В. Л. Владимиров

# Раздумья над статьей А. П. Стахова «Математизация гармонии и гармонизация математики». М-пропорции и «эффект бабочки»

Нет в мире другой науки, которая бы в большей
мере побуждала к гармоническим действиям все умственные
способности, чем математика. … Разве нельзя музыку описать
как математику чувства, а математику – как музыку ума?
Джеймс Джозеф Сильвестр (1814 – 1897)

**Содержание**:



## 1. Думы без формул

### 1.1. Взаимная поверка

В метрологии рабочие приборы поверяют по образцовым приборам, более точным. В науке же существуют другие методы выявления погрешностей. Но оказалось, что, образно говоря, гармонией можно поверить математику, а математикой нужно стараться поверить гармонию. Математика и гармония – настолько близкие родственницы, что не могут существовать друг без друга. Как, например, жизнь и движение. Жизнь – это движение. Движение – это жизнь.

С удовольствием прочитал я статью А. П. Стахова «Математизация гармонии и гармонизация математики» [1]. Если вдуматься, то эта статья (как и предшествовавшая ей книга автора на английском языке) – не только и не столько о кризисе в самой математике, как о страшном современном кризисе в преподавании математики. Это статья о школе будущего и о проблеме развития гармоничного образования.

Почему математике в обязательном порядке учат всех и каждого? На этот вопрос существует много ответов. Приведем слова Бе́нджамина Фра́нклина (1706 – 1790) – учёного, изобретателя, политического деятеля, дипломата, журналиста, издателя, одного из лидеров войны за независимость США. Это был первый американец – иностранный член Российской академии наук. Портрет Франклина с 1928 года изображен на стодолларовой американской купюре. Так вот, этот изобретатель молниеотвода, бифокальных очков, «электрического колеса», кресла-качалки, пенсильванского камина, открывший и Гольфстрим, однажды сказал: «*Математическое доказательство – это логика, гораздо более полезная той, которой обычно учат в школах, потому что она* *способствует правильному формированию ума, развивает его способности, усиливает их настолько, что разум пытается точно рассуждать и отличать истину от фальши во всех случаях, даже в дисциплинах нематематических. Потому-то египтяне, персы и лакедемоняне, как рассказывают, редко выбирали себе такого царя, который хотя бы немного не знал математики, считая, что незнакомый с математикой не умеет досконально мыслить и, следовательно, неприспособлен к тому, чтобы править*».

Леонардо да Винчи подчеркивал: «*Наибольшую радость телу дает свет солнца, наибольшую радость духу – ясность математической истины*». Зачем же лишать кого-либо из учащихся этой радости, этой «панацеи», решающей все проблемы?

Но беда в том, что, как справедливо заметил Николай Коперник, «*Математика пишется для математиков…*». А люди издавна делятся на «физиков и лириков», на математиков и гуманитариев.

…«Как Вы можете любить математику? Я ее ненавижу!». Это слова Тани - дочери моих знакомых. Девочка учится в одиннадцатом классе, хочет быть переводчицей. Но она не может достойно завершить обучение в средней школе из-за точных наук, в первую очередь из-за «самой точной науки» – математики. Свято верит, как и все ее одноклассники, что математика нужна только «для галочки». Ей вторит ее папа, когда-то окончивший художественный институт и ни разу, по его словам, не применявший математику в повседневной жизни. Мама Тани, закончившая в свое время политехнический институт, не станет читать книгу, если обнаружит в ней хотя бы одну формулу. В этой типичной интеллигентной семье все считают, что поверить алгеброй гармонию невозможно, что искусственный интеллект – это утопия. И все дружно ненавидят скучнейшую, абстрактную, оторванную от реальной жизни математику. Это обычная реакция на традиционное школьно-вузовское преподавание математики, в результате которого ни студент, ни школьник даже не услышит, что совершенные пропорции человека подчиняются закону золотого сечения, что есть такое понятие: «Гармония Мироздания».

Большинство молодых людей приобретает любую профессию, лишь бы обеспечивался минимум математики. Сколько таких моральных калек, занимающихся нелюбимым делом, мы видим вокруг себя? Математика из панацеи превратилась в мол**о**х – божество, которому приносятся человеческие жертвы (особенно дети).

Где же выход из тупика? Его предлагает Алексей Петрович Стахов, всемирно признанный лидер поклонников Золотого Сечения (ЗС), замечательный ученый и популяризатор науки. Он создает новый курс «Математики гармонии», одинаково интересный и полезный как математикам, так и гуманитариям. И ЗС, от которого ранее «открещивались» все существующие в наше время науки, стало центральной фигурой математики гармонии, «примирив» физиков и лириков.

На мой взгляд, курс «Математики гармонии» нужно читать всем учащимся. А традиционный курс математики оставить только для математически одаренных школьников и студентов. В школьном курсе должно преобладать искусство, эстетика, а в университетском курсе должны преобладать специальные разделы математики, успевшие включиться в математику гармонии. Со временем в курс «Математики гармонии» должны войти все разделы математики, изложенные под специфическим углом зрения.

Необходимо реформировать математическое образование. Потребуются специалисты, которые смогут читать математику не только для математиков, но и для гуманитариев, раскрывая им специфику философии математики и меняя структуру их мышления. А гармонизировать структуру мышления придется. Ведь математики обычно адаптируются на любой работе, а вот гуманитарий к технической, точной работе зачастую не приспособлен.

В новом курсе «Математики гармонии», который уже начали читать в университетах, объединены в единое целое не только иррациональные и натуральные числа, не только различные разделы математики, не только статуя Венеры Милосской и стихотворения Пушкина. В этом курсе нет пропасти между арифметикой, геометрией и искусством, нет пропасти между прикладным значением математики и ее значением в области чистого интеллекта.

В курсе «Математики гармонии» показано, что многое из утраченной мудрости миропонимания древнегреческих философов должно быть не осмеяно, а развито в наше технократическое время, что математика есть везде в жизни, что философия математики необходима при изучении социально-политических процессов и гармонизации мышления каждой личности. В этом курсе ощущается согласие с мнением П.Дирака, что корни Вселенной в математике, причем красивой.

В основе гармонии, мне кажется, лежат законы комбинаторики. Но комбинаторика – это раздел математики. В истоках математики лежат не только чисто утилитарные потребности, но и стремление постичь гармонию мироздания.

Что касается курса «Математики гармонии», то он должен помочь почувствовать гармонию окружающей среды, научить быть независимым в суждениях, мыслить ТВОРЧЕСКИ, ясно и логично, вдумываться в материал, а не зазубривать его. После такого курса возникнет внутренняя потребность в более глубоком изучении математики – самого увлекательного предмета, с помощью которого решают различные проблемы. А для решения разных проблем с помощью математики совсем не обязательно быть математиком-профессионалом.

