

СООТНОШЕНИЯ ГАРМОНИИ И ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОГО И ОБРАТНОГО ЦИКЛОВ КАРНО

Для параметров базовых объектов термодинамики – прямого и обратного циклов Карно, состоящих из двух изотерм и двух адиабат [1], найдены важные соотношения гармонии, точно выражающиеся через константы золотого сечения $\phi = (-1 + \sqrt{5}) / 2 \approx 0,618$ и $\varphi = (1 + \sqrt{5}) / 2 = 1 + \phi = 1 / \phi \approx 1,618$. Установлен физический смысл этих соотношений, кроме того показано, что найденным соотношениям гармонии соответствуют экстремумы разности функций средних значений от следующих параметров циклов: кпд тепловой машины $\eta(\tau)$, работающей по прямому циклу Карно, и кпд холодильника $\chi(\tau)$ и теплового насоса $\zeta(\tau)$, работающих по обратному циклу Карно:

$$\eta(\tau) = |Q_1 - Q_2| / |Q_1| = (T_1 - T_2) / T_1 = 1 - \tau \quad (1),$$

$$\chi(\tau) = |Q_2| / |Q_1 - Q_2| = T_2 / (T_1 - T_2) = 1 / \eta - 1 = \tau / (1 - \tau) \quad (2),$$

$$\zeta(\tau) = |Q_1| / |Q_1 - Q_2| = T_1 / (T_1 - T_2) = 1 / \eta = 1 / (1 - \tau) \quad (3),$$

где Q_1 , Q_2 - количества тепловой энергии отдаваемые (получаемые) устройствами с температурами соответственно T_1 и T_2 , $0 < \tau = T_2 / T_1 \leq 1$.

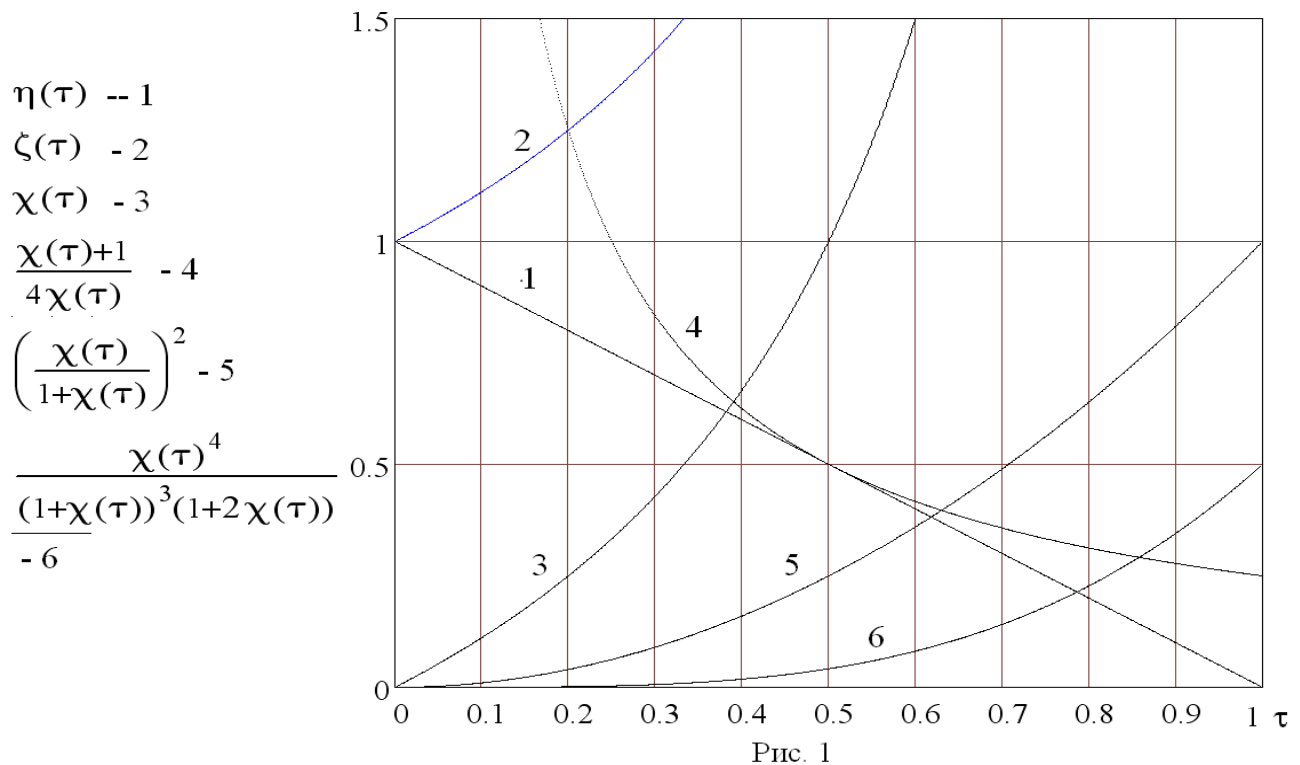
Укажем, что существование соотношения $\eta(\tau = \phi^2) = \chi(\tau = \phi^2) = \phi$ было отмечено в работе [2]. Однако при этом не было дано никаких объяснений данному равенству. Детальное же исследование циклов Карно на системную гармонию было начато автором данной статьи в работе [3].

