7.5. Новое геометрическое определение числа

Что такое число?

«Ливийский» период моей жизни, который продолжался с февраля 1995 по август 1997 г., был своеобразным и сознательным «заточением», кода я у меня было три задачи: (1) изучение английского языка, (2) чтение лекций для ливийских студентов и (3) научные исследования. В Ливии я получил уникальную возможность сосредоточиться на моей науке и в этот период я приступил к реализации своей главной задачи – создании новой математики, которую позже я назвал «Математикой Гармонии».

И первым шагом в этом направлении был анализ оснований теории чисел, в частности, анализ самого понятия числа.

Хорошо известно, что *«число»* является наиболее важным понятием математики, а теория чисел является одной из древнейших математических теорий. Но что такое «число»? Казалось бы, по этому вопросу математики нашли общий язык. Но все не так просто. В течение многих тысячелетий понятие числа совершенствовалось и развивалось.

Исторически первым возникло понятие *натурального числа.* Его введение было связано с практической потребностью в *счете* предметов. Выдающаяся роль понятия натурального числа в развитии математики выражена в следующих словах знаменитого математика Леопольда Кронекера (1823-1891): «Бог создал натуральные числа, все прочее – творение человека».

Но что такое «натуральное число»? Впервые строгое определение этого понятия было дано в «Началах Евклида». Евклид рассматривал все числа как геометрические отрезки, и такой подход привел его к следующему геометрическому определению натурального числа. Вообразим, что мы имеем бесконечное количество «эталонных отрезков» длины 1. Евклид называл их «монадами» и не считал «монаду» за число. Это было просто «начало всех чисел». Итак, пусть мы имеем бесконечное множество S «монад», то есть

$$S = \{1, 1, 1, \ldots\} \tag{1}$$

Тогда натуральное число N определятся как некоторый отрезок, представляющий сумму «эталонных отрезков» из множества (1), то есть,

$$N = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 \ (N \text{ раз}). \tag{2}$$

Несмотря на предельную простоту такого определения, оно сыграло большую роль в математике и лежит в основе многих полезных математических понятий, например, понятий простого и составного числа, а также понятия «делимости», которое является одним из краеугольных понятий теории чисел.

Важным шагом в развитии понятия натурального числа явилось осознание бесконечности натурального ряда чисел, то есть потенциальной возможности его бесконечного продолжения. Этот важный результат отражен в памятниках античной математики, частности в трудах Евклида и Архимеда.

Исторически первым расширением понятия числа стало присоединение к натуральным числам *дробных чисел.* Если введение натуральных чисел было связано с практическими потребностями в счете предметов, то введение дробных чисел связано с потребностью производить *измерение.* Измерение осуществляется путем «откладывания» единицы измерения на измеряемой величине и подсчете числа таких откладываний. Такой метод измерения называется *«методом счета».* Однако не всегда единица измерения укладывается на измеряемой величине целое число раз; здесь и содержится источник происхождения таких простейших понятий, как половина, треть, четверть и т.д.

Дальнейшее расширение понятия числа было обусловлено не столько непосредственными потребностями в счете и измерении, сколько внутренними потребностями развития самой математики. Введение понятия *отрицательных чисел* было непосредственно связано с развитием алгебры и решением алгебраических уравнений.

Впервые отрицательные числа встречаются в математических сочинениях индийских математиков (6-11 вв. нашей эры). В европейской науке отрицательные числа окончательно вошли в употребление в трудах Р. Декарта (1596-1650), который дал геометрическое истолкование отрицательных чисел как направленных отрезков.

Числа целые, дробные (положительные и отрицательные) и нуль получили общее название *рациональных чисел.*

Наиболее крупным математическим достижением античной математики является открытие *иррациональных чисел.* Считается, что это открытие было сделано в 5-м веке до н.э в научной школе Пифагора при исследовании отношения диагонали к стороне квадрата. Методом от противного пифагорейцам удалось доказать, что рассматриваемое отношение, равное $\sqrt{2}$, не может быть выражено в виде отношения двух натуральных чисел, и такие отрезки были названы *несоизмеримыми,* а числа, выражающие подобные отношения, были названы *иррациональными.*

Открытие «несоизмеримых отрезков» привело к первому кризису в основаниях математики и, в конечном итоге, стало поворотным пунктом в ее развитии. Как гласит легенда, в честь этого открытия Пифагор совершил «гекатомбу», то есть принес в жертву богам 100 быков. Вначале пифагорейцы старались держать в секрете новое открытие. Согласно легенде, один из пифагорейцев Гиппас Метапонтский, открывший секрет несоизмеримых отрезков, погиб во время кораблекрушения, что рассматривается как наказание от богов за разглашение секрета «несоизмеримых отрезков». Открытие «несоизмеримых отрезков» активизировало развитие математики. Уже в конце 5-го века до н.э. была доказана иррациональность $\sqrt{N}$ для любого целого *N,* не являющегося полным квадратом.

