матрицы. Прежде всего определим детерминант матрицы (3). Для этого, воспользовавшись свойством (1), мы можем записать:

$$\text{Det}\,(Q^n) = (\text{Det}\,Q)^n. \qquad (4)$$

Но ранее мы установили, что Det Q = -1; подставляя это значение в формулу (4), мы получим следующий удивительный результат:

$$\text{Det}\,Q^n = (-1)^n, \qquad (5)$$

где n – целое число.

Но если мы теперь вычислить детерминант матрицы (3) по традиционным правилам вычисления детерминанта, а затем использовать тождество (5), тогда мы получим хорошо нам известное тождество, связывающее три соседних числа Фибоначчи:

$$\text{Det } Q^n = F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{5}$$

Таким образом, это означает, что Q-матрица выражает одно из наиболее важных свойств чисел Фибоначчи, задаваемое (4)!

Обобщенные «фибоначчиевые» матрицы

Из книг и статей основателя Фибоначчи-ассоциации Вернера Хогатта я был знаком с теорией «фибоначчиевой» Q-матрицы. Однако после Фибоначчи-конференции (Австрия, Грац, 1996 г.) мой интерес к этому направлению значительно возрос. Ход моих рассуждений при этом был следующим. Еще в своей докторской диссертации при исследовании оптимальных алгоритмов измерения я пришел к так называемым обобщенным числам Фибоначчи, которые я назвал «p-числами Фибоначчи». При этом введя понятие «p-чисел Фибоначчи», я ввел более общий класс числовых последовательностей, чем классические числа Фибоначчи. Но если Q-матрица соответствует классическим числам Фибоначчи, то возникает вопрос: нельзя ли придумать матрицы подобного типа, соответствующие p-числам Фибоначчи. В результате довольно длительных и напряженных размышлений я пришел к матрице следующего вида:

$$Q_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Такую матрицу я назвал Q_p-матрицей, где p=0, 1, 2, 3, … . А теперь я призываю читателя вместе со мной насладиться удивительными свойствами Q_p-матрицы. Прежде всего исследуем структуру Q_p-матрицы. Легко увидеть, что в общем виде Q_p-матрица представляет собой квадратную матрицу размером $(p+1)\times(p+1)$, где p – заданное целое число, принимающее значение из множества {0, 1, 2, 3, …}. А теперь внимательно посмотрим на Q_p-матрицу (6). Мы видим, что для заданного p рассматривая матрица построена по следующему общему принципу. Если в Q_p-матрице вычеркнуть первый столбец и последнюю строку, то оставшаяся часть матрицы будет представлять собой единичную матрицу порядка p.

Рассмотрим теперь частные случаи Q_p-матрицы, соответствующие значениям p = 0, 1, 2, 3, 4:

$$Q_0 = (1); \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q; \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

А теперь сравним между собой две соседние Q_p-матрицы, например, матрицы Q_4 и Q_3. Существует ли между ними какая-то регулярная связь? Очень просто увидеть, что, если в матрице Q_4 вычеркнуть последний, то есть 5-й столбец и предпоследнюю, т.е. 4-ю, строку, то мы получим матрицу Q_3. Оказывается, что это – общий принцип, связывающий любые две соседние Q_p-матрицы! Действительно, если в матрице Q_3 вычеркнуть последний столбец и предпоследнюю строку, то мы придем к матрице Q_2. Проделав то же самое с матрицей Q_2, то есть, вычеркнув из нее последний столбец и предпоследнюю строку, мы придем к матрице Q_1, которая представляет собой ни что иное, как классическая Q–матрица, предмет восторга математиков-фибоначчистов. Таким образом, каждая Q_p-матрица содержит в себе все предыдущие матрицы и, с другой стороны, входит в качестве составной части во все всех последующие матрицы. Конечно, когда я это обнаружил, душа моя наполнилась гордостью и счастьем от того, что я придумал такую квадратную матрицу; и я понял, что в моих руках небольшое математическое открытие! И я начал интенсивно исследовать математические свойства матрицы (6), для чего углубился в теорию матриц.