Учитывая то, что при изменении τ от 0 до 1 кпд η изменяется от 1 до 0, а кпд χ от 0 до ∞ (см. рис. 1), η и χ могут равняться ϕ и их одновременное равенство ϕ при $\tau = \phi^2$ можно было бы считать случайным совпадением.

Согласно концепции автора статьи, неоднократно подтверждённой для разных физических и математических объектов (см., например, [4-6]), одним из критериев не случайности, а скрытой закономерности, приводящей к появлению для данного объекта соотношений гармонии, точно выражающихся через фундаментальные математические константы, в частности, ϕ , φ , является наличие экстремумов у некоторых функций (потенциалов, функций средних значений) при тех же значениях параметра, при которых реализуются соотношения гармонии.

Покажем, что эта концепция справедлива и для циклов Карно.

Для этого найдём, напр., функции, составленные из функций $\chi(\tau)$, $\zeta(\tau)$, графики которых пересекаются с графиком функции $\eta(\tau)$ в заданных характерных точках. Примеры таких функций показаны на рис. 1.



Так, графики функций $\eta(\tau)$ и $\zeta(\tau)$ пересекаются при $\tau = 0$, в этом случае $\eta(\tau) = \zeta(\tau) = 1$, $\chi(\tau) = 0$.

Графики функций $\eta(\tau)$ и $\chi(\tau)$, как уже отмечалось, пересекаются при $\tau = \phi^2$, в этом случае $\eta(\tau) = \chi(\tau) = \phi$, $\zeta \tau = \varphi$

Графики функций $\eta(\tau)$ и $(\chi(\tau)+1)/4\chi(\tau)$ касаются при $\tau = 1/2$, при этом $\eta(\tau) = 1/2$, $\chi(\tau) = 1$, $\zeta(\tau) = 2$, $2 = \phi \cdot \phi + \phi \cdot \phi = \phi^2 + \phi^1 + \phi^0$.

Графики функций $\eta(\tau)$ и $[\chi(\tau)/(1+\chi(\tau))]^2$ пересекаются при $\tau = \phi$, в этом случае $\eta(\tau) = \phi^2$, $\chi(\tau) = \phi$, $\zeta(\tau) = \phi^2$. При $\tau = \phi$ пересекаются и графики функций $\chi(\tau)$ и $1/\sqrt{\eta(\tau)}$. В этом случае $\chi(\tau) = \phi$, $\eta(\tau) = \phi^2$, $\zeta(\tau) = \phi^2$.

Графики функций $\eta(\tau)$ и $\chi^4(\tau)/(1+\chi(\tau))^3(1+2\chi(\tau))$ пересекаются при $\tau = \sqrt{\phi}$, в этом случае $\eta(\tau) = 1 - \sqrt{\phi}$, $\chi(\tau) = 1/(\sqrt{\phi} - 1)$, $\zeta(\tau) = 1/(1 - \sqrt{\phi})$.

Естественно, можно найти и множество других кривых пересекающихся с $\eta(\tau)$, $\chi(\tau)$, $\zeta(\tau)$ при характерных значениях τ , точно выражающихся через константы ϕ , φ .

Физический смысл получаемых характерных значений τ становится ясным при учёте того, что $0 < \tau = T_2/T_1 = |Q_2|/|Q_1| \leq 1$. Отметим, что возможность невыполнения равенства $T_2/T_1 = |Q_2|/|Q_1|$ рассматривается в работе [7].

