А. П. Стахов

Математизация гармонии и гармонизация математики

Посвящается светлой памяти
выдающегося математика
Юрия Алексеевича Митропольского
Алексей Стахов

Оглавление

1. Введение
2. Математизация гармонии
2.1. *Что такое гармония?*
2.2. *Числовая гармония пифагорейцев*
2.3. *Вклад древних греков в развитие математики*
2.4. *Пифагорейская теория чисел*
2.5. *Несоизмеримые отрезки и первый кризис в основаниях математики*
2.6. *Математическое учение о природе*
2.7. *Количественное и геометрическое выражение гармонии Мироздания*
2.8. *Гипотеза Прокла: новый взгляд на «Начала» Евклида*
2.9. *С какой целью Евклид ввел «золотое сечение» в своих «Началах»?*
2.10. *Новый взгляд на «Начала» Евклида и происхождение математики*
2.11. *О введении термина «математика гармонии»*

3. Математика. Утрата определенности и кризис в математике
3.1. *Канторовская теория множеств и современный кризис в основаниязх математики*
3.2. *Математика в изоляции или в чем главная причина плачевного состояния современной математики?*
3.3. *Математика как естественная наука, как важнейшая часть теоретического стествознания*

4. Гармонизация математики
4.1. *«Математика гармонии»: от древних греков до современной науки*
4.2. *Математика гармонии и принцип математической красоты Дирака*
4.3. *Эстетика «математики гармонии»*
4.4. *Три основных периода в развитии «математики гармонии»*
4.5. *С какой целью в США была создана Фибоначчи Ассоциация?*
4.6. *Фибоначчи-конференции*
4.7. *О Славянской «Золотой» Группе и Международном Клубе Золотого Сечения*
4.8. *Числа Фибоначчи и решение 10-й проблемы Гильберта*
4.9. *Формулы Бине, гиперболические функции Фибоначчи и Люка и геометрия Боднара*
4.10. *Алгоритмическая теория измерения: от аналого-цифровых преобразователей к «принципу асимметрии природы» и новым системам счисления*
4.11. *Обобщение задачи о «золотом сечении»*
4.12. *Система Бергмана, коды золотой пропорции и «золотая» теория чисел*
4.13. *«Металлические пропорции», формулы Газале, золотая фибоначчиевая гониометрия и решение 4-й проблемы Гильберта*
4.14. *Гармонизация информатики*

5. Стратегические ошибки в развитии математики
5.1. *Пренебрежение «началами»*
5.2. *Пренебрежительное отношение к «проблеме гармонии» и «золотому сечению»*
5.3. *Игнорирование «гипотезы Прокла»*
5.4. *Односторонний взгляд на происхождение математики*
5.5. *Теория множеств Кантора как главная математическая мистификация 19-го столетия*
5.6. *Недооценка формул Бине*
5.7. *Недооценка «икосаэдрической» идеи Феликса Клейна*
5.8. *Недооценка математического открытия Джорджа Бергмана*

6. Современные научные открытия, основанные на Платоновых телах, «золотом сечении» и числах Фибоначчи
6.1. *Резонансная теория Солнечной системы*
6.2. *Золотая гармония и сердце*
6.3. *Новая геометрическая теория филлотаксиса («геометрия Боднара»)*
6.4. *Закон структурной гармонии систем Эдуарда Сороко*
6.5. *Квазикристаллы Шехтмана (Нобелевская Премия по химии - 2011)*
6.6. *Фуллерены (Нобелевская Премия по химии-1996)*
6.7. *«Золотые» геноматрицы Сергея Петухова*
6. 8. *Платоновы тела и элементарные частицы*
6.9. *Преобразования Фибоначчи-Лоренца и «золотая» интерпретация специальной теории относительности Эйнштейна*
6.10. *Золотое сечение квантовых состояний и его астрономические и физические проявления (исследования Петруненко)*
6.11. *Числа Фибоначчи в таблице Менделеева*
6.12. *Экспериментальное доказательство проявления «золотого сечения» в квантовом мире*

7. Гармонизация экономики и менеджмента
7.1. *Волны Эллиотта*
7.2. *Гармоничный менеджмент*

8. Концепция гармоничного образования и школы будущего
9. Музей Гармонии и Золотого Сечения
Заключение
Литература

1. Введение

Из последних публикаций на сайте Академии Тринитаризма наибольшее впечатление на меня произвела статья Дениса Клещева «О былых и грядущих богах, жрецах и пророках науки» // «Академия Тринитаризма» [1]. Примерно такое же впечатление на меня произвели в свое время две выдающиеся публикации: книга белорусского философа Эдуарда Сороко «Структурная гармония систем» [2], опубликованная в 1984 г., и книга американского математика Мориса Клайна «Математика. Утрата определенности» [3], опубликованная на русском языке в том же 1984 г. Эти книги имеют революционный характер для развития современной науки и математики. Книга Э. Сороко привлекла внимание научного сообщества к одной из важнейших тенденций в развитии современной науки – возрождению «Пифагорейской доктрины о числовой гармонии мироздания». Книга М. Клайна заставила задуматься математиков над плачевным состоянием современной

математики, в котором она оказалась после возникновения нового кризиса в основаниях математики, связанного с обнаружением парадоксов в канторовской теории множеств. Об этом Морис Клайн написал следующее:

«В настоящий момент положение дел в математике можно обрисовать примерно так. Существует не одна, а много математик, и каждая из них по ряду причин не удовлетворяет математиков, принадлежащих к другим школам. Стало ясно, что представление о своде общепринятых, незыблемых истин – величественной математике начала XIX в., гордости человека – не более чем заблуждение. На смену уверенности и благодушию, царившим в прошлом, пришла неуверенность и сомнения в будущем математики. Разногласия по поводу оснований самой «незыблемой» из наук вызвали удивление и разочарование (чтобы не сказать больше). Нынешнее состояние математики – не более чем жалкая пародия на математику прошлого с ее глубоко укоренившейся и широко известной репутацией безупречного идеала истинности и логического совершенства»

Любопытно отметить, что год 1984 является особым, переломным годом, очень результативным для золотого сечения и его приложений. Приведем только некоторые примеры. 12-го ноября этого года в небольшой статье, опубликованной в авторитетном журнале *"Physical Review Letters"*, был дано экспериментальное доказательство существования металлического сплава с исключительными свойствами (автор открытия - израильский физик Дан Шехтман). Кристаллическая структура этого сплава имела "икосаэдрическую" симметрию, то есть, симметрию 5-го порядка, что строго запрещено классической кристаллографией. Сплавы с такими необычными свойствами были названы *квазикристаллами*. Благодаря этому открытию, золотое сечение, которое лежит в основе икосаэдра и симметрии 5-го порядка (пентаграмма), вышло на первые роли в современной физике. В статье Д. Гратиа "Квазикристаллы" ("Успехи Физических Наук", 1988 г.) [5], посвященной этому открытию, отмечается, что "его значение в мире минералов можно поставить в один ряд с добавлением понятия иррациональных чисел в математике". А 2011 год стал знаковым годом не только для квазикристаллов, но и для всей «гармоничной математики». За это открытие Дану Шехтману присуждена Нобелевская Премия по химии!

Открытие квазикристаллов стало достойным подарком к 100-летию выхода в свет книги немецкого математика Феликса Клейна *"Икосаэдр и решение уравнений 5-й степени"* (1884 г.) [6], который за 100 лет до публикации статьи Шехтмана гениально предсказал ту роль, которую икосаэдр может сыграть в науке, в частности, в математике. И Нобелевская Премия за открытие квазикристаллов является блестящим подтверждением того факта, что «золотое сечение», действительно, является фундаментальной константой природы.

Отметим также, что в 1984 г. значительно активизировала свою деятельность американская Фибоначчи-ассоциация, которая в этом году провела свою 1-ю Международную конференцию по числам Фибоначчи и их приложениям. Начиная с этого года, проведение этой знаменитой математической конференции становится регулярным (один раз в 2 года).

Можно, с достаточной долей уверенности утверждать, что книги Э. Сороко [2] и А. Стахова [4], опубликованные в 1984 г., дали начало новому этапу в развитии «золотосеченского» движения в мире, которое начало развиваться членами так называемой «Славянской «Золотой» Группы – неформальном объединении славянских ученых (Украина, Россия, Беларусь, Польша), созданном в Киеве в 1992 г. во время проведения 1-го Международного Семинара «Золотое Сечение и Проблемы Гармонии Систем». Об этом я писал в статье «О деятельности Международного Клуба Золотого Сечения: реализованные проекты и перспективы» [7].

Но возвратимся к статье Дениса Клещева [1]. В своем комментарии к статье Дениса Клещева [6] я выделил два наиболее важных положения, сформулированные в статье Клещева (цитаты из статьи Клещева):

1. *Смена парадигмы в математике предшествует парадигмальному скачку в физике, эта историческая закономерность опровергает сложившийся в наши дни стереотип, что математика и физика методологически между собой не связаны. Такая связь существует, и далеко не случайно*

после монографии по истории математики «Математика. Утрата определенности» Моррис Клайн написал другую книгу «Математика. Поиск истины», посвященную аналогичному процессу утраты определенности в физике

2. *Наиболее близка к таким взглядам на будущее математики концепция ... А.П.Стахова, который отстаивает бесспорную для всех историков математики (и крайне неприятную для современных жрецов науки) вещь, а именно то, что наука математика зарождалась в неразрывной взаимосвязи трех основных проблем: проблемы измерения (геометрия, тригонометрия), проблемы счета (арифметика, системы счисления), а также проблемы гармонии (систематизация и обобщение знаний). Хотя свидетельство Прокла Диадоха (V век н.э.), в котором раскрывается смысл Евклидовых «Элементов», составленных как строго аксиоматическое построение пяти правильных многогранников, имеет множество подтверждений в античной науке, современные математики продолжают от нас скрывать этот исторический факт.*

Цель настоящей статьи – развить эти тезисы и показать, что в Античной Греции наука и математика развивалась под флагом **«Математизации Гармонии»,** и эта идея получила наиболее яркое воплощение в «Началах» Евклида. В то же время в современной математике под влиянием сенсационных открытий в информатике и теоретическом естествознании (система счисления Бергмана [9], коды золотой пропорции [4], закон структурной гармонии систем Эдуарда Сороко [2], новая геометрическая теория филлотаксиса Олега Боднара [10], квазикристаллы Дана Шехтмана (Нобелевская Премия по химии -2011) [5], фуллерены (Нобелевская Премия по химии -1996) [11], «золотые» геноматрицы Сергея Петухова [12], экспериментальное обнаружение симметрии «золотого сечения» в квантовой физике, 2010 г.) со всей остротой поставлен вопрос о **«Гармонизации Математики».** И этот процесс подтверждается огромным количеством публикаций на эту тему, в частности, публикацией книги автора **“The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science”** в одном из наиболее престижных международных издательств “World Scientific”[13], и книги армянского физика Гранта Аракеляна «**Теория ЛМФ и принцип золотого сечения»,** которая публикуется на сайте АТ [14].

Из проведенных рассуждений вытекает цель настоящей статьи – показать глубокую взаимосвязь между двумя важнейшими процессами, которые происходили в математике более двух тысячелетий назад и происходят в настоящее время: процессом **«Математизации Гармонии»,** который начался в Древней Греции в 6-5 в. до н.э (математика Пифагора и Платона) и завершился в 3 в. до н.э. написанием самого знаменитого математического сочинения античной эпохи – «Начал» Евклида, и процессом **«Гармонизации Математики»,** который начался во второй половине 20 в. (труды Николая Воробьева [15], Вернера Хогатта [16], Стефана Вайды [17] и других математиков-фибоначчистов) и продолжается до настоящего времени (книги Алексея Стахова [13] и Гранта Аракеляна [14]).

2. Математизация гармонии

2.1. *Что такое гармония?*

Как подчеркивает В.П. Шестаков в книге „Гармония как эстетическая категория” [18], *„в истории эстетических учений выдвигались самые разнообразные типы понимания гармонии. Само понятие „гармония” употреблялось чрезвычайно широко и многозначно. Оно обозначало и закономерное устройство природы и космоса, и красоту физического и нравственного мира человека и принципы строения художественного произведения, и закономерности эстетического восприятия”.*

Шестаков выделяет три основных понимания гармонии, сложившихся в процессе развития науки и эстетики:

(1) *Математическое понимание гармонии* или *математическая гармония.* В этом смысле гармония понимается как равенство или соразмерность частей с друг другом и части с целым. В Большой

Советской Энциклопедии мы находим следующее определение гармонии, которое выражает математическое понимание гармонии:

«Гармония – соразмерность частей и целого, слияние различных компонентов объекта в единое органическое целое. В гармонии получают внешнее выявление внутренняя упорядоченность и мера бытия».

(2) *Эстетическая гармония.* В отличие от математического понимания эстетическое понимание является уже не просто количественным, а качественным, выражающим внутреннюю природу вещей. Эстетическая гармония связана с эстетическими переживаниями, с эстетической оценкой. Наиболее четко этот тип гармонии проявляется при восприятии красоты природы.

(3) *Художественная гармония.* Этот тип гармонии связан с искусством. Художественная гармония – это актуализация принципа гармонии в материале самого искусства.

Самое главное, что вытекает из проведенных рассуждений, состоит в том, что «гармония» является универсальным понятием, которое имеет отношение не только к математике и науке, но и к искусству.

2.2. *Числовая гармония пифагорейцев*

Пифагорейцы впервые выдвинули мысль о гармоническом устройстве всего мира, включая сюда не только природу и человека, но и весь космос. Согласно пифагорейцам, ***«гармония представляет собою внутреннюю связь вещей, без которой космос не смог бы существовать».*** Наконец, согласно Пифагору, гармония имеет численное выражение, то есть, она интегрально связана с концепцией числа. Пифагорейцы создали учение о созидательной сущности числа. Аристотель в «Метафизике» отмечет именно эту особенность пифагорейского учения: «*Так называемые пифагорейцы, занявшись математическим науками, впервые двинули их вперед и, воспитавшись на них, стали считать их началами всех вещей ... Так как, следовательно, все остальное явным образом уподоблялось числам по всему своему существу, а числа занимали первое место во всей природе, элементы чисел они предположили элементами всех вещей и всю вселенную [признали] гармонией и числом*».

Пифагорейцы признавали, что форма мира должна быть гармонической, а все элементы мироздания («стихии») связаны с гармоническими фигурами. Пифагор учил, что из куба возникла земля, из пирамиды (тетраэдра) – огонь, из октаэдра – воздух, из икосаэдра – вода, из додекаэдра – сфера вселенной (то есть эфир).

С таким представлением о гармонии связано и знаменитое пифагорейское учение о «гармонии сфер». Пифагор и его последователи считали, что движение светил вокруг центрального мирового огня создает чудесную музыку, воспринимаемую не слухом, а разумом. **Учение о «гармонии сфер», о единстве микро- и макрокосмоса, учение о пропорциях – все эти идеи и составляют основу пифагорейского учения.**

Пифагорейское учение о числовой гармонии мироздания имеет огромную созидательную силу и оказало большое влияние на развитие всех последующих учений о природе и сущности гармонии, в частности, оно лежит в основе *Космологии Платона*. В своих работах Платон развивает пифагорейское учение, особенно подчеркивая космическое значение гармонии. Он твердо убежден в том, что мировую гармонию можно выразить в числовых пропорциях. Влияние пифагорейцев особенно прослеживается в «Тимее», где Платон вслед за пифагорейцами развивает учение о пропорциях и анализирует роль правильных многогранников («Платоновых тел»), из которых, по его мнению, Бог создал мир.

Следует отметить, что у пифагорейцев понятие «гармония» носит числовой, то есть, математический характер.

Главный вывод, который вытекает из учений Пифагора и Платона, состоит в том, что **гармония объективна, она существует независимо от нашего сознания и выражается в гармоничном устройстве всего сущего, начиная с космоса и заканчивая микромиром. Но если Гармония объективна, она должна стать предметом математического исследования.**

2.3. ***Вклад древних греков в развитие математики***

Для того, чтобы оценить вклад древних греков в развитие математики, обратимся к книге выдающегося математика 20 в. А.Н. Колмогорова «Математика в ее историческом развитии» [19]. Колмогоров пишет:

«Ясное понимание самостоятельного положения математики как особой науки, имеющей собственный предмет и метод, стало возможным только после накопления достаточно большого фактического материала и возникло впервые в Древней Греции в 6-5 вв. до н.э. Развитие математики до этого времени естественно отнести к ***периоду зарождения математики****, а к 6-5 вв. до н.э. приурочить начало* ***периода элементарной математики****. В течение этих двух первых периодов математического исследования имеют дело почти исключительно с весьма ограниченным запасом основных понятий, возникших еще на очень ранних ступенях исторического развития в связи с самыми простыми запросами хозяйственной жизни, сводившимися к счету предметов, измерению количества продуктов, площадей земельных участков, определению размеров отдельных частей архитектурных сооружений, измерению времени, коммерческим расчетам и т.п. Первые шаги механики и физики (за исключением отдельных исследований греческого ученого Архимеда (3 в. до н.э.), требовавших уже начатков исчисления бесконечно малых) могла еще удовлетвориться этим же запасом основных математических понятий. Единственной наукой, которая задолго до широкого развития математического изучения явлений природы в 17-18 вв. систематически предъявляла математике свои особые и очень большие требования, была астрономия, целиком обусловившая, например, раннее развитие тригонометрии. Запас понятий, с которыми имела дело математика до начала 17 в., составляет и до настоящего времени основу «элементарной математики», преподаваемой в начальной и средней школе».*

В этой цитате из книги А.Н. Колмогорова [19] в концентрированном виде сформулированы и выделены все основные проблемы развития математики на начальном этапе ее развития:

1. Выделено два важных периода в развитии математики на этапе ее становления как самостоятельной науки: **этап зарождения математики** (догреческий период) и **этап элементарной математики** (от греческой математики 6-5 вв. до н.э. и до начала 17 в.).

2. Выделены две главные практические задачи, которые стимулировали развитие математики на этапе ее зарождения. Это – **задача счета** и **задача измерения.**

3. Отмечена роль астрономии в развитии математики на этапе зарождения, в частности, в создании такой важной математической дисциплины как **тригонометрия.**

4. Подчеркнуто, что математика как особая наука, имеющая собственный предмет и метод, была создана в Древней Греции в 6-5 вв. до н.э.

5. Отмечено, что математические знания, полученные в **период элементарной математики** (от 6-5 вв. до н.э. и до начала 17 в.), составляют основу школьного математического образования.

В чем же состоит основной вклад древних греков в развитие математики? Оценивая математическое наследие древних греков, можно выделить три важнейших математических достижения, полученные древними греками:

1. Создание «элементарной теории чисел»
2. Открытие «несоизмеримых отрезков»
3. Создание грандиозного плана математического исследования природы.

Рассмотрим эти достижения более детально.

2.4. ***Пифагрейская теория чисел***

Пифагорейская теория чисел имела качественный характер. Числа у Пифагора считались не просто абстрактными заменителями реальных вещей, но живыми сущностями, отражающими свойства пространства, энергии или звуковой вибрации. Главная наука о числе, арифметика, была неразрывно связана с геометрией и потому числа, соотносящиеся с правильными геометрическими фигурами, назывались *фигурными*. Пифагорейцы изучали *треугольные, квадратные, пятиугольные,*

дружественные и *совершенные числа*. Пифагорейцы также изучали *простые числа*, и их главным математическим достижением в этой области является доказательство бесконечности простых чисел. Особую роль в учении пифагорейцев играли первые числа натурального ряда 1,2,3,4, сумма которых образовывала *тетраксис* или *четверицу*: 1+2+3+4=10. Морис Клайн пишет [3]:

«Пифагорейцы считали, что все объекты в природе состоят из четверок, таких, как четыре геометрических элемента: точка, линия, поверхность и тело. Впоследствии Платон придавал особое значение четверке материальных элементов: земле, воздуху, огню и воде.

Сумма чисел, образующих тетраксис, равна десяти, поэтому десять считалась идеальным числом и символизировало Вселенную».

Общий итог пифагорейскому отождествлению числа и реального мира подвел Аристотель в своей «Метафизике» (цитата из [3]):

«В числах пифагорейцы усматривали много сходного с тем, что существует и возникает, - больше, чем в огне, земле и воде ...; так как далее они видели, что свойства и соотношения, присущие гармонии, выразимы в числах; так как, следовательно, им казалось, что все остальное по природе своей явно уподобляемо числам и что числа – первое во всей природе, то они предположили, что элементы чисел суть элементы всего существующего и что все небо есть гармония и число».

Из высказывания Аристотеля непосредственно вытекает, что теоретико-числовые исследования пифагорейцев тесно связаны с их исследованиями в области гармонии, так как «*свойства и соотношения, присущие гармонии, выразимы в числах*».

2.5. *Несоизмеримые отрезки и первый кризис в основаниях математики*

Наиболее известным геометрическим открытием Пифагора считается открытие *несоизмеримых отрезков*, то есть, обнаружение таких отрезков, отношение которых не может быть выражено с помощью отношения целых чисел. Считается, что это открытие они сделали при изучении отношения диагонали к стороне квадрата. Пифагорейцы обнаружили, что отношение диагонали к стороне квадрата не выражается в виде отношения двух натуральных чисел, а других чисел древние греки не знали. Выражаясь языком алгебры, пифагорейцы доказали, что уравнение $m^2 = 2n^2$ не имеет решений во множестве рациональных чисел, что потребовало введения чисел новой природы – *иррациональных*.

Открытие несоизмеримых величин сначала “вызвало удивление” (Аристотель). Пифагорейцы знали только положительные целые и дробные числа. Следуя своей философской установке, они, по сути дела, считали, что каждая вещь может быть охарактеризована положительным целым или дробным числом, которое “выражает сущность” этой вещи. На деле это означало, что геометрия строилась на базе арифметики. Открытие несоизмеримости опрокидывало всю философскую систему пифагорейцев, поскольку они были убеждены, что *«элементы чисел суть элементы всего существующего и что все небо есть гармония и число»* (Аристотель). Чтобы выйти из затруднительного положения, пифагорейцы стали представлять величины не арифметически – числами, а геометрически – отрезками. Так возникла *геометрическая алгебра*.

Открытие несоизмеримых отрезков, которое привело к открытию *иррациональных чисел*, стало поворотным этапом в развитии математики. В настоящее время считается, что это открытие является одним из наиболее значительных математических открытий за всю историю математики и что оно стоит в одном ряду с открытием дифференциального и интегрального исчисления Ньютоном и Лейбницем в 17 в. или открытием неевклидовой геометрии Лобачевским в 19 в. Таким образом, преодоление первого кризиса, связанного с открытием «несоизмеримых отрезков», завершилось чрезвычайно успешно для математики, потому что в математику были введены *иррациональные числа*, которые вместе с *натуральными числами* лежат в ее основе.

2.6. ***Математическое учение о природе***

Согласно мнению Мориса Клайна [3], главный вклад древних греков, *«оказавший решающее влияние на всю последующую культуру, состоял в том, что они взялись за изучение законов природы»***.**

И далее ознакомимся с некоторыми мыслями Мориса Клайна по этому поводу [3]:

«Обладая беспредельной любознательностью и незаурядным мужеством, греки ставили вопросы (и находили ответы на них), которые служили пищей для серьезных размышлений и решались мыслителями высочайшего ранга. Лежит ли в основе всего, что происходит во Вселенной, некий единый план? Обязаны ли растения, животные, люди, планеты, свет, звук и т.д. своим появлением игре случая или они являются частью какого-то грандиозного плана? Обладая богатым воображением – что способствовало созданию нового взгляда на мир, - ***греки выработали концепцию Вселенной, ставшей основой на всех последующих этапах развития европейской мысли»***.

«Решающим шагом, позволившим рассеять ореол таинственности и мистицизма, окружавший явления природы, и «навести порядок» в их кажущемся хаосе, стало применение математики. Этот шаг потребовал от греков не меньшей прозорливости, интуиции и глубины, чем вера в силу человеческого разума. ***План, по которому построена Всепленная, имеет математический характер – и только математика позволяет человеку открыть этот план»***.

«Даже нашего беглого обзора взглядов тех философов, которые сформировали духовный мир древних греков, достаточно, чтобы понять главное: все они подчеркивали необходимость изучения природы для понимания и оценки лежащей в основе всего сущего реальности. ***Кроме того, со времен пифагорейцев почти все философы утверждали, что природа устроена на математических основах.*** *К концу классического периода окончательно сформировалось учение о природе, основанной на математических принципах, и начался планомерный поиск математических законов. Хотя это учение отнюдь не предопределило все последующее развитие математики, получив широкое распространение, оно оказало влияние на величайших математиков, в том числе и на тех, кто не разделял его.* ***Из всех достижений умозрительных построений древних греков подлинно новаторской была концепция космоса, в котором все подчинено математическим законам, постигаемым человеческим разумом»***.

Основной вывод, вытекающий из приведенных выше высказываний Мориса Клайна [3], состоит в том, что древние греки предложили **новаторскую концепцию космоса, в котором все подчинено математическим законам**. Возникает вопрос: когда эта концепция была разработана? Ответ на этот вопрос дает Морис Клайн [3]:

«Греки преисполнились решимости доискаться до истин и, в частности, до истин о математических основах природы. Как следует приступить к поиску истин и как при этом гарантировать, что поиск действительно приводит к истинам? Греки предложили «план» такого поиска. Хотя он создавался постепенно на протяжении нескольких веков (VI-III вв. до н.э.), в истории науки расходятся во мнении относительно того, когда и кем этот план был впервые задуман, ***к III в. до н.э. план поиска истин» был доведен до совершенства»***.

Таким образом, по мнению Клайна, новаторская концепция космоса, основанного на математических законах, была разработана древними греками в период с VI до III вв. до н.э. Но согласно утверждению А.Н. Колмогорова [19], в этот же период в Древней Греции *«возникает математика как самостоятельная наука с ясным пониманием своеобразия ее метода и необходимости систематического развития ее основных понятий и предложений в достаточно общей форме»*.

Но тогда возникает вопрос: существовала ли какая-либо взаимосвязь между процессом создания *математического учения о природе*, что считается главным достижением древнегреческой науки, и процессом создания *математики*, которые протекали в Древней Греции в один и тот же период. Или это разные процессы? Оказывается, что такая связь, безусловно, существовала. Более того. Можно утверждать, что эти процессы фактически совпадали, то есть, математика, созданная

древними греками, и их учение о природе, основанное на математических принципах, - это одно и то же. И наиболее ярким подтверждением этого являются «Начала» Евклида, написанные в III в. до н.э.

2.7. ***Количественное и геометрическое выражение гармонии Мироздания***

Греки сделали первую попытку выразить гармонию в числовой и геометрической форме, то есть, «математизировать гармонию». И это им блестяще удалось. Для количественного и геометрического выражения гармонии задолго до «Начал» Евклида они пользовались *«золотым сечением»* и *«Платоновыми телами»*.

В Древней Греции не использовался термин «золотое сечение», но суть дела от этого не меняется. Древние греки использовали термины «сечение» и «деление отрезка в крайнем и среднем отношении». Наиболее ярко роль «золотого сечения» в античной науке подчеркнута в высказываниях двух гениев – выдающегося астронома и математика **Иоганна Кеплера** и гениального российского философа **Алексея Лосева**.

Иоганн Кеплер:

«В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».

Высказывание Кеплера поднимает «золотое сечение» на уровень «теоремы Пифагора» - одной из важнейших теорем геометрии. И об этом не следует забывать современным математикам и создателям школьных учебников по геометрии. В результате одностороннего подхода к математическому образованию каждый школьник знает «Теорему Пифагора», но имеет весьма смутное представление о «золотом сечении» - втором «сокровище геометрии». Большинство школьных учебников по геометрии восходят к «Началам» Евклида. Но тогда почему в большинстве из них отсутствует упоминание о «золотом сечении», которое впервые описано именно в «Началах» Евклида?

Многие математики считают сравнение «Теоремы Пифагора» с «золотым сечением» весьма большим преувеличением для «золотого сечения». Однако, оценивая приведенное выше высказывание Кеплера, не следует забывать, что Кеплер был не только гениальным астрономом, но (в отличие о тех математиков, которые его критикуют) также великим математиком. Поэтому к высказыванию Кеплера необходимо относиться как к высказыванию гения, имеющего «пророческое» значение для «золотого сечения». Именно Кеплер одним из первых осознал значение «золотого сечения» для развития науки и математики и в своем высказывании он четко выразил свое отношение к «золотому сечению»!

Алексей Лосев:

«Космос античным мыслителям периода зрелой классики представляется не просто некоей отвлеченной неопределенностью, (в таком случае он был бы только чистой мыслью), но совершенно живым и единораздельным телом, содержащим в себе нерушимую цельность, несмотря на бесконечные различия всех его проявлений. С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - золотого сечения (то есть, целое относится в нем к большей части, как большая часть к меньшей). Этому закону, кстати сказать, древние греки подчиняли и свои архитектурные сооружения. Их систему космических пропорций нередко в литературе изображают как курьезный результат безудержной и дикой фантазии. В такого рода объяснениях сквозит антинаучная беспомощность тех, кто это заявляет. Однако понять данный историко-эстетический феномен можно только в связи с целостным пониманием истории, то есть, используя диалектико-материалистическое представление о культуре и ища ответа в особенностях античного общественного бытия».

