В. Л. Владимиров

Обобщение Золотого Сечения. Вторая серия

«Всё должно быть доказано, и при доказательстве нельзя пользоваться ничем иным, кроме аксиом и ранее доказанных теорем»

«Объект математики настолько серьёзен, что не следует упускать случая сделать его немного интереснее»

Блез Паскаль, французский математик, физик, философ (1623 – 1662)

Содержание:

1. Введение, или Мир стоит на противоположностях

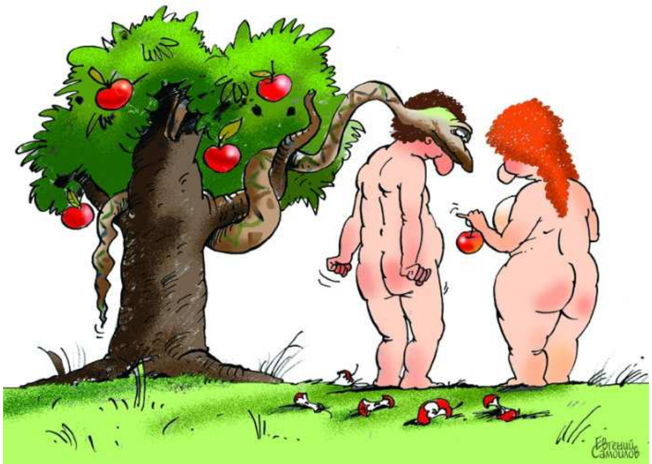
Каким-то образом мне предстоит напомнить читателю о том, что было опубликовано раньше, например, об A-рекурсиях, B-рекурсиях и M-пропорциях. Нужно *завести разговор* о довольно формальных математических понятиях… Да ещё перед самым Новым годом. Как бы сделать это позанимательней? Поступлю по аналогии:

Парикмахер, дважды порезав клиента, смягчил ситуацию, заведя с ним разговор:
- Вы у нас раньше бывали?
- Нет, руку я потерял на войне…

Надеюсь, что в online семинаре по МГ вы *бывали раньше.* Возможно, даже запомнили самое основное из предложенного нами ранее: «A-рекурсии» – это те рекурсии, в которых используется аттрактор «a», а «B-рекурсии» – это те рекурсии, в которых используется аттрактор «b».

Всё правильно: раз есть А-рекурсии, должны быть и В-рекурсии. Мир сто*и*т на противоположностях. Но пытливый читатель может спросить: «*А нет ли ещё и С-рекурсий?*». Ответим так: «По нашему мнению, не должно быть». Ведь в «золотой» пропорции (a+b)/b=b/a только *два параметра*, «a» и «b». Следовательно, и аттракторов *только два*: «a» и «b». Хотя быть *абсолютно* уверенным в таком ответе нельзя. Даже Ева ежедневно проверяла Адама:

- Адам, почему ты так поздно вернулся? С кем ты был целый вечер?
- Ну что ты выдумываешь, Ева! Ведь нас в раю только двое!
Но когда Адам засыпал, Ева тщательно пересчитывала его рёбра и с левой, и с правой стороны, а потом складывала результаты на калькуляторе…



Всё же, кое-что напомню. В статье «*Можно ли обобщать Золотое Сечение?*» была высказана такая мысль: «… нужно пытаться обобщить ЗС не для того, чтобы прославиться «новыми ЗС», а чтобы было, с чем ЗС сравнивать, чтобы грани бриллианта ЗС засверкали еще ярче, и чтобы отчетливее понять, в чем действительная уникальность ЗС. /…/ ЗС одно, но оно может быть частным случаем!» [1]. В указанной статье был рассмотрен метод получения А-рекурсий со сбалансированным характеристическим уравнением. Суть метода заключается в следующем.

Пусть задано характеристическое уравнение $a^2=k1\cdot a+k2$ суммирующей А-рекурсии $f_{n+2}=k1\cdot f_{n+1}+k2\cdot f_n$. Допустим, что в этом характеристическом уравнении всегда соблюдается баланс, то есть при любых значениях коэффициентов k1 и k2 это уравнение обращается в тождество.