Изучая свойства детерминантов матриц, в одной из книг по теории матриц я нашел ключевой принцип для определения детерминанта любой Q_p-матрицы. Выше я установил общий принцип, связывающий две соседние матрицы типа (6), например, матрицу Q_p и матрицу Q_{p-1}. Для этого в матрице Q_p надо вычеркнуть последний, то есть, $(p+1)$-й столбец и предпоследнюю, то есть, p-ю строку. Заметим, что сумма $p+1+p = 2p+1$ всегда является нечетным числом независимо от четности числа p. И вот неожиданно я «наткнулся» на одну из общих теорем, задающих удивительно простую связь между детерминантами двух матриц, одна из которых (B) получается из предыдущей (A) путем вычеркивания в матрице A столбца и строки, на пересечении которых стоит «единичный» элемент 1, а остальные элементы вычеркиваемых «кортежей» равны нулю. Оказывается, что при таком вычеркивании детерминант новой матрицы B отличается от детерминанта исходной матрицы A только знаком, то есть между детерминантами матриц сохраняется следующее соотношение:

$$\text{Det } B = - \text{ Det } A. \qquad (7)$$

Это и есть тот «ключевой принцип», позволивший мне сразу же определить значение детерминанта для любой матрицы Q_p . Действительно, рассмотрим две соседние матрицы Q_1 и Q_2 . Детерминант матрицы Q_1 нам известен: он равен -1. С другой стороны, матрица Q_1 получается из матрицы Q_2 путем вычеркивания 3-го столбца и 2-й строки, причем на их пересечении стоит 1. Но тогда согласно (7) мы легко находим значение детерминанта матрицы Q_2 ; он равен (+1). Но тогда, продолжая те же рассуждения для матриц Q_2 и Q_3 , мы находим, что детерминант матрицы Q_3 будет равен (-1), а матрицы Q_4 равен (+1) и т.д. Другими словами, для всех матриц Q_p, соответствующих нечетным значениям p (p=1, 3, 5, …) детерминант матрицы Q_p равен (-1), а для матриц Q_p с четными значениями p (p=0, 2, 4, …) детерминант матрицы равен (+1). Математически этот общий результат можно выразить так:

$$\text{Det } Q_p = (-1)^p. \qquad (8)$$

Дорогие мои читатели! Вновь и вновь хочу привлечь ваше внимание к «поэзии математики». И каждый математик чувствует ритм и гармонию, содержащиеся в матрицах Q_p , подобно тому, как каждый человек чувствует ритм и гармонию в стихах гениального поэта. Даже если вы не математик по профессии, вы можете по достоинству оценить этот чудесный математический результат!

Основной результат теории Q_p-матриц

Рассмотрим теперь матрицу Q_p^n, являющуюся n-й степенью Q_p-матрицы. Я не хотел бы утомлять своих читателей сложными и «тонкими» математическим рассуждениями, которые привели меня к следующему результату:

$$Q_p^n = \begin{pmatrix} F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+2) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+2) & F_p(n-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-1) & F_p(n-2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p-1) \\ F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p+1) & F_p(n-p) \end{pmatrix} \qquad (9)$$

где элементами матрицы Q_p^n выражаются через p-числа Фибоначчи, вытекающие из «треугольника Паскаля». И этот результат является еще одним «секретом» треугольника Паскаля!

А сейчас мы попытаемся вычислить детерминант матрицы (9). На первый взгляд кажется, что эта проблема является чрезвычайно сложной. Но она кажется сложной только для тех, кто не знает теории матриц. Действительно, используя свойство (1), мы можем записать:

$$\text{Det } Q_p^n = (\text{Det } Q_p)^n \qquad (10)$$

Подставляя выражение (8) в (10), мы можем переписать выражение (10) в виде:

$$\text{Det } Q_p = (-1)^{pn}, \qquad (11)$$

где $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$; $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

И теперь мы можем выразить наше восхищение по поводу результата (11) и могущества математических теорий! Действительно, невозможно вообразить, что p-числа Фибоначчи, вытекающие из «треугольника Паскаля», могут стать основой нового класса квадратных матриц, задаваемых выражениями (6) и (9). И результат (11) кажется нам абсолютно невероятным! Невозможно вообразить, чтобы для любого заданного p *и* n детерминант матрицы (9) был равен всегда либо 1 или (-1), что следует из (11)!

В настоящее время трудно предсказать значение теории Q_p^n-матриц, задаваемых (9), и их приложений в различных областях математики, физики и других наук. Однако ясно, что этот результат имеет фундаментальное значение. С помощью этого результата мне удалось связать «треугольник Паскаля» с теорией матриц и открыть новый класс квадратных матриц, обладающих удивительным математическим свойством (10).

Сразу после возвращения из Ливии я рассказал о своем новом результате в области теории матриц академику Митропольскому Ю.А. и он сразу же предложил опубликовать этот результат в «Докладах Академии наук Украины». Я подготовил статью «A generalization of the Fibonacci Q-matrix" и по рекомендации Юрия Алексеевича она была опубликована в «Докладах Национальной академии наук Украины» (1999, №9).