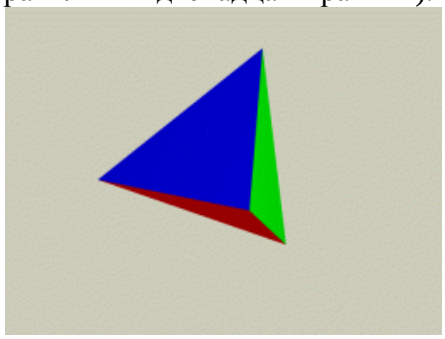
В этом высказывании **Алексей Лосев** в достаточно убедительной форме сформулировал «золотую» парадигму античной космологии. В ее основе лежат важнейшие идеи античной науки, которые в современной науке иногда трактуются как «курьезный результат безудержной и дикой фантазии». Прежде всего – это **пифагорейская идея о числовой гармонии мироздания** и **космология Платона**, основанная на *Платоновых телах*. Обратившись к геометрической структуре мироздания и арифметическим отношениям, выражающим гармонию, пифагорейцы предвосхитили возникновение математического естествознания, которое начало стремительно развиваться в 20-м веке. Идея Пифагора и Платона о всеобщей гармонии мироздания оказалась бессмертной.

Морис Клайн пишет [3]:

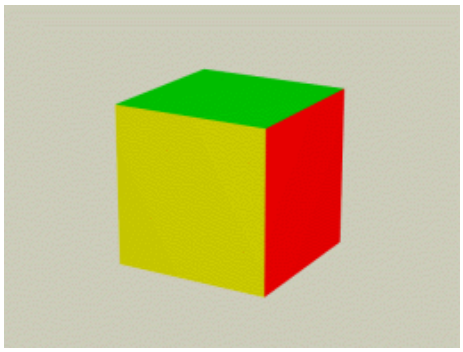
«Подлинной целью греков было исследование природы. Этой цели служило все – даже геометрические истины высоко ценились лишь постольку, поскольку они были полезны при изучении физического мира. Греки понимали, что в структуре Вселенной воплощены геометрические принципы, первичным компонентом которых является пространство. Именно поэтому исследование пространства и пространственных фигур явилось существенным вкладом в изучение природы. Геометрия входила составной частью в более широкую программу космологических исследований... Подобные факты и более полное знание того, как происходило развитие математики в последующие времена, позволяют утверждать, что у греков к постановке математических проблем приводили естественно-научные исследования и что математика была неотъемлемой частью изучения природы».

И не случайно, что именно древние греки при изучении гармонии взяли на вооружение *правильные выпуклые многогранники*, получившие название *Платоновых тел*.

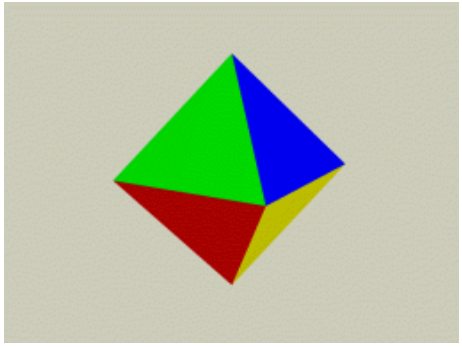
Как утверждает Эдуард Сороко [2], *«представление о «сквозной» гармонии бытия древние греки связывали с ее воплощением в Платоновых телах»*. Другими словами, *Платоновы тела*, получившие широкое распространение в античном мире, считались геометрическими выразителями гармонии Мироздания. Существует только пять таких многогранников (этот факт был доказан в «Началах» Евклида): *тетраэдр* (правильный четырехгранник), *гексаэдр* или *куб* (правильный шестигранник), *октаэдр* (правильный восьмигранник), *додекаэдр* (правильный двенадцатигранник) и *икосаэдр* (правильный двенадцатигранник).



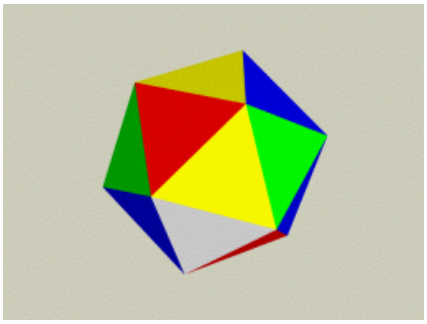
(а)

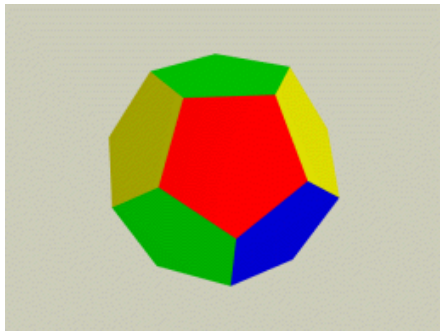


(б)



(в)





(г) (д)

Рисунок 1. Платоновы тела: (а) тетраэдр («Огонь»), (б) гексаэдр или куб («Земля»), (в) октаэдр («Воздух»), (г) икосаэдр («Вода»), (д) додекаэдр («Эфир» или «Вселенский разум»)

Я не буду описывать замечательные геометрические свойства *Платоновых тел*, отсылая интересующихся читателей к статье [20].

Платоновы тела являются той ключевой идеей, которая привела к новому подходу к анализу «Начал» Евклида, изложенному в работах [13,21,22].

2.8. *Гипотеза Прокла: новый взгляд на «Начала» Евклида*

В настоящее время каждый школьник знает, кто такой Евклид, написавший самое значительное математическое сочинение античной эпохи – «Начала» Евклида. Это научное произведение создано им в III в. до н. э. и содержит основы античной математики: элементарную геометрию и теорию чисел, алгебру, теорию пропорций и отношений, теорию иррациональностей, методы определения площадей и объемов и др. Евклид подвел в этом сочинении итог трехсотлетнему развитию греческой математики и создал прочный фундамент для дальнейшего развития математики.

Возникает вопрос: с какой целью Евклид написал свои «Начала»? На первый взгляд, кажется, что ответ на поставленный вопрос очень простой: главная цель Евклида состояла в том, чтобы изложить основные достижения греческой математики за 300 лет, предшествующих Евклиду, используя «аксиоматический метод» изложения материала. Действительно, «Начала» Евклида являются главным трудом древнегреческой науки, посвященным аксиоматическому построению геометрии и математики. Такой взгляд на «Начала» наиболее распространен в современной математике.

Однако, кроме «аксиоматической» точки зрения существует и другая точка зрения на мотивы, которыми руководствовался Евклид при написании «Начал». Эта точка зрения высказана греческим философом и математиком **Проклом Диадохом** (412-485), одним из первых комментаторов «Начал».

Среди математических сочинений Прокла наиболее известным является его *«Комментарий к первой книге «Начал» Евклида»*. В этом *Комментарии* он выдвигает следующую необычную гипотезу, которую называют *гипотезой Прокла*. Суть ее состоит в следующем. Как известно, 13-я, то есть, заключительная книга «Начал», посвящена изложению теории пяти правильных многогранников, которые играли главенствующую роль в «Космологии Платона» и в современной науке известны под названием *Платоновых тел*. Именно на это обстоятельство и обращает внимание Прокл. Как подчеркивает Эдуард Сороко [2], по мнению Прокла, Евклид *«создавал «Начала» якобы не с целью изложения геометрии как таковой, а чтобы дать полную систематизированную теорию построения пяти «Платоновых тел», попутно осветив некоторые новейшие достижения математики»*.

Анализ *гипотезы Прокла* содержится во многих западных книгах по истории математики. Рассмотрим некоторые из них [23-25]. В книге [23] утверждается: *«Согласно Проклу, главная цель «Начал» состояла в том, чтобы изложить построение так называемых Платоновых тел»*.

В книге [24] эта идея получает дальнейшую конкретизацию: *«Прокл, еще раз упоминая всех предшествующих математиков Платоновского кружка, говорит: "Евклид жил позже, чем математики Платоновского кружка, но раньше, чем Эратосфен и Архимед, ... Он принадлежал к школе Платона и был хорошо знаком с философией Платона и именно поэтому он поставил главной целью своих «Начал» построение так называемых Платоновых тел»*.

Этот комментарий важен для нас тем, что в нем обращается внимание на связь Евклида с Платоном. Евклид полностью разделял философию Платона и его космологию, основанную на *Платоновых телах*; именно поэтому он и поставил главной целью своих «Элементов» создание геометрической теории *Платоновых тел*.

Огромное влияние «Начала» Евклида и «гипотеза Прокла» оказали на Иоганна Кеплера. Уже в первой своей книге «Misterium Cosmographicum» («Космографическая тайна»), написанной в 1596 г., Кеплер предлагает весьма необычную модель Солнечной системы, основанную на *Платоновых телах,* известную под названием *«Космический кубок»* (Рис.2).

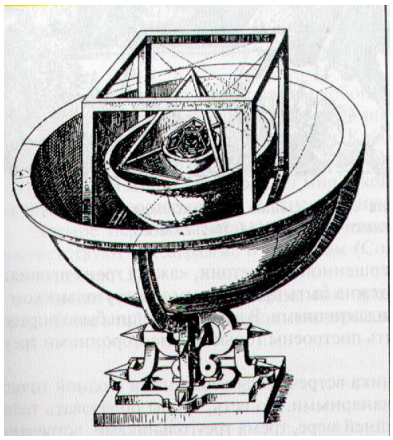


Рисунок 2. «Космический кубок» – Кеплерова модель Солнечной системы

Craig Smorinsky в книге [25] обсуждает влияние идей Платона и Евклида на Иоганна Кеплера: «*Кеплеровский проект в Mysterium Cosmographicum состоял в том, чтобы дать "истинные и совершенные причины для чисел, величин и периодических движений небесных орбит". Совершенные причины должны основываться на простых принципах математического порядка, который Кеплер нашел в Солнечной системе, используя многочисленные геометрические демонстрации. Общая схема его модели была взята Кеплером из Платоновского Тимея, но математические соотношения для Платоновых тел (пирамида, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) были взяты Кеплером из трудов Евклида и Птолемея. При этом Кеплер следовал Проклу в том, что "главная цель Евклида состояла в том, чтобы построить геометрическую теорию так называемых Платоновых тел". Кеплер полностью был очарован Проклом, которого он часто цитирует и называет «пифагорейцем»*.

Из этой цитаты мы можем сделать вывод, что Кеплер использовал *Платоновы тела* для создания своего *Космического кубка*, но при этом все математические соотношения для *Платоновых тел* были взяты им из 13-й книги «Начал», то есть, он объединил в своих исследованиях *Космологию Платона* с *Началами Евклида*. При этом он полностью верил в *гипотезу Прокла* о том, что первичной целью «Начал» было дать завершенную геометрическую теорию *Платоновых тел,* которые и были использованы Кеплером в его геометрической модели Солнечной системы (Рис.2).

В 1884 г. выдающийся немецкий математик Феликс Клейн опубликовал книгу «*Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени*» [6], посвященную геометрической теории икосаэдра. Книга написана под влиянием идей Евклида о роли Платоновых тел в развитии науки и математики.

В первой части книги определено и объяснено место *икосаэдра* в математике. Согласно Ф. Клейну, ткань математики широко и свободно разбегается листами отдельных теорий. Но есть объекты, в которых сходятся несколько листов, - своеобразные точки ветвления. Их геометрия связывает листы и позволяет охватить общематематический смысл разных теорий. Именно таким математическим объектом, по мнению Клейна, является *икосаэдр*. Клейн трактует икосаэдр как математический объект, из которого расходятся ветви пяти математических теорий: *геометрия, теория Галуа, теория групп, теория инвариантов и дифференциальные уравнения.*

Таким образом, главная идея Клейна чрезвычайно проста: **«каждый уникальный геометрический объект так или иначе связан со свойствами икосаэдра».**

В чем же состоит значение идей выдающегося математика с точки зрения *«гипотезы Прокла»*? Прежде всего, в качестве объекта, объединяющего «главные листы» математики выбрано «тело Платона» - *икосаэдр*, основанный на золотом сечении. Отсюда естественным образом вытекает мысль, что именно золотое сечение и является той главной математической идеей, которая, согласно Клейну, может объединить всю математику. Но ведь эта идея есть ни что иное, как развитие идей Платона (см. выше высказывание Алексея Лосева). Следует заметить, что «икосаэдрическая идея Феликса Клейна» по существу содержит в себе зачатки *«Гармонизации Математики»*.

Современники Клейна не сумели по достоинству понять и оценить революционный характер «икосаэдрической» идеи Клейна.

Значение «икосаэдрической» идеи Клейна было понято только через 100 лет, то есть, только в 1984 г., когда израильский физик Дан Шехтман опубликовал статью, подтверждающую существование специальных сплавов (названных квазикристаллами), обладающих так называемой «икосаэдрической» симметрией, то есть симметрией 5-го порядка, что строго запрещено классической кристаллографией.

Таким образом, еще в 19 в. гениальная интуиция Феликса Клейна привела его к мысли о том, что одна из древнейших геометрических фигур – *икосаэдр* – является главной геометрической фигурой математики. Тем самым Клейн в 19 в. вдохнул новую жизнь в развитие «гипотезы Прокла» и «додекаэдро-икосаэдрического представления» о структуре Вселенной, последователями которого были великие ученые и философы: Платон, построивший свою космологию на основе правильных многогранников, Евклид, посвятивший свои «Начала» изложению теории *Платоновых тел*, Иоганн Кеплер, использовавший *Платоновы тела* при создании своего *Космического кубка*, оригинальной геометрической модели Солнечной системы.

2.9. *С какой целью Евклид ввел «золотое сечение» в своих «Началах»?*

В «Началах» Евклида мы встречаемся с задачей, которая в дальнейшем сыграла большую роль в развитии науки. Речь идет о «делении отрезка в крайнем и среднем отношении». «Начала» Евклида переведены на многие языки мира. Наиболее авторитетным изданием сочинения Евклида на русском языке являются «Начала» в переводе и с комментариями Д.Д. Мордухай-Болтовского [26-28]. Интересно ознакомиться со следующими комментариями Мордухай-Болтовского, касающимися «золотого сечения»:

«Теперь посмотрим, какое место занимает золотое сечение в «Началах» Евклида. Прежде всего, нужно отметить, что оно встречается в двух формах, разница между которыми почти неощутима для нас, но была очень существенной в глазах греческого математика V-VI-го веков до н.э. Первая форма, прототип которого мы видели в Египте, является в Книге II «Начал», а именно в Предложении 11 вместе с вводящими его предложениями 5 и 6; здесь золотое сечение определяется как такое, в котором квадрат, построенный на большем отрезке, равняется прямоугольнику на всей прямой и меньшем отрезке. Вторую форму мы имеем в определении 3 книги VI, где золотое сечение определяется пропорцией – как вся прямая к большему отрезку, так и больший отрезок к меньшему - и называется делением в крайнем и среднем отношении; в этой форме золотое сечение могло быть известным только со времен только со времен Евдокса. Интересно отметить, что предложениям 5, 6 и 11 книги II соответствуют предложения 27, 28 и 30 – шестой. Затем, предложения 5 и 6

книги II разорвали связь между предложениями 4 и 7, соответствующим нашим формулам квадратов суммы и разности; «та же фигура», о которой упоминается в предложении 7, строится в 4-м.

В книге XIII золотое сечение является в обеих указанных формах, а именно в первой форме в предложениях 1-5 и во второй – в предложениях 8-10. Правда в формулировке и тексте доказательства 1-5 предложений встречаются слова «в крайнем и среднем отношении», в доказательствах есть некоторые следы пользования пропорциями, но при внимательном чтении нетрудно заметить, что все эти места не связаны органически с общим текстом и легко из него могут быть исключены; все доказательство по существу ведется исходя из равенства на большем отрезке прямоугольнику ... Более того, предложение 2 книги XIII по существу равнозначно геометрическому построению предложения 11 книги II.

Все это позволяет думать, что предложения 4, 7, 8 книги II и предложения 1-5 книги XIII представляют остатки одного из самых древних в истории греческой геометрии документов, восходящего по всей вероятности к первой половине V века и возникшего в пифагорейской школе на основании того материала, который был привезен из Египта. Сравнительную древность этого документа можно установить из того обстоятельства, что предложения 4 и 7 книги II служат в ней для доказательства обобщенной теоремы Пифагора [квадрат стороны против острого и тупого угла (предложения 12 и 13 книги II)], которая, несомненно, была известна Гиппократу Хиосскому ... Несмотря на то, что первые пять предложений книги XIII составляют одно целое с рядом предложений книги II , нужно отметить, что при непосредственном использовании предложений книги II (в особенности предложения 11, которое и дает построение золотого сечения) доказательства были бы в отдельных случаях значительно проще»

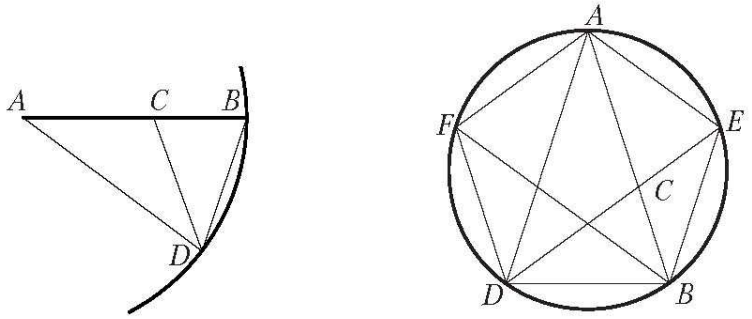
Мы можем сделать следующие выводы из этих комментариев:

1. Во-первых, в «Началах» Евклида имеется не одна (Предложение II.11), а, по крайней мере, две различные формулировки задачи о «золотом сечении».

2. В задаче о «золотом сечении» Мордухай-Болтовский видит «египетский след» и явно намекает на Пифагора, который 22 года провел в Египте и привез оттуда огромное количество египетских математических знаний, включая «теорему Пифагора» и «золотое сечение». Отсюда вытекает, что Мордухай-Болтовский не сомневался в том, что не только Евклид, но и Пифагор (а отсюда следует, что и Платон, который был пифагорейцем), а также и древние египтяне знали о «золотом сечении» и широко его использовали (вспомним о «Пирамиде Хеопса», «панелях Хеси-Ра» и др.).

Таким образом, согласно Мордухай-Болтовскому «золотое сечение» буквально «пронизывает» «Начала» Евклида, начиная от Книги 2 и заканчивая Книгой 13. Возникает вопрос: почему Евклид уделяет такое большое внимание «золотому сечению»? Для ответа на этот вопрос мы вновь возвратимся к *Платоновым телам* (Рис. 1). Мы знаем, что гранями *Платоновых тел* могут быть только три вида правильных многоугольников: *правильный треугольник* (тетраэдр, октаэдр, икосаэдр), *квадрат* (куб) и *правильный пятиугольник* или *пентагон* (додекаэдр). Для того чтобы сконструировать *Платоновы тела,* мы должны прежде всего уметь геометрически (то есть, с помощью линейки и циркуля) построить грани Платоновых тел. У Евклида не было никаких проблем с построением *правильного* или *равностороннего треугольника* и *квадрата*, однако он столкнулся с определенными трудностями при конструировании *правильного пятиугольника* или *пентагона.*

Именно для этой цели Евклид в Книге II ввел «золотое сечение», представленное в «Началах» в двух формах. Используя «золотое сечение», Евклид вначале конструирует *«золотой» равнобедренный треугольник,* чьи углы при основании равны удвоенному углу при вершине (Рис. 3-*а*), а затем с использованием *«золотого» равнобедренного треугольника* он конструирует *пентагон* (Рис.3-б).



(*а*) (*б*)

Рисунок 3. «Золотой» равнобедренный треугольник (*а*) и пентагон (*б*)

А от пентагона – один шаг к геометрическому построению *додекаэдра* – одного из важнейших правильных многогранников. И тот факт, что *додекаэдр* оказался связанным с «золотым сечением», придавал этой фигуре, которая символизировал в космологии Платона «Эфир» или «Вселенский разум», особое очарование.

2.10. ***Новый взгляд на «Начала» Евклида и происхождение математики***

Как упоминалось выше, А.Н. Колмогоров в книге [19] выделил две главные, то есть, «ключевые» проблемы, которые стимулировали развитие математики на этапе ее зарождения - **проблему счета** и **проблему измерения.** Однако, из «гипотезы Прокла» вытекает еще одна «ключевая» проблема – **проблема гармонии,** которая была связана с «Платоновыми телами» и «золотым сечением» - одним из важнейших математических открытий античной математики (Предложение II.11 «Начал» Евклида). Именно под влиянием этой идеи создавалась вся древнегреческая математики и эта проблема была положена Евклидом в основу «Начал», главной целью которых было создание геометрической теории *Платоновых тел*, которые в «космологии Платона» выражали гармонию Мироздания. Эта идея приводит к новому взгляду на историю и возникновение математики, изображенному на Рис. 4.

Подход, демонстрируемый с помощью Рис.4, основан на следующих рассуждениях. Уже на этапе зарождения математики было сделано ряд важных математических открытий, которые фундаментально повлияли на развитие математики и всей науки в целом. Важнейшими из них являются:

1. **Позиционный принцип представления чисел,** открытый вавилонскими математиками во 2-м тысячелетии до н.э. и воплощенный ими в Вавилонской 60-ричной системе счисления. Это важное математическое открытие лежит в основе всех последующих позиционных систем счисления, в частности, десятичной системы и двоичной системы - основы современных компьютеров. Это открытие, в конечном итоге, привело к формированию понятия **натурального числа –** важнейшего понятия, лежащего в основе математики.

2. **Доказательство существования несоизмеримых отрезков.** Это открытие, сделанное в научной школе Пифагора, привело к переосмысливанию ранней пифагорейской математики, в основе которой лежал «принцип соизмеримости величин», и к введению **иррациональных чисел** – второго (после натуральных чисел) фундаментального понятия математики. В конечном итоге, эти два понятия (натуральные и иррациональные числа) и были положены в основу «Классической Математики».

Рисунок 4. «Ключевые» проблемы античной математики и новые направления в математике, теоретической физике и информатике

3. **Деление отрезка в крайнем и среднем отношении («золотое сечение») и *Платоновы тела*.** «Золотое сечение» было введено Евклидом с целью создания полной геометрической теории «Платоновых тел» (в частности, додекаэдра), изложению которых посвящена заключительная (XIII-я) книга «Начал» Евклида. Как известно, «золотое сечение» стало своеобразным каноном древнегреческого искусства (см. приведенное выше высказывание Алексея Лосева) и затем широко использовалось в искусстве Возрождения, а также в искусстве 19-го и 20-го веков. *Платоновы тела* стали широко известны в науке после их использования Платоном в своем учении о строении материи. В 13 веке знаменитый итальянский математик Фибоначчи вводит важную числовую последовательность – *числа Фибоначчи*, непосредственно связанные с «золотым сечением». Математическая теория чисел Фибоначчи получила дальнейшее развитие в работах французских математиков 19-го века Бине (*«формулы Бине»*) и Люка (*«числа Люка»*). Во второй половине 20-го века эта теория получила развитие в работах советского математика Николая Воробьева [15], американского математика Вернера Хогатта [16] и английского математика Стефана Вайды [17]. Развитие этого направления, в конечном итоге, привело к возникновению «Математики Гармонии» [13] - нового междисциплинарного направления современной науки, которое имеет отношение к современной математике, компьютерной науке, экономике и, а также ко всему теоретическому естествознанию

Сформулированный выше подход (Рис. 4) приводит к выводу, который может оказаться неожиданным для многих математиков. Оказывается, что **параллельно с «Классической Математикой» в науке, начиная с древних греков, развивалась еще одно математическое направление – «Математика Гармонии», которая, как и классическая математика, восходит к «Началам» Евклида, но акцентирует свое внимание не на «аксиоматическом подходе», а на геометрической «задаче о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» («золотом сечении») и на теории правильных многогранников, изложенной в XIII-й книге «Начал» Евклида.** И в развитии «Математики Гармонии» в течение нескольких тысячелетий принимали участие выдающиеся мыслители, ученые и математики: **Пифагор, Платон, Евклид, Фибоначчи, Пачоли, Кеплер, Кассини, Бине, Люка, Клейн**, а в 20-м веке – известные математики **Воробьев, Хоггатт и Вайда**.

2.11. ***О введении термина «математика гармонии»***

В конце 20 в. для обозначения математического учения о природе, созданного древними греками, был введен термин “the mathematics of harmony” (математика гармонии). Следует отметить, что этот термин выбран очень удачно, потому что он отражал главную идею античной науки – «Математизация Гармонии». Впервые этот термин был введен в небольшой статье “Harmony of spheres”, помещенной в **The Oxford dictionary of philosophy** [29]. Проанализируем эту статью.

«Гармония сфер. *В этой доктрине, часто приписываемой Пифагору, происходит объединение математики, музыки и астрономии. Ее сущность состоит в том, что небесные тела, будучи огромными объектами, при своем движении должны производить музыку. Совершенство небесного мира требует, чтобы эта музыка была гармоничной, она скрыта от наших ушей только потому, что всегда присутствует.* ***Математики гармонии была центральным открытием огромного значения для пифагорейцев».***

Таким образом, понятие “the mathematics of harmony” («математика гармонии») в этой статье ассоциируется с **«гармонией сфер»,** которая называлась также **«гармонией мира»** (harmonia mundi) или **мировой музыкой** (лат. musica mundana). Гармония сфер представляет собой античное и средневековое учение о музыкально-математическом устройстве космоса, восходящее к пифагорейской и платонической философской традиции.

Дальнейшее развитие «учение о гармонии сфер» получило в работах **Иоганна Кеплера**, в частности, в книге «Гармония мира». Русский биограф Кеплера **Е.А. Предтеченский** пишет: *«Царящая в мире чудная гармония понималась Кеплером не в отвлеченном только смысле благоустройства, а звучала в его поэтической душе настоящей музыкой, которую мы могли бы понять не иначе, как совершенно войдя в круг его идей и проникшись его могучим энтузиазмом к дивному устройству мира и пифагорейским благоговением перед числовыми отношениями. В самом деле, разве не удивительно,что "прекрасное" для слуха зависит от строгого численного соотношения, например, между длинами струн, производящих звуки, — соотношения, открытого Пифагором? Но в Кеплере, несомненно, обитала часть души Пифагора, и мудрено ли, что он усматривал числовые соотношения в открытом и объясненном им планетном космосе? Чтобы понять, насколько разнообразно содержание этой книги, достаточно сказать, что Кеплер касался в ней и социального вопроса, видя его решение в* гармоническом *распределении земных благ...»*

Из своего открытия, сделанного в книге «Гармония мира», Кеплер делает следующий вывод: *«Таким образом, небесные движения суть не что иное, как ни на миг не прекращающаяся многоголосая музыка (воспринимаемая не слухом, но разумом)».*

В работе советского астронома Бутусова «Золотое сечение в Солнечной системе» [30] идеи пифагорейцев и Кеплера о «музыке сфер» приобретают новое звучание и весьма реальное содержание.

Еще одно упоминание о «математике гармонии» мы встречаем в книге **Vladimir Dimitrov. A new kind of social science. Study of self-organization of human dynamics**, опубликованной в 2005 г. [31]. Приведем цитату из этой книги:

«Гармония была ключевой концепцией греков, с помощью которой осуществлялась связь трех значений. Его корневое значение было ***aro****, соединение, гармония было то, что соединяет. Другое значение было пропорция, баланс вещей, который позволял простое соединение. Качество соединения и пропорции позже стали рассматриваться в музыке и других видах искусства.*

Предпосылка для гармонии для греков была выражена во фразе "ничего лишнего". Эта фраза содержала таинственные положительные качества, которые стали объектом исследования лучших умов. Мыслители, такие как Пифагор, стремились раскрыть тайну гармонии как нечто невыразимое и освещенное математикой. ***Математики гармонии, изученная древними греками, по-прежнему является вдохновляющей моделью для современных ученых.*** *Решающее значение для этого имело открытие количественного выражение гармонии, во всем удивительном разнообразии и сложности природы, через золотое сечение Ф (фи):* $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$ *, что приблизительно равно 1,618. Золотое сечение описано Евклидом в Книге V его «Начал»: "Говорят, что прямая линия, может быть разделена в крайнем и среднем отношении, когда, вся линия так относится к большей части, как большая часть к меньшей".*

В книге [31] понятие “the mathematics of harmony” («математика гармонии») непосредственно ассоциируется с «золотым сечением» - важнейшим математическим открытием античной науки в области гармонии, которое в тот период называлось «делением отрезка в крайнем и среднем отношении».

3. Математика. Утрата определенности и кризис в математике

3.1. *Канторовская теория множеств и современный кризис в основаниях математики*

Георг Кантор (1845-1918) — немецкий математик. В 1873 году Георг Кантор ввёл понятие произвольного числового множества, а затем и общее понятие множества — самого абстрактного понятия в математике. С помощью взаимно-однозначных отображений он ввёл понятие равномощности множеств, потом определил сравнение мощностей на больше-меньше и, наконец, классифицировал множества по величине их мощности: конечные, счётные, континуальные и т. д.

На первых порах теория множеств встретила у многих математиков доброжелательный приём. Однако последующие события показали, что привычная логика не годится при исследовании бесконечности. Постепенно теория Кантора начала восприниматься настолько нелогичной, парадоксальной и даже шокирующей, что натолкнулась на резкую критику со стороны математиков-современников, в частности, **Леопольда Кронекера** и **Анри Пуанкаре**; позднее — **Германа Вейля** и **Лёйтзена Брауэра**. Критика трудов Кантора была порой очень агрессивна. Леопольд Кронекер, испытывавший личную неприязнь к Кантору, назвал его «научным шарлатаном», «отступником» и «развратителем молодёжи». Пуанкаре называл теорию множеств «тяжёлой болезнью». В 1908 г. он заявил: *«Грядущие поколения будут рассматривать теорию множеств как болезнь, от которой они избавились»*.

