В. Л. Владимиров

Можно ли обобщать Золотое Сечение?

В науке необходимо воображение.
Оно не исчерпывается полностью ни математикой,
ни логикой, в нем есть что-то от красоты и поэзии

Мария Митчелл, американский астроном (1818 – 1889)

Содержание:

1. Спасибо, но я не профессор («дтн» и «проф» не обобщаются)

Прежде всего, хочу поблагодарить доктора технических наук С.Л. Василенко за оперативные и доброжелательные замечания [1] на мою статью «Раздумья над статьей А.П. Стахова «Математизация гармонии и гармонизация математики». М-пропорции и «эффект бабочки»» [2]. Кстати, я тоже доктор технических наук без этого почти обязательного (для доктора) в советское время ученого звания – профессор. Не люблю бумажно-оформительскую волокиту.

В своих работах доктор С.Л. Василенко часто поднимает насущный вопрос: можно ли и нужно ли пытаться обобщить Золотое Сечение (ЗС) ?

Мне кажется, и можно, и нужно. ЗС – это не приставки «дтн» и «проф» к фамилиям ученых, которые не обобщаются. Но нужно пытаться обобщить ЗС не для того, чтобы прославиться «новыми ЗС», а чтобы было, с чем ЗС сравнивать, чтобы грани бриллианта ЗС засверкали еще ярче, и чтобы отчетливее понять, в чем действительная уникальность ЗС. Подчеркну, что речь идет только о рекурсиях 2-го порядка, о рекурсиях более высоких порядков – отдельный разговор. ЗС одно, но оно может быть частным случаем!..

В [2] были предложены «так названные» М-пропорции, частным случаем которых (при М=1) является «золотая» пропорция, идущая в «одной упряжке» с ЗС, «золотой» рекурсией и рекуррентным числовым рядом Фибоначчи при единичных начальных условиях. Анализ М-пропорций для разных значений параметра «М» дал возможность сравнивать переходные процессы при «выходе» числовых рядов на аттракторы «a» и «b», позволил установить наличие «неколебательных», апериодических процессов при «выходе» на аттрактор «b» разностной рекурсии, а также наличие «эффекта бабочки», особенно ярко проявляющегося в случае М=1 (ЗС).

В данной работе предлагаются новые «А-рекурсии» [2], которые условно будем называть «А-рекурсиями сбалансированного характеристического уравнения» до тех пор, пока не будет предложено другое, более короткое и подходящее название. Таких рекурсий можно придумать, вероятно, бесконечно много. Все они имеют характерную особенность. Как только мы примем, что меньший аттрактор «a» равен «золотой» константе $\Phi \approx 1{,}618$, все эти рекурсии трансформируются в «золотую» рекурсию. Свойства «А-рекурсий сбалансированного характеристического уравнения» рассмотрим ниже. Сначала – что натолкнуло на мысль о них…

2. Как я дошел до жизни такой, или благодарность Виктору Дмитриевичу Цветкову

Этой работы не было бы, если бы я не читал с огромным вниманием и уважением к автору все работы Виктора Дмитриевича Цветкова. Меня «зацепил» один абзац из его свежей статьи [3]:

«Следует указать на уникальную аналогию между геометрической прогрессией: [ряд степеней константы «Ф» – В.В.] и арифметическим рядом, построенным по рекуррентной формуле: $f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$, где первыми членами ряда являются числа $Ф^0$ и $Ф^1$. «Геометрический» и «арифметический» ряды «золотых» чисел обладают удивительным свойством: числа этих рядов, начиная с первого и дальше, совпадают. Отметим, что подобное совпадение имеет место только для арифметической и геометрической последовательностей с начальными членами $Ф^0=1$ и $Ф^1=1{,}618$».

Всё здесь правильно. Но давайте вспомним, что отмечалось в нашей с А.П. Стаховым работе [4]:

«Рекурсия 2-го порядка с аттрактором $a\neq 1$ генерирует геометрическую прогрессию, если ее начальные условия f_0 и f_1 – степени аттрактора. […]

Пример 5. Пусть $h=\sqrt{7}+1$, $d=\sqrt{7}-1$. Из (6) находим a=3; $b=a+d=2+\sqrt{7}$. Коэффициенты уравнений (6) и (8) равны: $h-d=2$; $0{,}5hd=3$. Разностное уравнение (8) имеет вид: $\mathbf{f_{n+2}=2f_{n+1}+3f_n}$. Для $f_0=f_1=1$ получаем рекуррентный ряд чисел 1, 1, 5, 13, 41, … Предел отношения элементов ряда равен a=3. Но если принять начальные условия равными последовательным целым степеням аттрактора ($f_0=a^0=1$; $\mathbf{f_1=a^1=3}$), – получаем **геометрическую прогрессию** 1, 3, 9, 27, 81, … с формулой n-того элемента $f_n=3^n$.