Чтобы понять, в каком мире мы живем, нужно попытаться раскрыть законы мироздания. Для этого современный интеллигентный человек должен уметь воспринимать математику так же, как музыку, поэзию, живопись, архитектурные шедевры. Должен в искусстве видеть почти измеримую красоту математики, а в математике – почти неизмеримую (пока) красоту искусства. И в этом ему поможет математика гармонии, к становлению которой как науки, как новой гармоничной математики с древними истоками так серьезно подходит профессор Стахов.

Лично я очень обязан Алексею Петровичу за мгновенные консультации по вопросам новизны того или иного материала, за подсказку литературы, актуальных направлений работ, оценку готовности работы к публикации, словом, за научную и моральную поддержку в творчестве. Единственно, о чем сожалею: почему не примкнул к поклонникам ЗС раньше, лет тридцать пять назад, когда впервые прослушал лекцию А.П. о помехоустойчивых кодах Фибоначчи. Видимо, помешала тогда относительная молодость, «громадьё» своих личных научных планов, стремление к лидерству в «своей» науке… Оппозиция многое теряет.

### 1.2. Об истории

Глубокому анализу подвергает Алексей Петрович истоки математики гармонии. С какой целью  Евклид ввел ЗС в свои «Начала»? Как трактовать последнюю главу «Начал» Евклида? Эти и многие другие вопросы стали предметом ожесточенной дискуссии. А у Евклида не спросишь…

Мне тоже кажется, что Евклид придавал Платоновым телам огромную роль в мироздании и миропонимании. Значение правильных многогранников для древнегреческой науки подчеркнул и М.В. Быстров в увлекательной статье [2].

Но главное, на мой взгляд, – не о чем думал Евклид или Пифагор, и даже не первенство в употреблении давно известного термина «аттрактор» или других терминов. Главное – к каким конструктивным действиям приводит нас изучение математических трудов древних ученых. Алексея Петровича изучение исторических трудов привело к разработке курса новой дисциплины. А оппозицию? … Давайте хоть чуть-чуть остудим накал страстей.

Важно, чтобы наше время вложило в возводящуюся веками пирамиду математики гармонии не меньше блоков, чем времена пифагорейцев и Ренессанса. И чтобы в зазор между блоками разных авторов не проходило даже лезвие бритвы.

В математику гармонии не должны проникнуть, по-моему, ложные утверждения последних лет, типа таких:

- Отношение последующего элемента к предыдущему любого рекуррентного ряда при $n \to \infty$ всегда колеблется вокруг значения аттрактора, но никогда не достигнет его;
- Золотому Сечению соответствует минимум информации;
- Система, достигшая в своем развитии совершенства, т.е. приблизившаяся вплотную к параметрам ЗС, погибает.

И в этой, и в последующих работах будет показана несостоятельность подобных утверждений.

А в отношении истории вообще позвольте, уважаемый читатель, высказать своё, сугубо субъективное мнение. Наука в целом – это плод размышлений, поэзия – плод фантазии, а историю можно назвать плодом архивной памяти. Но выбор архивных документов обычно произволен. Документы можно уничтожить, а можно и фальсифицировать. Исторические труды пишутся по велению времени, и в них отражаются заблуждения эпохи. Недаром Бенеде́тто Кро́че (1866 – 1952) – итальянский историк, критик, философ и политик, изрек: «*Вся история – современная история*». В доказательство этому сравните хотя бы три школьных учебника по истории. Изданный в СССР, изданный в современной России и изданный в современной Западной Украине. Не хочу обидеть настоящих Историков. Они хотят, как лучше, но получается одинаково всегда. История пишется и изучается с определенными практическими целями. По моему мнению, это единственная наука, в которой можно доказать всё, что угодно (точнее, что нужно). И история математики пишется тоже по-разному.

Перевод переводу – рознь… Даже подлинные документы можно по-разному перевести, отредактировать, трактовать…

Так стоит ли из-за трактовки историко-математических «фактов» так волноваться? Нужно высказывать свою точку зрения, не оскорбляя при этом оппонента.

## 2. Раздумья с формулами

### 2.1. Не золотые сечения (но с «позолоченными» параметрами) и М-пропорции

Математика гармонии не должна напоминать лоскутное одеяло или калейдоскоп со стеклянными блестками. Это должна быть целостная система знаний на основе определенных принципов, выявляющая объективные законы действительности, взаимную связь частей в целом, а не набор блестящих математических крупиц – парадоксов.

…В рамках международного online семинара по математике гармонии была опубликована статья «Золотые крупицы математики» [3]. В ней проведен интересный обзор старинных пропорций. Однако, к сожалению, не сделаны должные обобщения и правильные, глубокие выводы.

Например, видоизменив пропорцию Гетальди, авторы «крупиц» рассмотрели такое равенство двух отношений: «***Целое так относится к большему, как большее – к пяти меньшим***». Ясно, что это равенство отличается от «золотого» сечения (ЗС) и его пропорции: «Целое так относится к большему, как большее – к меньшему». Но «*…Радует, что решение пропорции привело к корням, связанным с числами ЗС. Поэтому предложенная в этом разделе задача вполне может считаться "золотой крупицей" и располагаться рядом с "золотым самородком" – золотым сечением. …Новой является постановка задачи, которая в своём решении привела к числу ЗС*» [3].

На мой взгляд, такой результат не должен радовать. Подобную «историкоматематическую» задачу можно представить и решить в общем виде. То есть можно выразить все параметры не золотого сечения через «золотую» константу Ф≈1,618, и при этом пропорция для такого сечения будет носить действительно **общий характер**:

«**Целое так относится к большему, как большее – к любому числу меньших**».

Если формальный вид «золотой» пропорции – это (a+b)/b=b/a, то рассмотренная в данной работе «не золотая» пропорция в формальном виде – это **(a+b)/b=b/(M·a) (2.1.1)**, где M – произвольное положительное число. Пропорцию (2.1.1) назовем «**M-пропорцией**». Разве не нужна нам еще одна пропорция общего вида, частным случаем которой является «золотая»?

Покажем, что «золотых крупиц» существует бесконечно много. Их и искать не надо. Примеры отражены в Таблице 1. В 1-й строке (M=1) – случай ЗС.

Возможно, такая обобщенная задача представит интерес для математики гармонии.