Тем не менее, другие крупные математики — в частности, **Готлоб Фреге**, **Рихард Дедекинд** и **Давид Гильберт** — поддержали Кантора в его намерении перевести всю математику на теоретико-множественный язык. Наиболее активным сторонниками Кантора были **Рассел** и **Гильберт**. Рассел назвал Кантора одним из великих мыслителей XIX в. Вслед за Расселом Гильберт заявил: «*Никто не изгонит нас из рая, созданного Кантором*». Кульминационным моментом в признании канторовской теории множеств можно считать конец 19-го века, когда математики приняли теорию множеств в качестве логической базы своей науки. Официальное провозглашение теоретико-множественных представлений фундаментом математики состоялось в 1897 г.: оно содержалось в речи **Ж. Адамара** на 1-м Международном конгрессе математиков в Цюрихе. В лекции подчеркивалось, что основная привлекательная причина теории множеств состоит в том, что впервые в истории математики была

проведена классификация множеств на основе новоизобретенного понятия «мощности» и получены поразительные математические результаты, которые воодушевляли математиков на новые и удивительные открытия.

Однако восторги сменились шоковым состоянием, когда была обнаружена противоречивость канторовой теории множеств. Не успели математики насладиться «математическим раем», предоставленным им Кантором, как спустя уже несколько лет после 1-го Международного конгресса математиков в теории множеств были обнаружены *парадоксы* или *антиномии* (от греческих слов «анти» — против и «номос» — закон), которые стали основой очередного, третьего по счету (после открытия несоизмеримых отрезков и обоснования теории пределов) кризиса в основаниях математики, который не преодолен и до настоящего времени.

Один из этих парадоксов был обнаружен знаменитым английским философом **Расселом**. Сам Рассел демонстрирует обнаруженный им парадокс на примере «деревенского парикмахера», который дал обещание брить всех тех и только тех жителей своей деревни, которые не бреются сами. Спрашивается: должен ли он брить самого себя? Если он будет брить себя, значит, он тем самым включает себя в число тех, которые бреются сами, и тогда он не должен брить себя; если же он не будет брить себя, то он уже будет принадлежать к тем, которые сами себя не бреют, и значит, он должен брить себя. Получается логическое противоречие, недопустимое в математике!

После обнаружения антиномии Рассела часть математиков (например, **Брауэр** и его школа) решила полностью отказаться от использования теоретико-множественных представлений. Другая же часть математиков, возглавленная **Д. Гильбертом**, предприняла ряд попыток строго обосновать ту часть теоретико-множественных представлений, которая казалась им наиболее ответственной за возникновение антиномий, на основе заведомо надёжной финитной математики. Логический аппарат усовершенствовал **Бертран Рассел** в работах, позднее собранных в его монографии «Начала математики» (1910-1913). В 1904-1908 гг. **Эрнст Цермело** предложил первую версию аксиоматической теории множеств.

Одним из радикальных направлений в преодолении кризиса в основаниях современной математики является *конструктивное направление в математике*. Представители конструктивного анализа увидели основную причину парадоксов канторовской теории множеств в понятии «актуальной бесконечности». Наиболее убедительно критика в адрес этого понятия выражена в словах русского математика **А.А. Маркова**, одного из наиболее ярких представителей конструктивного анализа. Марков пишет:

«Мыслить себе бесконечный, т.е. никогда не завершаемый процесс как завершенный не удается без грубого насилия над разумом, отвергающим такие противоречивые фантазии».

В 2002 г. после создания на Интернете моего сайта «Музей Гармонии и Золотого Сечения» http://www.goldenmuseum.com/ мне прислал восторженное письмо известный российский математик **Александр Зенкин**. Когда я ознакомился с его исследованиями по проблеме бесконечного в математике, я понял, что именно он, возможно, поставит последнюю точку в споре с Кантором и в разрешении кризиса в современной математике. Суть подхода А. Зенкина, изложенного в ряде приоритетных публикаций [32], состоит в том, что он впервые четко сформулировал почти очевидный факт: концепция потенциальной бесконечности (ПБ) в Аристотелевой форме «все бесконечности суть потенциальны» и концепция актуальной бесконечности (АБ) в Канторовской форме «все бесконечные множества суть актуальны» являются АКСИОМАМИ, т.е. их нельзя ни доказать, ни опровергнуть, а только либо принять, либо отвергнуть. Именно поэтому все дискуссии о «существовании»/«не-существовании» АБ, ведущиеся со времен Аристотеля, никого ни в чем не убеждают. Здесь уместно провести некоторую аналогию с историей 5-го постулата Евклида о параллельных. Но есть и существенная разница: непротиворечивость не-евклидовых геометрий доказана, а непротиворечивость канторовской теории множеств, основанной на АКСИОМЕ АБ, — не доказана.

Проведя тщательный анализ теоремы Кантора о несчетности континуума, в которой содержится «логическое» обоснование для правомерности использования АБ в математике, **А. Зенкин** приходит к следующему заключению:

1. Доказательство Кантора не является *математическим* доказательством в смысле Д.Гильберта и в смысле *классической* математики.

2. Вывод Кантора о несчетности множества X «перепрыгивает» через *потенциально бесконечный* этап, т.е. рассуждение Кантора содержит фатальную логическую ошибку «недоказанного основания» («jump to a <wishful> conclusion»).

3. «Доказательство» Кантора, в действительности, *доказывает*, причем строго математически, именно *потенциальный*, т.е. принципиально незавершаемый, характер бесконечности множества X «всех» действительных чисел, т.е. строго математически доказывает фундаментальный принцип *классической* логики и *классической* математики: «*Infinitum Actu Non Datur*» (Аристотель).

А дальше предоставим слово автору этого неординарного заключения:

«Ради исторической справедливости уместно добавить, что знаменитый тезис Аристотеля «Infinitum Actu Non Datur», т.е. утверждение о невозможности существования (т.е. о внутренней противоречивости понятия) логических или математических (т.е. всего лишь мыслимых, а не существующих в природе) актуально-бесконечных объектов, — на протяжении последних 2300 лет, — разделяли и активно поддерживали такие великие единомышленники Аристотеля, как Лейбниц, Коши, Гаусс, Кронекер, Пуанкаре, Брауэр, Вейль, Лузин и многие другие выдающиеся создатели классической логики и современной классической математики в целом!

Каждый из них профессионально занимался исследованием проблемы математической бесконечности, и можно не сомневаться, что они понимали истинную природу Бесконечного отнюдь не хуже Г. Кантора. Особенно, если учесть тот принципиальной важности факт, что Бесконечность как таковая не зависит от прогресса и «технологической» оснащенности науки, поскольку никогда не была и никогда не станет объектом инструментального исследования — даже все мыслимые компьютеры, вместе взятые, никогда, по определению, не смогут завершить пересчет всех элементов натурального ряда чисел 1,2,3, … Именно поэтому все дискуссии о возможности или невозможности актуальной Бесконечности на протяжении двух тысячелетий и вплоть до Кантора носили чисто спекулятивный характер, не зависевший от очевидного (во всех других отношениях) прогресса науки. Только доказанная противоречивость следствий, вытекающих из понятия актуальной Бесконечности, могла стать «последним аргументом» против использования этого понятия в любой науке. Но для этого дискуссия об актуальной бесконечности должна была выйти за рамки спекулятивных рассуждений, основанных на чисто субъективных предпочтениях, в область аргументации, доступной для строгого логического анализа.

И в этом смысле, несомненная заслуга Г. Кантора состоит в том, что он первый от иногда более, иногда менее обоснованных рассуждений о возможности или невозможности актуальной бесконечности перешел к ее явному операциональному употреблению в рамках классической логики и классической математики, и тем самым впервые сделал результаты такого «математического» (см. выше) употребления понятия актуальной бесконечности доступными для стандартных методов логического и математического анализа. Именно такой анализ логических аспектов канторовского доказательства Теоремы о несчетности, — более, чем краеугольного камня всего канторовского «учения о трансфинитном», — выполненный выше, показывает, что основное допущение канторовского доказательства об актуальном характере бесконечности пересчета … ведет к нефинитному противоречию …, которое не имеет никакого отношения к методу Reduction ad Absurdum, а сама Теорема Кантора о несчетности является просто неверной с точки зрения классической логики (Аристотеля).

Почему такой анализ Теоремы Кантора не был выполнен своевременно, т.е. еще в конце 19-го века? — Это очень нетривиальная тема для фундаментального исследования в области психологии научного познания».

3.2. ***Математика в изоляции или в чем главная причина плачевного состояния современной математики?***

При изучении современного кризиса в математике [3], из которого математики так и не нашли выхода, возникают естественные вопросы:

Что же делать?

Как преодолеть современный кризис в математике?

В чем главная причина плачевного состояния современной математики?

Ответы на эти вопросы содержится в заключительных главах книги Мориса Клайна [3].

Отвечая на вопрос о плачевном состояния современной математики, Морис Клайн написал следующее:

«Осознание того, что сверкающая великолепием витрина человечепского разума далеко не совершенна по своей структуре, страдает множеством недостатков и подвержена чудовищным противоречиям, могущим вскрыться в любой момент, нанесло еще один удар по статусу математики. Но бедствия, обрушившиеся на математику, были вызваны и другими причинами. Тяжелые предчувствия и разногласия между математикми были обусловлены самим ходом развития математики за последние сто лет. Большинство математиков как бы отгородились от внешнего мира, сосредоточив усилия на проблемах, возникавших внутри самой математики, - по существу они порвали с естествознанием. Это изменение в развитии математики нередко описывают как обращение к ***чистой*** *математике, противопоставляемой* ***прикладной*** *математике ..»*

И далее:.

Что представляет собой математика? Для предыдущих поколений математика была прежде всего и главным образом тончайшим творением человеческого разума, предназначенным для исследования природы. Фундаметальные понятия, универсальные методы и почти все наиболее важные теоремы математики были разработаны и доказаны в процессе усовершенствования математики как инструмента познания мира. ***Естествознание было кровью и плотью математики и питало ее живительными соками.*** *Математики охотно сотрудничали с физиками, астрономами, химиками и инженерами в решении различных научно-технических проблем, а часто и сами были выдающимися физиками и астрономами. В XVII-XVIII вв., а также на протяжении большей части XIX в. различие между математикой и теоретическим естествознанием отмечалось крайне редко...* ***Математика была царицей и одновременно служанкой естественных наук».***

Большой интерес представляет мнение Мориса Клайна по поводу места «чистой» математики в общей теории математики:

«Чистая математика, полностью оторванная от запросов естествознания, никогда не находилась в центре забот и интересов математиков. Ей отводилась роль своего рода забавы, отдохновения от гораздо более важных и увлекательных проблем, выдвигаемых естественными науками».

Морис Клайн приводит многочисленные примеры критического отношения великих математиков прошлого, в частности Гаусса, к «чистой» математике:

«Хотя Гаусс ... неоднократно возвращался к теории чисел, он явно не считал ее важнейшим разделом математики. Ему нередко предлагали заняться доказательством ***Великой теоремы Ферма****, гласящей, что при* $n > 2$ *никакие целые числа x, y и z не удовлетворяют соотношению* $x^n + y^n = z^n$*... Гаусс заметил, что гипотеза Ферма – это изолированная, ни с чем не связанная теорема и поэтому не представляет особого интереса. Имеется немало гипотез, добавил Гаусс, которые пока не удалось ни доказать, ни опровергнуть, но сильная занятость другими делами не оставляет времени для задач такого типа ... Гаусс надеялся, что гипотезу Ферма удастся доказать на основе другой выполненной им работы, но и тогда* ***теорема Ферма будет одним из наименее интересных следствий из более общих его результатов»***

Как известно, доказательство теоремы Ферма было сделано английским математиком **Эндрю Уайлсом** в сентябре 1994 года. Его 130-страничное доказательство было опубликовано в знаменитом

журнале «Annals of Mathematics». 27 июня 1997 года **Эндрю Уайлс** получил премию Вольфскеля в размере 50000 долларов. И снова Ферма и Уайлс попали на первые полосы газетных изданий всего мира. Великая теорема Ферма была официально признана доказанной. Несомненно, доказательство теоремы Ферма является большим достижением в области «чистой» математики. Но с учетом мнения Гаусса, остается чувство неудовлетворенности по поводу практических приложений этого решения. Можно ли сравнить результат, полученный Эндрю Уайлсом, с точки зрения ее влияния на развитие современной науки и математики, с такими выдающимися математическими открытиями как *геометрия Лобачевского* или *электромагнитная теория Максвелла?*

В этой связи такие же вопросы могут быть поставлены и к другим математическим проблемам из области «чистой» математики. Например, в последнее время средства массовой информации широко обсуждают доказательство *гипотезы Пуанкаре,* сделанное российским математиком **Григорием Перельманом**. 18 марта 2010 года математический институт Клэя присудил ему Премию тысячелетия за доказательство гипотезы Пуанкаре, которую он, однако, отказался принять. К сожалению, именно отказ Перельмана получить премию в 1 млн. долларов, а не сама *гипотеза Пуанкаре* привлекли внимание широкой публики к этому математическому достижению. При этом у многих ученых (в том числе, и у математиков) остается неясным следующий вопрос: является ли *гипотеза Пуанкаре* и ее решение Григорием Перельманом тем новым математическим результатом, который может перевернуть всю современную науку? Не является ли эта гипотеза, как и другие гипотезы в области «чистой» математики, очередной «теоремой Ферма», которая, по мнению Гаусса, «не представляет особого интереса»?

Оказывается, что и в предыдущие столетия многие выдающиеся ученые и математики скептически относились к «чистой» математике. **Морис Клайн** пишет об этом следуюшее[3]:

«Критику чистой математики – математики ради математики – можно найти в сочинении Френсиса Бэкона «О достоинстве и приумножении науки» (1620). Бэкон возражал против чистой, мистической и самодовольной математики, «полностью абстрагированной от материи и физических аксиом» ..., сетуя на то, что «таково уж свойство человеческого ума: не имея достаточных сил для решения важных проблем, он тратит себя на всякие пустяки».

В книге Клайна приведено мнение **Фурье** по поводу отхода математики от «реальности» в пользу занятий «чистой» математикой, то есть, математикой ради математики. Это мнение Фурье изложил в своем классическом труде «Аналитическая теория тепла» (1822):

«Глубокое изучение природы – наиболее плодотворный источник математических открытий. Такое изучение не только обладает преимуществами хорошо намеченной цели, но и исключает возможность неясной постановки задач и бесполезных выкладок. Оно является надежным средством построения самого анализа и позволяет открывать наиболее значительные идеи, которым суждено навсегда сохраниться в науке. ***Фундаментальны те идеи, которые отражают явления природы ...»***

Еще в 1895 г. свой протест против тяги к абстрактной, чистой математике **Феликс Клейн** выразил в следующих словах (цитируется по [3]):

«Трудно отделаться от ощущения, что быстрое развитие современной мысли таит для нашей науки опасность все более усиливающейся изоляции. Такая взаимосвязь между математикой и теоретическим естествознанием, существовавшая к вящей выгоде для обеих сторон, с возникновением современного анализа грозит прерваться».

В 1939 г. **Рихард Курант**, возглавлявший Курантовский институт математических наук при Нью-Йоркском университете, выразил свою озабоченность по поводу разрыва математики с теоретическим естествознанием в следующих словах:

«Серьезная угроза самой жизни науки проистекает из утверждения о том, будто математика представляет собой не что иное, как систему заключений, выводимых из определений и постулатов, которые должны быть непротиворечивыми, а в остальном произвольными порождениями свободной воли математиков. Если быв подобное описание соответствовало действительности, то в глазах любого сколько-нибудь разумного человека математика не обладала

бы никакой привлекательностью. Она была бы ничем не мотивированной бесцельной игрой с определениями, правилами и силлогизмами. Представление о том, будто разум по своему произволу может создавать осмысленные аксиоматические системы, - полуправда, способная лишь вводить неискушенных людей в заблуждение. Только сдерживаемый дисциплиной ответственности перед органическим целым свободный разум, руководствуясь внутренней необходимостью, может создавать результаты, имеющие научную ценность».

Эти примеры можно было бы продолжить, но уже из вышеизложенного вытекает следующий вывод: **главная причина плачевного состояния современной математики состоит в разрыве с теоретическим естествознанием, которое «*было кровью и плотью математики и питало ее живительными соками» (Морис Клайн).***

3.3. ***Математика как естественная наука, как важнейшая часть теоретического естествознания***

Заключительная глава книги Мориса Клайна [3] с символическим названием «Авторитет природы» является «ключевой» с точки зрения задач и целей книги [3]. Эта глава содержит очень интересное предложение, которое, возможно, и выведет математику из «ступора». Клайн подчеркивает, что математики при создании тех или иных направлений развития математической науки должны **«руководствоваться внешними соображениями»**. При этом, по мнению Клайна, ***«наиболее важным из них по-прежнему остается традиционный и наиболее объяснимый довод в пользу создания новой и развития уже существующей математики – ее ценность для других наук ... Приложения служат своего рода практическим критерием, которым мы проверяем математику».***

И далее:

«С исторической точки зрения апелляция к приложениям не означает радикального изменения сути математики, как это может показаться современным блюстителям математической строгости. Математические понятия и аксиомы берут свое начало из наблюдений реального мира ... О ценности, или значимости, результатов, полученных из аксиом, лет семьдесят пять назад судили по пригодности этих результатов для описания реального мира. Почему и теперь не судить о правильности математики в целом по тому, насколько хорошо она продолжает описывать и предсказывать природные феномены?

Клайн подчеркивает, что *«среди тех, кто отстаивал наличие у математики эмпирических оснований и критериев, видное место видное место занимал Джон Стюпрь Милль (1806-1873). Он допускал, что математика обладает большей общностью, чем некоторые физические науки, но видел «оправдание» математики лишь в том, что ее утверждения проверены и подтверждены шире и основательнее, чем утверждения физических наук. Следовательно, заключал Милль, глубоко заблуждаются те, кто считает, что математические теоремы качественно отличаются от подтвержденных гипотез и теорий других наук».*

Морис Клайн приводит мнение одного из выдающихся специалистов по основаниям математики **Анджея Мостовского**:

«Единственная непротиворечивая точка зрения, согласующаяся не только со здравым смыслом, но и с математической традицией, сводится по существу к допущению того, что источник и высший смысл понятия числа (не только натурального, но и вещественного) лежит в опыте и практической применимости. То же относится и к понятиям теории множеств в том объеме, в каком они необходимы для классических областей математики».

Но Мостовский, утверждает Клайн [3], идет еще дальше. Он утверждает, что **МАТЕМАТИКА – ЕСТЕСТВЕННАЯ НАУКА. Математика имеет естественно научное происхождение и поэтому «любые попытки обосновать математику безотносительно к ее естественнонаучному происхождению, приложениям обречены на провал»** [3].

В своей «Философии математики и естественных наук» (1949) **Герман Вейль** *«открыто выступает за то, чтобы рассматривать математику как одну из естественных наук.*

Математические теоремы, подобно физическим утверждениям, могут быть формально не обоснованными, но экспериментально проверяемыми гипотезами. Иногда они подлежат переделке, но надежным критерием их правильности служит их соответствие реальности» [3].

Итогом бурной и разнообразной деятельности математиков, работающих в различных школах по обоснованию математики, являются следующие выводы [3]:

1. ***«... Правильная математика должна определяться не основаниями ..., безошибочность которых можно и оспаривать, - о «правильности» математики следует судить по ее применимости к реальному миру. Математика – такая же эмпирическая наука, как и ньютоновская механика... Математика не свод априорных знаний, каковой ее считали в течение более чес двух тысячелетий; она не абсолютна и не неизменна».***
2. ***Лидеры различных математических школ и направлений, рекомендуя использовать приложения к естественным наукам как путеводную нить и критерий доброкачественности математики, руководствуются не только желанием выбрать одно из течений в основаниях математики. Все они осознают, что силы математики в решении физических проблем неизмеримо выросли, и считают, недопустимым игнорировать услуги, оказываемые математикой человечеству в познании мира, только потому, что сохранились разногласия в основаниях математики. Хотя многие математики на протяжении без малого последних ста лет и перестали заниматься естественнонаучными приложениями, величайшие из математиков XX в. – Пуанкаре, Гильберт, фон Нейман, Вейль – внесли существенный вклад в современную физику».***

4. Гармонизация математики

4.1. *«Математика гармонии»: от древних греков до современной науки*

В первой части статьи было показано, что в центре древнегреческой математики лежала концепция гармонии, которая представляла «*собою внутреннюю связь вещей, без которой космос не смог бы существовать*». При этом основным достижением древних греков явилось создание *новаторской концепции космоса,* в котором все подчинено математическим законам гармонии. Основным результатом этой концепции стало создание *математического учения о природе.* В 20 и 21-м веке для этого учения было использовано название «*математика гармонии*» [29,31].

Возникает вопрос: как современные ученые относятся к «проблеме нармонии»? Начнем с **Германа Вейля**. Вейль был уверен, что математика отражает порядок, существующий в природе. В одном из выступлений он сказал (цитата из [3]):

«*В природе существует внутренне присущая ей скрытая гармония, отражающаяся в наших умах в виде простых математических законов. Именно этим объясняется, почему природные явления удается предсказывать с помощью комбинации наблюдений и математического анализа. Сверх всяких ожиданий убеждение (я бы лучше сказал мечта!) в существовании гармонии в природе находит все новые и новые подтверждения в истории физики*».

Понятие гармонии пронизывает всю историю науки. По словам **Б.Г. Кузнецова**, исследователя творчества Эйнштейна, наука, по мнению Эйнштейна, физика в частности, всегда имела своей извечной фундаментальной целью *"найти в лабиринте наблюдаемых фактов объективную гармонию"*. Как признание законов гармонии во всей природе звучат слова **Альберта Эйнштейна**:

«*Религиозность ученого состоит в восторженном преклонении перед законами гармонии*».

В древнегреческой философии гармония противостояла хаосу и означала организованность Вселенной, Космоса. *"С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии,* - писал гениальный российский философ **Алексей Лосев**, - *мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - золотого сечения"*.

Как показано в первой части статьи, созданная древними греками «математика гармонии», основанная на «золотом сечении» и Платоновых телах, получила наиболее яркое отражение в «Началах» Евклида.

Интерес к «математике гармонии» возрастал в периоды наивысшего расцвета человеческой культуры, а в создании «математики гармонии» принимали участие великие философы, ученые и математики – **Пифагор, Платон, Евклид** (в античную эпоху), **Лука Пачоли, Леонардо да Винчи, Иоганн Кеплер** - в эпоху Возрождения, французские математики **Люка** (автор *чисел Люка*) и **Бине** (автор *формул Бине*), немецкий математик **Феликс Клейн** (автор *икосаэдрической идеи* [6]) – в 19 в., российский математик **Николай Воробьев** [15], американский математик **Вернер Хоггатт** [16], английский математик **Стефан Вайда** [17] – в 20 в.

4.2. *Математика гармонии и принцип математической красоты Дирака*

В настоящее время ни у кого не вызывает сомнения, что «*наука прекрасна, ибо она отражает в себе и преломляет в нашем сознании красоту, гармонию и единство мироздания*» [59]. Но физики пошли еще дальше. Английский физик Нобелевский лауреат **Поль Дирак** выдвинул тезис: «*Красота является критерием истинности физической теории*».

Дирак не только осознавал красоту выражений математических формулировок теории, но и понимал эвристическую, регулятивную роль красоты как методологического принципа построения научного знания. Дирак пишет (цитата взята из [59]):

"Я чувствую, что теория, если она правильна, должна быть красивой (beautiful), так как мы руководствуемся принципом красоты, когда устанавливаем фундаментальные законы. Так, в исследованиях, опирающихся на математику, мы часто руководствуемся требованием математической красоты. Если уравнения физики некрасивы с математической точки зрения, то это означает, что они несовершенны и что теория ущербна и нуждается в улучшении. Бывают случаи, когда математической красоте должно отдаваться предпочтение (по крайней мере, временно) перед согласием с экспериментом. Дело обстоит так, будто Бог создал Вселенную на основе прекрасной математики и мы сочли разумным предположение, что основные идеи должны выражаться в терминах прекрасной математики".

Создается впечатление, что это высказывание Дирака имеет непосредственное отношение к «математике гармонии» [13, 29, 31], в основу которой положены два красивейших математических результата – *золотое сечение* и *Платоновы тела*, которые более двух тысячелетий являются предметом восхищения ученых и представителей искусства.

4.3. *Эстетика «математики гармонии»*

Фундаментальными понятиями, на которых основывается «математики гармонии» [13, 29, 31], являются:

- *Платоновы тела*, выражавшие гармонию Мироздания в античной науке (Рис.1);

- *золотое сечение*, которое приводит к *золотой пропорции* $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

- *числа Фибоначчи* 1,1,2,3,5,8,13,21,34,..., открытые в 13 в. итальянским математиком Фибоначчи; числа Фибоначчи связаны с *золотой пропорцией* следующим изящным соотношением (*формула Кеплера*):

$$\Phi = \underbrace{\lim}_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}. \qquad (1)$$

Однако, в последние десятилетия были сделаны обобщения задачи о «золотом сечении», которые привели к так называемым *золотым p-пропорциям* [40] и «*металлическим пропорциям*» [50].

Продемонстрируем только некоторые хорошо известные свойства исходных понятий «математики гармонии» - *Платоновых тел, золотой пропорции* и *чисел Фибоначчи*, чтобы убедиться в красоте и эстетической значимости «математики гармонии».

Начнем с *Платоновых тел* (Рис.1). Теории многогранников посвящено много книг. Одной из наиболее известных является книга английского математика **М. Венниджера** «Модели многогранников». В русском переводе эта книга опубликована издательством «Мир» в 1974 г.

Эпиграфом к книге выбрано высказывание **Бертрана Рассела**: *«Математика владеет не только истиной, но и высокой красотой – красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства»*. И это высказывание в наибольшей степени относится, прежде всего, к *Платоновым телам* (Рис.1)

Хорошо известно следующее удивительное свойство «золотой пропорции» $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$:

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}} \qquad (2)$$

Оказывается, что выражение (2) содержит в себе очень глубокую математическую истину. В работах российских математиков **А.Я. Хинчина** [70] и **Н.Н. Воробьева** [15] обращено внимание на тот факт, что согласно (1) «золотая пропорция» *хуже всех аппроксимируется рациональными дробями*. И это свойство выделяет «золотое сечение» среди других иррациональных чисел, то есть, с точки зрения цепных дробей, **«золотое сечение» является уникальным иррациональным числом.**

Еще одно удивительное свойство «золотого сечения» - его представление в радикалах:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}\ .$$

А теперь приведем один эстетический результат, касающийся *чисел Фибоначчи*. В 17 в. выдающийся французский астроном **Джовани Доменико Кассини** (1625-1712) вывел математическую формулу, которая связывает три соседних числа F_n, F_{n-1}, F_{n-2} в последовательности чисел Фибоначчи:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n . \qquad (3)$$

Формула справедлива для любого целого $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Эта удивительная формула вызывает благоговейный трепет, если представить себе, что она справедлива для любого значения n (напомним, что n может принимать любое значение для целого числа в пределах от -∞ до +∞), и истинное эстетическое наслаждение, потому что чередование +1 и –1 в указанном выше математическом выражении при последовательном прохождении всех чисел Фибоначчи от -∞ до +∞ вызывает неосознанное чувство ритма и гармонии.

4.4. *Три основных периода в развитии «математики гармонии»*

Интерес к *«золотому сечению»*, *Платоновым телам* и *«математике гармонии»* возрастал в периоды наивысшего расцвета человеческой культуры. В соответствии с этими периодами в развитии «математики гармонии» можно выделить три основных периода:

1. Древнегреческий период. Условно можно считать, что этот период начинается с исследований **Пифагора** и **Платона**. Высшим достижением этого периода являются «Начала» Евклида. В статье [29] «математика гармонии» ассоциируется с доктриной ***«гармонии сфер»,*** *приписываемой Пифагору*. В статье [31] «математика гармонии» ассоциируется с пифагорейской доктриной о числовой гармонии Мироздания, основанной на *золотом сечении*. Именно в «Началах» Евклида «математика гармонии» древних греков получила достойное математическое отражение. Согласно *гипотезе Прокла*, Евклид посвятил свои «Начала» изучению *Платоновых тел*. Для построения геометрической теории *додекаэдра* Евклид уже в Книге II вводит в рассмотрение *«задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении»*, известной под названием «золотое сечение».

2. Эпоха Возрождения. Этот период связан с именами таких выдающихся личностей этой эпохи, как **Пьеро дела Франческа** (1412–1492), **Леон Баттиста Альберти** (1404–1472), **Леонардо да Винчи** (1452–1519), **Лука Пачиоли** (1445–1517), **Иоганн Кеплер** (1571–1630). Именно в этот период

появляются две книги, которые в наибольшей степени отражали «золотую» парадигму древних греков. Первая из них – это книга “Divina Proprtione” (1509), написанная выдающимся итальянским математиком и ученым монахом **Лукой Пачоли** под непосредственным влиянием **Леонардо да Винчи**. Вторая книга – это книга **Иоганна Кеплера** «Гармония мира» (1619). Возникает вопрос: кто стимулировал возврат к «золотой» парадигме древних греков в эпоху Возрождения? Ответ – однозначный: христианская религия.

Морис Клайн в своей книге «Математика. Утрата определенности» (1984) [3] подчеркивает причину, по которой религия поддерживала идею математического исследования гармонии как воплощение в Природе Божественного промысла: *«Бог вложил в мир строгую математическую необходимость, которую люди постигают лишь с большим трудом, хотя их разум устроен по образу и подобию божественного разума. Следовательно, математическое знание не только представляет собой абсолютную истину, но и священно, как любая строка Священного Писания. Исследование природы – занятие столь же благородное, как и изучение Библии».*

3. Современный период. Условно этот период начинается в 19 в. и его начало связано с исследованиями французских математиков **Жака Филлипа Мари Бине** (1786–1856), **Франсуа Эдуа́рда Анатоля Люка** (1842–1891), немецкого поэта и философа **Адольфа Цейзинга** (род. в 1810 г.) и немецкого математика **Феликса Клейна** (1849–1925). В первой половине 20 в. развитие «золотой» парадигмы связано с именами российского профессора архитектуры **Г. Д. Гримма** (1865–1942), немецкого математика **Г. Е. Тимердинга**, французского исследователя **Матилы Гика** и классика русской религиозной философии о. **Павла Флоренского** (1882–1937). Во второй половине 20 в. и начале 21 в. интерес к «математике гармонии» интенсивно возрастает во всех сферах науки, в частности, в математике. В области математики наиболее яркими представителями этого направления стали советский математик **Николай Воробьев** (1925–1995) [15], американский математик **Вернер Хоггатт** (1921–1981) [16] и английский математик **Стефан Вайда** [17]. Возрождение идеи гармонии в современной науке определялось новыми научными реалиями. Проникновение Платоновых тел, «золотого сечения» и чисел Фибоначчи в математику, во все сферы теоретического естествознания (кристаллография, химия, астрономия, наука о Земле, квантовая физика, ботаника, биология, геология, медицина и др.), а также в информатику и экономические науки и стало главной причиной интереса современной науки к проблеме гармонии.

