А.П. Стахов

Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа

(статья опубликована в «Украинском математическом журнале», 2004 г., том 56, №8, с. 1143-1150)

Рассматриваются приложения обобщенных золотых сечений к геометрическому определению числа и выводятся новые свойства натуральных чисел, вытекающих из такого подхода.

1. Золотое *p*-сечение

Пришедшая к нам из «Начал Евклида» задача о «*делении отрезка в крайнем и среднем отношении*», получившая позже название задачи о «*золотом сечении*», допускает следующее обобщение [1,2]. Зададимся целым неотрицательным числом p (p=0, 1, 2, 3, …) и разделим отрезок AB точкой C в таком отношении (Рис. 1), чтобы

$$\frac{CB}{AC}=\left(\frac{AB}{CB}\right)^{p}. \qquad (1)$$

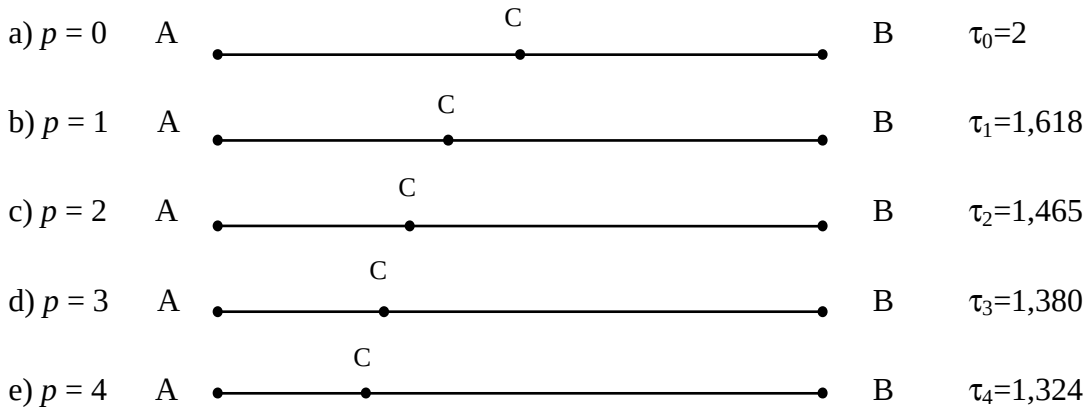


Рис. 1. Золотые *p*-сечения (p = 0, 1, 2, 3, ...).

Обозначим отношение AB:CB = x; тогда CB:AC = x^p. С другой стороны, AB = AC + CB, откуда вытекает следующее уравнение для нахождения искомого отношения:

$$x^{p+1} = x^p + 1. \qquad (2)$$

Обозначим через τ_p положительный корень алгебраического уравнения (2).

Уравнение (2) задает бесконечное число пропорциональных делений отрезка AB в отношении (1), так как каждому p соответствует свой вариант деления. Рассмотрим частные случаи отношения (1), соответствующие различным значениям p. При p=0 τ_p = 2, а деление отрезка в отношении (1) сводится к классической дихотомии (Рис. 1-a). При p=1 $\tau_p = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ («золотая пропорция»), а деление отрезка в отношении (1) совпадает с классическим «золотым сечением» (Рис. 1-b). На этом основании деление отрезка в отношении (1) было названо *обобщенным золотым сечением* или *золотым p-сечением*, а числа τ_p, являющиеся положительными корнями уравнения (2), были названы *обобщенными золотыми пропорциями* или *золотыми p-пропорциями* [1].

Из уравнения (2) непосредственно вытекает следующее тождество, связывающее степени золотых p-пропорций:

$$\tau_p^n = \tau_p^{n-1} + \tau_p^{n-p-1} = \tau_p \times \tau_p^{n-1}. \quad (3)$$

Золотые p-пропорции τ_p могут быть получены также из других соображений [1, 2]. Для этого рассмотрим “треугольник Паскаля”, представленный в следующем виде:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	3	6	10	15	21	28	36
			1	4	10	20	35	56	84
				1	5	15	35	70	126
					1	6	21	56	126
						1	7	28	84
							1	8	36
								1	9
									1
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Заметим, что биномиальный коэффициент C_n^k находится на пересечении n-го столбца (n =0, 1, 2, 3, …) и k-й строки (k =0, 1, 2, 3, …) треугольника Паскаля.