Таблица 1. Примеры «золотых крупиц» для M=1;2;3;4;5;6

| Пропорция | M | L | a | d=aL | b=a+d | a+b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| $\frac{a+b}{b}=\frac{b}{a}$ | 1 | $\frac{1}{Ф}$ | Ф | 1 | $Ф^2$ | $Ф^3$ |
| $\frac{a+b}{b}=\frac{b}{2a}$ | 2 | $\sqrt{3}$ | Ф | $\sqrt{3}\,Ф$ | $(1+\sqrt{3})Ф$ | $(2+\sqrt{3})Ф$ |
| $\frac{a+b}{b}=\frac{b}{3a}$ | 3 | $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ | Ф | $\frac{1+\sqrt{21}}{2}Ф$ | $\frac{3+\sqrt{21}}{2}Ф$ | $\frac{5+\sqrt{21}}{2}Ф$ |
| $\frac{a+b}{b}=\frac{b}{4a}$ | 4 | $1+2\sqrt{2}$ | Ф | $(1+2\sqrt{2})Ф$ | $2(1+\sqrt{2})Ф$ | $2(1{,}5+\sqrt{2})Ф$ |
| $\frac{a+b}{b}=\frac{b}{5a}$ | 5 | 3Ф | Ф | $3Ф^2$ | (1+3Ф)Ф | (2+3Ф)Ф |
| $\frac{a+b}{b}=\frac{b}{6a}$ | 6 | $2+\sqrt{15}$ | Ф | $(2+\sqrt{15})Ф$ | $(3+\sqrt{15})Ф$ | $(4+\sqrt{15})Ф$ |

Итак, в M-пропорцию (2.1.1) (a+b)/b=b/(M·a) подставим **b=a+d**, где **d>0**, и реализуем основное свойство пропорции: произведения крайних и средних членов равны между собой. После простых преобразований получим следующее квадратное относительно разности аттракторов **d** уравнение: $\mathbf{d^2 - d\cdot a\cdot(M-2) - a^2\cdot(2M-1)=0}$ **(2.1.2)**. Найдем положительный корень этого уравнения: **d=a·L**, где $\mathbf{L=0{,}5\{M-2+[M(M+4)]^{0{,}5}\}}$ **(2.1.3).**

Коэффициент L, как показано в столбце 3 Табл.1, **является функцией от золотой константы Ф только при M=1 и M=5**. Поэтому для M=1 и M=5 остальные параметры M-пропорции будут зависеть от Ф **при любом значении аттрактора «а»**.

А если же принять, что **a=Ф (столбец 4 Табл.1), то тогда все параметры M-пропорции зависят от Ф**, независимо от значения M. Это отражено в столбцах 5-7 Табл.1, в которой M – это числа натурального ряда 1; 2; 3; … 6.

## 2.2. «А-рекурсии» (для аттрактора «a») М-пропорций

Золотую пропорцию обычно представляют в следующей форме: $\frac{a+b}{b}=\frac{b}{a}$ **(2.2.1)**, где 0<a<b и оба отношения пропорции больше единицы: (a+b)/b=a/b+1>1; b/a>1.

Заменим в знаменателе правого отношения b/a «меньшее» («a») на другую величину, тоже меньшую «b»: $a \Rightarrow b–z$. Получим $\frac{a+b}{b}=\frac{b}{b\text{-}z}$ **(2.2.2)**, где 0<z<b. Найдем неизвестное z=F(a,b), воспользовавшись основным свойством пропорции (произведение крайних членов равно произведению средних членов): $z=\frac{ab}{a+b}$ **(2.2.3)**.

Следовательно, «z» равно половине гармонического среднего «меньшего» и «большего»: z=0,5h(a,b)=0,5h. С учетом этого перепишем **(2.2.2)** в таком виде: $\frac{a+b}{b}=\frac{b}{b\text{-}0{,}5h}$ **(2.2.4).**

При бисекции (b=a) пропорция (2.2.4) превращается в тождество 2=2. А если соблюдается равенство **b–0,5h=a,** то (2.2.4) преобразуется в золотую пропорцию (2.2.1).

Обозначим разность между «большим» и «меньшим» через **d=b–a**. Сравнивая (2.2.4) и (2.2.1), сформулируем **основное условие золотого сечения**: b–0,5h=a; **d=0,5h (2.2.5).**

Снова учтем основное свойство пропорции и вместо «b» подставим в (2.2.4) равенство b=a+d. Получим квадратное (относительно «меньшего» аттрактора «a») характеристическое уравнение рекурсии: $\mathbf{a^2=(h–d)a+0{,}5hd}$ **(2.2.6)**.

Если в пропорцию (2.2.4) вместо «a» подставить a=b–d, придем к характеристическому уравнению, квадратному относительно «b»: $\mathbf{b^2=(h+d)b–0{,}5hd}$ **(2.2.7).**

Сравнение (2.2.7) и (2.2.6) показывает, что смена аттрактора сопровождается лишь формальным изменением знаков перед разностью аттракторов «d» в характеристическом уравнении рекурсий 2-го порядка.

Перейдем от характеристических уравнений к разностным путем формальной замены «$a^2$» на $f_{n+2}$, «a» на $f_{n+1}$ и «1» на $f_n$. На основе (2.2.6) для **аттрактора «a»** получим: $\mathbf{f_{n+2}=(h–d)f_{n+1}+0{,}5hdf_n}$ **(2.2.8)**. Назовем такую рекурсию 2-го порядка «**А-рекурсией**».

Аналогично, на основе (2.2.7), когда **аттрактор равен «b»,** получим: $\mathbf{f_{n+2}=(h+d)f_{n+1}–0{,}5hdf_n}$ **(2.2.9)**. Назовем такую рекурсию 2-го порядка «**B-рекурсией**».

Полученные здесь «**А-рекурсия**» и «**В-рекурсия**» не новы (см. [4]). Воспользуемся этими рекурсиями для исследования М-пропорций из п. 2.1.

В Таблице 2 в 5-м столбце показаны **А-рекурсии** для «золотых крупиц» из Табл. 1. Как и в Табл.1, здесь a=Ф. На основании данных Табл.1 и (2.2.8) рассчитаны коэффициенты k1=h–d и k2=hd/2 рекурсии $f_{n+2}= k1\cdot f_{n+1}+ k2\cdot f_n$ (столбцы 3 и 4).

Из данных столбца 5 заключаем, что лишь для ЗС (М=1) А-рекурсия является суммирующей. **При М>1 все А-рекурсии являются разностными, т.к. первое слагаемое у них отрицательно**.

А-рекурсиям из столбца 5 Табл.2 соответствуют характеристические уравнения, показанные в столбце 6 той же таблицы. Это квадратные относительно аттрактора «a» уравнения, положительный корень которых, естественно, равен «Ф». Но ведь есть еще и второй, отрицательный корень, значения которого показаны в столбце 7 Табл.2. Оказывается, и он может играть важную роль для числовых рядов, генерируемых рекурсиями. В этом мы убедимся, рассматривая отношения $f_{n+1}/f_n$ числовых рядов для «А-рекурсий», представленные в Таблице 3.