Так, при $\tau \approx 0$ КПД $\eta \approx \eta_{\max} = 1$, $\chi \approx \chi_{\min} = 0$, $\zeta = \zeta_{\min} = 1$, однако, эти предельные значения КПД недостижимы, поскольку согласно второму началу термодинамики вся тепловая энергия $|Q_1|$, передаваемая рабочему телу, не может полностью перейти в работу $W = |Q_1 - Q_2| \neq |Q_1|$, и поэтому $|Q_2| \neq 0$. Кроме того, согласно третьему началу термодинамики абсолютный нуль температуры $T_2 = 0$ недостижим.

При $\tau = \phi^2$ $\eta(\tau) = \chi(\tau) = \phi$, $\zeta(\tau) = \phi^2$ и из этих равенств получаем квадратное уравнение, связывающее $|Q_1|$ и $|Q_2|$:

$$|Q_1|^2 - 3|Q_1| \cdot |Q_2| + |Q_2|^2 = 0 \quad (4),$$

из которого следует, что $|Q_1| = (3/2 \pm \sqrt{5}/2) \cdot |Q_2|$ и так как $|Q_1| \geq |Q_2|$, то

$$|Q_1| = (1 + \phi)|Q_2| = \phi^2|Q_2| \text{ или } |Q_2| = \phi^2|Q_1|.$$

При $\tau = 1/2$ $\eta(\tau) = (\chi(\tau) + 1) / 4\chi(\tau) = 1/2$ и уравнение, связывающее $|Q_1|, |Q_2|$, имеет вид:

$$|Q_1|^2 - 4|Q_1| \cdot |Q_2| + 4|Q_2|^2 = 0 \quad (5),$$

из которого следует, что $|Q_1| = 2|Q_2|$ или $|Q_2| = |Q_1|/2$.

При $\tau = \phi$ $\eta(\tau) = [\chi(\tau) / (1 + \chi(\tau))]^2 = \phi^2$ и уравнение, связывающее $|Q_1|, |Q_2|$, имеет вид:

$$|Q_1|^2 - |Q_1| \cdot |Q_2| - |Q_2|^2 = 0 \quad (6),$$

из которого следует, что $|Q_1| = (1/2 \pm \sqrt{5}/2) \cdot |Q_2|$ и так как $|Q_1| \geq |Q_2|$, то $|Q_1| = \phi \cdot |Q_2|$ и $|Q_2| = \phi \cdot |Q_1|$. Как уже отмечалось, при $\tau = \phi$ пересекаются и графики функций $\chi(\tau)$ и $1/\sqrt{\eta(\tau)}$. В этом случае $\chi(\tau) = \phi$, $\eta(\tau) = \phi^2$, $\zeta(\tau) = \phi^2$, а уравнением для связи $|Q_1|$ и $|Q_2|$ является уравнение (6).

При $\tau = \sqrt{\phi}$ $\eta(\tau) = \chi^4(\tau) / (1 + \chi(\tau))^3 (1 + 2\chi(\tau)) = 1 - \sqrt{\phi}$, $\chi(\tau) = 1 / (\sqrt{\phi} - 1)$, $\zeta(\tau) = 1 / (1 - \sqrt{\phi})$ и уравнение, связывающее $|Q_1|, |Q_2|$, имеет вид:

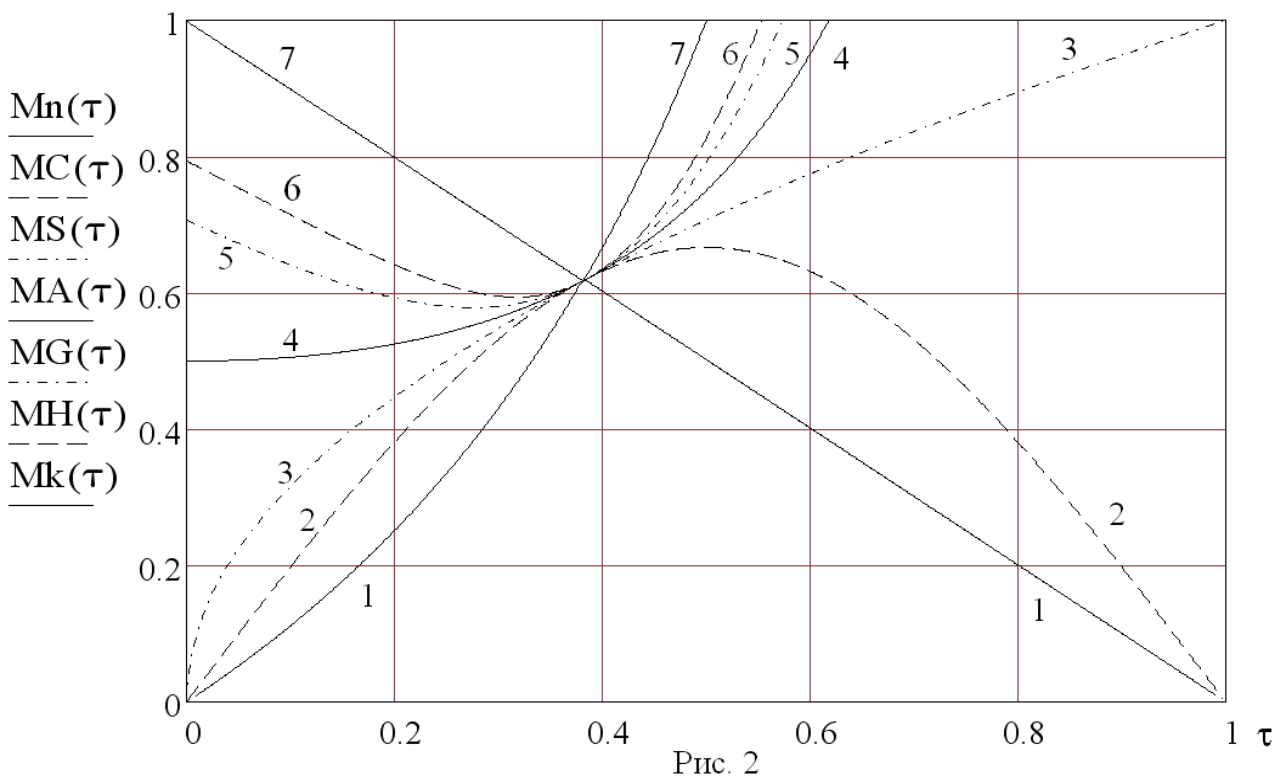
$$|Q_1|^4 - |Q_1|^2 \cdot |Q_2|^2 - |Q_2|^4 = 0 \quad (7),$$

из которого следует, что $|Q_1|^2 = (1/2 \pm \sqrt{5}/2) \cdot |Q_2|^2$ и с учётом $|Q_1| \geq |Q_2|$ $|Q_1| = \sqrt{\phi} \cdot |Q_2|$ и $|Q_2| = \sqrt{\phi} \cdot |Q_1|$.

Далее проведём детальное рассмотрение экстремальных зависимостей функций средних значений для двух значений τ : $\tau = \phi^2$ и $\tau = \phi$

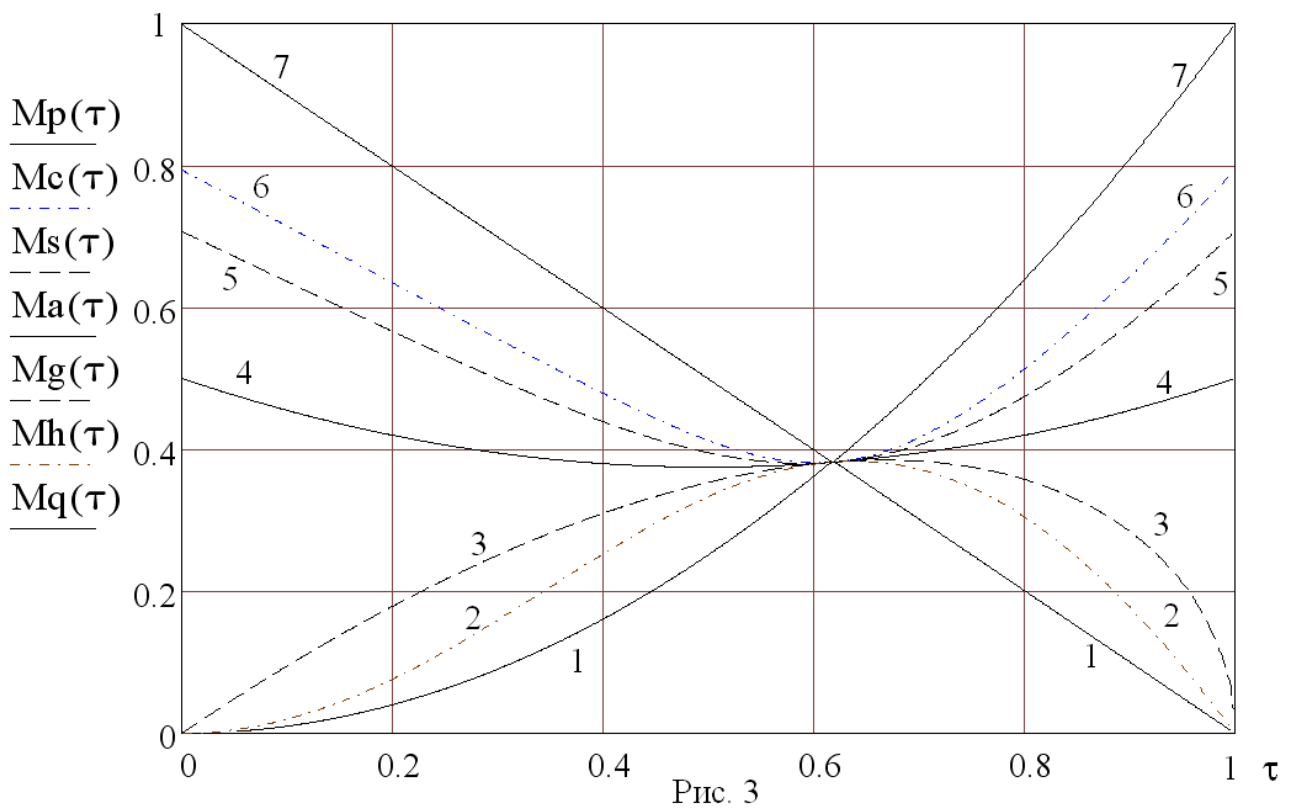
Функции средних значений порядка λ ($-\infty < \lambda < +\infty$) для m функций $f_j(\tau)$ $1 \leq j \leq m$ определяются выражением $M_\lambda(\tau) = [\sum_1^m f_j^\lambda(\tau) / m]^{1/\lambda}$, $M_{\lambda_1} \geq M_{\lambda_2}$ при $\lambda_1 > \lambda_2$. Знак равенства имеет место при таком τ_0 , при котором все $f_j(\tau_0)$ равны.