Уравнением геометрической прогрессии может быть любое рекуррентное уравнение 2-го порядка вида $\mathbf{f_{p+2}=(h-d)f_{p+1}+0{,}5hdf_p}$, кроме $\mathbf{f_{n+2}=2f_{n+1}-f_n}$, если начальные условия приведены к последовательным целым степеням аттрактора $\mathbf{a=g+(g^2+0{,}5hd)^{0{,}5}}$, где $\mathbf{g=(h-d)/2}$.

Таким образом, уравнение геометрической прогрессии – это не только рекуррентное уравнение 1-го порядка $f(n+1)=a*f(n)$».

Следовательно, удивительное свойство – совпадение «геометрического» и «арифметического» рядов – можно обнаружить не только у геометрической и арифметической последовательности с начальными членами $Ф^0=1$ и $Ф^1=1{,}618$ из степеней «золотых» чисел, но и практически у любой рекурсии с аттрактором «а» и начальными членами числового ряда $a^0=1$ и $a^1=a$.

ЗС – это настолько уникальное и яркое явление в философии, математике и интегральной науке о Гармонии мироздания, что «от него не убудет», если показать совпадение «геометрического» и «арифметического» рядов для произвольных рекурсий.

3. Методы математической индукции и сбалансированного характеристического уравнения

В [4] для того, чтобы доказать, что любой рекуррентный ряд можно с помощью начальных условий превратить в геометрическую прогрессию, был применен метод математической индукции. Напомним его суть.

Утверждение P(x) справедливо для всех неотрицательных «x», если:

1) справедливо P(0);
2) при условии, что верно P(x), верно также и P(x+1).

Напомним, каким именно образом в [4] доказывалось, что любая рекурсия 2-го порядка с аттрактором $a \neq 1$ генерирует геометрическую прогрессию, если ее начальные условия f_0 и f_1 – последовательные целые степени аттрактора:

«*Методом математической индукции* ***докажем****, что именно такие специфические начальные условия* ***всегда*** *преобразуют возвратную последовательность 2-го порядка в геометрическую прогрессию, если аттрактор последовательности не равен единице. Последняя оговорка относится к единственному случаю $f_{n+2}=2f_{n+1}–f_n$, генерирующему при $f_0=1$, $f_1=2$* ***арифметическую*** *прогрессию – натуральный ряд чисел.*

Из равенства (8) следует: $f_{n+2}=(h–d)f_{n+1}+(a^2–(h–d)a)f_n$. Примем $f_0=a^0=1$; $f_1=a^1=a$. Убедимся, что при ***n=0*** *равенство $f_{n+2}=a^{n+2}$ справедливо:*

$f_2=(h–d)f_1+(a^2–(h–d)a)f_0=(h–d)\,a+(a^2–(h–d)a)=a^2$.

Теперь докажем, что если выражение $f_{n+2}=a^{n+2}$ справедливо при ***n=p*** *и* ***n=p+1****, то оно справедливо и при* ***n=p+2****. Действительно, если $f_p=a^p$ и $f_{p+1}=a^{p+1}$, то*

$f_{p+2}=(h–d)f_{p+1}+(a^2–(h–d)a)f_p=(h–d)a^{p+1}+(a^2–(h–d)a)a^p=a^{p+2}$.

Следовательно, при начальных данных $f_0=a^0=1$; $f_1=a^1=a$, приведенных к последовательным целым степеням аттрактора, равенство ***$f_{n+2}=a^{n+2}$ справедливо для любых натуральных n,*** *что и требовалось доказать*».

Поскольку в [4] также доказывалось, что ЗС обладает максимальной энтропией, то на приведенный выше важный вывод «Метода трансформации рекуррентного ряда в геометрическую прогрессию» (название условно), оставшийся в тени, почти никто внимания не обратил…

И еще: в [4] очень скромно упоминался специфический прием, который в данной работе очень важен. Настолько важен, что мы попытаемся здесь превратить его в метод с длинным условным названием «Метод получения А-рекурсий со сбалансированным характеристическим уравнением». Суть этого метода заключается в следующем.