Если заранее задано значение коэффициента k1, то из характеристического уравнения $a^2=k1\cdot a+k2$ получаем $k2=a^2–k1\cdot a$. Если же заранее задано значение коэффициента k2, то $k1=(a^2–k2)/a$.

Отсюда следуют два абсолютных тождества $a^2=k1\cdot a+(a^2–k1\cdot a)$ и $a^2=((a^2–k2)/a)\cdot a+k2$. А от них – «рукой подать» до двух видов суммирующей А-рекурсии:

$\mathbf{f_{n+2}=k1\cdot f_{n+1}+(a^2–k1\cdot a)\cdot f_n}$ и $\mathbf{f_{n+2}=((a^2–k2)/a)\cdot f_{n+1}+k2\cdot f_n}$.

Применив дополнительно метод трансформации рекуррентного ряда в геометрическую прогрессию за счет начальных условий – последовательных целых степеней аттрактора – и подставив любое положительное значение аттрактора «a», получаем такие А-рекурсии, которым соответствует геометрическая прогрессия

$\mathbf{1;\ a;\ a^2;\ a^3;\ \ldots\ a^n;\ \ldots}$

Эти А-рекурсии можно упростить. Например, при k1=1 имеем $\mathbf{f_{n+2}=k1\cdot f_{n+1}+(a^2–a)\cdot f_n}$, при k2=1 имеем $\mathbf{f_{n+2}=((a^2–1)/a)\cdot f_{n+1}+f_n}$.

В работе «*Раздумья над статьей А.П. Стахова «Математизация гармонии и гармонизация математики». М-пропорции и «эффект бабочки»*» [2] были предложены М-пропорции (a+b)/b=b/(M·a): «Целое так относится к большему, как большее – к любому числу М меньших».

Частным случаем М-пропорций (при М=1) является Золотая Пропорция. Анализ М-пропорций для разных значений параметра «М» дал возможность сравнивать переходные процессы при «выходе» числовых рядов на два «противоположных» аттрактора «а» и «b», позволил обнаружить «эффект бабочки», особенно яркий при М=1 (ЗС).

В статье «*Бриллиант Золотого Сечения засверкал «эффектом бабочки» благодаря исключительному свойству числа Фидия*» [3] продемонстрирована реальная значимость аттрактора «b» и «В-рекурсии».

Если аттрактором является б***о***льшая часть «b», то характеристическое уравнение «В-рекурсии» – это $\mathbf{b^2=3b\cdot d-d^2}$. В классическом случае (d=1) имеем уравнение $\mathbf{b^2=3b-1}$. Именно такого вида уравнение $\mathbf{I_{2n+1}=3\cdot I_{2n-1}-I_{2n-3}}$ мы и получили для числовых рядов значений силы токов с нечетными индексами на последовательных элементах резистивной лестничной электросхемы – электромодели Золотого Сечения. Такого же вида уравнение $\mathbf{U_{2n+2}=3\cdot U_{2n}-U_{2n-2}}$ было получено для числовых рядов значений падений напряжений с четными индексами на параллельных элементах резистивной электромодели Золотого Сечения.

Но, если сказано «А», нужно сказать и «В». Если сказано «М», нужно сказать и «N». В данной работе мы *покажем,* что Золотая Пропорция является частным случаем не только М-пропорций, но и «так названных нами» N-пропорций. И для новых N-пропорций покажем новые «В-рекурсии». Хотя глагол «***покажем***» не совсем подходит:

Нищий: «Мадам, я не видел мяса целый месяц…»
Мадам: «Мэри, покажи ему котлетку!».

Новые уравнения нужно не *показывать*, а, как это принято в математике, выводить, исследовать и сравнивать с ранее выведенными уравнениями.

2. Новые N-пропорции и их В-рекурсия (теория)

Итак, ранее нами рассмотрены М-пропорции (a+b)/b=b/(M·a): «Целое так относится к большему, как большее – к любому числу М меньших».