Известно следующее тождество, связывающее биномиальные коэффициенты с двоичными числами:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n.$$

Сдвинем теперь каждую строку треугольника Паскаля на один столбец вправо относительно предыдущей строки и рассмотрим следующий “*деформированный” треугольник Паскаля*:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				1	3	6	10	15	21	28	36
						1	4	10	20	35	56
								1	5	15	35
										1	6
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Если теперь просуммировать биномиальные коэффициенты “деформированного” треугольника Паскаля по столбцам, то получим *ряд Фибоначчи*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … , причем сумма биномиальных коэффициентов n-го столбца “деформированного” треугольника Паскаля будет равна (n+1)-му числу Фибоначчи F_{n+1} ($F_{n+1}=F_n + F_{n-1}$; $F_1= F_2 = 1$). Если теперь сдвинуть каждую строку исходного треугольника Паскаля на p столбцов вправо относительно предыдущей строки (p = 0, 1, 2, 3, ...), то получим таблицу биномиальных коэффициентов (новый “деформированный” треугольник Паскаля), которая в результате сложения по столбцам дает *обобщенные числа Фибоначчи* или *p-числа Фибоначчи* [1,2], выражаемые с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$F_p(n) = F_p(n\text{-}1)+F_p(n\text{-}p\text{-}1) \quad \text{для} \quad n>p+1; \quad (4)$$
$$F_p(1) = F_p(2) = ... = F_p(p+1) = 1. \quad (5)$$

Доказано [1,2], что отношение соседних p-чисел Фибоначчи $F_p(n)/F_p(n\text{-}1)$ при $n\to\infty$ стремится к золотой p-пропорции τ_p. Это означает, что числа τ_p выражают некоторые глубокие математические свойства треугольника Паскаля.

Цель настоящей статьи – изложить новый подход к геометрическому определению «действительного числа», основанного на золотых p-пропорциях.

2. Новый подход к геометрическому определению числа

Евклидово определение натурального числа

В основе классической теории чисел лежит следующее определение натурального числа, основанное на геометрическом подходе и изложенное в «Началах Евклида».

Пусть

$$S = \{1, 1, 1, \ldots\} \tag{6}$$

представляет собой бесконечное множество геометрических отрезков, называемых «*монадами*» или *единицами*. Тогда согласно Евклиду натуральное число N определяется следующим образом:

$$N = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 \ (N \text{ раз}). \tag{7}$$

Несмотря на предельную простоту такого определения, оно сыграло огромную роль в развитии теории чисел и лежит в основе многих полезных математических понятий, в частности, понятий *простого* и *составного* числа, *умножения*, *деления*, а также понятий *делимости* и *сравнения*, которые являются одними из основных понятий элементарной теории чисел, то есть определение (7) «порождает» как натуральные числа, так и всю проблематику их теории.

Конструктивный подход к определению числа

Известен также «конструктивный подход» к определению числа, согласно которому всякое «конструктивное» действительное число A является некоторым математическим объектом, задаваемым с помощью следующей математической формулы:

$$A = \sum_i a_i 2^i \ , \tag{8}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ и $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Определение числа, задаваемое (8), имеет следующую геометрическую интерпретацию. Пусть

$$B = \{2^n\} \tag{9}$$

множество геометрических отрезков длины 2^n ($n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$). Тогда «конструктивными» действительными числами называются все математические объекты, которые могут быть представлены в виде конечной суммы геометрических отрезков из (9) в виде (8).

