С.Л. Василенко

Золотой калейдоскоп. Часть 1. Функция Эйлера и золотое сечение

Невозможно обозреть и увязать
весь калейдоскоп событий и фактов

Вместо вступления. Сначала возникло желание открыть новую рубрику «золотой дождь» с её непосредственным отношением к немногочисленным, но весьма ярким проявлениям константы золотого сечения.

Дождевой образ-лейтмотив возник из греческого мифа о Зевсе, который, пленившись красотой Данаи, дочери царя Акрисия, явился к ней в виде золотого дождя, после чего у неё родился сын Персей. Даная, осыпаемая дождем золотых монет, изображена на картинах многих художников эпохи Возрождения (Тициан, Ван Дейк и др.).

В переносном смысле "золотым дождем" называют обильные дары. В нашем случае это могли бы быть «математические дары» золотой пропорции. Немного поразмыслив и проанализировав иные "водно-осадочные созвучия-интерпретации", подумали пока оставить этот образ. Возможно, на потом. Подождем, – не под дождем...

Вместо него решили сосредоточить свой взгляд на более прозаическом и одновременно сугубо математическом объекте, который хорошо знаком с детства и называется калейдоскопом [1].

> Напомним, что словосочетание "калейдоскоп" (от греч. *красивый вид смотреть*) придумал сэр Дэвид Брюстер, написавший трактат про его теорию и историю [2, с. 62].
>
> Это детская игрушка, в которой разноцветные кусочки стекла, многократно отражаясь в трех зеркалах, воссоздают единый красивый узор.
>
> Зеркала составляют боковые грани правильной треугольной призмы, образуя между собой углы, равные $\pi/3 = 60^{o}$.
>
> Если бы эти углы были другими, то отражения накладывались бы друг на друга и не создавали единого симметричного узора.
>
> Описание теоретически возможных калейдоскопов равносильно описанию многоугольников <многогранников> Кокстера, <двугранные> углы которых являются целыми частями π [1].

Представляется, что *золотой калейдоскоп* как нельзя ладно подходит в качестве общей рубрики, объединяющей разноплановые проявления золотой пропорции с её константой Ф.

В переносном смысле означает разнообразие явлений, фактов.

Подходящие синонимы: многообразие, спектр, панорама, каскад, мозаика...

Под общим тезисом: разнообразие в единстве. Хотя бесконечное разнообразие сгибает-подавляет и под бременем непосильного груза обычно приводит к потере интереса разбираться в этом нагромождении.

Эйлер и триединство констант. Эйлер по праву считается самым продуктивным и непревзойденным математиком в истории по объему полученных результатов.

Он – прирожденный и самый совершенный алгоритмист – ученый, который изобретает алгоритмы для решения задач специальных видов.

Эйлер – автор многочисленных математических открытий [3, с. 204–251].

Мы уже обращались [4, 5] к его творчеству и наследию.

В частности, предметом рассмотрения был генезис общности чисел (π, e, ф), где e – основание натурального логарифма, ф – "малая" константа золотого сечения.

Как было показано, триединство констант вытекает из их совместного "квадратичного происхождения", которое порождают кривые второго порядка: окружность (эллипс), гипербола и парабола [6]. С их хорошо просматриваемой онтологической подосновой в виде семейства конических сечений.

Шесть фундаментальных констант, включая 0, 1 и мнимую единицу i, объединены в расширении $e^{i\pi}+\phi(\phi+1)=0$ знаменитого тождестве Эйлера и объяснены нами через всевозможные сечения обычного конуса в такой сводной транскрипции:

π	окружность (эллипс)	0	точка (вершина конуса)
ϕ	парабола	1	образующая конуса
e	гипербола	i	другая образующая

0	1	i
+	×	^
π	e	ϕ

Или в виде матрицы из ключевых математических символов, как своеобразный *знак качества* в составе трех триад [6]:

- базовые числа $0,\ 1,\ i$;
- основные операции $+,\ \times,\ \wedge$, (^ – распространенный знак возведения в степень в языках программирования и системах компьютерной алгебры);
- фундаментальные константы $\pi,\ e,\ \phi$:

π – представляет геометрию;
i – отражает алгебру;
e – "обитает" в математическом анализе;
0, 1 – можно отнести к арифметике;
ϕ – всё гармонизирует.

А теперь обратимся к теории чисел.

Функция Эйлера. В исследованиях числовых конструкций очень популярна функция Эйлера $\varphi(n)$ натурального числа n, которая выражает количество целых чисел отрезка $[1, n]$, взаимно простых с n. Другими словами $\varphi(n)$ – количество натуральных чисел, не больших n и взаимно простых с ним.