Согласитесь, просто грешн**о** было бы не поинтересоваться, а нельзя ли предложить и N-пропорцию:

$$\mathbf{(a+b)/(N\cdot b)=b/a}.$$

То есть пропорцию, в которой:

«Целое так относится к любому числу N б*о*льших, как большее – к меньшему».

Ведь в принципе при N=1 такая N-пропорция тоже обращается в Золотую Пропорцию!

Из пропорции (a+b)/(N·b)=b/a получаем (приравняв произведения крайних и средних её членов):

$$N\cdot b^2 = ab + a^2\ ; \qquad b^2 = (a/N)\cdot b + a^2/N\ .$$

Но из равенства $N\cdot b^2=ab+a^2$ следует, что $a^2=N\cdot b^2-ab$. Подставим это значение «a^2» в уравнение $b^2=(a/N)\cdot b+a^2/N$, получаем тождество:

$b^2=(a/N)\cdot b+(N\cdot b^2–ab)/N$; $\mathbf{b^2=(a/N)\cdot b+(b^2–(a/N)\cdot b)}$.

Этому тождеству соответствует **В-рекурсия** (со сбалансированным характеристическим уравнением, то есть тождеством):

$$\mathbf{f_{n+2}=(a/N)\cdot f_{n+1}+(b^2–(a/N)\cdot b)\cdot f_n}\ .$$

Но эрудированный читатель может спросить:

– Как же так, берёте тождество, и на его основе строите рекурсию? Что же, любое тождество может быть характеристическим уравнением для рекурсии?

– Но ведь и в статье «*Можно ли обобщать Золотое Сечение?*» [1] были предложены А-рекурсии со сбалансированным характеристическим уравнением. И результаты были получены отличные.

– А я сокращаю дробь, вычеркивая в числителе и знаменателе одинаковые цифры «шесть»: 26/65 = 2/5. Действие нелепое. Но получаю верный ответ, такой же, как если бы сократил дробь в уме на 13. Значит, и нелепые действия могут иногда привести к правильному ответу!

– Но сбалансированное характеристическое уравнение не произвольно! Мы его получаем из Золотой Пропорции. Впрочем, давайте проанализируем результат, то есть В-рекурсию $f_{n+2}=(a/N)\cdot f_{n+1}+(b^2–(a/N)\cdot b)\cdot f_n$ с аттрактором «b».

3. Типично-нетипичные «В-рекурсии» N-пропорций (практика)

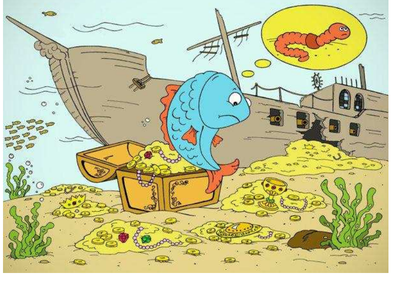
Едва отбившись от эрудированного читателя, ясно услышал голос недоверчивого читателя:

– А почему это рекурсию $f_{n+2}=(a/N)\cdot f_{n+1}+(b^2–(a/N)\cdot b)\cdot f_n$ мы называем В-рекурсией? Ведь в правой её части мы видим оба параметра: и «а», и «b».

– Рекурсия эта получена на основе типичного характеристического уравнения $b^2=(a/N)\cdot b+(b^2–(a/N)\cdot b)$ для аттрактора «b», которое имеет вид $b^2=k1\cdot b+k2$ обычного квадратного относительно «b» уравнения. Ещё вопросы есть?

– А почему раньше я никогда не видел в литературе ни А-рекурсий, ни В-рекурсий?

– Включите воображение, мой друг. Когда в 1725 году девятнадцатилетний Леонард Эйлер выиграл конкурс Парижской Академии наук по проблеме выбора места на корабле для установки мачты, он к этому моменту ни разу не видел ни морей, ни кораблей...



Ладно, заканчиваем дискутировать, обратимся к таблицам с расчетными данными.

Для этого рассмотрим Таблицу 1.