Ясно, что определение (8) выделяет из множества действительных чисел некоторую часть чисел, которые могут быть представлены в виде суммы (8). Такие числа мы будем называть *конструктивными*. Все остальные действительные числа, которые не могут быть представлены в виде суммы (8), являются *неконструктивными*. Ясно, что к «неконструктивным» числам относятся прежде всего все иррациональные числа, в частности, главные математические константы π и e, число $\sqrt{2}$, «золотое сечение» и т.д. Но в рамках определения (8) к разряду «неконструктивных» мы должны отнести и некоторые рациональные числа (например, 2/3, 3/7 и т.д.), называемые «периодическими дробями», которые не могут быть представлены в виде конечной суммы (8).

Заметим, что хотя определение (8) значительно ограничивает множество действительных чисел, это никак не умаляет его значение с «практической», вычислительной точки зрения. Легко доказать, что любое «неконструктивное» действительное число может быть представлено в виде (8) приближенно, причем ошибка приближения Δ будет неограниченно уменьшаться по мере увеличения числа членов в (8), однако $\Delta \neq 0$ для «неконструктивных» действительных чисел. По существу, в современных компьютерах мы пользуемся только «конструктивными» числами, задаваемыми (8), и это нас вполне устраивает, потому что любое «неконструктивное» число может быть представлено в виде (8) с погрешностью, потенциально стремящейся к 0.

Определение Ньютона

В течение многих тысячелетий математики развивали и уточняли определение действительного числа. В 17-м веке в период зарождения современной науки и математики разрабатывается ряд методов изучения непрерывных процессов, и понятие действительного числа вновь выходит на передний план. Наиболее отчетливо новое определение действительного числа дается одним из основоположников математического анализа И. Ньютоном в его «Всеобщей Арифметике»:

«Под числами мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу».

Эта формулировка дает нам единое определение действительного числа, рационального или иррационального. Если теперь рассмотреть «Евклидово определение числа» (7) с точки зрения «определения Ньютона», то в качестве «другой величины того же рода, принятой за единицу», выступает «монада». В двоичной системе счисления (8) роль «единицы», играет число 2, то есть основание системы счисления.

Новое конструктивное определение действительного числа

Рассмотрим теперь бесконечное множество геометрических отрезков, являющихся степенями золотой p-пропорции τ_p :

$$G_p = \{ \tau_p^n \}, \tag{10}$$

где все степени τ_p^n связаны между собой математическим тождеством (3).

Используя множество (10), можно «сконструировать» следующий метод позиционного представления чисел:

$$A = \sum_i a_i \tau_p^i , \tag{11}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ и $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Заметим, что выражение (11) «генерирует» бесконечное количество позиционных способов представления чисел (систем счисления), так как каждому p (p=0, 1, 2, 3, …) соответствует своя система счисления типа (11). Заметим, что при p=0 основание $\tau_p = \tau_0 = 2$ и система счисления (11) сводится к классической двоичной системе (8).

Рассмотрим случай p=1. Для этого случая основанием системы счисления (11) является классическое «золотое сечение» $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и система (11) вырождается в «Тау-систему», введенную в 1957 г. американским математиком Джорджем Бергманом [3]. Бергман назвал свою «Тау-систему» *системой счисления с иррациональным основанием*. Любопытно отметить, что статья [3] написана Бергманом в возрасте 12 лет! Сейчас Джордж Бергман является профессором одного из американских университетов.

Заметим также, что выражение (11) было введено автором настоящей статьи в 1980 г. [4] и названо *«кодом золотой p-пропорции»*. Теория этих систем счисления изложена в [5].

Рассмотрим теперь случай p=∞. Для этого случая основание τ_p стремится к 1, а это означает, что в пределе выражение (11) сводится к классическому Евклидовому определению числа, задаваемому (7).

Таким образом, мы можем рассматривать позиционный способ представления чисел, задаваемый (11), как весьма широкое обобщение и развитие «Евклидового определения» числа (7) и конструктивного определения (8).