На языке алгебры, это порядок группы обратимых элементов кольца Z_n – множества неотрицательных целых чисел с алгебраическими операциями сложения и умножения.

Для натурального числа n, представленного каноническим разложением на простые сомножители $n=\prod_i p_i^{\alpha_i}$, $i=\overline{1,k}$, функция Эйлера может быть вычислена по формуле

$$\varphi(n)=\prod_i p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1).$$

Функцию Эйлера можно также представить в виде произведения <Эйлера>:

$$\varphi(n)=n\prod_{p\,|\,n}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

где p – простые числа, которые "пробегают" все значения, участвующие в разложении n на простые сомножители.

Для разнообразных вычислений весьма удобным является разложение в ряд Фурье [7]

$$\varphi(n)=\sum_{k=1}^{n}\gcd(k,n)\cdot e^{-\frac{2\pi k}{n}i},$$

где $\gcd(k, n)$ – наибольший общий делитель (НОД); i – мнимая единица, $i^2=-1$.

Функция Эйлера и золотое сечение. Рассматривая историческую ретроспективу, наиболее вероятно предположить, что Эйлер в свое время и не думал о какой-либо связи своей функции с золотым сечением.

Как-то уж сильно далеки друг от друга их математические трактовки.

Тем не менее, такую связь можно воспроизвести [8]. Пусть даже вкупе с иными числами, но всё-таки можно.

Искомая связь основана на двух леммах, устанавливающих универсальные тождества для положительной переменной $0 < x < 1$:

$$\sum_{k \ge 1} \frac{\varphi(k)}{k}\left[-\ln\left(1-x^k\right)\right] = \frac{x}{1-x}, \tag{1}$$

$$\sum_{k \ge 1} \frac{\mu(k)}{k}\left[-\ln\left(1-x^k\right)\right] = x, \tag{2}$$

где $\mu(k)$ – мультипликативная арифметическая функция Мёбиуса, хорошо известная в теории чисел и комбинаторике, со своим троичным набором значений {–1, 0, 1}.

Тождества (1)–(2) справедливы для любого положительного вещественного числа, меньшего единицы. В том числе и для частного значения $x = \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \Phi^{-1}$ – "малой" константы золотого сечения.

Здесь не наблюдается ничего специфично-золотого.

Вместе с тем, используя равенство $\phi^2 + \phi - 1 = 0$, характерное исключительно для золотой константы, получаем $\frac{x}{1-x} = \frac{\phi}{1-\phi} = \phi^{-1} = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ или

$$\Phi + \sum_{k \ge 1} \frac{\varphi(k)}{k} \ln\left(1-\phi^k\right) = 0 .$$

Представленное тождественное соотношение теперь уникально и увязывает золотое сечение, натуральный логарифм и функцию Эйлера.

Выражение легко приводится к единичному тождеству

$$\sum_{k \ge 1} \frac{\varphi(k)}{k} \ln\left(1-\phi^k\right)^{-\phi} = 1 .$$

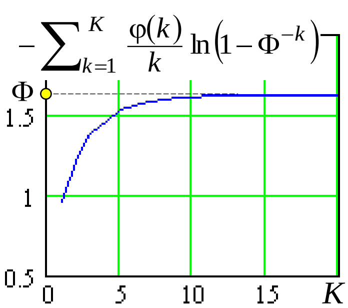

Рис. 1. Сходимость связующей формы

Сходимость частных сумм к константе золотого сечения Φ очень быстрая (рис. 1).

Обратим внимание, что данные соотношения выполняются исключительно для константы золотого сечения.

Малейшее отклонение переменной $\Phi \to x$ от истинного значения золотого числа приводит к нарушению равенств.

Это хорошо видно (рис. 2) из графика функции

$$f(x) = x + \sum_{k \ge 1} \frac{\varphi(k)}{k} \ln\left(1-x^{-k}\right),$$

которая обращается в нуль точно в точке ЗС: $f(\Phi) = 0$.

Кроме того, здесь возможны разные экзотические интерпретации.