Таблица 1. Примеры «В-рекурсий» вида $f_{n+2}=(a/N)\cdot f_{n+1}+(b^2-(a/N)\cdot b)\cdot f_n$

#	N	a	b	k1 = a/N	k2 = $b^2 - k1\cdot b$	«В-рекурсия»	Числовой ряд при начальных условиях $f_0=b^0$, $f_1=b^1$	a+b
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0	0	1	b	0	$f_{n+2}=b\cdot f_{n+1}$	1; 1; 1; 1; … 1^n	1
2	1	1	2	1	2	$f_{n+2}=f_{n+1}+2\cdot f_n$	1; 2; 4; 8; … 2^n	3
3	1	1	3	1	6	$f_{n+2}=f_{n+1}+6\cdot f_n$	1; 3; 9; 27; … 3^n	4
4	1	2	2	2	0	$f_{n+2}=2\cdot f_{n+1}$	1; 2; 4; 8; … 2^n	4
5	1	2	3	2	3	$f_{n+2}=2\cdot f_{n+1}+3\cdot f_n$	1; 3; 9; 27; … 3^n	5
6	1	2	4	2	8	$f_{n+2}=2\cdot f_{n+1}+8\cdot f_n$	1; 4; 16; 64; … 4^n	6
7	1	3	2	3	–2	$f_{n+2}=3\cdot f_{n+1}-2\cdot f_n$	1; 2; 4; 8; … 2^n	5
8	1	3	3	3	0	$f_{n+2}=3\cdot f_{n+1}$	1; 3; 9; 27; … 3^n	6
9	1	3	4	3	4	$f_{n+2}=3\cdot f_{n+1}+4\cdot f_n$	1; 4; 16; 64; … 4^n	7
10	2	8	10	4	60	$f_{n+2}=4\cdot f_{n+1}+60\cdot f_n$	1; 10; 100; …10^n	18
11	3	30	5	10	–25	$f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}-25\cdot f_n$	1; 5; 25; … 5^n	35
12	4	1	6	1/4	34,5	$f_{n+2}=0{,}25\cdot f_{n+1}+34{,}5\cdot f_n$	1; 6; 36; … 6^n	7
13	5	1	7	1/5	47,6	$f_{n+2}=0{,}2\cdot f_{n+1}+47{,}6\cdot f_n$	1; 7; 49; … 7^n	8
14	6	1	8	1/6	62,667	$f_{n+2}=0{,}167\cdot f_{n+1}+62{,}67\cdot f_n$	1; 8; 64; … 8^n	9
15	1	2/Φ	2	1,236	1,528	$f_{n+2}=1{,}236\cdot f_{n+1}+1{,}528\cdot f_n$	1; 2; 4; 8; … 2^n	3,236
16	2	1	Φ	0,5	1,809	$f_{n+2}=0{,}5\cdot f_{n+1}+1{,}809\cdot f_n$	1; Φ; $Φ^2$; …$Φ^n$	$Φ^2$

В этой Табл.1 синим цветом показаны В-рекурсии с N=1 (столбец 2), розовым цветом – рекурсии с N>1, золотистым цветом – рекурсии с N=1 и N=2, претендующие на «звание золотых», и, наконец, зеленым цветом – рекурсия с N=0.

Прежде всего, бросается в глаза, что числовой ряд (столбец 8) у любой рекурсии – это ряд степеней аттрактора «b», значение которого (заданное произвольно) показано в столбце (4). Этому есть простое объяснение: принято, что $f_0=b^0$, $f_1=b^1$.

Значение аттрактора «а», также заданное произвольно, показано в столбце (3). От него, как и от N (столбец 2), зависит 1-й коэффициент рекурсии k1=a/N (столбец 5).

А уж 2-й коэффициент рекурсии $k2=b^2-k1\cdot b$ (столбец 6) зависит и от «а», и от «b», и от «N».

Наконец, в столбце (9) показаны значения «целого» a+b. И эти значения показывают отличие В-рекурсий от аналогичных им А-рекурсий в предыдущей работе [1].

Итак, целочисленные геометрические прогрессии в столбце (8) мы получаем и для суммирующих, и для разностных рекурсий, и для рекурсий с целочисленными коэффициентами k1 и k2, и для рекурсий с дробными (в том числе иррациональными) коэффициентами.