Заметим, что выражение (11) разделяет все действительные числа на две группы, «конструктивные числа», которые могут быть представлены в виде конечной суммы степеней золотой p-пропорции в виде (11), и «неконструктивные» числа, которые не могут быть представлены в виде суммы (11).

Ясно, что все степени золотой p-пропорции типа τ_p^i (i = 0, ±1, ±2, ±3, …) могут быть представлены в виде (11). Например,

$$\tau_p^1 = 10 \qquad \tau_p^{-1} = 0.1$$
$$\tau_p^2 = 100 \qquad \tau_p^{-2} = 0.01$$
$$\tau_p^3 = 1000 \qquad \tau_p^{-3} = 0.001.$$

Это означает, что все иррациональные числа типа τ_p^i (степени золотой *p*-пропорции) являются «конструктивными числами» в рамках определения (11). Из определения (11) также вытекает, что все действительные числа, являющиеся суммами степеней золотой *p*-пропорции, также являются «конструктивными числами» в смысле (11). Например, действительное число $A = \tau_p^2 + \tau_p^{-1} + \tau_p^{-3}$ в соответствии с (11) может быть представлено в виде следующей кодовой комбинации:

$$A = 100{,}101.$$

Заметим, что возможность представления некоторых иррациональных чисел (степеней золотой *p*-пропорции и их сумм) в виде конечной совокупности «битов» является еще одним необычным свойством введенных выше позиционных представлений (11).

3. *Z*-свойство натуральных чисел

Как упоминалось выше, «Евклидово определение» (7), «порождает» не только натуральные числа, но и всю проблематику их теории. Но тогда можно высказать предположение, что новое определение действительного числа, задаваемое (11), может стать источником новых теоретико-числовых результатов. Рассмотрим один из таких результатов, называемых *Z-свойством натуральных чисел*.

Для доказательства этого свойства представим натуральное число *N* в системе счисления Бергмана:

$$N = \sum_i a_i \tau^i \tag{12}$$

Такое представление числа *N* в форме (12) будем называть *τ-кодом натурального числа N*.

Заметим, что дискретная переменная *i* принимает свои значения из множества {0, ±1, ±2, ±3, …}.

В [3] доказано, что сумма (12) для любого натурального *N* является конечной, то есть любое натуральное число может быть всегда представлено в виде конечной суммы степеней «золотой пропорции», и этот далеко не тривиальный математический результат сам по себе представляет определенный интерес и приоткрывает еще одну «тайну» натуральных чисел.

В теории чисел Фибоначчи [6,7] широко известна так называемая *формула Бине*, связывающая числа Фибоначчи F_n и числа Люка L_n с «золотой пропорцией» *τ*:

$$\tau^i = \frac{L_i + F_i\sqrt{5}}{2}. \tag{13}$$

где индексы *i* для чисел Фибоначчи и Люка принимают значения из множества {0, ±1, ±2, ±3, …}.

Напомним, что числа Фибоначчи и Люка представляют собой две бесконечные числовые последовательности, простирающиеся от -∞ до +∞, то есть задаваемые как для положительных, так и для отрицательных значений своих индексов *n* (см. Табл. 1).

Таблица 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
L_{-n}	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	47	-76	123

В дальнейшем мы будем использовать следующие известные тождества для чисел Фибоначчи и чисел Люка [6,7]:

$$F_{i+1} = \frac{L_i + F_i}{2}\ , \tag{14}$$

$$L_{i+1} = F_{i+1} + 2F_i \tag{15}$$

А теперь подставим выражение (13) вместо τ^i в выражение (12). В результате получим следующее выражение:

$$N = \frac{1}{2}\,(A + B\sqrt{5}\,), \tag{16}$$

где

$$A = \sum_i a_i L_i\ ; \tag{17}$$

$$B = \sum_i a_i F_i\ . \tag{18}$$

Выражение (16) может быть также записано в виде:

$$2N = A + B\sqrt{5}\,. \tag{19}$$

Заметим, что двоичные цифры a_i в выражениях (17), (18) всегда совпадают с соответствующими двоичными цифрами в выражении (12), задающем τ-код натурального числа N.