Для функций $\eta(\tau) = \chi(\tau)$ при $\tau = \phi^2$ рассмотрим следующие средние: среднее гармоническое ($\lambda = -1$) - $MH(\tau) = 2 / (1/\eta(\tau) + 1/\chi(\tau))$, среднее геометрическое ($\lambda = 0$) - $MG(\tau) = \sqrt{\eta(\tau) \cdot \chi(\tau)}$, среднее арифметическое ($\lambda = 1$) - $MA(\tau) = (\eta(\tau) + \chi(\tau)) / 2$, среднее квадратичное ($\lambda = 2$) - $MS(\tau) = \sqrt{(\eta^2(\tau) + \chi^2(\tau)) / 2}$, а также среднее кубическое ($\lambda = 3$) - $MC(\tau) = \sqrt[3]{(\eta^3(\tau) + \chi^3(\tau)) / 2}$. Графики этих средних показаны на рис. 2. Кроме того, на рис. 2 показаны функции средних значений при больших $|\lambda|$: $Mk(\tau)$ ($\lambda = k = -200$) и $Mn(\tau)$ ($\lambda = n = 500$). На рис. 2 перечисленные функции пронумерованы и записаны в порядке их возрастания: снизу – вверх.



Подчеркнём то, что при $\tau = \phi^2$ $\eta(\phi^2) = \chi(\phi^2) = \phi$, а все функции на рис. 2 равны ϕ и имеют общую касательную. При этом $MS(\tau)$ и $MC(\tau)$ имеют минимумы, соответственно, при $\tau \approx 0,275508$ и $\tau \approx 0,317672$, а $MH(\tau)$ имеет максимум $MH_{\max} = 2 / 3 = (\phi \cdot \phi + \phi \cdot \phi) / (\phi^2 + \phi^2)$ при $\tau = 1/2$.

Аналогичные зависимости для функций средних значений от $\eta(\tau)$ и $[\chi(\tau)/(1+\chi(\tau))]^2$, $\eta(\tau) = [\chi(\tau)/(1+\chi(\tau))]^2 = \phi^2$ при $\tau = \phi$, показаны на рис. 3. Для отличия этих функций от функций на рис. 2 использованы строчные индексы h, g, a, s, c. Функции средних значений при больших значениях $|\lambda|$ обозначены $Mq(\tau)$ ($\lambda = q = -200$) и $Mr(\tau)$ ($\lambda = r = 500$). Также как и на рис. 2, эти функции пронумерованы и записаны в порядке их возрастания: снизу – вверх.