4.5. ***С какой целью в США была создана Фибоначчи Ассоциация?***

Возможно, первый математический результат, основанный на «золотой пропорции», был получен в 1957 г. юным (12-летним) американским математиком Джорджем Бергманом задолго до создания Фибоначчи Ассоциации (1963). Однако, этот результат не вызвал какой-либо серьезной реакции в математической среде, скорее всего, по причине юности автора статьи [9]. Это тот случай, когда математики оказались не способными оценить новое математическое открытие. Этот результат привлек внимание специалистов в области информатики лет на 50 позже после его публикации.

Широкий общественный резонанс к проблематике «золотого сечения» и чисел Фибоначчи вызвали следующие публикации и события, которые произошли в начале 60-х годов 20-го века:

1. Публикация в 1961 г. брошюры «Числа Фибоначчи» [15], написанной выдающимся советским математиком **Николаем Воробьевым**. Эта небольшая по своему объему брошюра стала своеобразным бестселлером 20-го века. Она выдержала большое количество изданий и переведена на многие языки мира.

2. Однако наибольшее влияние на развитие современной *«теории чисел Фибоначчи»* оказало учреждение в 1963 г. математической *Фибоначчи Ассоциации*, которая с 1963 г. начала издавать ежеквартальный математический журнал *The Fibonacci Quarterly*. Одним из основателей Фибоначчи Ассоциации и *The Fibonacci Quarterly* был американский математик **Вернер Хоггатт (Verner Emil Hoggatt)** (1921-1981), профессор San Jose State University (США).

В 1969 году издательство "Houghton Mifflin" опубликовало книгу Вернера Хоггатта *"Fibonacci and Lucas Numbers"* [16], которая до сих пор считается одной из лучших книг в этой области. Вернер Хоггатт внес большой вклад в популяризацию исследований в области чисел Фибоначчи. Его последователи отмечают его продолжительную и несомненно выдающуюся работу профессором San Jose State University. Он руководил огромным количеством магистерских диссертаций и написал большое число статей по проблеме чисел Фибоначчи.

.

Вернер Хоггатт (Verner Emil Hoggatt) (1921-1981)

Другой выдающейся личностью, причастной к созданию Фибоначчи Ассоциации и учреждению *The Fibonacci Quarterly*, был ученый монах Брат **Альфред Бруссау (Alfred Brousseau).**

Альфред Бруссау (Alfred Brousseau) (1907-1988)

Духовный орден, к которому принадлежал Брат **Альфред Бруссау**, назывался "Братья христианских школ" или просто "Христианские братья". Альфред Бруссау был принят в Орден "Христианские братья" в 1923 г. В 1930 г. он был зачислен в колледж Святой Марии в Калифорнии. Одновременно с обучением в колледже Святой Марии, Альфред Бруссау продолжал самостоятельно изучать физику и в 1937 г. он получил докторскую степень в Калифорнийском университете. Альфред Бруссау был страстным фотографом. Он сделал коллекцию, состоящую из 20000 дикорастущих растений Калифорнии.

При изучении истории создания Фибоначчи Ассоциации, возникают следующие естественные вопросы:

1. Что объединяло этих двух очень разных людей – математика **Вернера Хоггатта** и представителя духовного братства **Альфред Бруссау**?

2. С какой целью они создали *Фибоначчи Ассоциацию* и учредили журнал *The Fibonacci Quarterly*?

К сожалению, в кратких биографиях и работах **Вернера Хоггатта** и **Альфреда Бруссау** прямого ответа на этот вопрос нет. Но мы можем попытаться дать ответ на эти вопросы косвенно,

анализируя некоторые документы, в частности, фотографии, а также статьи, опубликованные на страницах *The Fibonacci Quarterly.*

В 1969 г. журнал *TIME* опубликовал статью *"The Fibonacci Numbers",* посвященную Фибоначчи Ассоциации. В этой статье было представлено **фото Альфреда Бруссау, держащего в руках кактус, который является одним из наиболее характерных "фибоначчиевых" ботанических объектов.** В статье рассказывается и о других природных проявлениях этих чисел: о фибоначчиевой закономерности в размножении трутней, а также о том, что числа Фибоначчи встречаются в спиральных образованиях цветов, видимых на многих подсолнечниках, чешуйках сосновых шишек, ветвящихся узорах деревьев, и в расположении листьев на ветках деревьев.

Тем, кто изучает числа Фибоначчи, Альфред Бруссау рекомендовал *"обращать внимание на поиск эстетического удовлетворения в них.* ***Существует некоторый вид мистической связи между этими числами и Вселенной"*****.**

Но ведь на приведенной выше фотографии Вернер Хоггатт также изображен держащим в руках сосновую шишку, которая является одним из фибоначчиевых объектов. Отсюда мы можем сделать предположение, что Вернер Хоггатт, как и Альфред Бруссау, верил в **мистическую связь между числами Фибоначчи и Вселенной.** Эта вера и объединяла математика Вернера Хоггатта и ученого монаха Альфреда Бруссау и стала главным движущим мотивом для разворачивания работ по числам Фибоначчи и их приложениям в современной науке. Вспомним Эйнштейна: *«Религиозность ученого состоит в восторженном преклонении перед законами гармонии»*. Видимо, именно вера в законы гармонии Мироздания объединяла Вернера Хоггатта и Альфреда Бруссау.

Но, как было установлено выше, числа Фибоначчи связаны с «золотой пропорцией» с помощью *формулы Кеплера* (1), согласно которой отношение соседних чисел Фибоначчи в пределе стремиться к «золотой пропорции». Это означает, что *числа Фибоначчи,* как и *«золотая пропорция»,* являются количественными выразителями *гармонии Мироздания,* то есть, «***существует некоторый вид мистической связи между этими числами и Вселенной" (Альфред Брюссау)*****.**

Еще больше информации о связи *теории чисел Фибоначчи* с природой и искусством можно получить на официальном сайте Фибоначчи Ассоциации http://www.mscs.dal.ca/Fibonacci/. Из этого сайта мы узнаем, о великолепном сайте *"Fibonacci Numbers and the Golden Section"*, созданном английским математиком **Роном Кнотом (Ron Rnott),** о применении чисел Фибоначчи в искусстве и архитектуре http://britton.disted.camosun.bc.ca/goldslide/jbgoldslide.htm, о швейцарских марках, основанных на «золотых спиралях» http://www.fh-friedberg.de/users/boergens/marken/beispiele/goldenerschnitt.htm и т.д. Гармоническая составляющая этих сайтов не вызывает сомнений.

К сожалению, русскоязычному читателю мало доступны ранние статьи западных, в частности, американских ученых в этой области, в частности, опубликованные в *The Fibonacci Quarterly*. В 1996 г. известная фибоначчистка **Marjorie Bicknell**, с которой я познакомился во время проведения *7-й Международной конференции по числам Фибоначчи и их приложениям* (Австрия, Грац, июль 1996), прислала мне много интересных материалов по числам Фибоначчи, в частности, внушительный список публикаций западных математиков-фибоначчистов, касающихся различных разделов современного естествознания. Этот список я разместил в *Музее Гармонии и Золотого Сечения* http://www.goldenmuseum.com/1801Refer_rus.html В список включено 99 работ, опубликованных в период с 1956 г. по 1996 г. Эти публикации, прежде всего, являются неоспоримым доказательством того факта, что «гармонизация математики» начала активно осуществляться в западной науке, начиная с 50-х годов прошлого века.

Список литературы по числам Фибоначчи http://www.goldenmuseum.com/1801Refer_rus.html разделен на 6 разделов:

1. **Ботаника, биология** (динамика роста растений; генеалогическое дерево трутней; пересечение математики и биологии) (14 статей)
2. **Физические науки (**асимметрии атомных делений; анализ лестничных и каскадных электронных сетей; отражение световых лучей, музыкальные свойства, компьютерное

программирование и поисковые стратегии; модели потоков и дренажа; фрактальное ветвление диффузионных агрегатов) (15 статей)

3. **Бизнес и экономика, образование, поэзия** (циклы фондового рынка, циклы деловой активности, обучение отстающих учеников, анализ поэзии**)** (8 статей)
4. **Золотое сечение, археология, архитектура, искусство (**Большая Пирамида в Гизе, гармоническое проектирование в минойской архитектуре; Парфенон Акрополя в Афинах, древняя римская мозаика; золотое сечение в искусстве) (16 статей)
5. **Публикации общего характера** (16 публикаций)
6. **Статьи по матрицам Фибоначчи в хронологическом порядке** (20 статей)

Это означает, что **теория чисел Фибоначчи, которая начала особенно активно развиваться с момента создания Фибоначчи Ассоциации (1963), была направлена, прежде всего, на решение задач теоретического естествознания (ботаника, биология, физические науки), а также экономики, образования и искусства**. Это означает, что в современной математике, начиная с 1963 г., начала развиваться новая математическая теория – *теория чисел Фибоначчи*, которая основывалась на неразрывной связи математики с теоретическим естествознанием и другими сферами человеческой деятельности. Но ведь именно к этому призывает **Морис Клайн** в последней главе «Авторитет природы» книги [3]. **Путь к преодолению современного кризиса в математике состоит в объединении математики с теоретическим естествознанием!**

Но, как упоминалось, в основе *теории чисел Фибоначчи* лежит «проблема гармонии», которая и объединяет указанные выше разнородные области науки, экономики, искусства и образования, к которым приложимы числа Фибоначчи. Таким образом, анализируя причины возникновения *теории чисел Фибоначчи* в современной математике, мы пришли к тому, с чего мы начинали - к древнегреческому учению о числовой гармонии Мироздания, которое в современной математике оказалось воплощенным в *теории чисел Фибоначчи*! И возможно было бы правильно и справедливо назвать эту математическую теорию *математической теорией гармонией природы,* а не скрывать главную цель этой теории под названием *«теория чисел Фибоначчи».*

4.6. *Фибоначчи-конференции*

Начиная с 1984 г., Фибоначчи Ассоциация организовывает проведение регулярных конференций по числам Фибоначчи. В 1984 г. в Патрасе (Греция) была проведена 1-я Международная Конференция по числам Фибоначчи и их приложениям. Были также изданы труды Конференции. Уже тогда было определено, что эта конференция станет началом Международных конференций по этому направлению, которые будут проводиться каждые два года в разных странах. Реализуя это намерение, в San Jose, California, Pisa, Italy, Winston Salem, North Carolina, St. Andrews, Scotland, and Pullman, Washington были проведены соответственно Вторая, Третья, Четвертая, Пятая и Шестая Международные Фибоначчи-конференции и были изданы труды этих конференций.

Мне посчастливилось присутствовать только на одной из таких конференций - *Седьмой Международной конференции по числам Фибоначчи и их приложениям*, которая была проведена в Граце (Австрия) с 15-го по 19-е июля 1996 года. В этот период я работал профессором кафедры компьютерной техники Университета Аль Фатех (Ливия, Триполи, 1995-1997). Проделав с женой довольно утомительный путь вначале паромом Триполи-Мальта, затем самолетом Мальта-Вена и после этого поездом Вена-Грац, 12-го июля мы поселились в студенческом общежитии Грацкого технического университета, где были поселены все участники Конференции, прибывшие из всех стран мира. А через день к нам присоединилась наша дочь Анна, которая прибыла с мужем Алексеем в Грац из Украины на моем автомобиле «Волга». Конечно, нашей радости не было предела. Мы провели в Граце и его окрестностях более недели – и мы были рады с женой, что у нас тогда была материальная возможность оплатить нашей дочери и ее мужу такое замечательное путешествие.

В Граце мы много гуляли с семьей. В одном из грацких парков мы неожиданно натолкнулись на памятник Иоганну Кеплеру, который работал в Граце учителем математики на начальном этапе

свой трудовой деятельности. И я не мог отказать себе в удовольствии сфотографироваться возле памятника выдающемуся астроному, который всегда был для меня высоким примером служения науке.

На Конференции я познакомился с известными учеными в этой области и сфотографировался с некоторыми из них на одном из общественных мероприятий, запланированных локальным комитетом.

Слева направо: профессор A.N. Philippou (Кипр), профессор Calvin T. Long, Президент Фибоначчи-Ассоциации (США), профессор Gerald E. Bergum, Главный редактор журнала “The Fibonacci Quarterly” (США), профессор Алексей Стахов (Университет Аль Фатех, Ливия)

Я выступил на Конференции с тремя докладами. Моими соавторами была моя дочь Анна Слученкова (Украина) и доктор Мохамед Самир Элбуни (Ливия):

(1) Stakhov, A.P. *“The Golden Section and Modern Harmony Mathematics”*

(2) Stakhov, A.P. Sluchenkova, A.A. *“Ternary Golden Proportion Computers: New Trend in Computer Engineering”*

(3) Stakhov, A.P., Sluchenkova, A.A., Mohamed Samir Elbuni *“Number System based on the Fibonacci Two-by-Two Matrix”*.

Первый доклад вызвал наибольший интерес и был затем опубликован в трудах Фибоначчи-конференции *“Applications of Fibonacci Numbers”* (Volume 7) [33].

Расширенный текст доклада, прочитанного мною на Фибоначчи-конференции, был опубликован в Международном сборнике *“The Golden Section: Theory and Applications”* (Maputo, Eduardo Mondlane University, 1999). Реферат статьи “The Golden Section and Modern Harmony Mathematics” гласит:

«Сделана попытка создать основания новой Элементарной Математики, названной «Математика Гармонии». Она основывается на «золотом сечении» и хорошо адаптирована к нуждам современной информационной технологии. Три математические концепции, алгоритмическая теория измерения, являющаяся обобщением фибоначчиевой «задачи о взвешивании», новое геометрическое определение числа, основанное на обобщенных «золотых» сечениях, и гиперболические функции Фибоначчи и Люка, являющиеся обобщением формул Бине на непрерывную область, лежат в основе Математики Гармонии».

Для меня статья [33] знаменательна в том отношении, что в этой статье я впервые использовал понятие «математика гармонии». После Конференции в Граце все мои научные интересы были сконцентрированы на развитии «математики гармонии».

Кстати, после возвращения из Ливии (1997) по предложению академика Юрия Митропольского в апреле 1998 г. я выступил с докладом «Золотое сечение и математика гармонии» на заседании Украинского математического общества.

В статье [7] я подробно описал, как развивались события после Конференции в Граце: выступление в Московском университете (2003 г.) http://www.goldenmuseum.com/20ReportPres_rus.html, Международная конференция по Золотому Сечению в Виннице и создание Международного Клуба Золотого Сечения (2003), организация Института Золотого Сечения Академии Тринитаризма (2005).

4.7. *О Славянской «Золотой» Группе и Международном Клубе Золотого Сечения*

Публикация книги **Alexey Stakhov. “The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science”** (World Scientific, 2009) [13] стало важным, в определенном смысле «ключевым» событием в моей жизни, и (я надеюсь) и в развитии этого направления в мировой науке. **Эта книга является важным шагом в развитии процесса «Гармонизации Математики», начатого математиками-фибоначчистами.**

Что такое «гармонизация математики»? Под этим понимается использование таких фундаментальных понятий «математики гармонии» как *Платоновы тела, золотая пропорция, числа Фибоначчи* и их обобщений (*p-числа Фибоначчи, золотые p-пропорции, «металлические пропорции»* и др.), а также вытекающих из них новых математических понятий (*матрицы Фибоначчи* [16], *«золотые» матрицы* [13], *гиперболические функции Фибоначчи и Люка* [34-37] и др.) для решения тех или иных математических задач и создания новых математических теорий и моделей. Блестящими примерами этому является решение *10-й проблемы Гильберта* (Юрий Матитясевич, 1970), основанное на использовании новых математических свойств *чисел Фибоначчи*, и решение *4-й проблемы Гильберта* (Алексей Стахов и Самуил Арансон), основанное на использовании *«металлических пропорций»*. Теория систем счисления с иррациональными основаниями (*система Бергмана* [9]) и *коды золотой пропорции* [4]) и вытекающая из них концепция «золотой» теории чисел [46] являются примерами оригинальных далеко не тривиальных математических результатов, полученных в рамках «математики гармонии».

Книга **Alexey Stakhov. “The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science”** является не только моим личным достижением, но и достижением так называемой *«Славянской «Золотой» Группы»*, - неформальном научном объединении славянских ученых, которое было организовано в 1992 г. в Киеве во время проведения 1-го Международного семинара «Золотая пропорция и проблемы гармонии систем». О деятельности этой группы славянских ученых я написал в статье [7]. Напомню только основные исторические детали.

Выход в свет моих книг «Введение в алгоритмическую теорию измерения» (1979) [40] "Коды золотой пропорции" (1984) [4], книги Эдуарда Сороко «Структурная гармония систем» (1984) [2], патентование изобретений по «Компьютерам Фибоначчи» за рубежом, моя работа в Дрезденском техническом университете (1988), интервью в газете "Правда" (1988), обсуждение этого направления на заседании Президиума Академии наук Украины (1989), участие в популярной телепередаче

"Очевидное - Невероятное" (1989) вызвали большой интерес к моему научному направлению широких кругов так называемых "золотоискателей", т.е. ученых разнообразных научных направлений и представителей различных искусств, которые в своей предметной области подобно мне неожиданно пришли к числам Фибоначчи и золотому сечению. В беседах с **Эдуардом Сороко** (Беларусь), **Олегом Боднаром** (Украина), **Михаилом Марутаевым** (Росия) и **Яном Гржздельским** (Польша) и возникла идея объединить усилия славянских "золотоискателей". Важным шагом в этом направлении и стало проведение Международных семинаров "Золотая пропорция и проблемы гармонии систем". Первый и второй семинары были проведены в Киеве в 1992 и 1993 гг., а последующие семинары - в Ставрополе в 1993-1996 гг. На первом семинарах и была организована «Славянская «Золотая» Группа», которая в 2003 г. была преобразована в Международный Клуб Золотого Сечения. По инициативе этого Клуба в 2005 г. в рамках Академии Тринитаризма был организован Институт Золотого Сечения. По инициативе этого же Клуба в 2010 г. в Одессе был проведен Международный Конгресс по Математике Гармонии.

Возникает вопрос: что нового может привнести «математика гармония» в современную математику? Для ответа на этот вопрос мы рассмотрим наиболее яркие страницы современной «математики гармонии».

4.8. *Числа Фибоначчи и решение 10-й проблемы Гильберта*

Летом 1900 г. математики собрались на свой второй Международный конгресс в Париже. Знаменитый немецкий математик, профессор Геттингенского университета **Давид Гильберт** (1862-1943) был приглашен сделать один из основных докладов. Крупнейший математик мира, он прославился своими работами по алгебре и теории чисел, а незадолго перед конгрессом решительно перестроил аксиоматику евклидовой геометрии в своем фундаментальном сочинении "Основания геометрии" (1899 г.). После долгих колебаний Гильберт выбрал необычную форму доклада. В своем докладе *"Математические проблемы"* он решил сформулировать те проблемы, которые, по его мнению, должны определять развитие математики в наступающем веке.

Обращение Гильберта к Международному Математическому Конгрессу, состоявшемуся в 1900 г. в Париже, является, возможно, наиболее значительной лекцией, прочитанной математиком для математиков и посвященной проблемам математики. В своей лекции Гильберт изложил 23 главные математические проблемы, которые должны быть решены в новом столетии. Лекция Гильберта была больше, чем простое собрание математических проблем. Она отражала его философию математики и предлагала проблемы, важные с точки зрения его философии. И хотя прошло более столетия, лекция Гильберта является такой же важной и может быть прочитана с большим интересом каждым, кто интересуется математическими исследованиями.

Как известно, 10-я проблема Гильберта называется *"Задачей о разрешении диофантовых уравнений"* и для того, чтобы объяснить суть этой проблемы, мы должны возвратиться на 17 веков назад к античному математику **Диофанту**. Мы очень мало знаем о Диофанте, который считается последним великим математиком античности. Его творчество сыграло столь значительную роль в истории алгебры, что многие историки математики приложили немало усилий, чтобы определить срок его жизни. Предполагается, что он жил в середине 3-го столетия н.э. и прожил 84 года. Основным произведением **Диофанта** была *"Арифметика"*. Именно это фундаментальное математическое сочинение, состоящее из 13 книг, явилось поворотным пунктом в развитии алгебры и теории чисел. Диофант поставил задачу нахождения целочисленных значений алгебраического уравнения. Такие уравнения получили название *диофантовых*.

В своей знаменитой лекции 1900 г. **Давид Гильберт** изложил 10-ю проблему следующим образом.

Определение разрешимости Диофантового уравнения

Задано Диофантово уравнение с некоторым числом неизвестных и рациональными целыми коэффициентами. Необходимо придумать процедуру, которая могла

определить за конечное число операций - является ли уравнение разрешимым в рациональных целых числах.

Десятая проблема Гильберта была решена молодым русским математиком **Юрием Матиясевичем** в 1970 г. Имя Юрия Матиясевича стало широко известным в 1970 г., когда он завершил последний недостающий шаг в "негативном решении" десятой проблемы Гильберта.

Джулия Робинзон

Имя американского математика **Джулии Робинзон** не может быть отделено от 10-й проблемы Гильберта. Рассмотрим научную биографию Джулии Робинзон. Она родилась 8-го декабря 1919 г. и умерла 30-го июля 1985 г. в США. После окончания средней школы в Сан Диего она поступила в государственный колледж Сан Диего. Затем она перевелась в Калифорнийский университет в Беркли. Робинзон получила докторскую степень в 1948 г. и в этом же году она начала работать над десятой проблемой Гильберта: найти эффективный способ разрешимости *диофантового уравнения* в общем виде. Вместе с **Мартином Девисом** и *Хиллари Путман* она получила ряд математических результатов, которые являлись существенным вкладом в решение десятой проблемы Гильберта. Она также сделала важную работу по этой проблеме вместе с Матиясевичем, после того как он дал решение десятой проблемы Гильберта в 1970 г.

Об использовании чисел Фибоначчи

И сейчас мы приблизились к главному - использованию чисел Фибоначчи для решения 10-й проблемы Гильберта. Матиясевич пишет:

"Мой следующий шаг состоял в том, чтобы рассмотреть широкий класс уравнений для двоичных слов дополнительными условиями. Так как конечной целью всегда была 10-я проблема Гильберта я мог бы рассматривать только такие условия, которые (при подходящем кодировании) были бы представлены Диофантовыми уравнениями. Таким путем я пришел к таким уравнениями, которые я назвал "equations in words and length" (уравнениями с ограниченными длинами серий). Приведение к таким уравнениям было основано на знаменитых числах Фибоначчи. Хорошо извкстно, что каждое натуральное число может быть представлено единственным образом как сумма различных чисел Фибоначчи, в которой нет двух соседних чисел Фибоначчи (так называемое представление Цекендорфа). Таким образом, мы можем рассматривать натуральные числа как двоичные словах с дополнительным условием, что в таких двоичных словах две 1 рядом не встречаются. Я изловчился показать, что при таком представлении чисел двоичными словами как последовательности слов, так и уравнения, равные длине двух слов, могут быть выражены Диофантовыми уравнениями".

Представление Цекендорфа

Вряд ли бельгийский врач Эдуард Цекендорф (1901-1983) мог предполагать, что его увлечение математикой окажется настолько серьезным, что один из его математических результатов будет использован при решении 10-й проблемы Гильберта. Речь идет о знаменитых *"суммах Цекендорфа"* или *"представлении Цекендорфа"*. В 1939 г. Цекендорф опубликовал статью, в которой доказал теорему о том, что каждое положительное целое число имеет единственное представление в виде суммы чисел Фибоначчи, в которой два соседних числа Фибоначчи никогда не используются.

Поясним эту теорему на простом примере. Предположим, что требуется представить в коде Фибоначчи число 30. Выберем в качестве весов разрядов для такого представления следующие числа Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Тогда существует несколько способов представления числа 30 в виде суммы чисел Фибоначчи: 30 = 21 + 8 + 1 = 21 + 5 + 3 + 1 = 13 + 8 + 5 + 3 + 1 = 13 + 8 + 5 + 2 + 1 + 1. Но среди них можно выделить только одно представление 30 = 21 + 8 + 1, в котором два соседних числа Фибоначчи никогда рядом не встречаются. Цекендорф доказал, что этот результат носит общий характер и справедлив для любого натурального числа.

Заметим, что указанное выше "представление Цекендорфа" называется "минимальной формой". Именно идея "минимальной формы" лежит в основе "Фибоначчиевой арифметики", которую мы рассмотрим ниже. Заметим также, что исследование "сумм Цекендорфа" явилось предметом многих статей, опубликованных в "The Fibonacci Quarterly".

Теорема Воробьева

Юрий Матиясевич написал:

"Благодаря моей предыдущей работе, я понимал важность чисел Фибоначчи для решения 10-й проблемы Гильберта. Вот почему в течение лета 1969 года я читал с огромным интересом третье расширенное издание популярной книги по числам Фибоначчи, написанной Н.Н. Ворбьевым из Ленинграда. Кажется невероятным, что в 20-м столетии можно было найти что-то новое о числах, введенных Фибоначчи еще в 13-м столетии в связи с размножением кроликов. Однако, новое издание книги содержало, кроме традиционного материала, некоторые оригинальные результаты автора. На самом деле Воробьев получил на четверть столетия раньше, но он никогда их не публиковал. Его результаты привлекли мое внимание сразу же, но я был еще не способен использовать их непосредственно для построения Диофантовых представлений экспоненциального типа".

Оценивая влияние Воробьева и Робинзон на его решение 10-й проблемы Гильберта, Матиясевич пишет:

"В период, когда я уже не думал о Диофантовых уравнениях, теорема Воробьева и новые идеи Джулии Робинзон привели меня к отрицательному решению 10-й проблемы Гильберта. В январе 1970 г. я впервые выступил с докладом по Диофантовым уравнениям экспоненциального типа ...

Удивительно, для того, чтобы сконструировать Диофантово представление я нуждался в доказательстве уже нового чисто теоретико-числового результата , касающегося чисел Фибоначчи, а именно, что <u>к-е число Фибоначчи делится квадратом l-го числа Фибоначчи, тогда и только тогда, когда k делится l-м числом Фибоначчи</u>. Это свойство нетрудно доказать; однако поразительно то, что этот замечательный факт не был открыт даже экспериментально со времени Фибоначчи".

И далее Юрий Матиясевич высоко оценил роль Николая Воробьева и Джулии Робинзон в решении 10-й проблемы Гильберта в следующих словах:

"Мое оригинальное доказательство ... основывалось на теореме, доказанной в 1942 г. советским математиком Николаем Воробьевым, но опубликованной только в третьем расширенном издании его популярной книги.

... После того, как я прочитал статью Джулии Робинзон, я сразу же увидел, что теорема Воробьева может быть очень полезной. Джулия Робинзон не видела 3-го издания книги Воробьева до тех пор, пока она не получила копию от меня в 1970 г. Кто мог сказать, что бы случилось, если бы Воробьев включил свою теорему в первое издание своей книги? Возможно, что 10-я проблема Гильберта была решена на десять лет раньше!"

В развитие вопроса **Юрия Матиясевича**, мы вправе поставить следующий вопрос: а что бы случилось, если бы итальянский математик **Фибоначчи** не открыл числа Фибоначчи в 13 в.? Возможно, 10-я проблема Гильберта вообще не была бы решена до сих пор. Конечно, теорема Воробьева, использованная Юрий Матиясевичем, является чрезвычайно важным математическим результатом, но все же главным «виновником» решения 10-й проблемы Гильберта является

итальянский математик Леонардо из Пизы (по прозвищу Фибоначчи), опубликовавший в 1202 г. книгу “Liber abaci”, в которой он описал знаменитую «задачу о размножении кроликов», из которой вытекают числа Фибоначчи.

Но ведь теория чисел Фибоначчи и «золотого сечения», развиваемая математиками-фибоначчистами [15-17], является важной составной частью «математики гармонии» [22]. И мы должны благодарить Юрия Матиясевича за то, что он принадлежит к той категории математиков, которые уважительно относятся к *теории чисел Фибоначчи и «золотого сечения»* [15-17] и (я надеюсь) и к «математике гармонии» [22].

Главный вывод из этих рассуждений состоит в том, что решение одной из наиболее серьезных проблем математики - 10-й проблемы Гильберта – получено с использованием *теории чисел Фибоначчи* [15-17]. И этот факт сам по себе оправдывает теоретические исследования, проводимые математиками-фибоначчистами.