Термин «рациональное» происходит от латинского слова *ratio* – отношение, которое является переводом греческого слова «логос». Рациональным является число, которое может быть представлено как отношение двух целых чисел, выражающих однородные соизмеримые величины. В отличие от рациональных чисел, числа, выражающие отношение несоизмеримых отрезков, были названы *иррациональными* (по-гречески «алогос»).

Определение Ньютона

Совокупность рациональных чисел оказалась недостаточной для изучения геометрических величин. Здесь оказалось необходимым новое расширение понятия числа, состоящее в переходе к множеству *действительных* или *вещественных* чисел, которое объединяет в себе все рациональные и все иррациональные числа. Такое объединение происходит в 16-17 веке, то есть в период зарождения математического анализа. Именно в этот период один из основоположников математического анализа Исаак Ньютон в своей «Универсальной Арифметике» дает четкое определение понятия «действительное число»:

«Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-либо величины к другой величине того же рода, принятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное»

Существует различные определения понятия действительного числа. Известен, например, так называемый «конструктивный подход» к определению понятия «действительное число». Согласно этому подходу действительное число A является математическим объектом, который задается с помощью следующей математической формулы:

$$A = \sum_i a_i 2^i \quad , \tag{3}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ и $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Определение числа, задаваемое (3), полностью подпадает под «определение Ньютона» и имеет следующую геометрическую интерпретацию. Пусть задано бесконечное множество «двоичных» отрезков:

$$B = \{2^n\} \quad (4)$$

где $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. Тогда «конструктивными» действительными числами называются все математические объекты, которые могут быть представлены в виде конечной суммы (3), состоящей из любой комбинации «двоичных» отрезков, взятых из (4).

Заметим, что количество членов, входящих в сумму (3), всегда конечно, но потенциально неограниченно, то есть здесь используется конструктивное понятие потенциальной осуществимости.

Ясно, что определение (3) задает на числовой оси только часть действительных чисел, которые могут быть представлены в виде суммы (3). Такие числа мы будем называть *конструктивными.* Все остальные действительные числа, которые не могут быть представлены в виде суммы (3), являются *неконструктивными.* Какие же числа относятся к «неконструктивным»? Ясно, что это прежде всего все иррациональные числа, в частности, главные математические константы π и e, число $\sqrt{2}$, «золотое сечение» и т.д. Но в рамках определения (3) к разряду «неконструктивных» относятся и некоторые «рациональные» числа (например, 2/3, 3/7 и т.д.), которые не могут быть представлены в виде конечной суммы (3).

Заметим, что хотя определение (3) значительно ограничивает множество действительных чисел, это никак не умаляет его значение с «практической», вычислительной точки зрения. Легко доказать, что любое «неконструктивное» действительное число может быть представлено в виде (3) приближенно, причем ошибка приближения Δ будет неограниченно уменьшаться по мере увеличения числа членов в (3), однако $\Delta \neq 0$ для «неконструктивных» действительных чисел. По существу, в современных компьютерах мы пользуемся только «конструктивными» числами, задаваемыми (3), и это нас вполне устраивает, потому что любое «неконструктивное» число может быть представлено в виде (3) с погрешностью, стремящейся к 0.

Новый взгляд на систему счисления Бергмана

Рассмотрим теперь систему счисления Бергмана

$$A = \sum_i a_i \tau^i \quad (5)$$

с точки зрения рассмотренного выше «определения Ньютона». Ясно, система счисления (5) вполне подпадает под это определение, но ее особенность состоит в том, роль «единицы» в системе счисления Бергмана играет «золотая пропорция», которая является иррациональным числом!

И тогда систему Бергмана (5) мы можем рассматривать как новое конструктивное определение числа, которое имеет следующую геометрическую интерпретацию. Пусть задано бесконечное множество «эталонных отрезков», являющихся степенями золотой пропорции:

$$B = \{\tau^n\} \quad (6)$$

где $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, а степени золотой пропорции связаны следующим фундаментальным соотношением:

$$\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2} \quad (7)$$

Тогда «конструктивными» действительными числами в смысле (5) называются все математические объекты, которые могут быть представлены в виде конечной суммы (5), состоящей из любой комбинации «эталонных отрезков», взятых из (6).