Таблица 2. «А-рекурсии» для «золотых крупиц» из Таблицы 1

| **M** | **h= ab/(a+b)** | **k1= h–d** | **k2= 0,5hd** | **А-рекурсия $f_{n+2}= k1\cdot f_{n+1}+ k2\cdot f_n$** | **Характеристическое уравнение А-рекурсии** | **Отрицательный корень $a_2$ характеристического уравнения** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| 1 | **2** | 1 | 1 | $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ | $a^2–a–1=0$ | –1/Ф |
| 2 | 2,369 | –0,43 | 3,32 | $f_{n+2}= –0,43f_{n+1}+3,32f_n$ | $a^2+0,43a–3,32=0$ | –2,05 |
| 3 | 2,56 | –1,96 | 5,78 | $f_{n+2}= –1,96f_{n+1}+5,78f_n$ | $a^2+1,96a–5,78=0$ | –3,57 |
| 4 | 2,68 | –3,51 | 8,30 | $f_{n+2}= –3,51f_{n+1}+8,30f_n$ | $a^2+3,51a–8,30=0$ | –5,13 |
| 5 | 2,76 | –5,09 | 10,85 | $f_{n+2}=–5,09f_{n+1}+10,85f_n$ | $a^2+5,09a–10,85=0$ | –6,71 |
| 6 | 2,83 | –6,68 | 13,40 | $f_{n+2}=–6,68f_{n+1}+13,40f_n$ | $a^2+6,68a–13,40=0$ | –8,30 |

Начальные элементы числовых рядов «А-рекурсий» для единичных начальных условий (в данной работе использованы **только такие** начальные условия) даны в столбце 3 Табл.3. При M>1 отношение $f_{n+1}/f_n$ каждого числового ряда «тяготеет» к значению отрицательного корня из столбца 7 Табл.2. Это отчетливо видно для M=3–6. Равные числа выделены одним цветом в столбце 7 Табл.2 и в столбце 9 Табл.3.

Таблица 3. Отношения $f_{n+1}/f_n$ для «А-рекурсий» (с аттрактором «а»)

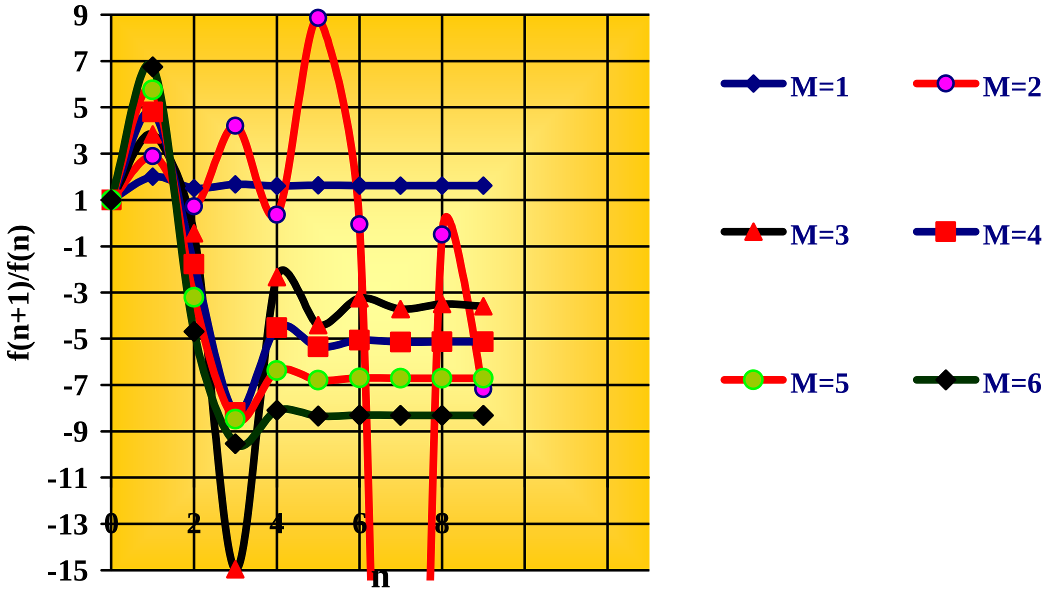
| **M** | **А-рекурсия** | **Числовой ряд** | **Отношение $f_{n+1}/f_n$ при n=** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **1** | $\mathbf{f_{n+2}=f_{n+1}+f_n}$ | 1;1;2;3;5;8;13; 21;34;55;89;… | 1 | 2 | 1,5 | 1,667 | 1,6 | 1,625 | 1,615 | 1,619 | 1,618 | 1,618 |
| **2** | $\mathbf{f_{n+2}= –0.4335\cdot f_{n+1}+3.3195f_n}$ | 1;1;2,9;2,1;8,7; 3,1;27,5;-1,6; 91,9;-45,2;324,6;… | 1 | 2,89 | 0,72 | 4,20 | 0,36 | 8,86 | –0,06 | –56,7 | –0,49 | –7,18 |
| **3** | $\mathbf{f_{n+2}= –1.9557\cdot f_{n+1}+5.7825f_n}$ | 1;1;3,8;-1,7;25,5; -59,6;263,8;-860,7;… | 1 | 3,83 | –0,4 | –15,0 | –2,3 | –4,42 | –3,26 | –3,73 | –3,51 | –3,60 |
| **4** | $\mathbf{f_{n+2}= –3.5137\cdot f_{n+1}+8.3033f_n}$ | 1;1;4,8;-8,5;69,7; -315,8;1688,5;-555,1;… | 1 | 4,79 | –1,8 | –8,18 | –4,5 | –5,35 | –5,07 | –5,15 | –5,13 | –5,13 |
| **5** | $\mathbf{f_{n+2}= –5.0902\cdot f_{n+1}+10.8541f_n}$ | 1;1;5,8;-18,5;156,7; -998;6780,6;-5347,1;… | 1 | 5,76 | –3,2 | –8,47 | –6,4 | –6,79 | –6,69 | –6,71 | –6,71 | –6,71 |
| **6** | $\mathbf{f_{n+2}= –6.6776\cdot f_{n+1}+13.4227f_n}$ | 1;1;6,7;-31,6;301,7; -2438,9;20335,2;… | 1 | 6,75 | –4,7 | –9,54 | –8,1 | –8,34 | –8,29 | –8,30 | –8,30 | –8,30 |

### 2.3. В каждой «А-рекурсии» M-пропорций (кроме M=1) «работают» по два значения аттрактора «а»

Итак, в «А-рекурсиях» (для аттрактора «а») при M>1 первое слагаемое становится отрицательным. Это приводит числовой ряд к более-менее (зависит от M) быстрой смене значения аттрактора.

В начале ряда «действует» доминантный аттрактор «$a_1$», равный положительному корню характеристического уравнения, а затем – аттрактор «$a_2$», равный отрицательному корню характеристического уравнения (Рис. 1). Например, при $n \to \infty$ ряд для M=2 «притянется» к аттрактору –2,05 (столбец 7 Табл.2); ряд для M=6, как это отчетливо видно на Рис.1, «притянется» к аттрактору (–8,3).

**Рис. 1. Зависимости f(n+1)/f(n) от "n" для аттрактора "a" (M=1-6)**




Такие системы с двумя устойчивыми состояниями (очевидно, первое – вр*е*менное – можно считать устойчивым лишь условно), в принципе хорошо известны. Однако интересно, что они обнаружены в М-пропорциях.

Только ради того, чтобы обнаружить группу рекурсий с двумя значениями аттрактора, положительным и отрицательным, имело смысл рассматривать пропорцию общего вида (a+b)/b=b/(M·a), которая при M=1 трансформируется в «золотую» пропорцию… В теории математики гармонии это должно пригодиться!