Так, формальное вычитание двух равенств (1)−(2) легко приводит к любопытному единичному тождеству:

$$\sum_{k\ge1}\frac{\mu(k)-\varphi(k)}{k}\ln\left(1-\phi^k\right)=1.$$

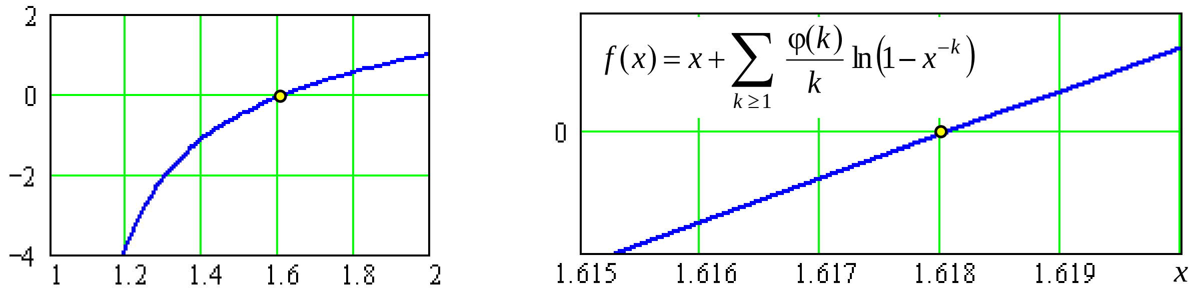

Рис. 2. Уникальность константы золотого сечения Ф
в её взаимосвязи с натуральным логарифмом и функцией Эйлера φ(k)

Используя свойства экспоненциальной функции, можно получить выражения для основания натурального логарифма с переходом на бесконечное произведение:

$$e=\prod_{k\ge1}\ln\left(1-\phi^k\right)^{\frac{\mu(k)-\varphi(k)}{k}}\approx 2{,}718;$$

$$e^{\Phi}=\prod_{k\ge1}\left(1-\phi^k\right)^{-\frac{\varphi(k)}{k}}\approx 5{,}043.$$

Как и следовало ожидать, формы взаимосвязи фундаментальных констант (e, Ф) имеют бесконечные формы (суммы, произведения) [5].

Дело в том, что, несмотря на своё "пролетарское" квадратичное происхождение, онтологически это совершенно разные числа:

Ф – целое алгебраическое число, как корень многочлена x^2-x-1 с целыми коэффициентами, старший из которых равен единице;

e – трансцендентное число.

Если и говорить об аналитических зависимостях, то они, на наш взгляд, возможны только на уровне бесконечных математических структур. Они способны "скрадывать" и нивелировать издержки несовместимости данных чисел под одним точным знаком равенства конечной аналитической формы.

Мини-заключение. Итак, исследована новая грань константы золотого сечения Ф в её неожиданной взаимосвязи с основанием натурального логарифма и функцией Эйлера $\varphi(n)$, которая определяет количество натуральных чисел, не больших n и взаимно простых с ним.

Искомая связь выражается бесконечной суммой, приведенной к единице.

Трудно высказать нечто определенное в части ожидаемой полезности представленных тождеств. Их применимость пока остается под вопросом.

Скорее всего, они имеют формообразующий характер, фиксируя некое математическое построение. Возможно, предопределяют-предвосхищают генерацию новых синтезируемых объектов. Так или иначе, но данность не должна ставить под сомнение и уж тем более наскок критики на подобные исследования.

Известны десятки и сотни разных математических соотношений (того же Эйлера, Рамануджана и других великих математиков), которые до сих пор остались не востребованными. И вряд ли таковыми когда-нибудь станут.

Они лишь подчеркивают внутреннее совершенство и упорядоченность самих математических структур. В определенных условиях это тоже важно.

Описанная в данной работе взаимосвязь функции Эйлера с золотой константой, вероятно, вычленена из похожей обоймы.

Ну, и что с того? – В любом случае мы имеем дело с проявлением новой и неожиданной грани числа золотой пропорции.

Всё это позволяет шире представить золотоносный феномен, который наверняка ещё не раз порадует нас своими необыкновенно-волшебными и мозаично-калейдоскопичными картинками.

Литература:

1. Винберг Э.Б. Калейдоскопы // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 2. – С. 121–127. – http://window.edu.ru/resource/746/20746/files/9702_121.pdf.
2. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 648 с. – http://eek.diary.ru/p165970944.htm.
3. Гиндикин С.Г. Рассказы о математиках и физиках: 3-е изд., расширенное. – М.: МЦНМО, 2001. – 440 с.
4. Василенко С.Л. Базовое тождество математических основ гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16069, 10.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm.
5. Василенко С.Л. Базовые соотношения между фундаментальными константами // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17327, 20.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161934.htm.
6. Василенко С.Л. Трио базовых математических констант ПЕФ = (π, e, Ф): кривые второго порядка и интегральный подход // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 29019, 18.06.2024. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165622.htm.
7. Schramm W. The Fourier transform of functions of the greatest common divisor // Electronic J. of comb. number theory, A50, vol. 8(1), 2008. – http://www.integers-ejcnt.org/vol8.html.
8. Schneider R.P. A golden pair of identities in the theory of numbers // Cornell University Library. – http://arxiv.org/pdf/1010.4298.pdf.