Рассмотрим теперь выражение (16). Если принять во внимание, что суммы (17), (18) всегда являются целыми числами, то возникает вопрос: при каких условиях выражение (16) может быть справедливым в общем случае, то есть для любого натурального N? Ответ очень простой: это возможно только в том случае, если член A является четным числом, равным $2N$, а член B в выражении (16) тождественно равен 0, то есть:

$$A = \sum_i a_i L_i = 2N; \tag{19}$$

$$B = \sum_i a_i F_i = 0. \tag{20}$$

Принимая во внимание тождество (20), выражение (16) может быть также представлено в следующем виде:

$$N = \frac{1}{2}\ (A + B), \tag{21}$$

где A определяется выражением (19), а B - выражением (20).

Принимая во внимание выражения (19) и (20), а также тот факт, что все двоичные коэффициенты в выражениях (19), (20) совпадают, мы можем представить выражение (21) в следующем виде:

$$N = \sum_i a_i \frac{L_i + F_i}{2}\ . \tag{22}$$

Используя тождество (14), мы можем записать выражение (22) в виде:

$$N = \sum_i a_i F_{i+1}\,. \tag{23}$$

Выражение (23) будем называть *F-кодом числа N*. Таким образом, *F*-код представляет собой двоичное позиционное представление натурального числа N, в котором весами разрядов являются числа Фибоначчи F_{i+1}, выбираемые из Табл. 1.

А теперь сравним выражения (12) и (23). Так как двоичные цифры a_i в выражениях (12) и (23) совпадают для любого i=0, ±1, ±2, ±3, … , то отсюда вытекает, что *F*-код числа N может быть получен из τ-кода (12) того же самого натурального числа N путем простой замены степеней золотой пропорции τ^i в формуле (12) на соответствующие числа Фибоначчи F_{i+1}.

Представим теперь F-код числа N в следующей форме:

$$N = \sum_i a_i F_{i+1} + 2B, \tag{24}$$

где член B определяется выражением (20). Тогда выражение (24) может быть представлено в следующем виде:

$$N = \sum_i a_i (F_{i+1} + 2F_i) . \tag{25}$$

Принимая во внимание тождество (15), выражение (25) может быть представлено в следующем виде:

$$N = \sum_i a_i L_{i+1} . \tag{26}$$

Будем называть выражение (26) *L-кодом числа N*. Таким образом, L-код представляет собой двоичное позиционное представление натурального числа N, в котором весами разрядов являются числа Люка L_{i+1}.

. Так как двоичные цифры в выражениях (12), (26) совпадают, отсюда вытекает, что L-код числа N может быть получен из τ-кода (12) того же самого числа N путем замены степеней золотой пропорции τ^i в формуле (12) на соответствующие числа Люка L_{i+1}, где $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. Ясно, что L-код числа N может быть получен также из F-кода того же самого числа N путем замены чисел Фибоначчи F_{i+1} в формуле (23) на числа Люка L_{i+1} . Таким образом, существуют три различных способа представления одного и того же натурального числа N: τ-код (12), задающий натуральное число N в виде конечной суммы степеней золотой пропорции, F-код (23), задающий натуральное число N в виде суммы чисел Фибоначчи, и L-код (26), задающий натуральное число N в виде суммы чисел Люка; при этом по форме двоичной записи все эти коды совпадают.

А теперь сравним выражения (12) и (20). Так как двоичные цифры a_i в рассмотренных выражениях совпадают, то это означает, что выражение (20) получается из выражения (12) путем простой замены всех степеней золотой пропорции τ^i в формуле (12) на соответствующие числа Фибоначчи F_i.

Сформулируем результат, вытекающий из сравнения выражений (12) и (20), в виде следующей теоремы.