## 2.4. «В-рекурсии» М-пропорций: как подойти к положительному значению аттрактора «b», с колебаниями или монотонно?

Для тех же самых М-пропорций (M=1–6) в Таблице 4 показаны значения отношений $f_{n+1}/f_n$ для «В-рекурсий», то есть для аттрактора «b». В столбце 3 «В-рекурсии» рассчитывались в соответствии с формулой $f_{n+2}=(h+d)f_{n+1}–0{,}5hdf_n$ (2.2.9)**.**

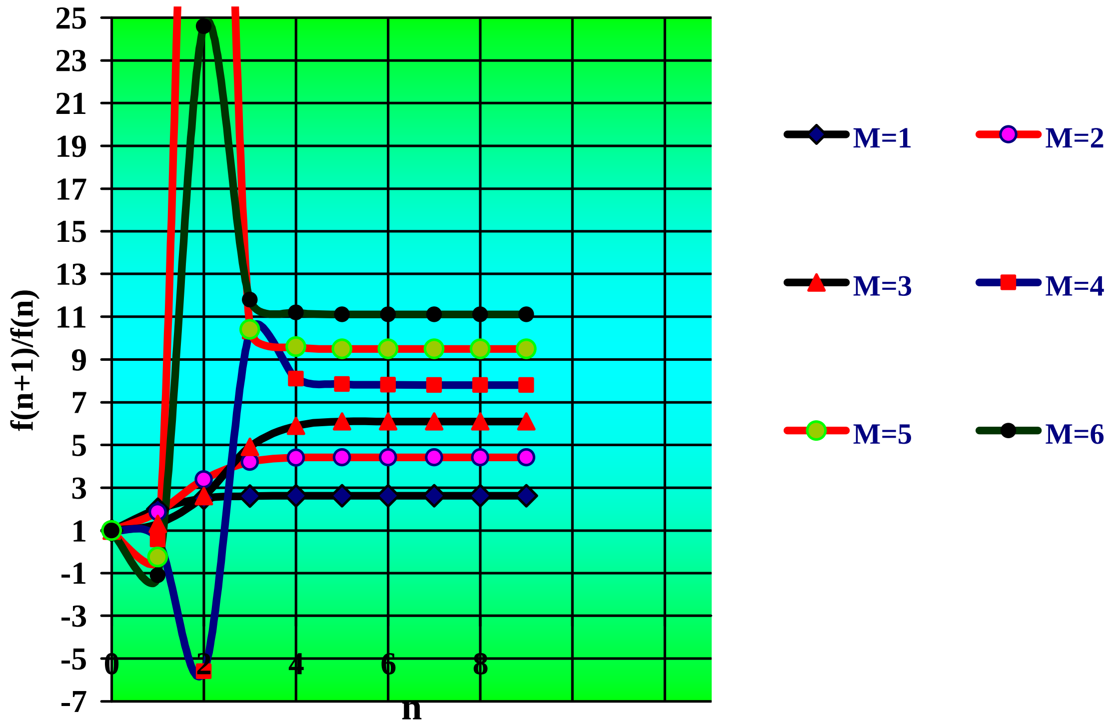
Здесь для всех шести значений М получены разностные рекурсии, но отрицательным является уже второе слагаемое рекурсии.

Таблица 4. Отношение $f_{n+1}/f_n$ для аттрактора «b»

| **M** | **a** | **В-рекурсия** | **Числовой ряд** | **Отношение $f_{n+1}/f_n$ при n=** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| **1** | Ф | $f_{n+2}=3f_{n+1}–f_n$ | 1;1;2;5;13; 34;89;… | 1 | 2 | 2,5 | 2,6 | 2,62 | 2,62 | 2,62 | 2,62 | 2,62 | 2,62 |
| **2** | Ф | $f_{n+2}=5{,}17f_{n+1}–3{,}32f_n$ | 1;1;1,85;6,3; 26,2;114,8;… | 1 | 1,86 | 3,38 | 4,2 | 4,4 | 4,41 | 4,42 | 4,42 | 4,42 | 4,42 |
| **3** | Ф | $f_{n+2}=7{,}08f_{n+1}–5{,}78f_n$ | 1;1;1,29;3,38; 16,4;96,7; … | 1 | 1,3 | 2,6 | 4,9 | 5,9 | 6,1 | 6,1 | 6,1 | 6,1 | 6,1 |
| **4** | Ф | $f_{n+2}=8{,}88f_{n+1}–8{,}3f_n$ | 1;1;0,57;-3,2; -33,3;-269,5;… | 1 | 0,57 | -5,6 | 10,3 | 8,1 | 7,85 | 7,82 | 7,81 | 7,81 | 7,81 |
| **5** | Ф | $f_{n+2}=10{,}618f_{n+1}–10{,}85f_n$ | 1;1;-0,236; -13,4;-139,3;… | 1 | -0,24 | 56,6 | 10,4 | 9,6 | 9,5 | 9,5 | 9,5 | 9,5 | 9,5 |
| **6** | Ф | $f_{n+2}=12{,}33f_{n+1}–13{,}42f_n$ | 1;1;-1,1;-26,9; -317,2;… | 1 | -1,1 | 24,6 | 11,8 | 11,2 | 11,1 | 11,1 | 11,1 | 11,1 | 11,1 |

Данные Табл. 4 отражены на Рис. 2.

**Рис.2. Отношение f(n+1)/f(n) для аттрактора "b" (M=1-6)**




В «В-рекурсиях» (для аттрактора «b») «действует» лишь одно доминантное значение аттрактора, равное положительному корню характеристического уравнения. Например, при $n \to \infty$ числовой ряд из столбца 4 Табл.4 для M=1 «притягивается» к аттрактору $b = \Phi^2 \approx 2{,}618$ (столбец 6 Табл.1); ряд для M=6 «устремляется» к аттрактору $(3+15^{0,5})\Phi \approx 11{,}12$ (столбец 6 Табл.1).

Но не только этим отличаются рисунки 2 и 1. Ряды «В-рекурсий» ведут себя «спокойнее», устойчивее. **При M=1;2;3 отношения $f_{n+1}/f_n$ стремятся к значению аттрактора монотонно, без колебаний.** И лишь при M=4;5;6 значения отношения $f_{n+1}/f_n$ при росте «n» дают привычную картину колебаний.

## 2.5. Пять необходимых и достаточных условий ЗС

М-пропорции с параметрами, зависящими от золотой константы Ф, очень напоминают золотую пропорцию. Как отличать «золото» от «позолоты»?

В [4] подчеркнуто, что золотая константа одна, золотая пропорция тоже одна, как и золотое сечение, но абсолютная длина отрезка, или значение целого a+b, которое «сечется», то есть делится, выбирается произвольно. Поэтому характеристических уравнений золотого сечения, «золотых» рекурсий и отвечающих им «золотых» числовых рядов существует бесконечное множество. Вот если бы мы научились применять золотую пропорцию в относительных единицах, – другое дело. А количество, как известно, способно переходить в новое качество, что убедительно будет продемонстрировано ниже, на графиках числовых рядов ЗС.