При $\tau = \phi$ все функции на рис. 3 равны ϕ^2 и имеют общую касательную. При этом $Ma(\tau)$, $Ms(\tau)$ и $Mc(\tau)$ имеют минимумы, соответственно, при $\tau = 1/2$ ($Ma(1/2) = 3/8 = [1 + (\phi + \phi)^2 / (\phi^2 + \phi^2)]^{-1}$), $\tau \approx 0,587795$ и $\tau \approx 0,602130$, а $Mg(\tau)$ и $Mh(\tau)$ максимумы: $Mg_{\max} = 2 / 3^{3/2}$ при $\tau = 2/3$, $Mh(\tau)_{\max} \approx 0,383 \approx \phi^2$, при $\tau \approx 0,636 \approx \sqrt{\phi} / 2$, $3 = \phi^2 + \phi^2$, $5 = (\phi + \phi)^2$.

Из зависимостей, показанных на рис. 2, 3, следует, что разность любых

двух функций средних значений на данном рисунке будет иметь экстремум, соответственно, при $\tau = \phi^2$ или $\tau = \phi$.

Разности функций $Mg(\tau) - Mh(\tau)$ (кривые 1), $Ma(\tau) - Mh(\tau)$ (кривые 2), $MG(\tau) - MH(\tau)$ (кривые 3) и $MA(\tau) - MH(\tau)$ (кривые 4) показаны на рис. 4.

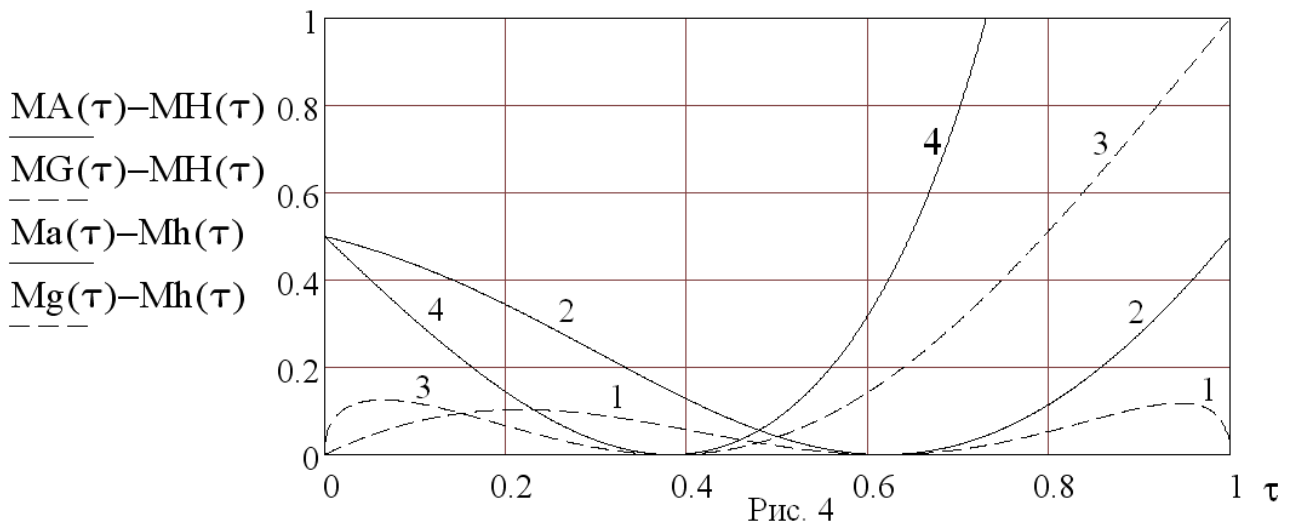


Рис. 4

Введём теперь следующие функции средних значений $M\lambda_3(\tau) = [(\eta^\lambda(\tau) + \chi^\lambda(\tau) + \zeta^\lambda(\tau)) / 3]^{1/\lambda}$ с указанными ранее названиями и дополнительным индексом 3, обозначающим то, что эти функции средних значений вводятся не для двух, как ранее, а для трёх функций $\eta(\tau)$, $\chi(\tau)$, $\zeta(\tau)$:

$$Mn_3(\tau) = [(\eta^n(\tau) + \chi^n(\tau) + \zeta^n(\tau)) / 3]^{1/n}, \quad (\lambda = n = 500),$$

$$MC_3(\tau) = \sqrt[3]{[\eta^3(\tau) + \chi^3(\tau) + \zeta^3(\tau)] / 3}, \quad (\lambda = 3),$$