Теорема 1 (*Z*-свойство натуральных чисел). Если в выражении для τ-кода любого натурального числа N, задаваемого выражением (12), заменить все степени золотой пропорции τ^i соответствующими числами Фибоначчи F_i (i=0, ±1, ±2, ±3, …), то возникающая при этом сумма (20) тождественно равна нулю независимо от исходного натурального числа N.

Примем без доказательства еще одну теорему, которая является обобщением Теоремы 1.

Теорема 2 (*Z_p*-свойство натуральных чисел). Если представить в виде (11) некоторое натуральное число N, то есть записать

$$N = \sum_i a_i \tau_p^i , \tag{27}$$

где $a_i \in \{0,1\}$, τ_p – золотая p-пропорция, i=0, ±1, ±2, ±3, …, p=1, 2, 3, … , а затем в выражении (27) заменить все степени золотой p-пропорции τ_p^i соответствующими числами Фибоначчи $F_p(i)$ то возникающая при этом сумма $\sum_i a_i F_p(i)$ всегда тождественно равна нулю независимо от исходного натурального числа N, то есть

$$\sum_i a_i F_p(i) = 0. \tag{28}$$

Заметим, что свойства (20) и (28) справедливы только для натуральных чисел! Это означает, что наши исследования привели к открытию нового свойства натуральных чисел, называемого ***Z*-** или ***Z_p*-свойством*** (от слова «Zero» - нуль)**.**

Заметим, что основными приложениями полученных выше новых математических результатов является теория измерения [1,2], компьютерная арифметика [3-5], теория кодирования [8], теория цифровой обработки сигналов [9]. Однако в последние годы числа Фибоначчи и золотое сечение, а также рассмотренные выше их обобщения нашли применения при введения новых классов гиперболических функций [10] и нового класса матриц [11]. Особый интерес с точки зрения компьютерной науки представляет так называемая троичная зеркально-симметричная арифметика, представляющая собой синтез системы счисления Бергмана и троичной симметричной системы счисления [12], которая была использована Н.П. Брусенцовым при создании первого в мировой истории троичного компьютера «Сетунь».

Цитированная литература

1. *Стахов А.П.* Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва: Советское Радио, 1977. – 288 с.
2. *Stakhov A.P.* The Golden Section in the Measurement Theory // Computers & Mathematics with Applications, 1989, V. 17, No. 4-6. – pp. 613-638.
3. *Bergman, G.* A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31, pp. 98-119.
4. *Стахов А.П.* «Золотая» пропорция в цифровой технике // Автоматика и вычислительная техника, 1980, №1, с. 27-33.
5. *Стахов А.П.* Коды золотой пропорции. Москва: Радио и связь, 1984. – с. 152.
6. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. Москва: Наука, 1978. – 144 с.
7. *Hoggat Verner E.* Fibonacci and Lucas Numbers. Palo Alto - Houghton-Mifflin, 1969. - 92 p.
8. *Stakhov A.P., Massingua V., Sluchenkova A.A.* Introduction into Fibonacci Coding and Cryptography. Kharkiv: Publisher “Osnova” of Kharkiv State University, 1999. – 236 p.
9. *Chernov V.M., Pershina M.V.* Fibonacci-Mersenne and Fibonacci-Fermat discrete transforms // Boletin de Informatica. The Golden Section: Theory and Applications, 1999, No 9-10. – pp.25-31.
10. *Стахов А.П. , Ткаченко И.С.* Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи // Доклады Академии наук Украины, 1993, вып. 7. – с. 9-14.
11. *Stakhov O.P.* A generalization of the Fibonacci *Q*-matrix // Доповіді Національної академії наук України. 1999, № 9. – с. 46-49.
12. *Stakhov A.P.* Brousentsov’s Ternary Principle, Bergman’s Number System and Ternary Mirror-symmetrical Arithmetic // The Computer Journal (British Computer Society), 2002, Vol. 45, No 2. – 231-236.