А.П. Стахов

О «сходимости» кодов золотой *p*-пропорции (реплика на статью С.Л. Василенко)

1. Введение

В своей статье «Рациональность иррациональных систем счисления» [1] (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322064.htm) С.Л. Василенко правильно ставит вопрос о строгом доказательстве «сходимости» кодов золотой *p*-пропорции.

Что это означает? Рассмотрим представление натурального числа *N* в «коде золотой *p*-пропорции» [2]:

$$N = \sum_i a_i \Phi_p^i , \tag{1}$$

где $p \in \{0,1,2,3,...\}$ - заданное целое число; $a_i \in (0,1)$ - двоичная цифра *i*-го разряда; Φ_p - «золотая» *p*-пропорция, равная положительному корню следующего алгебраического уравнения:

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0; \tag{2}$$

$\Phi_p^i \ (p = 0,1,2,3,...; i = 0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,...)$ - *i*-я степень золотой *p*-пропорции, удовлетворяющая следующему тождеству:

$$\Phi_p^i = \Phi_p^{i-1} + \Phi_p^{i-p-1} = \Phi_p \times \Phi_p^{i-1} . \tag{3}$$

Представление натурального числа в виде (1) будем называть Φ_p **-кодом.**

Возникает вопрос: является ли сумма (1) конечной или бесконечной? То есть, можно ли при заданном $p \in \{0,1,2,3,...\}$ представить любое натуральное число *N* в виде конечной суммы степеней золотой *p*-пропорции $\Phi_p^i \ (p = 0,1,2,3,...; i = 0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,...)$**?** Вопрос далеко не тривиальный, если учесть, что степени Φ_p^i для $p > 0$ являются иррациональными числами.

В книге [3] положительный ответ на этот вопрос дается с помощью сведения кода (1) к F_p-коду, частным случаем которого является *F*-код, имеющий отношение к $\Phi -$коду, то есть, к представлению натурального числа *N* в «системе Бергмана» [4]:

$$N = \sum_i a_i \Phi^i , \tag{4}$$

где $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ - золотая пропорция.

В статье [5] доказано, что $\Phi -$код (4) сводится к позиционному представлению натурального числа *N* в виде следующей суммы чисел Фибоначчи $F_i \ (i = 0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,...)$:

$$N = \sum_i a_i F_{i+1} \tag{5}$$

Выражение (5) будем называть *F-кодом числа N*. Таким образом, *F*-код представляет собой двоичное позиционное представление натурального числа *N*, в котором весами разрядов являются числа Фибоначчи F_{i+1}.

А теперь сравним выражения (4) и (5). Так как двоичные цифры a_i в выражениях (4) и (5) совпадают для любого i=0, ±1, ±2, ±3, … , то отсюда вытекает, что *F*-код числа *N* может быть получен из Ф-кода (4) того же самого натурального числа *N* путем простой замены степеней золотой пропорции Φ^i в формуле (4) на соответствующие числа Фибоначчи F_{i+1}.

В результате проведенных рассуждений выражение (4), представляющее собой сумму иррациональных чисел Φ^i, взятых с двоичными коэффициентами $a_i \in (0,1)$, сведено к выражению (5), представляющему собой сумму чисел Фибоначчи F_{i+1}, взятых с теми же двоичными коэффициентами $a_i \in (0,1)$. Но числа Фибоначчи F_{i+1} являются **ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ**, откуда вытекает, что представление (5) **КОНЕЧНО**, а, следовательно, и представление (4) также **КОНЕЧНО**.

В книге [3] этот же прием использован для доказательства конечности суммы (1). Это доказательство дано в параграфе 9.8.2 «F_p-code". Приведем этот параграф на английском языке:

9.8.2. F_p-code

As is shown above, the *F*-code of the natural number *N* (5) can be obtained from the Φ-code of the same natural number *N* (4) by means of the simple substitution of all Fibonacci numbers F_{i+1} for the powers Φ^i in (4), where i=0,±1,±2,±3,… . We can generalize these results for the case of the golden *p*-proportion code (1).

Let us prove the following theorem.