Какие же числа являются «конструктивными» в смысле (5)? Прежде всего, «конструктивным» является иррациональное число τ («золотая пропорция»), которое представляется в виде:

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 10\,.$$

Кроме того, «конструктивными» являются все степени «золотой пропорции»; примеры представления таких степеней даны ниже:

$$\tau^3 = 1000; \qquad \tau^2 = 100; \qquad \tau^{-1} = 0{,}1; \qquad \tau^{-2} = 0{,}01.$$

«Конструктивными» являются также все суммы степеней «золотой пропорции», которые могут быть представлены в виде (5). Пример такого представления дан ниже:

$$\tau^5 + \tau^1 + \tau^0 + \tau^{-2} + \tau^{-4} = 100011{,}0101.$$

Наконец, можно доказать, что все натуральные числа могут быть конечным образом представлены в виде (5), то есть они также относятся к разряду «конструктивных».

Коды золотой пропорции

А теперь зададимся вопросом: существует ли более общее «конструктивное» определение числа, которое могло бы объединить все рассмотренные выше определения числа (2), (3) и (5). Оказывается такое определение можно построить, основываясь на понятии *обобщенной золотой пропорции* или *золотой p-пропорции* (p=0, 1, 2, 3, …), о котором я рассказывал выше.

Рассмотрим бесконечное множество «эталонных отрезков», основанных на «золотой p-пропорции» τ_p :

$$G_p = \{ \tau_p^n \}; \tag{8}$$

где n = 0, ±1, ±2, ±3, …; τ_p^n - степени «золотой p-пропорции», связанные между собой следующим соотношением:

$$\tau_p^n = \tau_p^{n-1} + \tau_p^{n-p-1} \tag{9}$$

Множество (9) «порождает» следующий конструктивный метод представления действительного числа A:

$$A = \sum_i a_i \tau_p^i , \tag{10}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ и i = 0, ±1, ±2, ±3, … .

А теперь исследуем позиционное представление (10). Прежде всего заметим, что основанием данного представления является число τ_p, которое является «конструктивным» числом в рамках определения (10) и представляется в виде следующей двоичной комбинации:

$$\tau_p = 10.$$

Отметим, что выражение (10) задает бесконечное число «двоичных» (то есть использующих цифры 0 и 1) позиционных представлений, так каждому p (p=0, 1, 2, 3, …) соответствует свое позиционное представление (10).

В частности, при p=0 число τ_p=2 и позиционное представление (10) сводится к классической двоичной системе счисления (3).

При p=1 $\tau_p = \tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и позиционный способ (10) сводится к системе счисления Бергмана (5).

Наконец, рассмотрим случай $p \to \infty$. Для этого случая можно показать, что $\tau_p \to 1$, а это означает, что позиционное представление (10) стремится к Евклидовому определению (2). Из проведенных рассуждений вытекает, что двоичное представление (10) является весьма широким обобщением классической двоичной системы счисления (3), системы Бергмана (5) и, наконец, Евклидового определения (2) и включает все рассмотренные выше представления в качестве частных крайних случаев.

Заметим, что при p>0 все числа τ_p являются иррациональными числами, а это означает, что все позиционные представления для этого случая являются системами счисления с иррациональными основаниями.

Исследуя позиционное представление (10), я доказал, что все степени золотой p-пропорции и все суммы таких степеней являются «конструктивными» в смысле (10). Кроме

того, для каждого p все натуральные числа также являются «конструктивными, то есть могут быть представлены «абсолютно точно» в виде суммы (10).

Что означают мои исследования в области новых способов представления чисел для развития математики? Здесь необходимо подчеркнуть, что определение действительного числа, основанное на (10), включает в себя бесконечное количество таких определений, так как каждое p (p=0, 1, 2, 3, …) «порождает» новое геометрическое определение действительного числа. Но каждое новое определение числа, основанное на (10), требует разработки своей специфической «теории чисел»!

И обнаруженные в рамках определения (10) новые и далеко не тривиальные свойства натуральных чисел являются подтверждением того факта, что такая «теории чисел» имеет право на существование. Но эта тема выходит за рамки моей биографической книги, так как требует более глубоких математических знаний для ее понимания и развития.