Пока же рассмотрим простой, казалось бы, вопрос: как, глядя на части целого «a» и «b», четко определить, золотое это сечение или нет? Только ли подстановкой в золотую пропорцию?

Конечно, нет, не только. Вот еще четыре необходимых и достаточных условия ЗС:

- Меньший аттрактор «a» в Ф раз больше разности аттракторов «d» (a=Фd);
- Больший аттрактор «b» в Ф раз больше меньшего аттрактора «a» (b=Фa);
- Сумма аттракторов «a+b» в Ф раз больше большего аттрактора «b» (a+b=Фb);
- Гармоническое среднее аттракторов h(a,b) в 2 раза больше разности аттракторов «d» (h=2d);

Всем пяти (включая золотую пропорцию) условиям отвечают приведенные в Таблице 5 примеры золотых сечений отрезка произвольной длины a+b.

Таблица 5. Параметры золотых сечений отрезка произвольной длины a+b

| **Целое a+b** | **1** | **Ф** | **$Ф^2$** | $Ф^3$ | **$Ф^4$** | **$Ф^5$** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Большее b** | **$Ф^{-1}$** | **1** | **Ф** | **$Ф^2$** | **$Ф^3$** | **$Ф^4$** |
| **Меньшее a** | **$Ф^{-2}$** | **$Ф^{-1}$** | **1** | **Ф** | **$Ф^2$** | **$Ф^3$** |
| **d=b–a** | **$Ф^{-3}$** | **$Ф^{-2}$** | **$Ф^{-1}$** | **1** | **Ф** | **$Ф^2$** |
| **h=2ab/(a+b)** | **$2Ф^{-3}$** | **$2Ф^{-2}$** | **$2Ф^{-1}$** | **2** | **2Ф** | **$2Ф^2$** |
| **k1=h–d=d для «A-рекурсии»** | **$Ф^{-3}$** | **$Ф^{-2}$** | **$Ф^{-1}$** | **1** | **Ф** | **$Ф^2$** |
| **$k2=d^2$ для «A-рекурсии»** | **$Ф^{-6}$** | **$Ф^{-4}$** | **$Ф^{-2}$** | **1** | **$Ф^2$** | **$Ф^4$** |
| **k1=h+d=3d для «B-рекурсии»** | **$3Ф^{-3}$** | **$3Ф^{-2}$** | **$3Ф^{-1}$** | **3** | **3Ф** | **$3Ф^2$** |
| **$k2=-d^2$ для «B-рекурсии»** | **$-Ф^{-6}$** | **$-Ф^{-4}$** | **$-Ф^{-2}$** | **–1** | **$-Ф^2$** | **$-Ф^4$** |

Эти примеры пригодятся нам далее при анализе функции $f_{n+1}/f_n=F(n)$ для ЗС, то есть при анализе М-пропорции с М=1.

## 3. Не энтропией единой?

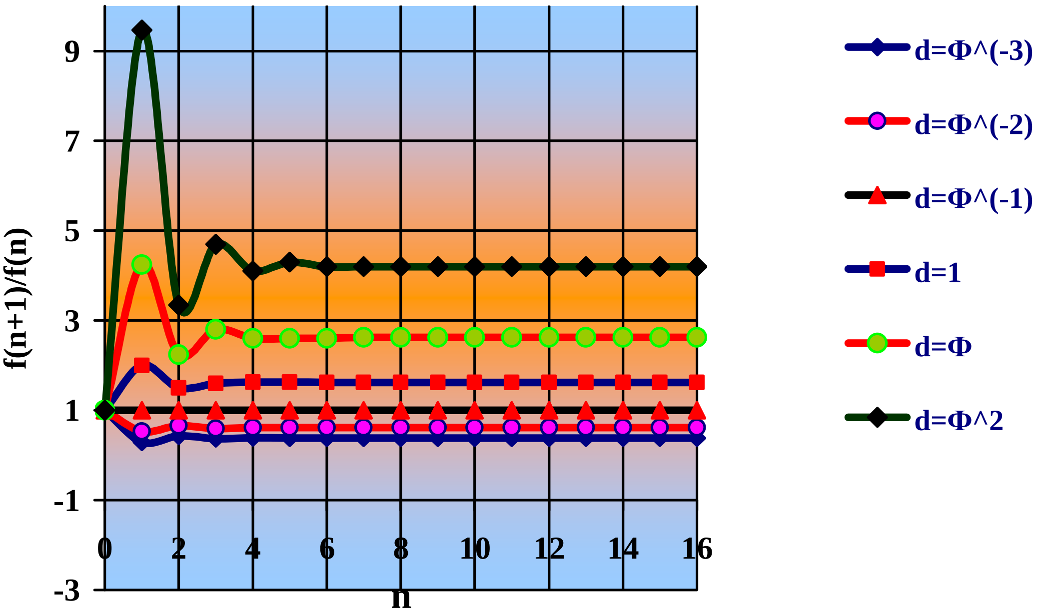
### 3.1. «А-рекурсии» ЗС

Не будем более злоупотреблять вниманием читателя и приводить длинные таблицы значений отношения $f_{n+1}/f_n$, а перейдем сразу к рисункам.

На Рис. 3 изображены значения отношений $f_{n+1}/f_n$ для ЗС при росте «n» для случая, когда аттрактором является меньшая часть «a». Отметим, что аргументом здесь является разность аттракторов d. Ведь на основании условия золотого сечения d=0,5h (2.2.5), уравнение А-рекурсии $a^2=(h-d)a+0{,}5hd$ (2.2.6) преобразуется в уравнение ЗС $a^2=d\cdot a+d^2$. Значения «d» взяты из 3-й строки Табл. 5.

Итак, на Рис. 3 мы видим привычные затухающие колебания вокруг значений аттрактора «a». Лишь в одном случае, когда $d=Ф^{-1}$, эти колебания вырождаются в прямую линию $f_{n+1}/f_n=1$, поскольку такому значению разности d отвечает единичный аттрактор a=1 (Табл. 5). А-рекурсии ЗС не преподносят нам никаких сюрпризов.

Рис.3. Отношение f(n+1)/f(n) для аттрактора "a" (ЗС)




### 3.2. «B-рекурсии» ЗС

Другое дело – B-рекурсии ЗС. На Рис. 4 представлены значения отношений $f_{n+1}/f_n$ при росте «n» для случая, когда аттрактором является б*о*льшая часть «b». Здесь мы не видим затухающих колебаний. Здесь отношения $f_{n+1}/f_n$ стремятся к доминантному–положительному значению аттрактора «b» монотонно!