Theorem 9.9 (F_p-code). If we represent some natural number *N* in the Φ_p-code (1) and substitute in this representation the corresponding Fibonacci *p*-number $F_p(i+1)$ for the golden *p*-proportion power Φ_p^i (i=0,±1,±2,±3,…), then the sum $\sum_i a_i F_p(i+1)$, which appears at this substitution, is equal to the initial natural number *N*, that is,

$$N = \sum_i a_i F_p(i+1). \tag{6}$$

We name the sum (6) the *F_p-code of the natural number N*.

Proof. Let us prove the theorem by the induction on *N*. For the case N=1, the sum (1) comes to the following:

$$1 = 1.0 = 1 \times \Phi_p^0. \tag{7}$$

If we substitute the Fibonacci *p*-number $F_p(1)$ for the power Φ_p^0, we obtain the following expression:

$$1 \times F_p(1). \tag{8}$$

Above we proved that the Fibonacci *p*-number $F_p(1)$=1 for any given p>0. It follows from this consideration that

$$1 \times F_p(1) = 1 \tag{9}$$

for any Φ_p-code (1). The basis of the induction has been proved.

Suppose that the assertion of the theorem is valid for some natural number K ("the inductive hypothesis"). We prove the validity of the theorem for the next natural number K+1 with this "inductive hypothesis."

Represent the natural number K in the Φ_p-code (1) as follows:

$$K = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \Phi_p^i + a_0 \Phi_p^0 + \sum_{i=-1}^{-\infty} a_i \Phi_p^i. \tag{10}$$

Then, the sum $\sum_i a_i F_p(i+1)$, which is formed from (10) by the substitution of $F_p(i+1)$ for Φ_p^i, where i=0,±1,±2,±3,…, takes the following form:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i F_p(i+1) + a_0 F_p(0) + \sum_{i=-1}^{-\infty} a_i F_p(i+1). \tag{11}$$

According to the "inductive hypothesis," the sum (11) is equal to natural number K, that is,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i F_p(i+1) + a_0 F_p(0) + \sum_{i=-1}^{-\infty} a_i F_p(i+1) = K. \tag{12}$$

In order to obtain the next natural number K+1 from (12), it is necessary to add 1 to the 0-th digit of (12). Here, two cases are possible: (a) a_0=0 and (b) a_0=1.

(a) If a_0=0 in (11), then the F_p-code of the number K looks as follows:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i F_p(i+1) + 0 \times F_p(1) + \sum_{i=-1}^{-\infty} a_i F_p(i+1) = K. \tag{13}$$

If we substitute a_0 = 1 for a_0=0 in (13), the sum (13) takes the following form:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i F_p(i+1) + 1 \times F_p(1) + \sum_{i=-1}^{-\infty} a_i F_p(i+1) = K + 1 \tag{14}$$

because $F_p(1)$=1 for any given p>0.

(b) Now, let us consider the case a_0=1 in (11). In this case, as is shown above, by using "devolutions" and "convolutions," we can always carry out such transformation of (11), when the digit a_0 in (11) becomes equal to 0. However, then the case (b) becomes case (a) and this meaning that Theorem 9.9 is proven.

Таким образом, мы доказали, что выражение (1), представляющее сумму иррациональных чисел Φ_p^i с двоичными коэффициентами $a_i \in (0,1)$, сводится к выражению (6), представляющему сумму *p-чисел Фибоначчи* с теми же двоичными коэффициентами. Но *p*-числа Фибоначчи $F_p(i)$ являются **ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ**, откуда вытекает, что представление (6) **КОНЕЧНО**, а, следовательно, и представление (1) также **КОНЕЧНО**.

Что касается практических приложений «кодов золотой пропорции», то наибольший интерес с практической точки представляет «система Бергмана» [4]. Именно ее предлагается использовать в качестве арифметической основы «микропроцессоров Фибоначчи» [6].

Литература

1. С.Л. Василенко, Рациональность иррациональных систем счисления // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17062, 06.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322064.htm
2. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М.: Советское Радио, 1984
3. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009
4. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
5. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г. (см. также http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322039.htm)
6. А.П. Стахов, Микропроцессоры Фибоначчи - как одна из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16759, 16.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321212.htm