4.9. *Формулы Бине, гиперболические функции Фибоначчи и Люка и геометрия Боднара*

Считается, что гиперболические функции были введены итальянским математиком **Винченцо Риккати** (Vincenzo Riccati) в 1757 году. Он получил их из рассмотрения единичной гиперболы. Он же первым ввел обозначения sh и ch. Дальнейшее исследование свойств гиперболических функций было проведено **Ламбертом.**

Однако интерес к гиперболическим функциям резко повысился в 19 в., когда российский математик **Николай Лобачевский** разработал новый вид геометрии, основанной на *гиперболических функциях* и поэтому названной *гиперболической геометрией.*

В 19 в. французский математик **Жак Филлип Мари Бине** (1786-1856) вывел интересные формулы, которые позволяют выразить числа Фибоначчи и Люка через «золотую пропорцию»:

$$L_n = \begin{cases} \Phi^n + \Phi^{-n} & \text{для} \quad n = 2k; \\ \Phi^n - \Phi^{-n} & \text{для} \quad n = 2k+1 \end{cases} \tag{4}$$

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \quad n = 2k+1; \\ \dfrac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \quad n = 2k \end{cases} \tag{5}$$

Анализ формул (4), (5) дает нам возможность ощутить истинное эстетическое наслаждение и еще раз убедиться в мощи человеческого разума. Действительно, ведь мы знаем, что числа Фибоначчи и числа Люка всегда являются целыми числами. С другой стороны, любая степень золотой пропорции является иррациональным числом. Отсюда вытекает, что целые числа L_n и F_n с помощью формул (4), (5) очень просто выражаются через специальные иррациональные числа.

Справедливости ради необходимо заметить, что формулы (4), (5) были выведены **Абрахамом де Муавром** (1667-1754) и **Николаем Бернулли** (1687-1759) на одно столетие раньше **Жака Бине**. Однако в современной математической литературе формулы (4), (5) называются *формулами Бине.*

Обычно в математике используется представление *формул Бине* в виде, несколько отличающемся от (4), (5). Впервые представление этих формул в виде (4), (5) было использовано мною в книге [4]. Но именно в таком виде четко прослеживается «гиперболический характер» чисел Фибоначчи и Люка, потому что формулы Бине, представленные в виде (4), (5), оказываются подобными по своему виду формулам, задающим классические гиперболические функции. Вот эта аналогия и лежит в основе нового класса гиперболических функций, названных *гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка (ГФФЛ).* Впервые к новому классу гиперболических функций, основанных на *формулах Бине*, пришли украинские математики **Алексей Стахов** и **Иван Ткаченко** в конце 80-х годов 20-го столетия. Первая статья с описанием этого математического открытия была опубликована в виде препринта [35]. В 1993 г. согласно рекомендации академика Митропольского в журнале «Доклады Академии наук Украины» была опубликована статья **Алексея Стахова** и **Ивана**

Ткаченко *«Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи»* [36] и благодаря этой публикации научный мир узнал о новом классе гиперболических функций.

Теория ГФФЛ получила дальнейшее развитие в статьях **Алексея Стахова** и **Бориса Розина**, опубликованных в международном журнале “Chaos, Solitons & Fractals” [37] и международном электроннном журнале «Visual Mathematics” [38]. В этих статях введены так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка.*

Симметричный гиперболический синус Фибоначчи

$$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{6}$$

Симметричный гиперболический косинус Фибоначчи

$$cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{7}$$

Симметричный гиперболический синус Люка

$$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x} \tag{8}$$

Симметричный гиперболический косинус Люка

$$cLs(x) = \Phi^x + \Phi^{-x} \tag{9}$$

При этом числа Фибоначчи и Люка оказываются тесно связанными с гиперболическими синусами и косинусами Фибоначчи и Люка и однозначно определяются через них следующим образом:

$$F_n = \begin{cases} sFs(n) & \textbf{при} \quad n = 2k \\ cFs(n) & \textbf{при} \quad n = 2k+1 \end{cases}; \qquad L_n = \begin{cases} cLs(n) & \textbf{при} \quad n = 2k \\ sLs(n) & \textbf{при} \quad n = 2k+1 \end{cases} \tag{10}$$

Необходимо отметить, что согласно (10), числам Фибоначчи с четными индексами (n=2k) всегда соответствует симметричный фибоначчиевый синус $sFs(x)$, а с нечетными индексами (n=2k+1) – симметричный фибоначчиевый косинус $cFs(x)$, в то время как числам Люка с четными индексами всегда соответствует симметричный люковый косинус $cLs(x)$, а с нечетными индексами – симметричный люковый синус $sLs(x)$. Введенные выше симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка связаны между собой следующими простыми соотношениями:

$$sFs(x) = \frac{sLs(x)}{\sqrt{5}}; \qquad cFs(x) = \frac{cLs(x)}{\sqrt{5}} \tag{11}$$

Как вытекает из соотношений (10), между *теорией чисел Фибоначчи* [15-17] и теорией *гиперболических функций Фибоначчи и Люка* (ГФФЛ) существует очень глубокая связь. В дискретных точках пространства числа Фибоначчи совпадают с ГФФЛ. Это означает, что дискретный «мир Фибоначчи» является частным случаем непрерывного «золотого мира», порождаемого ГФФЛ. Оказывается, любому дискретному тождеству для чисел Фибоначчи соответствует некоторые непрерывное тождество (точнее, два тождества) для ГФФЛ. И обратно. Каждое тождество для ГФФЛ с помощью соотношений (10) может быть превращено в соответствующее дискретное тождество для чисел Фибоначчи. А отсюда вытекает, что теория ГФФЛ является обобщением теории чисел Фибоначчи для непрерывного пространства. То есть, благодаря ГФФЛ теория чисел Фибоначчи как бы «вырождается». Она заменяется более общей теорией ГФФЛ.

Однако, справедливости ради, надо сказать, что независимо от Стахова и Ткаченко примерно в тот же период к подобным функциям пришел украинский архитектор **Олег Боднар**. Свои функции он назвал *«золотыми гиперболическими функциями»*. Не имеет принципиального значения вопрос о приоритете и авторстве нового класса гиперболических функций (хотя некоторые «деятели», примкнувшие в последние годы к «золотосеченскому движению» пытались поссорить меня с Олегом Боднаром на почве спора о «приоритете». К их удивлению, проф. Боднар оказался значительно порядочнее и выше этих «деятелей» как в интеллектуальном отношении, так и в отношении научной этикпи). Как подчеркнул Олег Боднар, открытие «золотых гиперболических функций» и «гиперболических функций Фибоначчи и Люка» было сделано примерно в одно и то же время (конец

80-х годов) независимо друг от друга украинскими учеными **О. Боднаром** [10], с одной стороны, и с другой стороны, **А. Стаховым, И. Ткаченко** [35,36], а позже к этим исследованиям присоединился **Б. Розин** [37,38]. Однако пути к этому открытию были различными. **А. Стахов, И. Ткаченко** и **Б. Розин** [35-38] для этой цели использовали «формулы Бине» (4), (5), связывающие числа Фибоначчи и Люка с «золотым сечением»; к «золотым гиперболическим функциям» Боднара привела к этому его блестящая научная интуиция, подсказавшая ему, что именно такие функции отражают сущность филлотаксиса и что именно они должны быть положены в основу математического исследования явления филлотаксиса. **В любом случае приоритет в открытии нового класса гиперболических функций принадлежит представителям украинской науки.**

Таким образом, итогом исследований, проведенных украинским ученым **О. Боднаром** [10], можно считать создание новой геометрической теории филлотаксиса, основанной на «золотых» гиперболических функциях. Из «геометрии Боднара» вытекает, что *гиперболическая геометрия является универсальной моделью пространственно-временных процессов, имеющих место, как в живой, так и неживой природе.* При этом фундаментальным принципом преобразования в естественных процессах является *гиперболический поворот*. Однако, существует заметное различие между гиперболическими геометриями живой и неживой природы. Гиперболическая геометрия неживой природы основывается на классических гиперболических функциях, которые лежат в основе геометрии Лобачевского. Сущность этой геометрии выражается с помощью числа *e*, которое наряду с числом π является одной из важнейших математических констант математики. Гиперболическая геометрия живой природы основывается на другом классе гиперболических функций, «золотых гиперболических функциях», сущностью которых является *золотая пропорция, которая является фундаментальной константой живой природы.*

Поскольку гиперболические функции Фибоначчи и Люка отражают такое важное явление живой природы как филлотаксис («геометрия Боднара»), то согласно Фурье, эти функции (вместе с «геометрией Боднара») с полным правом могут быть отнесены к разряду фундаментальных открытий современной науки.

4.10. *Алгоритмическая теория измерения: от аналого-цифровых преобразователей к «принципу асимметрии природы» и новым системам счисления*

Как отмечает **А.Н. Колмогоров** [19], математика берет свое начало от двух практических задач: *счета* и *измерения*. Свое отражение эти задачи находят в двух фундаменнтальных математических теориях, которые возникли в античный период – *теории чисел* и *теории измерения*. О роли *измерения* в математике хорошо сказал болгарский математик академик **Илиев** [38]:

«На протяжении первой эпохи своего развития – от античности и вплоть до открытия дифференциального и иинтегрального счисления – математика, исследуя в первую очередь проблемы измерения величин, создала геометрию Евклида и учение о числах».

Современным математикам может показаться удивительным, что современная техника может стать источником новых математических теорий. Ясно, что такие теории могут быть созданы только с участием инженеров, которые могут сформулировать новые математические задачи. В этом состоит главное преимущество инженерног творчества перед матепматическим: инженеры знают, что делать, и могут формулировать интересные математические задачи, важные с точки зрения запросов практики. Поэтому многие выдающиеся математики (в их числе академик Митропольский) являются инженерами по базовому образованию.

В начале 60-х годов 20 в. в измерительной технике возникла новая область – *техника аналого-цифрового и цифроаналогового преобразования*. В этой области возникла новая математичексая задача – *синтез оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования*. Такая задача никогда не возникала в математике. Моя инженерная деятельность началась с аналого-цифровых преобразователей, в которых широко использовался *«двоичный» алгоритм измеренния*, основанный на системе из *n* «двоичных гирь» $\left\{2^{n-1}, 2^{n-2}, ..., 2^1, 2^0 = 1\right\}$. Анализируя этот алгоритм на примере

взвешивания неизвестного груза *Q* с помощью системы «двоичных гирь» (Рис.5), я пришел к небольшому научному открытию, которое я назвал *принципом асимметрии измерения* [40].

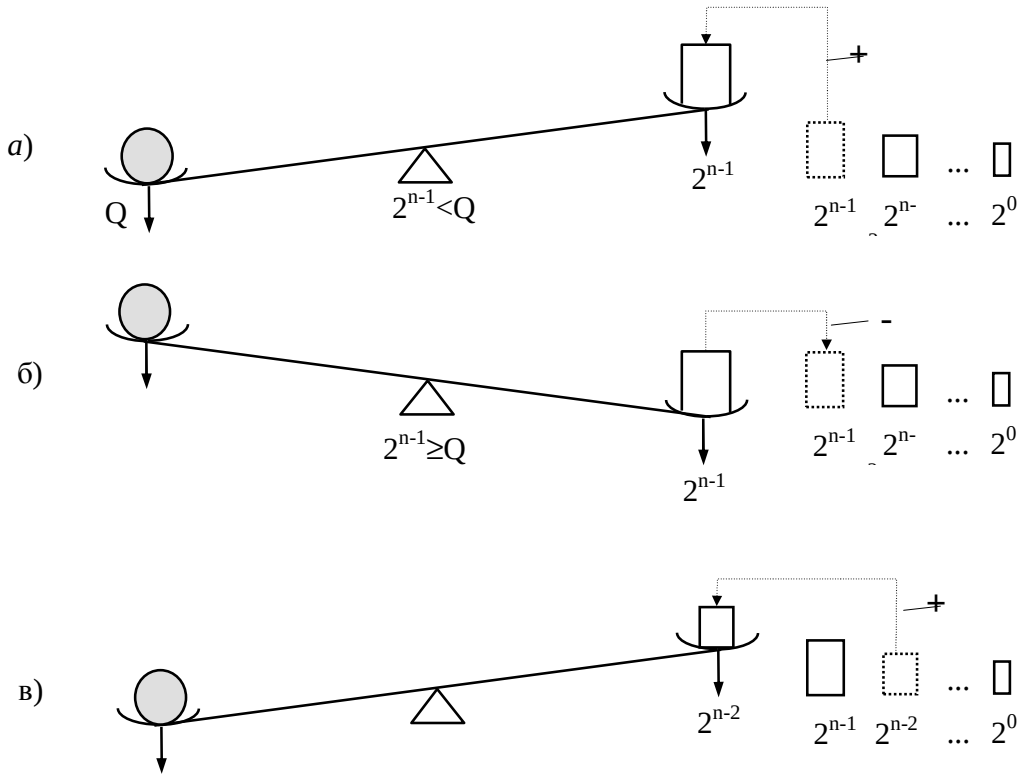


Рисунок 5. Принцип асимметрии измерения

Суть этого принципа состоит в следующем. На первом шаге взвешивания на правую чашу весов кладется «старшая» гиря весом 2^{n-1} (Рис. 5-*а*), что обозначено символом «+» («добавить»). При этом могут возникнуть две ситуации, изображенные на рис. 5-*а* (2^{n-1} < Q) и на Рис. 5-*б* (2^{n-1}≥Q). В первом случае (Рис. 5-*а*) следующий шаг состоит в том, чтобы добавить (+) на правую чашу весов очередную по старшинству гирю 2^{n-2}. Во втором случае (Рис. 5-*б*) «весовщик» должен выполнить две операции: снять (-) предыдущую гирю, после чего весы возвращаются в исходное положение (Рис. 5-в); после возвращения рычажных весов в исходное положение он должен добавить (+) на правую чашу весов следующую по старшинству гирю.

Следовательно, **логика любого сравнения с помощью рычажных весов *«несимметрична»*, так как предполагает различную степень сложности действий «весовщика» в зависимости от положений, в которых оказываются рычажные весы (устройство сравнения) после очередного шага сравнения; при этом действия "весовщика" после получения сигнала "больше" (правая чаша перевесила) оказываются "сложнее" по сравнению с его действиями после получения сигнала "меньше" (весы остались в исходном положении).**

Обнаруженное свойство измерения и составляет содержание *принципа асимметрии измерения* [40]. Сложность действий «весовщика» после получения сигнала «больше» (ситуация на Рис. 5-*б*) определяется двумя факторами. Во-первых, он должен снять гирю и, во-вторых, учесть время, затрачиваемое на «восстановление» весов в исходное положение. Введение *восстановительного периода* устройства сравнения (рычажных весов) и учет этого периода в математической модели измерения и его алгоритме и является центральной идеей *алгоритмической теории измерения* [40], вытекающей из *принципа асимметрии измерения*.

При этом возникает задача синтеза *оптимального алгоритма измерения* с учетом *принципа асимметрии измерения.* Для решения этой далеко нетривиальной математической задачи был привлечен талантливый математик **Игорь Витенько** (1938-1974), выпускник Львовского университета. Совместно с Витенько эта задача была успешно решена [39]. Эта теория была положена в основу так называемой *алгоритмической теории измерения* [40]. Эта теория, изложенная в книге [40], которая была посвящена светлой памяти Игоря Витенько, ушедшему из жизни в 1974 г. Эта теория имеет фундаментальное значение, как для математики, так и для компьютерной науки. В этой теории доказано, что **существует теоретически бесконечное число новых, неизвестных ранее «оптимальных» алгоритмов измерения, каждый из которых порождает новый позиционный способ представления чисел.**

Наиболее необычными оказались так называемые «фибоначчиевые» алгоритмы измерения, основанные на числовых последовательностях, названных *p-числами Фибоначчи* и задаваемые при заданном $p = 0,1,2,3,...$ следующим рекуррентным соотношением:

$$F_p(n) = F_p(n\text{-}1)+F_p(n\text{-}p\text{-}1) \quad \text{для} \quad n>p+1 \tag{12}$$

при начальных условиях

$$F_p(1) = F_p(2) = ... = F_p(p+1) = 1 \tag{13}$$

Заметим, что *p-числа Фибоначчи* были впервые введены в современную математику в 60-е годы 20 в. при решении задачи синтеза оптимальных алгоритмов измерения.

«Фибоначчиевые» алгоритмы измерения, основанные на *p-числах Фибоначчи,* порождают следующие позиционные способы представления чисел, названные *p-кодами Фибоначчи*:

$$N = a_nF_p(n) + a_{n\text{-}1}F_p(n\text{-}1) + ... + a_iF_p(i) + ... + a_1F_p(1), \tag{14}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра i-го разряда кода (14); n – разрядность кода (14); $F_p(i)$ – вес i-го разряда, вычисляемый в соответствии с рекуррентным соотношением (12) при начальных условиях (13).

P-коды Фибоначчи, задаваемые (14), включают в себя бесконечное число различных методов позиционного представления, потому что каждое p «порождает» свой собственный p-код Фибоначчи (p = 0, 1, 2, 3, ...).

Пусть p = 0. Для этого случая 0-числа Фибоначчи $F_0(i)$ совпадают с «двоичными» числами, то есть, $F_0(i) = 2^{i\text{-}1}$. Представление (14) для этого случая принимает форму «двоичного» кода:

$$N = a_n2^{n\text{-}1} + a_{n\text{-}1}2^{n\text{-}2} + ... + a_i2^{i\text{-}1} + ... + a_12^0, \tag{15}$$

Пусть p =1. Для этого случая 1-числа Фибоначчи $F_1(i)$ совпадают с классическими числами Фибоначчи, то есть, $F_p(i) = F(i)$. Представление (14) для этого случая принимает вид:

$$N = a_nF(n) + a_{n\text{-}1}F(n\text{-}1) + ... + a_iF(i) + ... + a_1F(1). \tag{16}$$

Интересно подчеркнуть, что представление (16) в теории чисел Фибоначчи [16] известно под названием «суммы Цекендорфа» в честь бельгийского исследователя **Эдуарда Цекендорфа** (1901-1983), который, используя (16), доказал еще в 1939 г. *теорему Цекендорфа.* Теорема Цекендорфа утверждает, что каждое натуральное число может быть представлено единственным образом в виде суммы (13), состоящей из одного или нескольких различных чисел Фибоначчи, таким образом, чтобы сумма не включала два соседних числа Фибоначчи. Например, $100 = 89 + 8 + 3$. Заметим, что именно это свойство представления (16) Юрий Матиясевич использовал при доказательстве 10-й проблемы Гильберта.

Пусть теперь $p = \infty$. В этом случае все p-числа Фибоначчи тождественно равны 1, то есть, для любого i имеем: $F_p(i) = 1$. В этом случае представление (14) принимает следующий вид:

$$N = \underbrace{1+1+...+1}_{N}. \tag{17}$$

Таким образом, p-коды Фибоначчи являются весьма широким обобщением «двоичного» кода (15), соответствующего случаю p=0. Частными случаями *p-кодов Фибоначчи* являются *«суммы Цекендорфа»* (16) (p=1) и *«унитарный» код* (14) ($p = \infty$), который лежит в основе «элементарной теории чисел».

Таким образом, *алгоритмическая теория измерения* [40] приводит нас к важному математическому результату в области теории систем счисления. Формула (14), задающая *p*-код Фибоначчи, является обобщением «двоичной» системы счисления (15)! Благодаря этому открытию мы теперь знаем, что существует бесконечное число «двоичных» позиционных представлений, которые задаются некоторой общей формулой (14)! И классическая «двоичная» система счисления (15) является всего лишь частным случаем *p*-кода Фибоначчи (14).

Вот эта идея и лежит в основе новой компьютерной арифметики – *арифметики Фибоначчи*, которая была разработана мною в период моей работы в Таганрогском радиотехническом институте (1971-1977) и впервые изложена в статье, опубликованной в одном из научных сборников ТРТИ [41].

В заключение еще одно замечание, касающееся «асимметрии» и «гармонии». «Принцип асимметрии измерения», который лежит в основе *алгоритмической теории измерения* [40], имеет значение, далеко выходящее за рамки этой теории. Дело в том, что существует аналогия (изоморфизм) между «принципом асимметрии измерения» и "размножением кроликов" (Фибоначчи). По существу, «размножение кроликов» также *асимметрично*. Каждая пара кроликов ежемесячно превращается в пару кроликов - **зрелую** и **новорожденную**. Это - асимметричное деление. На «принципе асимметричного деления» построена вся живая природа. Следствием «задачи о кроликах» явились *числа Фибоначчи*, которые, как было показано выше, выражают «гармонию», то есть, получается, что **"асимметрия порождает гармонию".** То же самое происходит и с "принципом асимметрии измерения", который порождает оптимальные алгоритмы измерения, основанные на *p*-числах Фибоначчи. Используя *p*-числа Фибоначчи, Сороко сформулировал свой **"закон структурной гармонии систем"** [2]**.**

4.11. *Обобщение задачи о «золотом сечении»*

А теперь исследуем отношение соседних *p*-чисел Фибоначчи $F_p(n)/F_p(n\text{-}1)$ при $n \to \infty$, то есть, найдем предел отношения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = x .$$

В работе [40] показано, что эта задача сводится к решению алгебраического уравнения:

$$x^{p+1} = x^p + 1, \tag{18}$$

которое при $p=1$ сводится к классическому «уравнению золотого сечения»:

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{19}$$

корнем которого является «золотая пропорция».

Положительный корень уравнения (18) Φ_p был назван в [40] *обобщенной золотой пропорцией* или *золотой p-пропорцией.*

Значения золотых *p*-пропорций для начальных значений *p* приведены в таблице.

Золотые *p*-пропорции

p	0	1	2	3	...	∞
Φ_p	2	1,618	1,465	1,380	...	1

Таким образом, между числами $\Phi_p = 2$ и $\Phi_\infty = 1$ находится бесконечное число иррациональных чисел, *золотых p-пропорций*, которые выражают более сложные «гармонии», чем классическая золотая пропорция $\Phi_1 = 1.618$. То есть, золотых *p*-пропорций существует бесконечное количество.

Классическая задача о «золотом сечении» допускает следующее обобщение. Зададимся целым неотрицательным числом $p=0, 1, 2, 3, \ldots$ и разделим отрезок *AB* точкой *C* в следующей пропорции:

$$\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p \tag{20}$$

Если обозначить $\frac{AB}{CB} = x$ и учесть, что $AB = AC + CB$, то отношение $\frac{AB}{CB} = x$ можно представить в виде:

$$x = \frac{AC + CB}{CB} = 1 + \frac{1}{\frac{CB}{AC}} \tag{21}$$

откуда вытекает алгебраическое уравнение (18), полученное нами при исследовании предела отношений соседних p-чисел Фибоначчи.

Это означает, что деление отрезка в пропорции (20) осуществляется в отношении золотой p-пропорции Φ_p. Заметим, что пропорция (20) сводится к «дихотомии» (то есть к делению отрезка пополам) для случая $p = 0$ и к классическому золотому сечению для случая $p = 1$. Таким образом, задача (20) есть обобщение классической задачи о золотом сечении. Учитывая это обстоятельство, деление отрезка AB точкой C в пропорции (20) было названо *золотым p-сечением,* а положительный корень алгебраического уравнения (19) *золотой p-пропорцией* [40].

В свое время обобщение задачи о «золотом сечении» вызвало восторг у академика **Юрия Алексеевича Митропольского**. В своем отзыве он написал [42]:

«В течение нескольких тысячелетий, начиная с Пифагора и Платона, человечество пользовалось широко известным классическим Золотым Сечением, которое считалось единственным, уникальным и неповторимым. И вот в конце 20-го века украинский ученый Стахов обобщает эту задачу и доказывает существование бесконечного числа Золотых Сечений! И все они имеют такое же право на существование, как и классическое Золотое Сечение. Более того, Стахов показывает, что Золотые p-пропорции τ_p ($1 \le \tau_p \le 2$) представляют собой новый класс иррациональных чисел, которые выражают некоторые неизвестные нам до этого математические свойства треугольника Паскаля. Ясно, что такой математический результат имеет фундаментальное значение для развития современной науки и математики».

4.12. *Система Бергмана, коды золотой пропорции и «золотая» теория чисел*

В 1957 юный американский математик **Джордж Бергман** сделал важное математическое открытие в области систем счисления. В статье [9], он предложил необычный позиционный способ представления чисел:

$$A = \sum_i a_i \Phi^i, \tag{22}$$

где A – действительное число, a_i – двоичная цифра {0,1} i-го разряда, i=0,±1,±2,±3,…, Φ^i - вес i-го разряда, $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ (золотая пропорция) - основание системы счисления (22).

Заметим, что веса разрядов Φ^i $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...)$ связаны друг с другом следующими изящными соотношениями:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1}. \tag{23}$$

Принципиальное отличие системы (22) от других позиционных систем счисления, в частности, двоичной, состоит в том, что основанием системы счисления (22) является иррациональное число $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ (золотая пропорция), то есть, то число, которое широко использует природа в своих конструкциях. Бергман назвал систему (22) *системой счисления с иррациональным основанием*.

В системе счисления Бергмана (22) основанием системы, то есть, началом исчисления является иррациональное число $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, с помощью которого можно представить все действительные числа, то есть иррациональное число $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ является исходным, первичным числом, с помощью которого можно представить все реальные числа, включая натуральные и рациональные. **Именно поэтому мы имеем полное право утверждать, что система Бергмана (22) является**

одним из наиболее важных математических открытий в области систем счисления после открытия позиционного принципа представления чисел (Вавилон, 2000 г. до н.э.) и десятичной системы (Индия, 5-8 столетие нашей эры).

Используя понятие *золотой p-пропорции*, можно обобщить систему Бергмана и предложить следующий способ позиционного представления чисел:

$$A = \sum_i a_i \Phi_p^i , \qquad (24)$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра i-го разряда системы счисления (24), $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, Φ_p - основание системы счисления (24), причем

$$\Phi_p^i = \Phi_p^{i-1} + \Phi_p^{i-p-1} = \Phi_p \times \Phi_p^{i-1}. \qquad (25)$$

Заметим, что выражение (24) было введено **Алексеем Стаховым** в 1980 г. [43] и названо *кодом золотой p-пропорции*. Теория кодов золотой p-пропорции изложена в книге [4].

Выражение (24) «генерирует» бесконечное количество новых позиционных систем счисления, так как каждому p (p=0, 1, 2, 3, …) соответствует своя система счисления типа (24). Заметим, что при p=0 основание $\Phi_p = \Phi_0 = 2$ и система счисления (24) сводится к классической двоичной системе, лежащей в основе современной компьютерной технологии.

Для случая p=1 основанием системы счисления (24) является классическая золотая пропорция $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ и система (24) сводится к системе Бергмана (22). Таким образом, мы можем рассматривать позиционный способ представления чисел, задаваемый (24), как весьма широкое обобщение двоичной системы и системы Бергмана (22).

Заметим, что при $p > 0$ все основания Φ_p системы счисления (24) являются иррациональными числами. Это означает, что выражение (24) задает новый, более широкий класс систем счисления с иррациональными основаниями.

Таким образом, исследования **Джорджа Бергмана** [9] и **Алексея Стахова** [4, 43] привели к открытию нового класса позиционных систем счисления, которые могут стать основой новой информационной технологии – *«Золотой» Информационной Технологии*, основы которой изложены в работах [44,45].

Но системы счисления (22), (24) имеют фундаментальное значение и для развития математики, так как могут привести к созданию новой «элементарной теории чисел» - *«золотой» теории чисел.* Эта идея впервые изложена автором в статье «Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа» [46], опубликованной в *Украинском Математическом Журнале* по рекомендации академика Ю.А. Митропольского. Развитие этой идеи изложено в ряде статей автора [47-49], опубликованных на сайте Академии Тринитаризма.

4.13. *«Металлические пропорции», формулы Газале, золотая фибоначчиевая гониометрия и решение 4-й проблемы Гильберта*

В 2006 г. **Алексей Стахов** ввел новый класс гиперболических функций [50], основанный на так называемых «металлических пропорциях» (название введено аргентинским математиком **Верой Шпинадель** [51]). Следует отметить, что к идее «металлических пропорций», независимо от **Веры Шпинадель** [51], пришло сразу несколько исследователей из разных стран: французский математик египетского происхождения **Мидхат Газале** [52], американский математик **Джей Капрафф** [53] и российский исследователь **Александр Татаренко** [54]. В 2008 г. **Алексей Стахов и Самуил Арансон** с использованием нового класса гиперболических функций, названного «золотой» фибоначчиевой гониометрией, получили оригинальное решение 4-й проблемы Гильберта [55,56].

Исходным понятием «золотой» фибоначчиевой гониометрии является следующее рекуррентное соотношение, задаваемое для любого действительного числа $\lambda > 0$:

$$F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1) + F_\lambda(n); \qquad F_\lambda(0) = 0, F_\lambda(1) = 1. \tag{23}$$

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ рекуррентное соотношение (23) сводится к рекуррентному соотношению

$$F_1(n+2) = F_1(n+1) + F_1(n); \; F_1(0) = 0, F_1(1) = 1, \tag{24}$$

которое задает *числа Фибоначчи*. Основываясь на этой аналогии, числовые последовательности, генерируемые рекуррентным соотношением (23), были названы λ-*числами Фибоначчи* [55]. Поскольку каждое число $\lambda > 0$ генерирует свою собственную последовательность типа (23), то это означает, что множество новых рекуррентных числовых последовательностей, задаваемых (23), бесконечно. Их столько же, сколько существует действительных чисел $\lambda > 0$.

От рекуррентного соотношения (23) легко перейти к следующему характеристическому уравнению:

$$x^2 - \lambda x - 1 = 0 \tag{25}$$

Нам хорошо известно из средней школы, что уравнение (25) имеет два корня:

$$x_1 = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \tag{26}$$

$$x_2 = \frac{\lambda - \sqrt{4+\lambda^2}}{2}. \tag{27}$$

Обозначим через Φ_λ положительный корень x_1, задаваемый (26), и рассмотрим новый класс математических констант, задаваемых следующей формулой:

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}. \tag{27}$$

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ формула (27) задает классическую «золотую пропорцию»:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{28}$$

Уже этот факт может привлечь наше внимание к формуле (27), которая является ни чем иным, как обобщением формулы (28) для «золотой пропорции».