Любая геометрическая прогрессия может генерироваться как рекурсией 1-го порядка (строки 1, 4 и 8), так и **бесконечным множеством рекурсий 2-го порядка**. Чтобы получить геометрическую прогрессию со знаменателем «b», достаточно выбрать любое положительное значение «а», любое целое положительное значение «N» и подставить эти три значения в выражение В-рекурсии $f_{n+2}=(a/N)\cdot f_{n+1}+(b^2-(a/N)\cdot b)\cdot f_n$.

По целочисленным геометрическим прогрессиям в столбце (8) мы (с помощью специфических начальных условий) проверяем себя: соответствуют ли коэффициенты k1 и k2 В-рекурсии значению аттрактора «b».

Не следует думать, что если в N-рекурсиях из Табл.1 принять N=1, мы сразу получим «золотую» рекурсию. Действительно, строки 1–14 в Табл.1 даже «позолоченными» не выглядят. Ведь они не соответствуют ни одному из пяти необходимых и достаточных условий [2] Золотого Сечения.

Поскольку у Золотого Сечения должно соблюдаться равенство b=aΦ, либо значение «a», либо значение «b» у Золотого Сечения должно быть иррациональным. Мы не видим иррациональности значений «a» и «b» в строках 1–14.

Иное дело – строки 15 и 16. Рассмотрим по порядку их претензии на «золото».

В строке 15 принято, что **b=2**, a=b/Φ=2/Φ≈1,236. Одно условие Золотого Сечения выполнено. Да и N=1. Казалось бы, этого достаточно. Но… **Не для N-пропорции**. Действительно, d=b–a=2–1,236≈0,764. Но меньший аттрактор «a» у Золотого Сечения в Φ раз больше разности аттракторов «d» (a=Φd) [2]. Проверяем: a/d≈1,236/0,764=2≠Φ. Не получилось. Это не «золото». Несмотря даже на то, что здесь $k2=k1^2$, что очень напоминает «золотую» A-рекурсию с уравнением $a^2=d\cdot a+d^2$… Видимо, причина в том, что в данной работе мы составляем пропорции и рекурсии для аттрактора «b», а он-то у нас не связан с «золотой» константой Φ.

В строке 16 принято, что **b=Φ**, a=b/Φ=Φ/Φ≈1. Следовательно, d=b–a=Φ–1≈0,618. Меньший аттрактор «a» у Золотого Сечения в Φ раз больше разности аттракторов «d» (a=Φd) [2]: a/d≈1/0,618=Φ. Пока всё в порядке. Проверяем дальше. Сумма аттракторов «a+b» в Φ раз больше большего аттрактора «b» (a+b=Φb) [2]: $a+b=1+\Phi=\Phi^2$, $(a+b)/b=\Phi^2/\Phi=\Phi$. Проверяем дальше. Гармоническое среднее аттракторов h(a,b) в 2 раза больше разности аттракторов «d» (h=2d) [2]: $h=2ab/(a+b)=2\Phi/\Phi^2=2/\Phi\approx1{,}236=2d$. Уже четыре условия выполнены. Выполняется ли «золотая» пропорция (a+b)/b=b/a ? Да! Ведь выше было показано, что и (a+b)/b=Φ, и b/a=Φ. **Все пять условий выполнены**. Получилось. Это «золото»?!

Вот это уже очень интересно. Ведь в строке 16 имеем **N=2**. Кроме того, в строке 16 показана СУММИРУЮЩАЯ $\mathbf{f_{n+2}=0{,}5\cdot f_{n+1}+1{,}809\cdot f_n}$ B-рекурсия, а не разностная $f_{n+2}=(h+d)f_{n+1}-0{,}5hdf_n$, с которой мы работали в [2]. **Неужели N-пропорция способна при N≠1 породить «золотую» B-рекурсию?? Видимо, причина в том, что именно аттрактор «b» здесь, в этой B-рекурсии, равен «золотой» константе Φ. И поэтому «на выходе» мы получили степенной ряд «золотой» константы Φ (столбец 8).**

Очевидно, исследования в 2012 году нужно продолжить **(для N>2).**

Буду благодарен, если кто-либо из читателей найдет ошибку в моих предновогодних суждениях или расчетах. Уж очень непредсказуемым для автора оказался результат.