Пусть задано характеристическое уравнение $a^2=k1 \cdot a+k2$ суммирующей А-рекурсии $f_{n+2}=k1 \cdot f_{n+1}+k2 \cdot f_n$. Допустим, что в этом характеристическом уравнении всегда соблюдается баланс, то есть при любых значениях коэффициентов k1 и k2 это уравнение обращается в тождество. Если заранее задано значение коэффициента k1, то $k2= a^2–k1 \cdot a$. Если же заранее задано значение коэффициента k2, то $k1= (a^2–k2)/a$.

Совместим оба метода: «Метод трансформации рекуррентного ряда в геометрическую прогрессию» и «Метод получения А-рекурсий со сбалансированным характеристическим уравнением». Тогда, задаваясь любым положительным значением аттрактора «а», на выходе получим такую А-рекурсию, которой соответствует геометрическая прогрессия 1; a; a^2; a^3; … a^n.

Только в том случае, если мы примем а=Ф, где Ф – «золотая» константа, А-рекурсия трансформируется в «золотую»: $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$. В итоге можно считать, что «золотая» рекурсия $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ является частным случаем любой А-рекурсии со сбалансированным характеристическим уравнением.

4. Типично-нетипичные «А-рекурсии»…

Пора переходить от теории к практике. Итак, рассмотрим случай, когда в уравнении $a^2=k1 \cdot a+k2$ коэффициент k1=1. Из самого характеристического уравнения находим $k2= a^2–k1 \cdot a=a(a–1)$. Примеры таких вроде бы ординарных А-рекурсий вида $f_{n+2}=f_{n+1}+a(a–1) \cdot f_n$ приведены в Табл. 1. В столбце 5 числовые ряды – это «чистые» геометрические прогрессии со знаменателями а=1; 2; 3; 4; 5; 6; Ф. При а=Ф имеем ряд последовательных степеней константы «Ф».

Таблица 1. Примеры «А-рекурсий» вида $f_{n+2}=f_{n+1}+a(a–1)f_n$

a	k1	k2=a(a–1)	«А-рекурсия»	Числовой ряд при начальных условиях $f_0=a^0$, $f_1=a^1$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	1	0	$f_{n+2} = f_{n+1}$	1; 1; 1; 1; … 1^n
2	1	2	$f_{n+2}=f_{n+1}+2\cdot f_n$	1; 2; 4; 8; … 2^n
3	1	6	$f_{n+2}=f_{n+1}+6\cdot f_n$	1; 3; 9; 27; … 3^n
4	1	12	$f_{n+2}=f_{n+1}+12\cdot f_n$	1; 4; 16; 64; … 4^n
5	1	20	$f_{n+2}=f_{n+1}+20\cdot f_n$	1; 5; 25; 125; … 5^n
6	1	30	$f_{n+2}=f_{n+1}+30\cdot f_n$	1; 6; 36; 216; … 6^n
Φ	1	1	$f_{n+2}=f_{n+1} + f_n$	1; Φ; $Φ^2$; $Φ^3$; … $Φ^n$

Далее рассмотрим случай, когда в уравнении $a^2=k1\cdot a+k2$ коэффициент k2=1. Из характеристического уравнения находим $k1=(a^2–1)/a=a–1/a$.

Примеры А-рекурсий вида $f_{n+2}=(a–1/a)f_{n+1}+f_n$ приведены в Табл. 2. Несмотря на дробные коэффициенты, в столбце 5 числовые ряды – это те же самые «чистые» геометрические прогрессии со знаменателями a=1; 2; 3; 4; 5; 6; Φ. При a=Φ также имеем ряд последовательных степеней константы «Φ».

Таблица 2. Примеры «А-рекурсий» вида $f_{n+2}=(a–1/a)f_{n+1}+f_n$

a	k1= $(a^2–1)/a$	k2	«А-рекурсия»	Числовой ряд при начальных условиях $f_0=a^0$, $f_1=a^1$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	0	1	$f_{n+2} = f_n$	1; 1; 1; 1; … 1^n
2	1,5	1	$f_{n+2}=1,5\cdot f_{n+1}+f_n$	1; 2; 4; 8; … 2^n
3	8/3	1	$f_{n+2}=(8/3)\cdot f_{n+1}+f_n$	1; 3; 9; 27; … 3^n
4	15/4	1	$f_{n+2}=(15/4)\cdot f_{n+1}+f_n$	1; 4; 16; 64; … 4^n
5	24/5	1	$f_{n+2}=(24/5)\cdot f_{n+1}+f_n$	1; 5; 25; 125; … 5^n
6	35/6	1	$f_{n+2}=(35/6)\cdot f_{n+1}+f_n$	1; 6; 36; 216; … 6^n
Φ	1	1	$f_{n+2}=f_{n+1} + f_n$	1; Φ; $Φ^2$; $Φ^3$; … $Φ^n$

И, наконец, рассмотрим случай, когда в уравнении a^2=k1·a+k2 коэффициент k2=a. Из характеристического уравнения находим k1=(a–1).