Аргентинский математик **Вера Шпинадель** назвала математические константы, задаваемые выражением (8.13), *металлическими пропорциями* [51]. Если в (27) мы примем λ =1, 2, 3, 4, тогда мы получим следующие математические константы, имеющие, согласно Шпинадель, следующие названия:

$$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\textbf{золотая пропорция}, \lambda \quad \mathbf{1}\right); \quad \Phi_2 = \mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{2}} \left(\textbf{серебряная пропорция}, \lambda \quad \mathbf{2}\right);$$

$$\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \left(\textbf{бронзовая пропорция}, \lambda \quad \mathbf{3}\right); \quad \Phi_4 = \mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{5}} \left(\textbf{медная пропорция}, \lambda = 4\right).$$

Остальные *металлические пропорции* ($\lambda \geq 5$) не имеют специальных названий:

$$\Phi_5 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}; \quad \Phi_6 = 3 + 2\sqrt{10}; \quad \Phi_7 = \frac{7+2\sqrt{14}}{2}; \quad \Phi_8 = 4 + \sqrt{17}\ldots$$

Ясно, что количество «металлических пропорций», задаваемых (27), теоретически бесконечно, так каждому действительному числу $\lambda > 0$ соответсвует своя металлическая пропорция типа (27). И самое интересное, что «металлические пропорции» (27) являются обобщением «золотой пропорции» (28) ($\lambda = 1$). Это дает нам основание выдвинуть гипотезу, что «металлические пропорции» (27) представляют собой новый класс математических констант, которые могут сыграть

такую же важную роль в развитии математики и теоретического естствознания, как и «золотая пропорция».

Заслуга Мидата Газале состоит в том, что он вывел следующую замечательную формулу, задающую λ-*числами Фибоначчи* через «металлические пропорции» [52]:

$$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}\ , \tag{29}$$

где n=0,±1,±2,±3,…

Учитывая авторство **Мидхата Газале** в формуле (29), **Алексей Стахов** в статье [50] назвал формулу (29) *формулой Газале* для λ-чисел Фибоначчи. В работе [50] также были выведены *формулы Газале* для λ-чисел Люка:

$$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}. \tag{30}$$

Заметим, что формулы Газале (29) и (30) являются обобщением формул Бине (1), (2), к которым они сводятся при $\lambda = 1$.

Формулы Газале (29), (30) были использованы в [50] для введения новых классов гиперболических функций - *гиперболических* λ*-функций Фибоначчи и Люка*. Рассмотрим эти функции.

<u>Гиперболический λ-синус и λ-косинус Фибоначчи</u>

$$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x - \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right], \tag{31}$$

$$cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x + \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right]. \tag{32}$$

<u>Гиперболический λ-синус и λ-косинус Люка</u>

$$sL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x} = \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x - \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \tag{33}$$

$$cL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x} = \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x + \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \tag{34}$$

где x – непрерывная переменная и $\lambda > 0$ - заданное положительное действительное число.

λ-числа Фибоначчи и Люка определяются через гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка следующим образом:

$$F_\lambda(n) = \begin{cases} sF_\lambda(n), & n = 2k \\ cF_\lambda(n), & n = 2k+1 \end{cases}; \qquad L_\lambda(n) = \begin{cases} cL_\lambda(n), & n = 2k \\ sL_\lambda(n), & n = 2k+1 \end{cases}. \tag{35}$$

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка (31)-(34) сводятся к симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка, задаваемым (3)-(6).

Важно подчеркнуть, что количество гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, задаваемых (31)-(34), теоретически бесконечно. Этот факт дает нам основание утверждать, что функции (31)-(34) образуют основу общей теории гиперболических функций, которые, с одной стороны, обладают всеми свойствами классических гиперболических функций («гиперболические свойства») и, с другой стороны, обладают «рекуррентными свойствами», подобными свойствам λ-чисел Фибоначчи и Люка.

Возникает вопрос: имеют ли введенные гиперболические функции какое-либо практическое или теоретическое значение. Убедительный ответ на этот вопрос дает новая геометрическая теория филлотаксиса, разработанная украинским исследователем **Олегом Боднаром** [10]. Боднаром показано, что «мир филлотаксиса» является «гиперболическим миром», основанным на

гиперболических функциях Фибоначчи и Люка, основанием которых является классическая «золотая пропорция». При этом к этому гиперболическому миру относится огромное количество ботанических объектов (сосновые и кедровые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечника и корзинки цветов). Таким образом, в ботаническом явлении филлотаксиса «гиперболичность» проявляет себя в «золоте». Эта гипотеза, выдвинутая Боднаром, оказалась весьма плодотворной и привела к созданию новой геометрической теории филлотаксиса.

Гиперболические функции (3)-(6) являются частным случаем гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка (31)-(34). Они основываются на «металлических пропорциях» (27). В этой связи у нас есть все основания высказать предположение, что и другие типы гиперболических функций, задаваемых (31)-(34), могут стать основой для моделирования новых «гиперболических миров», которые могут реально существовать в природе, но которые наука до сих пор не обнаружила, потому что современной науке была неизвестна «золотая» фибоначчиевая гониометрия, описанная в работе [50]. И мы можем поставить перед теоретической физикой, химией, кристаллографией, ботаникой, биологией и другими разделами теоретического естествознания задачу поиска новых «гиперболических миров» природы, основанных на других классах гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, задаваемых (31)-(34).

Но вполне возможно, что новые типы гиперболических функций (31)-(34) могут представлять интерес для тех разделов математики, которые связаны с гиперболической геометрией. Примером может служить новый подход к решению 4-й проблемы Гильберта, основанный на «золотой» фибоначчиевой гониометрии [55, 56].

Суть решения этой проблемы, изложенного в работах [55, 56], состоит в следующем.

Известно, классическая модель плоскости Лобачевского в псевдосферических координатах (u,v), $0 < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, имеющей гауссову кривизну $K = -1$ (интерпретация Бельтрами гиперболической геометрии на псевдосфере), имеет вид:

$$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2 \tag{36}$$

где ds – элемент длины, $sh(u)$ - гиперболический синус. Как вытекает из (36), ключевую роль в плоскости Лобачевского играет гиперболический синус.

Естественно, что Гильберт в своей лекции, сделанной на Международном Конгрессе математиков в 1900 г., не мог пройти мимо нерешенных математических проблем, связанных с неевклидовой геометрией. Гильберт выдвинул проблему поиска других гиперболических геометрий. Саму же 4-ю проблему Гильберт формулирует так:

«Более общий вопрос, возникающий при этом, заключается в следующем: возможно ли ещё с других плодотворных точек зрения построить геометрии, которые с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии».

Развивая идею метрической формы плоскости Лобачевского, задаваемой выражением (36), в работах [55, 56] предложено бесконечное множество метрических форм плоскости Лобачевского, основанных на гиперболических λ-функциях Фибоначчи (31), (32). Доказано [54, 55], что эти метрические формы, задаваемые в координатах $(u,v), 0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty$, имеют гауссову кривизну $K = -1$ и представляются в виде

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4}\left[sF_\lambda(u)\right]^2(dv)^2, \tag{37}$$

где $\Phi_\lambda = \dfrac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$ - металлическая пропорция и $sF_\lambda(u)$ - *гиперболический λ-синус Фибоначчи* (31). Формы (37) названы в [55, 56] *метрическими λ-формами плоскости Лобачевского*.

4.14. ***Гармонизация информатики***

Выше мы показали, что начало «Гармонизации математики» относится к 60-м годам 20-го столетия, когда советским математиком **Николаем Воробьевым** была опубликована брошюра «Числа Фибоначчи» (1961), а по инициативе американского математика **Вернера Хоггатта** и Брата **Альфреда Бруссау** в 1963 г. была организована *Фибоначчи Ассоциация* и началась публикация ежеквартальника *"The Fibonacci Quarterly"*. Процесс «Гармонизации математики», начавшийся с развития *теории чисел Фибоначчи* [15-17], оказал существенное влияние на гармонизацию современной науки, в частности, теоретического естествознания, и других областей человеческой деятельности (информатики, экономики, образования).

Информатика является научным направлением, тесно связанным с математикой. И многие математические результаты имеют прямое отношение к информатике. Пожалуй, «ключевым» открытием в области, находящейся на стыке математики и информатики, является *система счисления с иррациональным основанием*, описанная в статье американского математика Джорджа Бергмана [9]. Трудно себе представить, что математический результат, который может кардинальным образом изменить информатику, сделан Джорджем Бергманом в возрасте 12 лет! Следующим результатом, который имеет отношение и к математике и к информатике, являются *р-коды Фибоначчи* и *арифметика Фибоначчи.* Этот результат был получен мною в 1974 г. [41]. Арифметика Фибоначчи описана в книге [40]. Наконец, еще один результат – это *коды золотой р-пропорции*, которые были введены мною в 1980 г. [43]. Теория этих кодов и основанная на них «золотая» арифметика описана в книге [4].

После публикации моих статей и книг [4,40,41,43], а также в связи с моим выступлением с докладом «*Алгоритмическая теория измерения и основания компьютерной арифметики*» на объединенном заседании компьютерного и кибернетического обществ Австрии (Вена, 3 марта 1976 г.) ситуация с фибоначчиевой информатикой («гармонизация информатики») начала стремительно развиваться. Российский философ проф. **Сергей Абачиев**, один из лучших российских специалистов в области истории и методологии науки, очень красочно описал эту ситуацию в статье [57]:

«Открытие 12-летним вундеркиндом Дж. Бергманом «золотой» иррациональной системы счисления никак не предопределялось такими законами. Оно могло быть сделано и на много десятилетий раньше, а могло и не быть сделано по сей день. Но уже в 1957 г., когда оно реально было сделано, раскручивался маховик индустрии цифровых информационных технологий на основе статистической теории информации К. Шеннона и двоичного кода Дж. фон Неймана. И уж в полной мере этот маховик был раскручен к началу 70-х гг., когда А. П. Стахов впервые по достоинству оценил «золотую» систему счисления в роли арифметической первоосновы цифровых информационных технологий.

Выбор фон Нейманом двоичного кода со всеми его недостатками по сравнению с избыточными кодами золотой пропорции не должен расцениваться как исторически неудачный и ошибочный. В конце 40-х гг. ему просто не было никаких альтернатив. В принципе, любительское открытие Бергмана, датируемое 1957-м годом, могло быть сделано кем-то другим на полвека раньше. Попади тогда первая «золотая» система счисления в поле зрения Хартли, Шеннона и фон Неймана, история цифровых информационных технологий могла бы начаться сразу же с кодов золотой пропорции. Но реальная история Мировой науки и техники распорядилась по-иному. Первым восприемником и профессиональным разработчиком этого любительского открытия стал А. П. Стахов в условиях раскрученного маховика информационных технологий на основе двоичного кода ...

Проученное горьким опытом былых гонений на генетику и кибернетику, Советское государство на этот раз быстро осознало, что отечественная наука обретает стратегически прорывные позиции на всеопределяющем направлении научно-технического прогресса. Свидетельством тому стало беспрецедентное патентование первых информационных технологий А. П. Стахова на качественно новой арифметической первооснове в СССР, на Западе и в Японии ... Тем не менее, такие технологии объективно не могли тогда быстро вытеснить безраздельно

господствовавшие технологии на основе двоичного кода. В любом случае их экспансия была бы процессом сугубо поэтапным, длительностью во много десятилетий.

И в 80-х гг. этот естественный процесс в нашей тогда ещё единой стране начал осуществляться со сравнительно узкой области бортовой электроники военных самолётов и космических аппаратов, в которой экономические критерии эффективности техники отходят на задние планы по сравнению с функциональными .... При нормальном развитии к настоящему времени он позволил бы России и Украине быть Мировыми «законодателями» и производителями, по крайней мере, уникально надёжной авионики. Но катастрофический финал «перестройки» 1985–1991 гг. пресёк в начальной фазе этот процесс поэтапного отвоёвывания нашей страной ведущих Мировых позиций в области технической кибернетики и информационных технологий».

Принятое на государственном уровне решение о зарубежном патентовании изобретений в области «компьютеров Фибоначчи» во всех ведущих странах-продуцентах средств компьютерной техники (США, Японии, Англии, Франции, ФРГ, Канаде и др. странах) закрепило приоритет советской науки в этой области и впервые открыло для СССР шанс стать мировым лидером в области компьютеров. К сожалению, «горбачевская перестройка» и последовавшая за этим дезинтеграция СССР разрушили эти амбициозные планы. Однако, сама идея «компьютеров Фибоначчи» не только не устарела, а стала еще более актуальной на данном этапе развития информационных технологий, связанных с использованием микропроцессоров, а в перспективе и нанопроцессоров. Об этом я написал в статье [58].

К разряду фундаментальных результатов в области информатики можно также отнести *«золотую» троичную зеркально-симметричную арифметику*, описанную мною в статье [59], а также новую теорию корректирующих кодов, основанных на *матрицах Фибоначчи.* Этот результат описан в статье [60]. Сюда же относятся «золотые» аналого-цифровые и цифроаналоговые преобразователи, теория которых описана в статье [61].

5. Стратегические ошибки в развитии математики

А теперь вновь обратимся к математике. Как показано в книге [3], основная причина современного кризиса в математике состоит в ее отходе от теоретического естествознания. Как подчеркивает Морис Клайн [3], ***«естествознание было кровью и плотью математики и питало ее живительными соками».*** Отход математики от теоретического естествознания является крупнейшей «стратегической ошибкой» математики 20-го века и главной причиной ее современного кризиса. Но в процессе развития математики были сделапны и другие «стратегические ошибки», которые углубили существующий кризис.

5.1. *Пренебрежение «началами»*

А.Н. Колмогоров в предисловии к книге А.Лебега «Об измерении величин» [62] замечает, что «*у математиков существует склонность, уже владея законченной математической теорией, стыдиться ее происхождения. По сравнению с кристаллической ясностью развития теории, начиная уже с готовых ее основных понятий и допущений, кажется грязным и неприятным занятием копаться в происхождении этих основных понятий и допущений. Все здание школьной алгебры и весь математический анализ могут быть воздвигнуты на понятии действительного числа без всякого упоминания об измерении конкретных величин (длин, площадей, промежутков времени и т.д.). Поэтому на разных ступенях обучения с разной степенью смелости проявляется одна и та же тенденция: возможно скорее разделаться с введением чисел и дальше уже говорить только о числах и соотношениях между ними. Против этой тенденции и протестует Лебег».*

В этом высказывании Колмогоров подметил одну особенность математиков – стыдливое отношение к «началам» математической науки, а точнее - пренебрежение «началами» («на разных ступенях обучения и с разной степенью смелости»). Задолго до Колмогорова на эту тенденцию в развитии математики обратил внимание Николай Лобачевский:

«Алгебру и Геометрию постигла одна и та же участь. За быстрыми успехами вначале следовали весьма медленные и оставили науку на такой ступени, где она еще далека от совершенства. Это произошло от того, что Математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою».

Заметим, что *геометрия Лобачевского* является ярким примерам бережного отношения к «Началам» Евклида. Именно 5-й постулат Евклида («постулат о параллельных») стал источником длительных математических исследований, которые привели Лобачевского к открытию неевклидовой геометрии.

5.2. *Пренебрежительное отношение к «проблеме гармонии» и «золотому сечению»*

Как известно, особую роль в учении пифагорейцев, в том числе и Платона, играло «золотое сечение», которое в тот период называлось «делением в крайнем и среднем отношении». Собственно, «золотое сечение» играло главную роль в созданном античными греками *математическом учении о природе* или «*математике гармонии*» [31].

Возникает вопрос: каким образом «золотое сечение» отражено в современной математике? Ответ однозначный – в очень малой степени. Понятия «золотого сечения», как впрочем, и «гармонии» для многих математиков является некоторыми «эзотерическими понятиями», которые недопустимо использовать в серьезной математике. Именно такие математики считают идеи гармонии и само «золотое сечение» результатом «безудержной и дикой фантазии» пифагорейцев. И поэтому изучение «гармонии» и «золотого сечения» считается занятием, недостойным математика.

К сожалению, пренебрежение «золотым сечением» мы находим и в теоретической физике. В 2006 г. издательство «БИМОН» (Москва) опубликовало уникальный научный сборник «Метафизика. Век 21» [63]. В предисловии составитель и редактор сборника профессор **Ю.С. Владимиров** (Московский университет) написал следующее:

«Третья часть сборника посвящена осмыслению многочисленных примеров проявления «золотой пропорции» в искусстве, биологии и в окружающей нас действительности. Однако, как это не парадоксально, в современной теоретической физике «золотая пропорция» никак не отражена. Чтобы убедиться в этом, достаточно пролистать 10-томник теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. Назрело время заполнить этот пробел в физике, тем более, что «золотая пропорция» тесно связана с метафизикой, с тринитарностью».

Очень интересное объяснение причины пренебрежительного (в некотором смысле даже враждебного) со стороны официальной академической науки к «гармонии» и «золотому сечению», содержится в статье **Дениса Клещева** [1]. Клещев пишет:

«*Безусловный успех теории Менделеева, который современные жрецы науки упорно ретушируют, объясняется именно тем, что «спекулятивное» разбиение периодической таблицы на семь периодов отражает объективное существование в строении атома семи энергетических уровней («оболочек»), которые вместе с ядром образуют гармоническую «октаву», заполняемую электронами, причем переход электрона с одного из внешних уровней на более близкий к ядру всегда связан с излучением кванта света, поэтому язык спектра был и остается одним из важных инструментов атомной физики. Эффективность введения квантовых чисел настолько поражала первопроходцев физики атома, что Зоммерфельд в первом издании своего фундаментального труда «Строение атома и спектральные линии» (1919) писал следующее:*

«То, что мы слышим сегодня на языке спектров, и есть подлинная музыка сфер атомов, созвучие целочисленных отношений, одно из многих проявлений все возрастающего порядка и гармонии. <...> Все целочисленные закономерности спектральных линий и атомистики берут свое начало в конечном счете из квантовой теории. Она есть тот таинственный орган, на котором природа исполняет музыку спектров, и ее ритму подчиняется строение атома и ядра».

В своем докладе 1925 года Арнольд Зоммерфельд не без горечи восклицал: ***«Вот если бы Кеплеру дожить до современной квантовой теории! Он бы увидел осуществленной свою самую смелую юношескую мечту, но не в макрокосмосе небесных тел, а в микрокосмосе атома».***

И далее Клещев продолжает:

«Однако такие интерпретации теории атома были подвергнуты жесткой критике. Больше всего за распространение «пифагорейства» во время формирования современной нормальной науки пострадал знаток теории относительности, выдающийся астрофизик ***Артур Эддингтон*** *(с 1923 года иностранный член-корреспондент АН СССР, с 1938 года президент Международного астрономического союза). Его попытки связать постоянную тонкой структуры α=1/137,035... с теорией гармонии инициировали громкий процесс в АН СССР, в результате которого любое упоминание в квантовой физике слова «гармония» было запрещено и стало автоматически пониматься как «эддингтоновщина».*

Вот, оказывается, где «зарыта собака»! Оказывается, высокие академические круги еще в советские времена приложила руку к тому, чтобы заклеймить позором понятие «гармонии», а само слово «гармония» вычеркнуть из употребления в физической науке. Так что не только «кибернетика» и «генетика», но также и «гармония» подвергались гонениям со стороны официальной академической науки. Непонятно только, как это согласуется с упоминавшимся выше высказыванием Альберта Эйнштейна.

Несмотря на то, что академическая наука высказалась против использования понятия «гармонии» в современной физике, развитие теоретического естествознания в последние десятилетия показало, что уважаемые академики в оценке роли «гармонии» допустили очередную ошибку. Поскольку академическая наука на начальном этапе, как правило, ошибается при оценке тех или иных направлений фундаментальной науки (вспомним *генетику* и *кибернетику*, а еще раньше *гиперболическую геометрию Лобачевского*), а затем стыдливо забывает покаяться о содеянном, то можно высказать твердое мнение о том, что **пренебрежение «гармонией» и «золотым сечением» – еще одна «стратегическая ошибка» в развитии не только математики, но и теоретической физики. Эта ошибка породила ряд других «стратегических ошибок» в развитии математики и науки в целом.**

5.3. *Игнорирование «гипотезы Прокла»*

Выше мы детально проанализировали новый взгляд на «Начала» Евклида, выдвинутый древнегреческим философом **Проклом Диадохом** (412-485).

В своей замечательной статье [1] Денис Клещев приводит мнение проф. **Д.Д. Мордухай-Болтовского** (самого авторитетного советского историка математики и переводчика трактата Евклида на русский язык), которое полностью совпадает с «гипотезой Прокла»:

«Тщательный анализ "Начал" меня решительно убеждает, что построение правильных тел, и еще более – доказательство существования пяти и только пяти тел – представляло некогда, еще до Евклида, конечную цель того труда, из которого произошли "Начала"».

Почему же это мнение выдающегося историка математика не отражено широко в исторической литературе и учебниках по математике?

Еще раз обратимся к статье Дениса Клещева [1]. Клещев пишет:

«...При внимательном изучении канонических «Элементов геометрии» Евклида можно обнаружить гармоническую составляющую данного трактата, который принципиально отличался от других сводных трактатов по геометрии (например, от «Элементов» Гиппократа Хиосского) и заслужил себе всеобщее признание в античности как раз тем, что все тринадцать книг, в которых Евклид дал систематическое изложение наиболее значимых открытий античных математиков, имели главной целью вывод и доказательство существования пяти правильных многогранников (Платоновых тел: тетраэдра, гексаэдра, октаэдра, икосаэдра, додекаэдра).

Несмотря на то, что геометрия Евклида стала основой стандартной математики и была возведена последующими поколениями математиков в ранг «абсолютно истинной науки», теория

гармонии осталась метафизическим придатком, для которого в научной парадигме не нашлось достойного места, поэтому в наши дни понятие «гармония» было ассоциировано с музыкальным учением пифагорейцев, хотя на самом деле в античной науке гармония числовых соотношений распространялась на все области знаний. Главная причина того, что общая теория гармонии не стала развиваться в рамках античной парадигмы заключается в том, что изучение гармонических соотношений неизбежно приводило математиков к несоизмеримым отрезкам, к иррациональным числам, то есть к дробям, к которым античные философы питали нескрываемое отвращение».

Создается впечатление, что современные историки математики придерживаются этой же точки зрения. Они отказываются замечать, что «золотому сечению» и «Платоновым телам» Евклид уделил очень большое внимание и не могут дать этому никакого «материалистического объяснения». Более того, они отказываются признавать, что, согласно «гипотезе Прокла», «Начала» Евклида написаны под мощным влиянием античной идеи гармонии. И главная цель Евклида при написании своего гениального математического произведения, к которому восходит вся современная математика, - это создание завершенной теории «Платоновых тел», которые ассоциировались у древних греков с гармонией Мироздания. Клещев пишет:

«*Хотя свидетельство Прокла Диадоха (V век н.э.), в котором раскрывается смысл Евклидовых «Элементов», составленных как строго аксиоматическое построение пяти правильных многогранников, имеет множество подтверждений в античной науке, современные математики продолжают от нас скрывать этот исторический факт*».

В этой связи уместно привести также еще одно высказывание Дениса Клещева [1]:

«Теория гармонизации, систематизации и обобщения информации кажется многим весьма несущественной. Большинство математиков считает для себя крайне скучным занятием изучение элементарной геометрии. Хотя ни один выдающийся математик XIX века (включая математиков-универсалов Гильберта и Пуанкаре), не испытывал такого равнодушия и презрения к элементарной математике, какое сегодня испытывает к ней среднестатистический доцент, аспирант или студент-математик. Так мы пожинаем плоды того стиля преподавания, который сложился после введения в математическое образование теоретико-множественного подхода.

Таким образом, мы можем констатировать, что оригинальный взгляд Прокла на «Начала» Евклида проигнорирован современной математикой, более того, современные историки математики скрывают от научной общественности этот исторический факт, признанный Иоганном Кеплером, Феликсом Клейном, а в наше время - Мордухай-Болтовским. Все это следует рассматривать как еще одну «стратегическую ошибку» в развитии математики, которая привела к искаженному взгляду на всю историю математики.

5.4. *Односторонний взгляд на происхождение математики*

Как известно, традиционный взгляд на происхождение математики [19] состоит в следующем. В основе создания математики лежали две «ключевые» проблемы, которые возникли в науке на ранних этапах ее развития: *проблема счета* и *проблема измерения*. Проблема счета привела к созданию первых способов представления чисел и выполнения над числами арифметических операций (Вавилонская 60-ричная система счисления, египетская десятичная арифметика и др). Главным итогом этого процесса было формирование понятия *натурального числа* – фундаментального понятия математики, без которого немыслимо существование математики.

Проблема измерения лежит у истоков создания геометрии («измерение земли»). Однако, открытие *несоизмеримых отрезков* считается важнейшим математическим открытием в этой области. Это открытие привело к введению понятия *иррационального числа* – второго фундаментального понятия математики, без которого невозможно представить существование современной математики.

Концепции натурального числа и иррационального числа лежат в основе «классической математики» и «классического теоретического естествознания».
К сожалению, историки математики, рассматривая главные проблемы математики,
которые лежат в основе ее происхождения, проигнорировали *проблему гармонии*, которая была сформулирована Пифагором, Платоном и нашла свое отражение в «Началах» Евклида. В результате в современной математике сформировался односторонний взгляд на происхождение математики, что является еще одной «стратегической ошибкой» в развитии математики. **Если бы «проблема гармонии» была включена в состав важнейших проблем, повлиявших на создание математики на этапе ее зарождения, структура современной математики выглядела бы по-другому.**

5.5. *Теория множеств Кантора как главная математическая мистификация 19-го столетия*

Крупные «стратегические ошибки» были сделаны и в последующие периоды развития математики. В 19-м веке такая ошибка состояла в том, что без достаточного критического анализа *«Теория бесконечных множеств Кантора»* была возведена на пьедестал «величайших математических открытий». В своем выступлении на 1-м Международном Конгрессе Математиков в Цюрихе (1897) знаменитый математик Адамар подчеркнул, что главная привлекательная черта Канторовской теории множеств состоит в том, что впервые в математической истории дана классификация множеств на основе концепции «кардинального числа». А удивительные математические результаты, которые вытекают из теории множеств Кантора, должны вдохновить математиков на новые открытия.

К сожалению, обнаружение парадоксов в Канторовской теории множеств и возникший при этом кризис в основаниях математики остудили энтузиазм математиков в оценке этой теории. Последнюю точку в оценке «Канторовской теории множеств» и введенного Кантором понятия «актуальной бесконечности» поставил российский математик Александр Зенкин [32], который показал, что в теории Кантора допущены грубые математические ошибки, а введенное им понятие «актуальной бесконечности» является внутренне противоречивым понятием («завершенная бесконечность»), которое не может быть положено в основу непротиворечивой математики.

Таким образом, «Канторовская теория бесконечных множеств» является ни чем иным, как крупнейшей математической мистификацией 19-го века, и ее принятие математиками 19-го века без должного критического анализа является еще одной «стратегической ошибкой» в развитии математики. Если бы Канторовская теория бесконечных множеств была подвергнута серьезному анализу еще в 19-м веке, возможно, удалось бы избежать возникновения современного кризиса в основаниях математики.

5.6. *Недооценка формул Бине*

В 19 в. в развитии теории «золотого сечения» было сделано важное математическое открытие. Речь идет о так называемых *формулах Бине*, выведенных французским математиком Бине в 19-м веке.

Удивительно, что в классической математике «формулы Бине» (1), (2) не получили должного признания, подобно другим известным математическим формулам («формулы Эйлера», «формулы Муавра» и т.д.). И не все математики их знают. Изучение «формул Бине», а также «золотого сечения», «чисел Фибоначчи и Люка», как правило, не включается в современные математические программы школьного и университетского образования. По-видимому, такое отношение к «формулам Бине» связано с «золотым сечением», которое всегда вызывало «аллергию» у математиков. Но главная «стратегическая ошибка» в оценке «формул Бине» состоит в том, что математики не усмотрели в «формулах Бине» прообраз нового класса гиперболических функций – гиперболических функций Фибоначчи и Люка, которые были открыты украинскими учеными Боднаром, Стаховым, Ткаченко и Розиным спустя 100 лет после открытия «формул Бине» [34-37]. **Если бы «гиперболические функции Фибоначчи и Люка» были открыты в 19-м столетии, то**

это значительно бы ускорило развитие приложений гиперболической геометрии в теоретическом естествознании.

5.7. ***Недооценка «икосаэдрической» идеи Феликса Клейна***

В 19-м веке выдающийся математик Феликс Клейн попытался объединить все ветви математики на основе икосаэдра, Платонового тела, дуального додекаэдру [6]. Клейн трактует икосаэдр, основанный на золотом сечении, как геометрический объект, из которого, по его мнению, вытекают ветви пяти математических теорий: *геометрии, теории Галуа, теории групп, теории инвариантов и дифференциальные уравнения*. При этом главная идея Клейна предельно проста:

"Каждый уникальный геометрический объект так или иначе связан со свойствами икосаэдра».

К сожалению, эта замечательная идея не получила развития в современной математике, что является еще одной «стратегической ошибкой» в ее развитии. Развитие этой идеи могло бы повлиять на структуру математической науки и привело бы к объединению многих важных разделов математики на основе икосаэдра, основанного на «золотом сечении».

5.7. ***Недооценка математического открытия Джорджа Бергмана***

В математике существует одна «странная» традиция. Математикам свойственно недооценивать математические достижения некоторых своих современников и переоценивать достижения других (как это случилось с теорией множеств Кантора). К сожалению, действительно эпохальные математические открытия вначале подвергаются резкой критике и даже осмеянию со стороны известных математиков и только спустя примерно 50 лет, как правило, после смерти авторов математических открытий, новые математические теории признаются и занимают достойное место в математике. Драматические судьбы Лобачевского, Абеля, Галуа и других математиков слишком хорошо известны, чтобы их подробно здесь описывать.