Лишь в одном случае, когда $d=\Phi^{-2}$, кривые вырождаются в прямую линию $f_{n+1}/f_n=1$, поскольку такому значению разности d отвечает единичный аттрактор b=1 (Табл. 5). В диапазоне $0<d\leq\Phi^2$ нет никаких колебаний. Но **стоит только чуть-чуть, на одну миллиардную долю единицы (!) изменить значение параметра «d», как мы наблюдаем "эффект бабочки" – качественно новое состояние системы, новую фазу ее развития (Рис.4, графики для $d=\Phi^2$ и для $d=\Phi^2+10^{-9}$). Появляются интенсивные колебания вокруг значения аттрактора.**

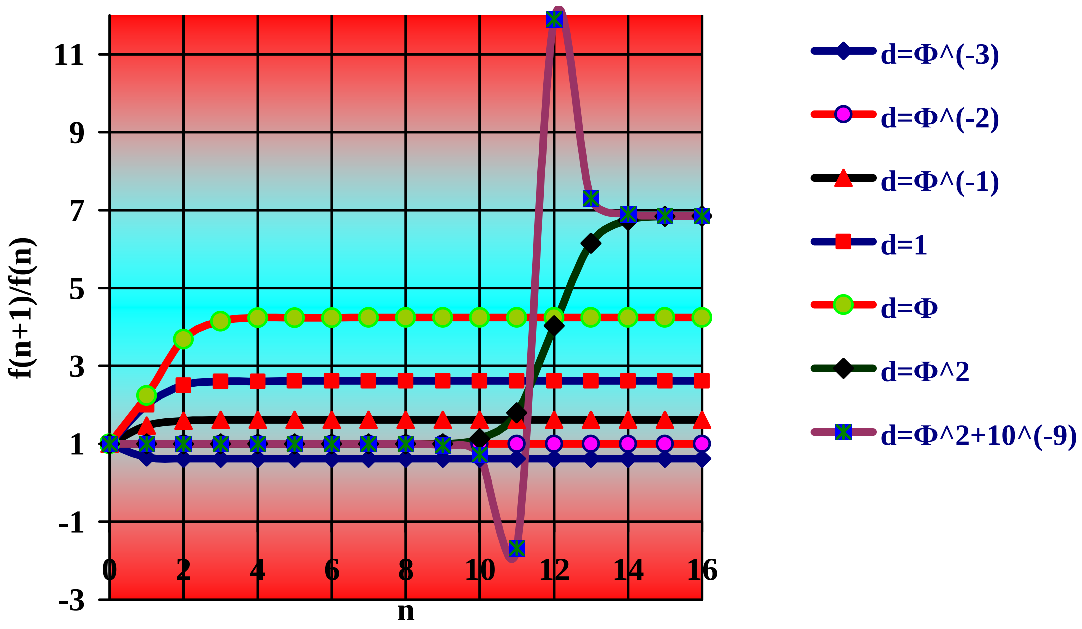
"Эффект бабочки" является одним из самых интересных свойств хаотичных сложных систем. Незначительное изменение одного параметра системы влечет большие и непредсказуемые изменения других параметров и системы в целом. Образно говоря, взмах крыла бабочки в одном полушарии может привести к тайфуну в другом полушарии.

Впервые это явление подробно и философски описал не ученый, а писатель-фантаст Рей Брэдбери в знаменитой повести "И грянул гром" (отправившийся в далекое прошлое охотник на динозавров оступился и раздавил бабочку, что привело к изменению всей цепочки эволюции).

В 60-е годы XX века это явление было рассмотрено Эдвардом Лоренцем. Теперь оно получило широкую известность и трактуется в социальном смысле так: люди таким образом включены в сложный организм природы, что даже небольшое наше воздействие в определенном направлении может привести к колоссальным последствиям.

Итак, очень хорошо "эффект бабочки" демонстрируется на примере «B-рекурсий» золотого сечения.

**Рис.4. Отношение f(n+1)/f(n) для аттрактора "b" (ЗС)**




### 3.3. Еще одна особенность Золотого Сечения?

Подобьем промежуточные итоги. Выше рассмотрены уравнения ЗС не только для аттракторов «а», но и для аттракторов «b». И не зря: «В-рекурсии» ЗС оказались неординарными. Мало того, что они генерируют ряды с монотонными, апериодическими зависимостями отношений $f_{n+1}/f_n$, так еще и при малейшем отклонении «входного» параметра d системы возникают сильные колебания значений отношения $f_{n+1}/f_n$ вокруг аттрактора «b», возникает «эффект бабочки».

Таблица 6. Критические (минимальные) значения параметров $a_{\text{критич.}}$, $b_{\text{ критич.}}$ и $(a+b)_{\text{ критич.}}$, при которых возникает «эффект бабочки» для М-пропорций (М=1 – 6)

| **M** | **L=d/a** | **$a_{\text{критич.}}$ (начало колебаний)** | **$b_{\text{ критич.}}$** | **$(a+b)_{\text{ критич.}}$** |
|---|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| **1** | $\frac{1}{\Phi}$ | $\Phi^3\approx 4{,}236$ | $\Phi^4\approx 6{,}8541$ | **$\Phi^5\approx 11{,}09$** |
| **2** | $\sqrt{3}$ | 2,1549 | 5,887 | 8,04 |
| **3** | $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ | 1,715+0,01 | 6,54 | 8,265 |
| **4** | $1+2\sqrt{2}$ | 1,525 | 7,36 | 8,888 |
| **5** | **3Φ** | $\sqrt{2}-0{,}001$ | 8,273 | 9,686 |
| **6** | $2+\sqrt{15}$ | $\sqrt{2}-0{,}07$ | 9,239 | 10,583 |

Впрочем, «эффект бабочки» наблюдается (не так явно) в М-пропорциях и при М>1.

Но, как показано в Таблице 6, именно у ЗС (М=1) наибольшее критическое значение аттрактора «а» ($a_{\text{критич.}}=\Phi^3+10^{-9}\approx 4{,}236+10^{-9}$) и наибольшее значение критической длины всего отрезка $(a+b)=\Phi^5\approx 11{,}09$ по сравнению с другими М-пропорциями. Это значит, что наибольшей устойчивостью (из рассмотренных шести М-пропорций с натуральными значениями М) обладает именно ЗС (М=1).

При $a<a_{\text{критич.}}$ и $(a+b)<(a+b)_{\text{критич.}}$ у ЗС нет колебаний отношения $f_{n+1}/f_n$ вокруг значения аттрактора «b». Монотонный рост отношения $f_{n+1}/f_n$ к значению аттрактора «b» – это свидетельство устойчивого состояния системы с единственным (положительным) доминантным значением аттрактора «b».

Эти рассуждения косвенно подтверждают выводы работы [4] о том, что ЗС отличается максимальной энтропией и максимальной устойчивостью системы, синтезируемой из двух элементов.

Кроме того, оказалось, что на примере ЗС и М-пропорций можно прекрасно демонстрировать учащимся, что такое «эффект бабочки».

## 4. Заключение

В древности математика считалась панацеей, так как она пыталась объяснить основы мироздания и была неотрывна от искусства. В наши дни «сухая» математика, оторванная от других предметов, лишенная гармонии, превратилась в молох, калечащий юные судьбы. В математическом образовании давно назрел кризис, требуются кардинальные преобразования.