$$MS_3(\tau) = \sqrt{[\eta^2(\tau) + \chi^2(\tau) + \zeta^2(\tau)] / 3}, \quad (\lambda = 2),$$

$$MA_3(\tau) = [\eta(\tau) + \chi(\tau) + \zeta(\tau)] / 3, \quad (\lambda = 1),$$

$$MG_3 = \sqrt[3]{\eta(\tau) \cdot \chi(\tau) \cdot \zeta(\tau)}, \quad (\lambda = 0),$$

$$MH_3(\tau) = 3 / [1/\eta(\tau) + 1/\chi(\tau) + 1/\zeta(\tau)], \quad (\lambda = -1),$$

$$Mk_3(\tau) = [(\eta^k(\tau) + \chi^k(\tau) + \zeta^k(\tau)) / 3]^{1/k}, \quad (\lambda = k = -200)$$

Графики введённых функций показаны на рис. 5. Функции записаны и

пронумерованы в порядке их возрастания: снизу - вверх.

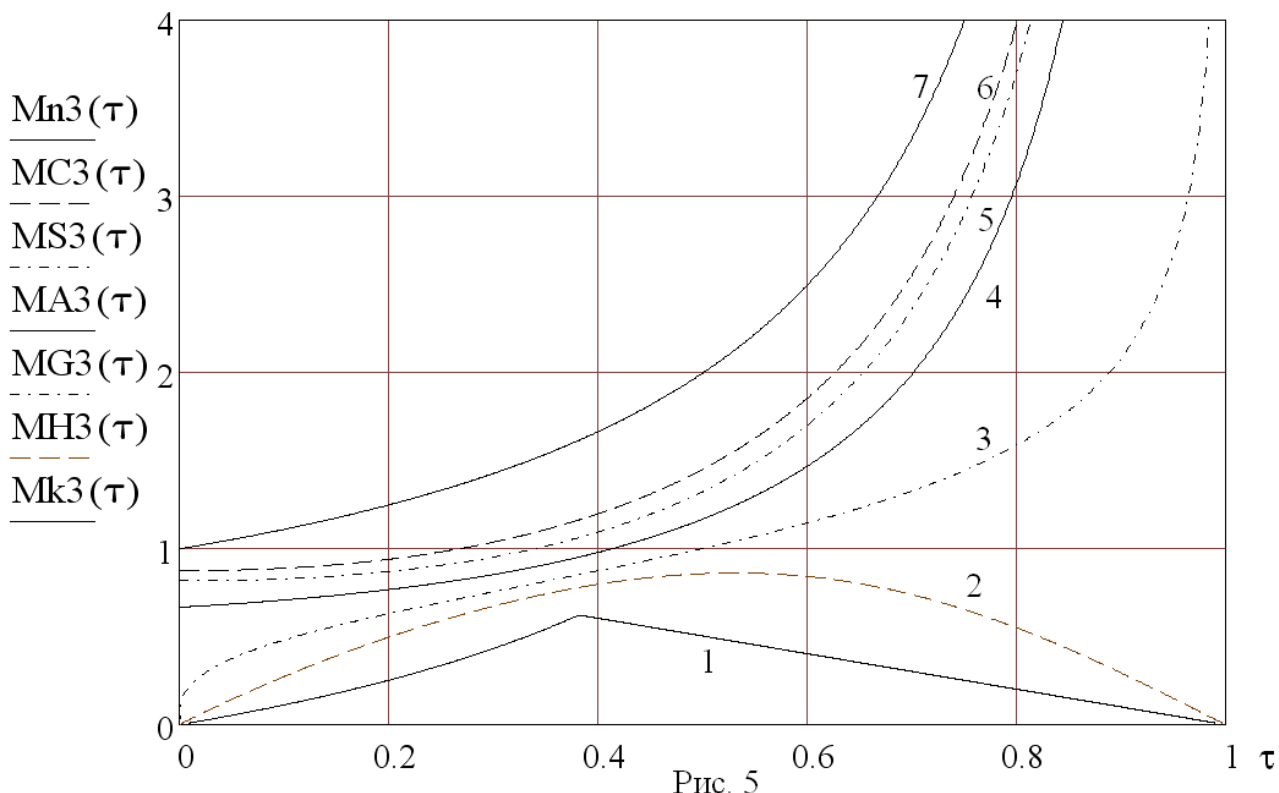


Рис. 5

Графики функций средних значений от трёх функций $\eta(\tau)$, $\chi(\tau)$, $\zeta(\tau)$ не пересекаются. поэтому их разности не могут дать экстремумов, аналогичных экстремумам, показанным на рис. 4. Тем не менее, и для этих функций были найдены интересные соотношения гармонии.