К сожалению, статья Бергмана [9] не была замечена в тот период ни математиками, ни инженерами. Журналисты были удивлены только тем фактом, что Джордж Бергман написал свою статью в возрасте 12 лет, в связи с чем в журнале «TIMES» была даже опубликована статья о юном математическом даровании Америки. Но математики того времени, впрочем как и сам Бергман, не сумели оценить значение этого открытия для развития математической и компьютерной науки.

Прошло более 50 лет с момента публикации статьи Бергмана [9]. И в соответствии с «математической традицией» настала пора оценить роль «системы Бергмана» в развитии современной математики и компьютерной науки. Важно подчеркнуть, что любое натуральное число может быть представлено в виде конечной суммы степеней «золотой пропорции» в виде «формулы Бергмана» (19). И если бы пифагорейцы знали «формулу Бергмана» для натуральных чисел, то, зная отношение пифагорейцев к натуральным числам и «золотому сечению», нет никаких сомнений в том, что их знаменитый тезис: *«Все есть число»*, был бы заменен на новый тезис: *«Все есть золотая пропорция»!*

Стратегический просчет математиков 20-го века состоял в том, что они просто не заметили математическое открытие юного американского математика Джорджа Бергмана, которое по праву может быть отнесено к разряду крупнейших математических открытий в области систем счисления (после открытия вавилонянами позиционного принципа представления чисел) и которое может дать начало как новой теории чисел, основанной на «золотой пропорции» [46-49], так и новой компьютерной технике («микропроцессоры Фибоначчи») [58].

6. Современные научные открытия, основанные на Платоновых телах, «золотом сечении» и числах Фибоначчи

Одна из оригинальных идей, высказанных в статье Дениса Клещева [1], состоит в том, что процессы смены парадигм в математике и естественных науках тесно связаны. Клещев замечает:

«Изучение истории только ради изучения истории вряд ли может привлечь к ней внимание других исследователей. Поэтому концепцию Куна необходимо дополнить рассмотрением как внутренней, так внешней структуры смены научных парадигм. Справиться с этой задачей невозможно, если интересоваться естественными науками в отрыве от изучения истории математики, как это практиковал Томас Кун. Но стоит только включить в рассмотрение историю математики, богатую на драматические события и кризисы, как сразу становится видна закономерность, что каждому парадигмальному скачку в физике предшествовали кардинальные преобразования в математике, подготавливающие почву для смены естественнонаучной парадигмы».

В области современного теоретического естествознания сделано много интересных научных открытий. Отметим наиболее важные.

6.1. *Резонансная теория Солнечной системы*

Советский математик **А.М. Молчанов** более 60 лет назад высказал гипотезу: любая нелинейная система (независимо от природы – механическая, химическая, биологическая или любая другая) в результате эволюции должна выходить на особый синхронный режим движений (колебаний). Заметим, что этот динамический эффект впервые на двух маятниках установил Гюйгенс.

Идеи **Молчанова** были развиты в работах советского астронома **К.П. Бутусова** [30], который с этих позиций рассмотрел Солнечную систему. При этом он пришел к заключению, что **«частоты обращения планет и разности частот обращений образуют спектр с интервалом, равным золотой пропорции»!**

Более того, это необычное исследование привело **Бутусова** к выводу о том, что **«спектр гравитационных и акустических возмущений, создаваемых планетами, представляют собой консонантный аккорд, наиболее совершенный с эстетической точки зрения».** Таким образом, в работе Бутусова идеи пифагорейцев и Кеплера о «музыке сфер» приобретают новое звучание и весьма реальное содержание. В заключение своей уникальной работы Бутусов делает замечание, что, видимо, только случайность не позволила Кеплеру, хорошо знакомому с золотым сечением и знавшему наизусть все параметры планетных орбит, открыть эту закономерность.

Наиболее важный результат исследования Бутусова [30] состоит в том, что резонанс в Солнечной системе оказался тесно связанным с «золотой пропорцией», которая является фундаментальной физической константой Солнечной системы.

6.2. *Золотая гармония и сердце*

Так называется книга известного российского исследователя **Виктора Цветкова** [65], изданная в 2008 г. Мы не имеем возможности углубляться в медицинские детали исследований Цветкова. Отметим наиболее важные результаты этих исследований:

1. **Золотое сечение – это «технологический рецепт», используемый Природой для экономии энергии и живого строительного материала**, что подчеркивает естественнонаучную сущность феномена золотой пропорции.

2. Структуры и процессы, организованные в пространстве и времени по золотому сечению, эстетически благоприятно, гармонично, воспринимаются благодаря их **резонансу с сердечной ритмикой человека**. **Таким образом, в сердце возникает своеобразный резонанс между структурами и процессами сердечной деятельности, если они организованы по принципу золотого сечения.**

3. Согласно **принципу оптимального вхождения,** сформулированному Цветковым [65], любая из сердечных систем, совместно образующих сложную кардиосистему, включается в последнюю оптимальным образом, вследствие чего сложная система исполняет свою функцию **с**

минимальными затратами энергии и строительного материала. Энергооптимальность сопряжения сердечных систем обеспечивается уникальными свойствами золотого сечения и чисел Фибоначчи. З**олотая гармония выступает как своего рода «знак качества» сердечных систем и сердца в целом». При этом «золотая гармония» и есть результат резонанса между структурами и процессами сердечной деятельности!**

6.3. ***Новая геометрическая теория филлотаксиса («геометрия Боднара»)***

В конце 20 в. украинским исследователем **Олегом Боднаром создана** удивительная геометрическая теория филлотаксиса [10]. Она раскрывает "загадку филлотаксиса", то есть, показывает, как в процессе роста филлотаксисного объекта, например, сосновой или кедровой шишки, на ее поверхности происходит смена "порядков филлотаксиса" по "закону Фибоначчи". Боднар первым начал исследовать явление филлотаксиса с позиций гиперболической геометрии. В теории Боднара использовано понятие *гиперболического поворота*, которое является важнейшим преобразующим движением гиперболической геометрии. Но для того, чтобы гиперболический подход приводил к фибоначчиевым спиралям на поверхности шишки, Боднар вынужден был отказаться от классических гиперболических функций и ввести в рассмотрение так называемые "золотые" гиперболические функции, которые с точностью до постоянного коэффициента совпадают с гиперболическими функциями Фибоначчи, введенными в работах [34-37]. Это означает, что гиперболические функции Фибоначчи и Люка, лежащие в основе явления филлотаксиса, являются «естественными» функциями природы и отражают важнейшую математическую закономерность, лежащую в основе ботанического явления филлотаксиса.

6.4. ***Закон структурной гармонии систем Эдуарда Сороко***

В 1984 г. белорусский философ Эдуард Сороко опубликовал книгу «Структурная гармония систем» [2], которая вызвала огромный интерес в современном научном сообществе. Главным итогом этой теории является «закон структурной гармонии систем» («закон Сороко»), основанный на обобщенных золотых сечениях.

"Обобщенные золотые сечения суть инварианты, на основе и посредством которых в процессе самоорганизации естественные системы обретают гармоничное строение, стационарный режим существования, стуктурно-функциональную ... устойчивость".

6.5. ***Квазикристаллы Шехтмана (Нобелевская Премия по химии - 2011)***

В период написания этой статьи в Стокгольме объявлен лауреат Нобелевской Премии по химии 2011 года.

Награда досталась израильскому ученому Даниэлю Шехтману из технологического института Хайфы. Премия присуждена за открытие квазикристаллов (1982 г.). Статью о них Шехтман впервые опубликовал еще в 1984 году.

Открытие *квазикристаллов,* сделанное Даном Шехтманом в 1982 г., является революционным открытием в области кристаллографии, потому что оно экспериментально показало существование кристаллических структур, в которых проявляется *икосаэдрическая* или *пентагональная симметрия,* что вступает в противоречие с законами классической кристаллографии.

Известный физик **Д. Гратиа** следующим образом оценивает значение этого открытия для современной науки [66]: *«Это понятие привело к расширению кристаллографии, вновь открытые богатства которой мы только начинаем изучать. Его значение в мире минералов можно поставить в один ряд с добавлением понятия иррациональных чисел к рациональным в математике»*.

Как подчеркивает **Гратиа** [66], *«механическая прочность квазикристаллических сплавов резко возрастает; отсутствие периодичности приводит к замедлению распространения дислокаций по сравнению с обычными металлами … Это свойство имеет большое прикладное значение: применение икосаэдрической фазы позволит получить легкие и очень прочные сплавы внедрением*

мелких частиц квазикристаллов в алюминиевую матрицу». Именно поэтому к квазикристаллам в настоящее время привлечено внимание инженеров и технологов.

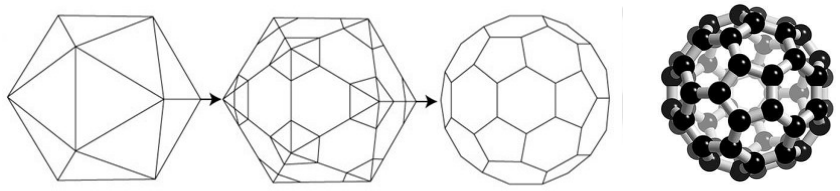
Кто такой Даниэль Шехтман? Шехтман родился в Тель-Авиве в 1941году, окончил Израильский технологический институт в Хайфе в 1972 году и с тех пор работает там исследователем. Ученый открыл квазикристаллы - уникальные химические конфигурации с неповторимым рисунком - в 1982году, опровергнув привычное представление о строении кристаллов.

Как подчеркивается в статье http://www.mk.ru/science/article/2011/10/05/629813-quotnobelevkuquot-po-himii-dali-za-kvazikristallyi-obnaruzhennyie-v-rossii.html *«согласно прежним химическим канонам, кристаллы всегда "упакованы" в симметричные узоры. Однако исследования Шехтмана показали, что атомы в некоторых кристаллах расположены в неповторимой конфигурации, причем расположение атомов подчиняется закону золотого сечения. Создание материалов с квазикристалльной конфигурацией позволяет получить удивительные свойства предмета, в частности потрясающую твердость. Квазикристаллы получили свое название из-за того, что их кристаллическая решетка имеет не только периодическое строение, но и обладает осями симметрии разных порядков, существование которых ранее противоречило представлениям кристаллографов. В настоящее время существует около сотни разновидностей квазикристаллов».*

О непосредственной связи квазикристаллов с «золотым сечением» и «плитками Пенроуза», основанными на «золотом сечении», пишет и Гратиа в статье [66]. Поэтому существование квазикристаллов, основанных на других гармонических пропорциях (в частности, «металлических пропорциях» Веры Шпинадель) никак не умаляет значение этого открытия с точки зрения «математики гармонии» и «золотого сечения».

6. 6. *Фуллерены (Нобелевская Премия по химии-1996)*

Оказывается, «квазикристаллы» являются не первым научным открытием, основанном на «золотом сечении», удостоенном Нобелевской Премии. В 1996 г. группе американских ученых присуждена Нобелевская премия по химии за открытие «фуллеренов». Термином «фуллерены» называют замкнутые молекулы углерода типа C_{60}, C_{70}, C_{76}, C_{84}, в которых все атомы находятся на сферической или сфероидальной поверхности. Центральное место среди фуллеренов занимает молекула C_{60}, которая характеризуется наибольшей симметрией и как следствие наибольшей стабильностью. В этой молекуле, напоминающей покрышку футбольного мяча и имеющей структуру правильного усеченного икосаэдра (Рис. 6), атомы углерода располагаются на сферической поверхности в вершинах 20 правильных шестиугольников и 12 правильных пятиугольников, так что каждый шестиугольник граничит с тремя шестиугольниками и тремя пятиугольниками, а каждый пятиугольник граничит с шестиугольниками.



(а) (б)

Рисунок 6. Усеченный икосаэдр (а) и структура молекулы C_{60} (б)

Впервые они были синтезированы в 1985 учеными **Робертом Керлом, Харолдом Крото, Ричардом Смолли** (получившими в 1996 г. Нобелевскую премию по химии за это открытие).

Фуллерены обладают необычными химическими и физическими свойствами. Так, при высоком давлении C_{60} становится твердым, как алмаз. Его молекулы образуют кристаллическую структуру, как бы состоящую из идеально гладких шаров, свободно вращающихся в гранецентрированной кубической решетке. Благодаря этому свойству углерод C_{60} можно использовать в качестве твердой смазки. Фуллерены обладают также магнитными и сверхпроводящими свойствами.

Российские ученые **А.В. Елецкий и Б.М. Смирнов** в своей статье [67] отмечают, что *«фуллерены, существование которых было установлено в середине 80-х, а эффективная технология выделения которых была разработана в 1990 г., в настоящее время стали предметом интенсивных исследований десятков научных групп. За результатами этих исследований пристально наблюдают прикладные фирмы. Поскольку эта модификация углерода преподнесла ученым целый ряд сюрпризов, было бы неразумным обсуждать прогнозы и возможные последствия изучения фуллеренов в ближайшее десятилетие, но следует быть готовым к новым неожиданностям»*.

6. 7. *«Золотые» геноматрицы Сергея Петухова*

В начале 21 в. российский математик и биолог **Сергей Петухов** сделал сенсационное открытие в области генетического кодирования. Это открытие описано в престижном научном сборнике «Метафизика. Век XXI» [68]. Открытие Петухова свидетельствует о том, что **ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ ЛЕЖИТ В ОСНОВЕ ЖИВОЙ ПРИРОДЫ!** Сейчас еще трудно оценить в полной мере революционный характер этого открытия для развития современной науки. Ясно одно, что для теории генетического кодирования – это результат такой же значимости, как и открытие самого генетического кода! Недавно проф. Петухов написал замечательную книгу

6. 8. *Платоновы тела и элементарные частицы*

В последние годы удивительные симметрии Платоновых тел привлекли пристальное внимание физиков-теоретиков, специалистов в теории элементарных частиц [69]. Крупнейший российский специалист по физике высоких энергий академик **Л.Б. Окунь** писал: *«Физиков можно назвать охотниками за симметриями: в некотором смысле они отличаются от остальных людей тем, что отыскивают в природе все более скрытые и все более фундаментальные типы симметрий»*.

Статья [69] заканчивается разделом «Вперед, к Платону», в котором сказано следующее:

«Среди Платоновых тел наиболее интересен икосаэдр, и с ним сталкиваются, порой совершенно неожиданно, в самых разных разделах математики. Этот факт должен послужить эвристикой при работе над единой теорией элементарных частиц – ведь в природе наверняка воплощена самая изощренная абстрактная структура. Ее нахождение – прометеева задача наших дней.

*Как писал **Вернер Гейзенберг**, «развитие физики выглядит так, словно в конце концов будут найдены очень простые законы природы – такие, какими их надеялся увидеть Платон». Не исключено, что эти законы окажутся связанными с правильными многогранниками. Даже когда знания о физической реальности были еще очень скудны, находились мыслители (Платон, Кеплер), видевшие в этих фигурах ключ к ее пониманию. Наверное, они составляют, тот арьергард, который всегда впереди»*.

Таким образом, главное методологическое значение статьи [69] состоит в том, что она нацеливает физиков-теоретиков на использование *Платоновых тел* при создании современной теории элементарных частиц, а это и есть отражение *«золотой» парадигмы* древних греков в теоретической физике.

Эта идея подтверждается и статьей [70], написанной известным российским физиком проф. Ю.С. Владимировым.

6.9. ***Преобразования Фибоначчи-Лоренца и «золотая» интерпретация специальной теории относительности Эйнштейна***

В работе [55] получен еще один фундаментальный результат в области теоретической физики. Речь идет о «золотой» интерпретации специальной теории относительности и вытекающей отсюда «золотой» интерпретация развития Вселенной, начиная с «Большого Взрыва». Опуская математические выкладки, остановимся на основных гипотезах исследования [55]:

1. Допускается, что скорость света ***c*** в вакууме в процессе эволюции, как для нашей материальной Вселенной, так и для гипотетической антиматериальной Вселенной, **не является постоянной величиной и не равна** эйнштейновской скорости света в вакууме, что согласуется с современными представлениями.

2. В основе «золотой» интерпретации специальной теории относительности используются так называемые *«золотые» матрицы* [71]. Эти матрицы использованы в [55] для введения нового класса преобразований, названных *преобразованиями Фибоначчи-Лоренца*, которые являются обобщением классических *преобразований Лоренца*, используемых в специальной теории относительности.

На основе этого подхода в статье [55] предложена *«золотая»* космологическая модель эволюции Мироздания с момента сингулярности пространства-времени - «*Большого Взрыва*» (время *T* равно нулю) как в положительную сторону увеличения времени, так и с *поворотом стрелы времени* - увеличению времени *T* в отрицательную сторону (рождение «*чёрной дыры*», являющейся временной противоположностью «белой дыры», при этом внутри «чёрной дыры» начала развиваться *Вселенная*, состоящая из *антиматерии*). Все выводы, вытекающие из такого подхода, согласуются с современными представлениями, но при этом возникает ряд новых эффектов, отсутствующих при классическом подходе.

6.10. ***Золотое сечение квантовых состояний и его астрономические и физические проявления (исследования Петруненко)***

В 2005 г. белорусский физик **Василий Петруненко** опубликовал книгу *«Золотое сечение квантовых состояний и его астрономические и физические проявления»* [72]. В книге дается эмпирическое обоснование и теоретическое объяснение явления декалогарфмичской периодичности, обнаруженной автором в динамически равновесных системах разного уровня организации. Поражает диапазон проблем, рассмотренных в книге, - от объектов мегамира (Солнечная система, галактики и метагалактики) до объектов микромира (атомы, их ядра и электроны).

В работах Петруненко доказано, что в основе организации материи, как на уровне микромира, так и на уровне мегамира, лежит один и тот же принцип - принцип волновых кратностей золотого сечения.

6.11. ***Числа Фибоначчи в таблице Менделеева***

В статье **Н.А. Шило** и **А.В. Динкова** [73] приводятся интересные факты, указывающие на связь Периодической системы Д.И.Менделеева с числами Фибоначчи.

В 2010 украинский исследователь **Сергей Якушко** опубликовал сенсационную статью [74], в которой описана следующая «фибоначчиева закономерность» в Периодической системе Менделеева:

«Закон образования элементов в Периодической системе Д.И. Менделеева, согласно которому вначале образуется семь основных образующих периоды элементов - благородные газы, которые в системе координат атомный номер-относительная атомная масса находятся на прямой, тангенс угла наклона которой составляет 5^0*, а остальные элементы в периодах являются производными основных элементов и располагаются на прямых, тангенсы углов наклона которых в системе координат атомный номер-относительная атомная масса, начиная с первого периода, представляют собой обратный ряд Фибоначчи:* **1/ 1, 1/ 1, 1/ 2, 1/ 3, 1/ 5, 1/ 8, 1/ 13** *вплоть до седьмого периода».*

«Гипотеза Якушко», если она подтвердится дальнейшими исследованиями, имеет огромную эвристическую силу. Предложенный Якушко подход позволяет уяснить происхождение

периодичности свойств химических элементов участием третьего фактора – «фибоначчиевого» характера периодичности элементов, а полученные научные результаты могут позволить осуществить прорыв в познании одного из всеобщих и главных законов развития природы!

6.12. *Экспериментальное доказательство проявления «золотого сечения» в квантовом мире*

В Международном журнале "Science" от 9-го января 2010 опубликована сенсационная информация об экспериментальном обнаружении золотого сечения в квантовом мире [75]. Это - результат многолетних исследований, выполненных в Helmholtz-Zentrum Berlin für Materialien und Energie (HZB) (Германия), Oxford and Bristol Universities и Rutherford Appleton Laboratory (Великобритания). Суть эксперимента состояла в следующем. Ученые сосредоточились на исследовании на наноуровне магнитных свойствах кобальта ниобата. Если воздействовать на этот материал магнитным полем, то удается перевести магнитную цепь в новое квантовое состояние, называемое критическим.

Настраивая систему и искусственно вводя большую квантовую неопределенность, исследователи заметили, что цепочки атомов действуют подобно нано-гитаре, генерирующей колебания различных тонов. При этом первые два тона находятся в совершенном отношении друг к другу. **Их частоты находятся в отношении 1, 618, известном в искусстве и архитектуре под названием "золотое сечение"!** Это открытие дает основания ведущим физикам высказать предположение, что **на самом деле в основе квантового, атомного мира лежит совершенный порядок, гармония, основанная на "золотом сечении".**

По-видимому, этих примеров достаточно для следующего вывода: **теоретическое естествознание перешло в новую стадию развития, которую можно назвать «Гармонизация теоретического естествознания»**

7. Гармонизация экономики и менеджмента

7.1. *Волны Эллиотта*

Ральф Нельсон Эллиотт (1871-1948) был одним из ярких представителей «Американского Ренессанса». Он соединил модели поведения человеческого общества с соотношением Фибоначчи и золотой пропорцией. Эллиотт писал: **«Все человеческие действия имеют три особенности, модель, время и отношение, все они подчиняются числам Фибоначчи».**

Наиболее последовательным продолжателем идей Эллиотта в современной науке является американский исследователь **Роберт Пректер (Robert Prechter)**, который опубликовал в 1999 г. книгу [77], посвященную развитию идей Эллиотта. Как видим уже из названия книги Пректера, он претендует на создание новой науки, названной им *социономика*.

Роберт Пректер в своей книге делает следующее весьма сильное заявление: **«Волновой Принцип Эллиотта для социологии есть то же самое, что и «Законы Ньютона» для физики».**

Время, однако, покажет: прав ли Пректер, сравнивая «Волновой Принцип Эллиотта» с «Законами Ньютона»? Можно соглашаться или опровергать указанное выше заявление Пректера, однако одно несомненно. Благодаря работам Эллиотта и его последователей теория современной социологии и рыночной экономики пополнились весьма глубокой научной концепцией. Ее суть состоит в том, что «золотое сечение» определяет не только «Законы Природы», но и законы человеческого поведения, а через них законы развития фондового рынка! И этот вывод является примером использования «золотой» парадигмы в такой области как экономика.

7.2. *Гармоничный менеджмент*

Идеи гармоничного менеджмента, основанного на числах Фибоначчи и «золотом сечении», развиты в работах российского ученого **А.И. Иванусa**, автора книги [78]. В книге рассматривается

задача представления бизнес-процессов в условиях рыночной экономики в виде некоторой целостной системы, все компоненты которой согласованы между собой в соответствии с логикой устойчивых гармоничных пропорций, широко известных как числа Фибоначчи или золотое сечение.

Приведенные выше примеры свидетельствуют, что современная экономика и менеджмент не остались в стороне от влияния «золотой» парадигмы древних греков. Золотое сечение и числа Фибоначчи становятся важными элементами современной экономики и могут способствовать созданию «гармоничной экономики» и даже «гармоничного общества, основанного на знаниях» [79].

8. Концепция гармоничного образования и школы будущего

Столь широкое распространение знаний о гармонии и «золотом сечении» в математике, теоретическом естествознании, образовании и других сферах человеческой деятельности (информатика, экономика, искусство) ставит вопрос о смене парадигмы и в образовании.

Напомним еще раз знаменитое высказывание Иоганна Кеплера:

"В геометрии существует два сокровища - теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем".

Но если теорему Пифагора знает каждый школьник, то, по мнению Кеплера, он должен так же хорошо знать и "золотое сечение". Значит, в математическом образовании, источником которого являются «Начала» Евклида, по неизвестным причинам произошел явный «перекос». И наш первый шаг для исправления этого «перекоса» состоит в том, чтобы ввести в школьную *"Геометрию"* раздел *"Золотое Сечение"*. В этом разделе школьникам будет интересно узнать о алгебраических и геометрических свойствах «золотого сечения», в частности, о "золотом" прямоугольнике, пентаграмме, "Платоновых Телах" и т.д.

Переходим к *"Алгебре"*. Здесь школьники изучают алгебраические уравнения и методы их решения. Но для школьников интересно узнать о специальном классе алгебраических уравнений - "уравнениях золотой пропорции". И мы имеем полное право ввести в "Алгебру" небольшой раздел *"Уравнения золотой пропорции"*.

В той части школьного курса математики, которая посвящена "Теории чисел", было бы разумным ввести специальный раздел *"Числа Фибоначчи"*.

В курсе «Информатика» обязательно необходимо ввести разделы *«Коды Фибоначчи»* и *«Системы счисления с иррациональными основаниями»*.

Переходим к наукам о Природе - физике, химии, астрономии. В курсе "Физики" при изучении кристаллов желательно ввести раздел *"Квазикристаллы"*, основанные на "икосаэдрической" симметрии, тем более, что наши школьники уже знают об икосаэдре из курса "Геометрии". В курсе *"Химии"* целесообразно обратить внимание школьников на химические соединения, построенные "по Фибоначчи" и на новую интерпретацию Периодической системы, предложенную Сергеем Якушко. А в курсе *"Астрономии"* обязательно необходимо рассказать школьникам о *"резонансной теории Солнечной системы"*, основанной на «золотом сечении». Только таким путем школьники смогут понять причины устойчивости Солнечной системы.

Переходим к наукам о живой природе. Украшением курса *"Ботаники"* может стать раздел *«Пентагональная симметрия»* Природа дает огромное количество подтверждений существования этой закономерности и это обстоятельство является одним из важнейших аргументов существования гармонии в живой природе (Рис. 7).

а)

б)

в)

г)

Рисунок 7. Примеры пентагональной симметрии в природе:
(а) китайская роза; (б) яблоко в разрезе; (в) морская звезда; (г) кактус

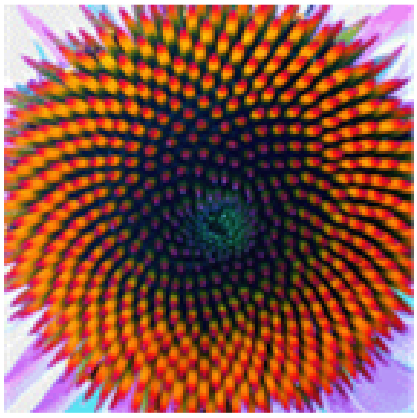
Еще один чрезвычайно интересный раздел – это ботаническое явление филлотаксиса, которое волнует науку со времен Кеплера. Это явление наиболее ярко проявляет себя в соцветьях и плотно упакованных ботанических структурах таких, как сосновые и кедровые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечника и цветной капусты и многие другие.

На Рис. 8 изображены примеры таких объектов (сосновая шишка, головка подсолнечника, ананас, головка цветной капусты), в которых *закон филлотаксиса* основывается на числовой последовательности

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\frac{34}{21},\ldots$$

образуемой отношениями соседних чисел Фибоначчи. То есть, в каждом из таких ботанических объектов семена или мелкие части объектов на их поверхности располагаются на пересечении левых и правых спиралей; при этом отношение числа левых и правых спиралей всегда равно отношению соседних чисел ряда Фибоначчи, которое, согласно *формуле Кеплера*, в пределе стремится к золотой пропорции. Те же закономерности наблюдаются в корзинках цветов.

(а)



(б)

(в)

(г)

Рисунок 8. Филлотаксисные структуры: (а) сосновая шишка; (б) головка подсолнечника; (в) ананас (г) головка цветной капусты

Таким образом, строгую математику мы находим и в расположении листьев на стеблях растений, лепестков на цветке розы, в разрезе яблока (пентакл) (Рис.7-б), в спиралевидном расположении семян в сосновой шишке, головке подсолнечника, ананасе и кактусе. И эта закономерность математически выражается числами Фибоначчи и золотой пропорцией! И мы снова и снова убеждаемся в том, что все в природе подчинено единому плану, единому «Закону Золотого Сечения» – и раскрыть и объяснить этот фундаментальный закон природы во всех его проявлениях и есть главная задача науки.

А сколько интересных возможностей для демонстрации закономерностей, основанных на «золотом сечении» и числах Фибоначчи, дает нам цикл гуманитарных дисциплин, в частности, скульптура, архитектура, живопись, поэзия. Каждый студент и школьник с огромным интересом узнает, что совершенные пропорции человека подчиняются «закону золотого сечения». Одним из лучших памятников греческого скульптурного искусства является *Венера Милосская* - статуя богини Афродиты, найденная на острове Мелос (скульптор Агесандр из Антиохии на Медаре, ок.120 г. до н.э.). Гармонический анализ этой скульптуры показал, что линия пупка делит статую в «золотой пропорции».

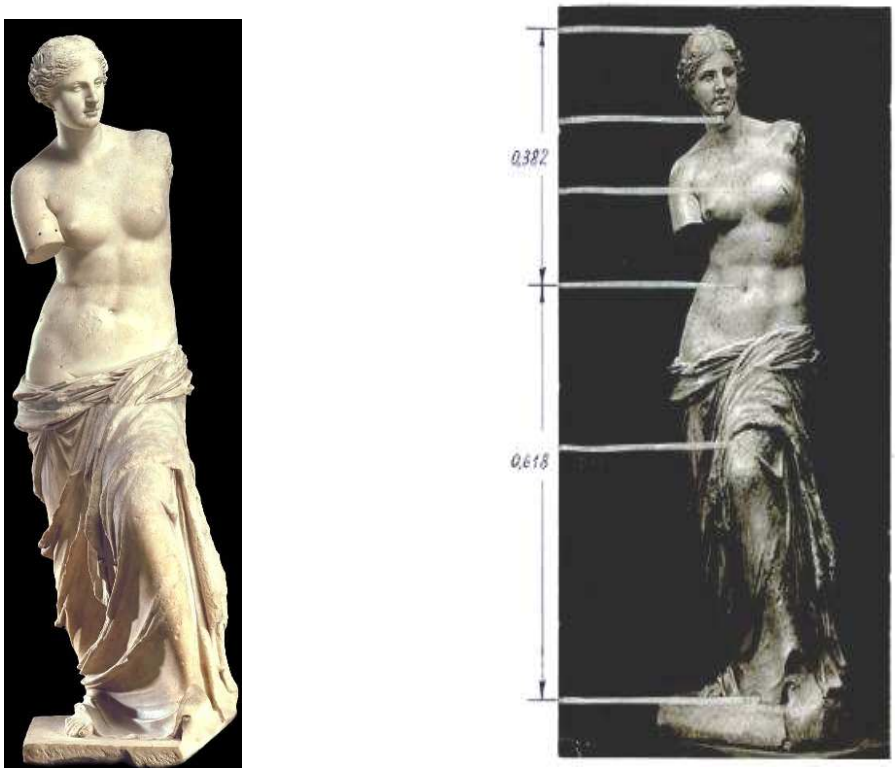


Рисунок 9. Венера Милосская

Но оказывается, поэты тоже не прошли мимо «золотого сечения» при создании своих поэтических шедевров. Многими исследователями было замечено, что стихотворения подобны музыкальным произведениям; в них также существуют некоторые кульминационные точки, которые делят стихотворение в пропорции золотого сечения. Рассмотрим, например, стихотворение А.С. Пушкина «Сапожник»:

Картину раз высматривал сапожник
И в обуви ошибку указал;
Взяв тотчас кисть, исправился художник,
Вот, подбочась, сапожник продолжал:
«Мне кажется, лицо немного криво …
А эта грудь не слишком ли нага?
Тут Апеллес прервал нетерпеливо:
«Суди, дружок, не выше сапога!»