Примеры А-рекурсий вида $f_{n+2}=(a–1)\cdot f_{n+1}+a\cdot f_n$ приведены в Табл. 3. В столбце 5 числовые ряды – это снова геометрические прогрессии со знаменателями a=1; 2; 3; 4; 5; 6; Ф. При a=Ф имеем ряд последовательных степеней константы «Ф».

Таблица 3. Примеры «А-рекурсий» вида $f_{n+2}=(a–1)\cdot f_{n+1}+a\cdot f_n$

a	k1= a–1	k2 = a	«А-рекурсия»	Числовой ряд при начальных условиях $f_0 =a^0$, $f_1=a^1$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	0	1	$f_{n+2} = f_n$	$1; 1; 1; 1; \ldots 1^n$
2	1	2	$f_{n+2}=f_{n+1}+2\cdot f_n$	$1; 2; 4; 8; \ldots 2^n$
3	2	3	$f_{n+2}=2\cdot f_{n+1}+3\cdot f_n$	$1; 3; 9; 27; \ldots 3^n$
4	3	4	$f_{n+2}=3\cdot f_{n+1}+4\cdot f_n$	$1; 4; 16; 64; \ldots 4^n$
5	4	5	$f_{n+2}=4\cdot f_{n+1}+5\cdot f_n$	$1; 5; 25; 125; \ldots 5^n$
6	5	6	$f_{n+2}=5\cdot f_{n+1}+6\cdot f_n$	$1; 6; 36; 216; \ldots 6^n$
Ф	$Ф^{–1}$	Ф	$f_{n+2}=Ф^{–1}\cdot f_{n+1}+Ф\cdot f_n$	$1; Ф; Ф^2; Ф^3; \ldots Ф^n$

5. Заключение, или «Видеть новое в старом»

Рассмотрены «Метод трансформации рекуррентного ряда в геометрическую прогрессию» и «Метод получения А-рекурсий со сбалансированным характеристическим уравнением», позволившие предложить рекурсии со сбалансированным характеристическим уравнением видов $f_{n+2}=f_{n+1}+a(a–1)f_n$, $f_{n+2}=(a–1/a)f_{n+1}+f_n$ и $f_{n+2}=(a–1)\cdot f_{n+1}+a\cdot f_n$.

Таких рекурсий можно предложить бесконечно много, т.к. коэффициенты в них могут принимать произвольные значения, и аттрактор «a» в них тоже может принимать любое положительное значение. Все рекурсии отличаются тем, что только при a=Ф, где Ф – «золотая» константа, рекурсии трансформируются в «золотую» рекурсию $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$.

Итак, **«Золотая» рекурсия $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ является частным случаем любой А-рекурсии со сбалансированным характеристическим уравнением**.

Показано, что любая рекурсия 2-го порядка с аттрактором «a» генерирует геометрическую прогрессию, если ее начальные условия f_0 и f_1 – последовательные целые степени ее аттрактора «a». Если a=Ф, геометрическая прогрессия со знаменателем «Ф» состоит из последовательных степеней «золотой» константы. Получены также числовые ряды – геометрические прогрессии с произвольными целыми значениями знаменателей. Однако, можно задавать произвольные (в том числе и дробные) значения знаменателей геометрических прогрессий.

Может быть, кто-нибудь по поводу данной работы и скажет: «Новая шумиха - старые дела». Но всё же, лучше попытаться в старом увидеть что-либо новое, чем в новом видеть только старое.

Литература:

1. Василенко С.Л., Квадратичные изоморфизмы: бабочки и аттракторы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17021, 24.11.2011
2. Владимиров В.Л., Раздумья над статьей А.П. Стахова «Математизация гармонии и гармонизация математики». М-пропорции и «эффект бабочки» // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ.16999, 19.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322036.htm
3. Цветков В.Д., «Золотая» гармония «противоположностей», энергооптимальность и сердце // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17017, 23.11.2011
4. Владимиров В.Л., Стахов А.П. Энтропия Золотого Сечения. Международный Клуб Золотого Сечения. Публикация от 16.3.2011 http://www.goldensectionclub.net/publications/vladimirov/vladimirov-articles/vladimirov001