Так, при $\lambda = k \rightarrow -\infty$ график функции $Mk3(\tau)$ имеет характерный излом при $\tau = \phi^2$, причём $Mk3(\phi^2) = \phi$!

$$MG3(\tau) = 1, \quad MG3(\phi^2) = \sqrt[3]{\phi}, \quad MG3(\phi) = \sqrt[3]{\phi}, \quad \text{в итоге получаем, что}$$

$$MG3(\phi^2) \cdot MG3(\phi) = 1.$$

$$MA3(\tau = 1/2) = 7/6 = (\phi^4 + \phi^4) / (\phi^4 + \phi^4 - \phi \cdot \phi), \quad MH3(\tau = 1/2) = 6/7,$$

в итоге $MA3(1/2) \cdot MH3(1/2) = 1.$

Функция $MH3(\tau)$ имеет максимум $MH3(\tau)_{\max} \approx 0,861 \approx \sqrt{(\phi + \phi) / 3}$ при

$$\tau = (1 + \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}) / 2.$$

В заключение укажем, что для циклов Карно было найдено также большое число любопытных интегральных соотношений гармонии.

Так, при учёте того, что КПД тепловой машины, работающей по прямому циклу Карно, имеет максимально возможное значение, интересны следующие интегральные соотношения для КПД прямого и обратного циклов:

$$\int_0^1 \eta(\tau) d\tau = 1/2, \quad \int_0^1 [\zeta(\tau) - \chi(\tau)] d\tau = 1 \quad (8)$$

Отметим также некоторые найденные интегральные соотношения и для функций средних значений, точно выражающиеся через фундаментальные математические константы:

$$\int_0^1 MG(\tau) d\tau = 2/3 \quad (9),$$

$$\int_0^1 MH(\tau) d\tau = 2(2\pi/3^{3/2} - 1) \quad (10).$$

$$\int_0^1 Mh(\tau) d\tau = 2\pi/3^{3/2} - 1 = (1/2) \cdot \int_0^1 MH(\tau) d\tau \quad (11),$$

$$\int_0^1 1/MA(\tau) d\tau = 2\pi/3^{3/2} = \int_0^1 Mh(\tau) d\tau + 1 \quad (12),$$

$$\int_0^1 Ma(\tau) d\tau = 5/(3 \cdot 4) \quad (13),$$

$$\int_0^1 1/MA3(\tau) d\tau = 6 \cdot \arctg(1/\sqrt{7})/\sqrt{7} \quad (14)$$

При этом существенно то, что любое целое число можно точно выразить через константы золотого сечения, так как $1 = \phi \cdot \phi$, $2 = \phi^2 + \phi^1$, $3 = \phi^2 + \phi^2$, $4 = \phi^3 - \phi^3$, $5 = (\phi + \phi)^2$, $7 = \phi^4 + \phi^4$ и т. д. Характерная же комбинация цифр, выявленная для интегральных соотношений функций средних значений, $2\pi/3^{3/2} \approx 1,209 \approx 2 \cdot 3/5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Квасников И.А. Термодинамика и статистическая физика. Теория равновесных систем. Т.1. М., Едиториал УРСС, 2002, С. 238.

2. Попков В.В., Шипицын Е.В. Золотое сечение в цикле Карно. УФН, 2000, т. 170, № 11, С.1253-1255.

3. Шелаев А.Н. Соотношения гармонии в прямом и обратном циклах Карно и экстремумы функций средних значений. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 1, С.115-117.

4. Шелаев А.Н. Соотношения гармонии для внутренних и внешних гравитационных полей однородных тел и экстремумы функций средних значений. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 2, С.115-118.

5. Шелаев А.Н. Соотношения гармонии и экстремумы функций средних значений для перехода сверхпроводник-проводник в магнитном поле. Актуальные проблемы современной науки, 2012, № 4, С.134-138.

6. Шелаев А.Н. Электростатическая модель золотых сечений и функций средних значений, www.trinitas.ru, М., Эл. № 77-6567, публ. 17511, 08.06.2012.

7. Косарев А.В. Условия применимости цикла Карно в качестве мерил эффективности преобразования тепла в работу, www.trinitas.ru, М., Эл. № 77-6367, публ 17653, 11.01.2012.