Есть у меня приятель на примете:
Не ведаю, в каком бы он предмете
Был знатоком, хоть строг он на словах,
Но черт его несет судить о свете:
Попробуй он судить о сапогах!

Проведем анализ этой притчи. Стихотворение состоит из 13 строк. В нем выделяется две смысловые части: первая в 8 строк и вторая (мораль притчи) в 5 строк (13, 8, 5 – числа Фибоначчи).

Одно из последних стихотворений Пушкина «Не дорого ценю я громкие права …» («Из Пиндемонти»). Структура этого знаменитого стихотворения, которое не потеряло своей актуальности и сегодня, построена на числах Фибоначчи: 2, 3, 5, 8, 13, 21, отчего закон золотого сечения выполняется в нем с высокой точностью. Стихотворение состоит из 21 строки и в нем выделяется две

смысловые части: в 13 и 8 строк; кульминацией является слово «Никому», разделяющее две смысловые части.

Не дорого ценю я громкие права,
От коих не одна кружится голова.
Я не ропщу о том, что отказали боги
Мне в сладкой участи оспаривать налоги
Или мешать царям друг с другом воевать;
И мало горя мне, свободно ли печать
Морочит олухов, иль чуткая цензура
В журнальных замыслах стесняет балагура.
Все это, видите ль, слова, слова, слова.
Иные, лучшие, мне дороги права:
Иная, лучшая, потребна мне свобода:
Зависеть от царя, зависеть от народа -
Не все ли нам равно? Бог с ними.
Никому отчета не давать, себе лишь самому
Служить и угождать; для власти, для ливреи
Не гнуть ни совести, ни помыслов, ни шеи;
По прихоти своей скитаться здесь и там,
Дивясь божественным природы красотам,
И пред созданьями искусств и вдохновенья
Трепеща радостно в восторгах умиленья,
Вот счастье! Вот права …

Эти примеры можно было бы продолжить. Но радикальным решением в области школьного образования является введение специальной дисциплины *"Гармония систем"*, которую можно было бы рассматривать как завершающую дисциплину физико-математического и эстетического образования учащихся. Главной задачей такой дисциплины является формирование у школьников нового научного мировоззрения, основанного на принципах Гармонии и Золотого Сечения. Программа этой дисциплины зависит от специализации школьников. В таком курсе все школьные предметы по математике, естествознанию и искусству объединяются вокруг главной идеи – идеи *Гармонии Мироздания.*

Много интересных примеров использования «золотого сечения» и чисел Фибоначчи в природе, науке, искусстве, архитектуре и поэзии приведено в книге [80].

В 2001-2002 учебном году я прочитал курс «Математика гармонии» для студентов физико-математического факультета Винницкого педагогического университета. Главное, что интресовало студентов, почему мы об этом не знали раньше? Почему же с такой интересной информацией нас не ознакомили в средней школе или хотя бы в университете? Ведь знания о «золотом сечении» и о его многочисленных приложениях в природе, науке и искусстве, несомненно, обогатили бы каждого из нас. И вряд ли кто-либо из признанных ученых в области педагогики сможет дать вразумительный ответ на этот вопрос. Возможно, дело в традиции. Традиционно классическая наука, а, следовательно, и классическая педагогика, относились к "золотому сечению" с некоторым предубеждением как к «эзотерическому понятию», не совместимому с «материалистическим образованием». И поэтому *«золотое сечение»* вместе с *Платоновыми телами* было выброшено на свалку сомнительных научных концепций. Но тогда, как показано в этой статье, туда же надо отправить и «Начала» Евклида, в которых «золотое сечение» очень широко представлено и которые, согласно «гипотезе Прокла», посвящены построению геометрической теории *Платоновых тел.* Вместе с «Началами» Евклида на свалку сомнительных научных концепций надо отправить «квазикристаллы» и

«фуллерены» вместе с Нобелевским комитетом, который присуждает Нобелевские Премии за открытия, основанные на «эзотерике».

Своим опытом преподавания курса «Математика гармонии» я поделился с известным математиком **Аланом Роджерсоном**, научным руководителем Международного Проекта «Математическое образование в 21-м веке». Ответ проф. Роджерсона меня вдохновил. В своем письме проф. Роджерсон написал следующее:

«Дорогой Алексей! Я восхищен Вашей статьей, наполненной интереснейшей информацией, часть из которой мне неизвестна. Ваши идеи настолько глубоки, что их внедрение в школах – это следующий шаг в математическом образовании. Имеются ли преподаватели в Украине или где-либо, которые начали использовать ваши идеи и вашу научную программу? В наибольшей степени я был бы заинтересован в информацию об их преподавательском опыте. Мы очень надеемся, что Вы сможете посетить нашу Конференцию в Сицилии. С наилучшими пожеланиями – Алан».

Позже Алан Роджерсон направил мне официальное письмо-приглашение для участия в Конференции «Гуманистическое Возрождение в Математическом Образовании» и выступить на ней с научным докладом. Конференция состоялась в Италии (Сицилия, Палермо) с 20 по 25 сентября 2002 года:

«Как Председатель Международного Программного Комитета, я имею честь от имени Комитета пригласить Вас принять участие в работе нашей Конференции и прочитать на ней лекцию с детальным изложением Вашей всемирно известной работы: "Роль Золотого Сечения в современном математическом образовании". Ваша лекция будет включена в программу Конференции и будет издана а «Трудах Конференции». Мы рассматриваем Вас как достойного представителя Украины, вашего города Винница и Винницкого государственного педагогического университета. Мы надеемся в будущем, что Вы и Ваш университет будете активными участниками нашего Международного Проекта «Математическое образование в 21-м веке».

Принимая во внимание нашу заинтересованность в Вашем участии в Конференции, мы можем уменьшить для Вас вступительный взнос участника Конференции от $400 до $150 US. Мы также надеемся, что Мэр вашего города доктор Александр Домбровский и Ректор вашего Университета профессор доктор Никифор Шунда смогут поддержать финансово Ваше участие в нашей Конференции, поскольку Вы будете представлять на нашей Конференции г. Винницу, Винницкий государственный педагогический университет и Украину и Вы сможете предоставить в своем докладе все достижения Вашего университета в области математического образования.

Искренне Ваш – доктор Алан Роджерсон».

К сожалению, в связи с финансовыми трудностями (ни мэр ни ректор не нашли соответствующего финансирования) мне не удалось принять участие в работе этой Международной конференции.

К слову сказать, концепция «гармонизации образования» активно развивается отдельными энтузиастами в США. Особенно интересными является исследовательская деятельность и практическая работа американского учителя математики **Michael Shneider**. Он опубликовал около 10 книг и учебных пособий о гармонии природы, предназначенных для школьников и студентов. Главная его книга **"A Beginner's Guide to Constructing the Universe: Mathematical Archetypes of Nature, Art, and Science"** ("Руководство для начинающих о конструкции Вселенной: Математическое архетипы природы, искусства и науки") http://www.amazon.com/Beginners-Guide-Constructing-Universe-Mathematical/dp/0060926716

Его книги и учебные пособия очень близки по замыслу и идеям к моей книге. Главное состоит

в том, что **Michael Shneider** давно обучает американских школьников основам гармонии Мироздания, то есть, тому, что нам завещали Пифагор, Платон и Евклид.

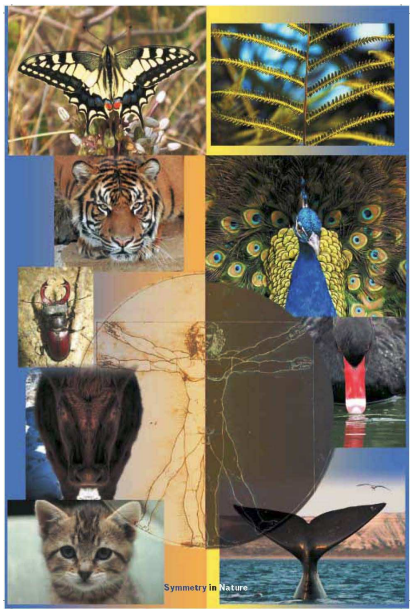
Таким образом, **новая концепция образования и вытекающая из нее концепция «школы будущего» состоит в том, чтобы широко ввести понятие *«гармонии»* и связанные с ним понятия *Платоновых тел, "золотого сечения", чисел Фибоначчи и* в школьные курсы по математике, физике, химии, информатике, ботанике, биологии, физиологии, медицине, искусству, архитектуре, музыке, литературе и поэзии. В этом случае процесс изучения этих курсов превращается в увлекательный поиск «гармонических отношений» в математике, природе, науке, искусстве, музыке, поэзии. Школьникам и студентам необходимо рассказать об истинной истории математики, о «гипотезе Прокла» и новой трактовке «Начал» Евклида.**

Если сравнить образование с могучим деревом, ветками которого являются отдельные учебные дисциплины, то стволом такого дерева для «гармоничного образования» должна быть «концепция гармонии и золотого сечения». К слову сказать, ветки на стволах деревьев располагаются по «принципу Фибоначчи» (это еще один пример филлотаксиса).

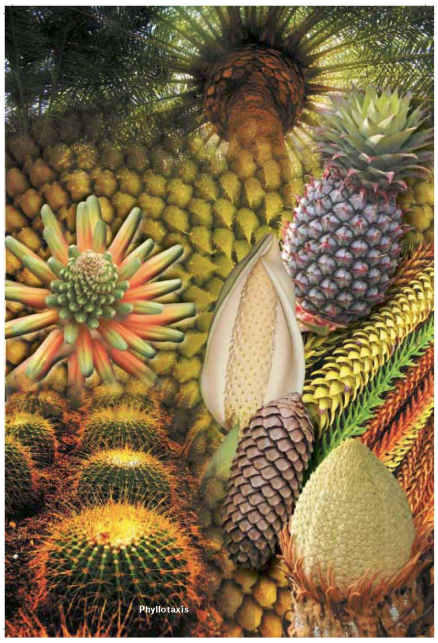
9. Музей Гармонии и Золотого Сечения

В 2001 г. мною совместно с Анной Слученковой на Интернете был выставлен сайт «Музей Гармонии и Золотого Сечения». Особенность сайта (в отличие от других сайтов подобного рода) состояла в том, что он был выставлен на двух языках – русском и английском. В настоящее время этот сайт считается одним из лучших интернетовских ресурсов по *«золотому сечению», числам Фибоначчи и Платоновым телам*.

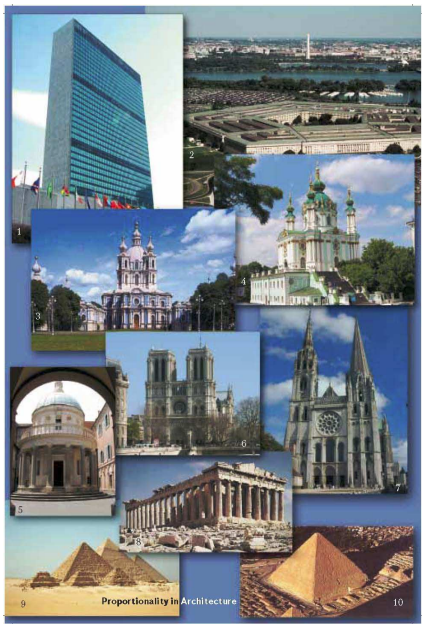
В приложении к своей англоязычной книге “The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science” с помощью 8 красочных плакатов я в сжатой форме отобразил суть «Музея Гармонии и Золотого Сечения».

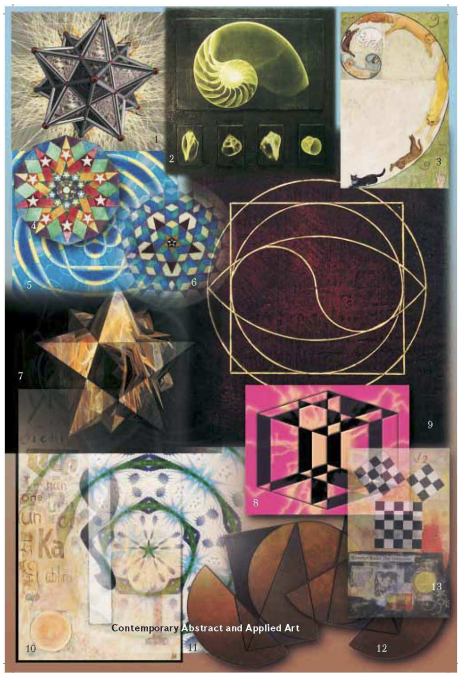
Принцип дихотомии в Природе	Пентагональная симметрия
	

«Золотые» спирали	Филлотаксис



«Золотое сечение» в архитектуре	«Золотое сечение» в скульптуре



«Золотое сечение» в живописи	«Золотое сечение» в прикладном искусстве
	

Конечно, на этих плакатах отображены только приложения «математики гармонии» в природе, науке и искусстве. За пределами плакатов осталась богатейшая история «гармонии» и «золотого сечения», которая представляет значительный познавательный интерес для студентов и школьников. Вдумаемся, какие личности принимали участие в разработке «математики гармонии» от Древней Греции до современного периода. В Музей Гармонии и Золотого Сечения должен быть включен раздел «Математика гармонии в лицах». Пифагор, Платон, Евклид, Фибоначчи, Лука Пачоли, Леонардо да Винчи, Дюрер, Иоганн Кеплер, Цейзинг, Люка, Бине, Клейн, Гримм, Гика, Воробьев, Хоггатт, Коксетер, Вайда, Лосев, современные ученые Сороко, Шевелев, Шмелев, Марутаев, Боднар, Петухов, Аракелян, Васютинский, Коробко, Эль Нашие, Скотт Олсен, Капрафф, Газале, Волошинов, Семенюта, Радюк, Цветков, Мартыненко, Арансон, Розин, Суббота, Шило и Динков, Осинский, Харитонов, Черепанов, Татаренко, Ткаченко, Петруненко, Иванус, Абачиев, Клещев, Якушко, Тимошенко, Сергиенко, Быстров, Смирнов, Груданов, Крючкова, Егорова-Гудкова, Клещев, Когновицкий, Коновалов, Южанников, Митяй, Терешина, Цымбалист, Кононов, Чечик, Вишняков, Азаров, Лужецкий, – вот далеко не полный перечень «золотоискателей», которые внесли своим творчеством определенный вклад в развитие «гармонического направления».

Музей Гармонии и Золотого Сечения является научным, историческим и художественным музеем, уникальной коллекцией всех творений Природы, Науки и Искусства, основанных на «золотом сечении», Платоновых телах и числах Фибоначчи. Аналогов такого музея в современной культуре не существует. Музей является своеобразным гимном «Гармонии», которая стояла в центре античной культуры и становится символом протекающей в настоящее время «Золотой» Научной Революции!

Заключение

Денис Клещев в своей замечательной статье «О былых и грядущих богах, жрецах и пророках науки» [1] написал следующее:

«В XX веке сбылись самые страшные опасения Гильберта – предсказание, в которое он сам отказывался верить: «Предстоит ли математике когда-нибудь то, что с другими науками происходит с давних пор, не распадется ли она на отдельные частные науки, представители которых будут едва понимать друг друга и связь между которыми будет поэтому становиться все меньше». Именно такое состояние полураспада характерно для современной математики. И оно является необходимым условием для зарождения новой парадигмы при условии, что не произойдет полного распада научной парадигмы, если не наступит темная эпоха «средневековья» в науке при господстве высокотехнологического варварства и псевдонаучной схоластики.

Как же не допустить полного распада науки? Ответ на этот вопрос мы тоже можем найти в главном научном «откровении» Гильберта, в его знаменитом докладе «Математические проблемы» (1900): ***«Мы также замечаем, что, чем дальше развивается математическая теория, тем гармоничнее и более едино оформляется ее сооружение и между до сих пор разделенными областями открываются неожиданные связи».*** *Другими словами, Гильберт верил, что любой методологический кризис в будущем можно решить программой гармонизации математики. И в качестве примера выполнимости этой программы он приводил решение «проблемы кратчайшей линии, играющей важную историческую и принципиальную роль одновременно в основаниях геометрии, в теории кривых и поверхностей, в механике и в вариационном исчислении. А как убедительно демонстрирует Ф.Клейн в своей книге об икосаэдре, проблема о правильных многогранниках имеет важное значение одновременно для элементарной геометрии, теории групп, теории алгебраических и теории линейных дифференциальных уравнений».*

Гениальное предсказание Гильберта о том, что **«любой методологический кризис в будущем можно решить программой гармонизации математики»,** успешно начало реализоваться в математике с 60-х годов 20 в. в той ее части, которая в течение многих лет находилась на ее «задворках» и воспринималась математиками как некоторая «забава». Речь идет о «теории чисел Фибоначчи» [15-17] и ее обобщении – «математике гармонии» [13]. Публикация в 1961 г. брошюры «Числа Фибоначчи» [15], написанной выдающимся советским математиком **Николаем Воробьевым** и организация в США *Фибоначчи Ассоциации*, которая с 1963 г. начала издавать ежеквартальный математический журнал *The Fibonacci Quarterly,* стали катализатором процесса «Гармонизации математики», который повлиял на процессы гармонизации других областей человеческой деятельности, включая теоретическое естествознание, информатику, экономику, образование.

Значительную роль в процессе «Гармонизации Математики и Современной Науки» сыграла деятельность так называемой «Славянской «Золотой» Группы» (1992), которая в 2003 г. была преобразована в Международный Клуб Золотого Сечения. По инициативе Клуба в Академии Тринитаризма был организован Институт Золотого Сечения. Наибольшим вкладом «Славянской «Золотой» Группы» в процесс «Гармонизации Математики» является публикация книги **Stakhov A. P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009**.

Выдающиеся научные открытия современной науки (*квазикристаллы Дана Шехтиана* (Нобелевская Премия по химии - 2001), *фуллерены* (Нобелевская Премия по химии - 1996), *«компьютеры Фибоначчи»* (Алексей Стахов), *«золотые» геноматрицы* Сергея Петухова, *новая геометрическая теория филлотаксиса* Олега Боднара, сенсационное открытие в квантовом физике, основанное на «золотом сечении», и др.) являются яркими свидетельствами происходящего в современной науке процесса смены научной парадигмы и перехода в состояние «Золотой» Научной Революции, основанной на использовании идей «гармонии» и «золотого сечения».

Этот процесс напоминает процесс, который протекал в Древней Греции с VI по III в. до н.э., когда в центре древнегреческой науки была поставлена «Проблема Гармонии» и начало создаваться *математическое учение о природе*. Отличие состоит в том, что в Древней Греции создание этого учения осуществлялось с помощью математики, которая находилась в зачаточном состоянии, и этот процесс можно назвать «Математизацией Гармонии». Именно в этот период были найдены главные

количественные и геометрические выразители гармонии, в частности, *«золотое сечение» и Платоновы тела.*

Современная математика вновь обращается к «Проблеме Гармонии» в период глубокого кризиса в ее основаниях («утрата определенности») [3]. С помощью фундаментальных понятий «математики гармонии» таких, как «*золотое сечение», числа Фибоначчи, «металлические пропорции»* в современную математику введены такие новые математические понятия как *коды Фибоначчи, системы счисления с иррациональными основаниями, гиперболические функции Фибоначчи и Люка, «золотая» фибоначчиева гониометрия.* С помощью этих понятий решены 10-я и 4-я проблемы Гильберта, что является подтверждением эффективности использования «математики гармонии» для решения сложнейших математических задач. И этот процесс, начавшийся в 50-е годы 20 в. можно назвать **«Гармонизацией Математики».**

Именно внедрение новой парадигмы - «гармонизации математики» - приведет к сближению математики с теоретическим естествознанием и природой, что является залогом успешного преодоления кризиса в современной математике.

Свою статью я посвящаю светлой памяти выдающегося математика современности академика **Юрия Алексеевича Митропольского** и хотел бы закончить статья словами из его отзыва [42]:

«*Возникает вопрос, какое место в общей теории математики занимает созданная Стаховым Математика Гармонии? Мне представляется, что в последние столетия, как выразился когда-то Н.И. Лобачевский, «математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою». В результате между «элементарной математикой», лежащей в основе современного математического образования, и «высшей математикой» образовался разрыв. И этот разрыв, как мне кажется, и заполняет Математика Гармонии, разработанная А.П. Стаховым. То есть «Математика Гармонии» — это большой теоретический вклад в развитии прежде всего «элементарной математики», и отсюда вытекает важное значение «Математики Гармонии» для математического образования».*

Литература

1. Д. Клещев О былых и грядущих богах, жрецах и пророках науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16762, 17.08.2011.
2. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984
3. М. Клайн. Математика. Утрата неопределенности. Пер. с англ., под ред. д-ра физ.-мат. наук И.М. Яглома. Москва: Мир, 1984.
4. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва: Советское радио, 1984.
5. Гратиа Д. Квазикристаллы. Успехи физических наук, 1988, том 156, вып. 2.
6. Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнен6ий пятой степени (пер. с нем.). Москва: Наука, 1989.
7. Стахов А.П. О деятельности Международного Клуба Золотого Сечения: реализованные проекты и перспективы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16446, 21.03.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321198.htm
8. А.П. Стахов, О «гипотезе Прокла» и противоречии между аксиомами Евдокса-Архимеда и Кантора (комментарий к статье Дениса Клещева) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16769, 20.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321214.htm
9. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
10. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994
11. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены. Успехи физических наук, 1993, том 163, №2.
12. Петухов С. В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение. Метафизика. – М.: Бином, 2006. – С. 216-250.

13. Stakhov A. P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009.
14. Грант Аракелян. Теория ЛМФ и принцип золотого сечения. Академия Тринитаризма, 2011.
15. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва, Наука, 1978.
16. Hoggat V. E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
17. Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. - Ellis Horwood limited, 1989.
18. Шестаков В.П. Гармония как эстетическая категория. Москва: Наука, 1973.
19. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. Москва: Наука, 1991.
20. А.П. Стахов, В.Л. Владимиров, Платоновы тела (их энтропия, рекурсии, симметрия, связь с «золотым сечением», исключительная роль в науке прошлых веков и в современной науке) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16623, 09.07.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321206.htm
21. А.П. Стахов, Гипотеза Прокла: новый взгляд на "Начала" Евклида и Математика Гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15195, 28.03.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322026.htm
22. A. Stakhov. The Mathematics of Harmony: Clarifying the Origin and Development of Mathematics. Congressus Numerantium, 193 (2008), 5-48
23. Charles H. Kann. Pythagoras and Pythagoreans. A Brief History. Hackett Publishing Co, Inc., 2001.
24. Leonid Zhmud. The origin of the History of Science in Classical Antiquity. Published by Walter de Gruyter, 2006.
25. Craig Smorinsky. History of Mathematics. A Supplement. Springer, 2008
26. Начала Евклида. Книги I-VI. Перевод с греческого и коментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
27. Начала Евклида. Книги VII-X. Перевод с греческого и коментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
28. Начала Евклида. Книги XI-XV. Перевод с греческого и коментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
29. Harmony of spheres. The Oxford dictionary of philosophy, Oxford University Press, 1994, 1996, 2005
30. Бутусов К. П. Золотое сечение в Солнечной системе // Астрономии и небесная механика. Серия «Проблемы исследования Вселенной», 1978, вып.7, 475-500.
31. Vladimir Dimitrov. A new kind of social science. Study of self-organization of human dynamics. Morrisville Lulu Press, 2005.
32. Зенкин А.А. Ошибка Георга Кантора // Вопросы философии. 2000, №2.
33. Stakhov A.P. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998.
34. Стахов А.П., Ткаченко И.С. и др. Об определении фибоначиевых и люковых функций. Винницкий политехнический институт. Винница, 1988. Депонировано в УкрНИИНТИ, 10.08.88.
35. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993.
36. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.
37. Stakhov A. Rozin B. The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, Volume 8, No. 3, 2006 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)
38. Илиев Л. Математика как наука о моделях. Успехи математических наук., 1972, т.27, вып.2.
39. Витенько И.В., Стахов А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.

40. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
41. Стахов А.П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн. Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.
42. Митропольский Ю.А. Отзыв о научном направлении украинского ученого, доктора технических наук, профессора Алексея Петровича Стахова // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12452, 23.09.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/006a/02320005.htm
43. Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г.
44. А.П. Стахов, Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология. Часть 1. Математика Гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14876, 16.09.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321089.htm
45. А.П. Стахов, Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология. Часть 2. «Золотая» Информационная Технология // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14878, 19.09.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321090.htm
46. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.
47. А.П. Стахов, Системы счисления с иррациональными основаниями и новые свойства натуральных чисел // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16778, 24.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321216.htm
48. А.П. Стахов, К обоснованию «золотой» теории чисел: *F*- и *L*-коды натуральных чисел // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16792, 29.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321221.htm
49. А.П. Стахов, К обоснованию «золотой» теории чисел: троичная зеркально-симметричная арифметика, основные достижения и перспективы развития новой теории чисел // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16816, 03.09.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321226.htm
50. А.П. Стахов, Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm
51. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
52. Газале Мидхат. Гномон. От фараонов до фракталов (пер. с англ.). Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2002
53. Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2001.
54. Татаренко А.А. Золотые Tm – гармонии и Dm – фракталы — суть солитоно-подобного Tm – структурогенеза мира // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12691, 09.12.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320010.htm
55. А.П. Стахов, С.Х. Арансон, «Золотая» фибоначчиевая гониометрия, четвёртая проблема Гильберта, преобразования фибоначчи-лоренца и «золотая» интерпретация специальной теории относительности // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15225, 12.04.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322036.htm
56. A. Stakhov, S. Aranson. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Applied Mathematics, 2011, 2 (in 3 issues: January, February, March).
57. Абачиев С.К. Математика гармонии глазами историка и методолога науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15991, 11.07.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321185.htm

58. А.П. Стахов, Микропроцессоры Фибоначчи - как одна из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16759, 16.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321212.htm
59. Stakhov AP. Brousentsov's ternary principle, Bergman's number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic. The Computer Journal 2002, Vol. 45, No. 2: 222-236.
60. Stakhov A. Fibonacci matrices, a generalization of the "Cassini formula", and a new coding theory. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 30, Issue 1, 56-66.
61. Стахов А.П. Цифровая метрология в кодах Фибоначчи и кодах золотой пропорции. В сб. Современные проблемы метрологии. Москва, Изд-во Всесоюзного заочного машиностроительного института, 1978 г.
62. А. Лебег. Об измерении величин. Пер. с французского. Москва: Учпедгиз, 1960
63. Метафизика. Век XXI (сост. и ред. Ю.С. Владимиров). Москва: БИНОМ, 2006.
64. Волошинов А. В. Математика и искусство. М., Просвещение, 2000.
65. Цветков В. Д. Золотая гармония и сердце. – Пущино: ООО «Фотон-век», 2008.
66. Гратиа Д. Квазикристаллы. Успехи физических наук, 1988, том 156, вып. 2.
67. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены. Успехи физических наук, 1993, том 163, №2.
68. Петухов С. В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение. Метафизика. – М.: Бином, 2006. – С. 216-250.
69. Верховский Л.И. Платоновы тела и элементарные частицы. Химия и жизнь, 2006, №6.
70. Владимиров Ю.С. Кварковый икосаэдр, заряды и угол Вайнберга. Труды международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве», Винница – 2003.
71. Stakhov A. The "golden" matrices and a new kind of cryptography. Chaos, Solitons & Fractals 2007, Volume 32, Issue 3, 1138-1146.
72. Петруненко В. В. Золотое сечение квантовых состояний и его астрономические и физические проявления. – Минск: Право и экономика, 2005.
73. Шило Н. А., Динков А. В. Фенотипическая система атомов в развитие идей Д.И.Менделеева // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14630, 09.11.2007.
74. Якушко С.И. «Фибоначчиевая» закономерность в периодической системе элементов Д.И. Менделеева // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15965, 27.06.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161662.htm
75. Золотое сечение в квантовом мире. http://www.strf.ru/science.aspx?CatalogId=222&d_no=27618
76. Хинчин А.Я. Цепные дроби (четвертое издание), 2004 (первое издание, 1935)
77. Prechter, Robert R. The Wave Principle of Human Social Behavior and the New Science of Socionomics. Gainseville, Georgia: New Classics Library, 1999.
78. Иванус А. И. Код да Винчи в бизнесе или гармоничный менеджмент по Фибоначчи (2-е издание). М.: УРСС, КомКнига, 2006.
79. Иванус А.И., О ключевой роли Золотого Сечения в концепции общества, основанного на знаниях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13854, 05.10.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321036.htm
80. Стахов А.П., Слученкова А.А., Щербаков И.Г. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. Санкт-Петербург: Питер, 2006.