4. Натуральный ряд начинается не с нуля, а с единицы

А теперь вернемся к строке 1 Табл.1. Обычное множество натуральных чисел начинают с единицы, а у нас первое значение N равно **N=0**. Почему?

Так получается, если принять, что **a/N=b** при **b≠0**. Действительно, из N-пропорции (a+b)/(N·b)=b/a следует (a+b)/b=N·b/a (поменяли местами средние члены). Но из **a/N=b** следует N·b/a=1. Тогда и (a+b)/b=1, то есть **a=0**. Однако **b=a/N**, и **b≠0** только при **N=0**.

В строке 1 Табл.1, следовательно, рассмотрен самый крайний случай **N=0**, когда целое a+b=b вообще не делится на части, а равно большему. При этом B-рекурсия вырождается в рекурсию 1-го порядка $f_{n+2}=b\cdot f_{n+1}$ (строка 1, столбец 7).

Мне так и слышится голос начитанной, романтичной читательницы:

– Надо же, левую границу бесконечного множества 1; 2; 3; … ∞ натуральных чисел вы необоснованно сдвинули влево, приняв в N–пропорции N=0, а правую границу вообще обидели, ограничив её значением N=6. А где же поэтическая бесконечность, почему в Табл.1 нет строки со значением N=∞ ??

Отвечу честно:

– Не знаю, что будет, если **N**=∞. Наверное, ничего хорошего, если вспомнить «философа рассудка» Иммануила Канта и двух Георгов: Кантора с его «общей теорией бесконечных множеств» и Гегеля с его «дурной бесконечностью». Вот и у нас получилась «дурная бесконечность»: слева вышли аж за край, а справа края и не видно… Поэтому попытаюсь вместо прямого ответа отделаться незамысловатой «поэзией»:

От нуля до бесконечности
Мы гоняем «эн» извечно.
Нет пределов у беспечности:
«Бесконечность» – та же «вечность».
Кантор, Кант – молчат ребята,
Не хотят вступать в дебаты,
А «дурная бесконечность»
Жаждет славы, лезет в вечность…

5. Заключение, или С очень Новым годом

Итак:

1. Золотая Пропорция может являться частным случаем не только М-пропорций, но и «так названных нами» N-пропорций (a+b)/(N·b)=b/a.
2. Из сбалансированного характеристического уравнения N-пропорции следует уравнение В-рекурсии $f_{n+2}=(a/N)\cdot f_{n+1}+(b^2-(a/N)\cdot b)\cdot f_n$ с аттрактором «b».
3. Уравнение В-рекурсии N-пропорции позволяет генерировать любую геометрическую прогрессию бесконечным числом способов.
4. По геометрическим прогрессиям удобно осуществлять проверку: соответствуют ли коэффициенты k1 и k2 В-рекурсии значению аттрактора «b».
5. При N=2 и аттракторе «b», равном «золотой» константе Ф, получена суммирующая В-рекурсия $f_{n+2}=0{,}5\cdot f_{n+1}+1{,}809\cdot f_n$, которая по всем пяти признакам соответствует Золотому Сечению. При соответствующих начальных условиях ($f_0=1$ и $f_1=Ф$) эта В-рекурсия генерирует степенной ряд «золотой» константы Ф. Результат несколько неожиданный, требующий перепроверки в Новом 2012 г.
6. Желаю сайту АТ, его редакции, всем участникам online семинара по МГ здоровья и больших творческих успехов! С наступающим!

Литература:

1. Владимиров В.Л., Можно ли обобщать Золотое Сечение? // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17028, 26.11.2011

2. Владимиров В.Л. Раздумья над статьей А.П. Стахова «Математизация гармонии и гармонизация математики». М-пропорции и «эффект бабочки» // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16999, 19.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322036.htm

3. В.Л. Владимиров, Бриллиант Золотого Сечения засверкал «эффектом бабочки» благодаря исключительному свойству числа Фидия // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17119, 19.12.2011