Новый курс «Математики гармонии» профессора А.П.Стахова призван восстановить славные традиции далекого прошлого, помочь гармонизировать мышление будущих поколений, сделать мышление творческим. Этот курс с глубокими историческими корнями должен читаться и математикам, и гуманитариям.

Курс «Математики гармонии» следует всемерно развивать. Каждая новая работа по теории Золотого Сечения должна стремиться увеличить число граней вечно сверкающего бриллианта ЗС.

В данной работе сделана попытка создания основ теории новых «М-пропорций», которые при единичном параметре М=1 трансформируются в «золотую» пропорцию. Возможно, после широкого обсуждения они будут использованы в новом курсе «Математики гармонии».

В «М-пропорцию» входят три параметра: производные от сечения «целого» a+b на две части, то есть «a» и «b», и параметр «М». Для каждого значения «М» существует своя зависимость между аттракторами «a» и «b», свои рекурсии 2-го порядка и свои числовые ряды. Рекурсии на основе аттрактора «a» названы «А-рекурсиями», рекурсии на основе аттрактора «b» названы «В-рекурсиями». У разностных «В-рекурсий» второе слагаемое всегда отрицательно.

Анализ показал, что «В-рекурсии» золотого сечения (М=1) обладают б***о***льшим диапазоном устойчивости, чем любые рекурсии других М-пропорций (М>1). Но, как справедливо отметил А.А. Коновалов, «понятие устойчивости перегружено разными смыслами». В ходе анализа рассмотрено противостояние положительного (доминантного) и отрицательного корней характеристического уравнения «за право» быть аттрактором. И смысл устойчивости здесь заключается в «победе» доминантного значения аттрактора над отрицательным значением, и даже в отсутствии колебаний на пути к этому доминантному значению, то есть в апериодическом, монотонном стремлении к полному «порядку» – геометрической прогрессии.

Благодаря тому, что анализировались рекурсии для двух аттракторов, «a» и «b» (обычно ограничиваются одним – «a»), в числовых рядах М-пропорций обнаружены ТРИ фазы устойчивости:

- ✓ отношение последующего элемента ряда к предыдущему при $n \to \infty$ монотонно стремится от единицы (при единичных начальных условиях) к доминантному значению аттрактора;
- ✓ отношение последующего элемента ряда к предыдущему стремится от единицы к доминантному значению аттрактора, совершая при этом затухающие колебания вокруг этого значения;
- ✓ колебания вокруг доминантного значения аттрактора возрастают, что приводит к потере устойчивости и скачкообразному переходу колебаний отношения последующего элемента ряда к предыдущему на новый уровень, равный отрицательному корню характеристического уравнения для того же самого аттрактора.

У «А-рекурсий» М-пропорций при М>1 числовые ряды стремятся сначала к положительному, а затем – скачком – к отрицательному значению аттрактора.

«В-рекурсии» генерируют более устойчивые числовые ряды. Но при неограниченном увеличении входного параметра количество переходит в качество, устойчивость теряется, одна фаза развития сменяется другой. Интервал входного параметра, в котором развитие системы осуществляется монотонно, можно считать интервалом устойчивости. Таким образом, интервал устойчивости не может быть бесконечным. На его верхней границе обычно наблюдается интереснейший «эффект бабочки»: малейшее, исчисляемое миллиардными долями изменение входного параметра приводит к резкой смене фазы устойчивости.

Ярко выражен «эффект бабочки» у «В-рекурсии» ЗС. При увеличении входного параметра «d» на $10^{-9}$ по сравнению с его критическим значением, монотонное стремление отношения соседних элементов ряда к аттрактору «b» скачком переходит в колебательный процесс. Подобный эффект присущ в несколько меньшей степени и другим М-пропорциям. Но интервал устойчивости у ЗС явно шире.

Подчеркнем, что «эффект бабочки» более ярко выражен именно у большего из аттракторов.

Итак, устойчивость можно изучать не только по фазовым портретам. Устойчивость рекуррентных рядов можно изучать по функциональным зависимостям $f_{n+1}/f_n=F(n)$. Это более трудоемко, зато и гораздо нагляднее. И в этом хорошо помогает Maple 10.

Можно ли для данного материала найти какие-либо аналогии в других дисциплинах? Из теории автоматического управления известно, что в непрерывных системах 2-го порядка колебания, возрастающие или убывающие в зависимости от устойчивости, возникают только при наличии пары комплексно-сопряженных корней. При одном корне уравнения 1-го порядка переходная функция звена должна быть апериодической, а не колебательной.

Так и рекурсия 1-го порядка порождает «чисто» геометрическую прогрессию, в которой отношения соседних элементов ряда постоянны, никаких колебаний нет. Хаос полностью побеждается порядком.

Рекурсия 2-го порядка также может вести себя, как рекурсия 1-го порядка, если начальные условия соответствуют целым последовательным степеням аттрактора, не равного единице. В общем же случае рекурсия 2-го порядка аналогична колебательному звену 2-го порядка.

Хотя, нет правил без исключений.

Подчеркнем еще раз, что в рекурсии 2-го порядка, соответствующей золотому сечению и составленной для «b» – большего аттрактора (который в Ф раз больше меньшего аттрактора «a»), в широком диапазоне изменения основных параметров «колебательность» уступает место апериодичности. В ходе компьютерных экспериментов установлено: отрицательные значения второго слагаемого «золотой» рекурсии 2-го порядка определяют апериодический, монотонный характер поведения числовых рядов этой рекурсии при единичных начальных условиях. При золотом сечении отношение последующего элемента ряда к предыдущему ($f_{n+1}/f_n$) при $n \to \infty$ в широком диапазоне входного параметра системы стремится к большему аттрактору (большей части целого) монотонно. Нет «перерегулирования», нет колебаний значений $f_{n+1}/f_n$ вокруг значения аттрактора «b».

Видимо, Природа часто использует золотое сечение и по той причине, что оно снабжено «резервным» вторым аттрактором с механизмом плавного выхода на устойчивый режим развития, соответствующий геометрической прогрессии со знаменателем $\Phi \approx 1{,}618$.

Галилео Галилей сказал: «... явления природы, как бы незначительны, как бы во всех отношениях маловажны ни казались, не должны быть презираемы философом, но все должны быть в одинаковой мере почитаемы. Природа достигает большого малыми средствами, и все ее проявления одинаково удивительны».

Надеемся, что философы обратят внимание на этот феномен Золотого Сечения, а результаты исследования устойчивости М-рекурсий войдут в курс «Математики гармонии» профессора Стахова.

Автор будет благодарен за доброжелательные замечания по содержанию данной работы.

**Литература:**

1. А.П. Стахов, Математизация гармонии и гармонизация математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16897, 16.10.2011
2. Быстров М.В., Что стоит за великой теоремой Пуанкаре-Перельмана // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16949, 07.11.2011
3. В.С. Белянин, С.Л. Василенко, Золотые крупицы математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16935, 04.11.2011
4. Владимиров В.Л., Стахов А.П. Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16523, 22.05.2011

http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321199.htm