А.П. Стахов

Математика Гармонии как «золотая» парадигма современной науки

Религиозность ученого состоит в восторженном преклонении перед законами гармонии.

Альберт Эйнштейн

1. Что такое «золотая» парадигма современной науки?

Современное общество находится на грани глобального изменения научной парадигмы. Известный американский философ и психолог **Станислав Гроф** пишет по этому поводу в одной из своих книг (*За пределами мозга*, 2003) следующее:

«Легко предположить, что последний серьезный концептуальный переворот произошел в первые десятилетия нашего века, а следующая научная революция произойдет когда-нибудь в отдаленном будущем. Вовсе нет, главная весть этой книги в том, что западная наука приближается к сдвигу парадигмы невиданных размеров, из-за которого изменятся наши понятия о реальности и человеческой природе, который соединит наконец концептуальным мостом древнюю мудрость и современную науку, примирит восточную духовность с западным прагматизмом».

Как известно, термин «парадигма» происходит от греческого «paradeigma» — пример, образец и означает совокупность явных и неявных (и часто не осознаваемых) предпосылок, определяющих научные исследования и признанных на данном этапе развития науки. Как подчеркивается в Википедии, *“это понятие, в современном смысле слова, введено американским физиком и историком науки* ***Томасом Куном*** *[1922-1996], который выделял различные этапы в развитии научной дисциплины: — допарадигмальный (предшествующий установлению парадигмы); — господства парадигмы (т. н. «нормальная наука»); — кризис нормальной науки; — научной революции, заключающейся в смене парадигмы, переходе от одной к другой. Согласно Т. Куну парадигма — это то, что объединяет членов научного сообщества и, наоборот, научное сообщество состоит из людей, признающих определенную парадигму. Как правило, парадигма фиксируется в учебниках, трудах ученых и на многие годы определяет круг проблем и методов их решения в той или иной области науки, научной школе. К парадигме Т. Кун относит, например, взгляды Аристотеля, ньютоновскую механику и т. п.»*

Обычно изменение научной парадигмы относится к наиболее драматичным событиям в истории науки. Примером является возникновение новой парадигмы физики, которое произошло на рубеже 19-го и 20-го веков. В конце 19-го века, многим ученым физика казалось уже завершенной научной дисциплиной, в которой вряд ли можно было ожидать каких-либо кардинальных изменений. В 1900 году выдающийся английский физик **лорд Кельвин** (1824-1907 заявил:

"В настоящее время в физике не может быть обнаружено ничего нового. Все, что остается в этой области, - это осуществление все более точных измерений».

Пять лет спустя **Альберт Эйнштейн** (1879-1955) опубликовал свой доклад по специальной теории относительности, который бросил вызов своду правил, установленных ньютоновской механикой, которые использовались для описания силы и движения в течение двух сотен лет. Теория Эйнштейна оказалась новой парадигмой физической науки. В этом

случае новая парадигма свела старую парадигму (ньютоновскую механику) к специальному случаю новой парадигмы в том смысле, что, механика Ньютона по-прежнему оставалась хорошей моделью физических явлений при скоростях, значительно меньших скорости света.

Что такое «золотая» парадигма современной науки? Для ответа на этот вопрос обратимся к некоторым высказываниям гения российской науки, исследователя эстетики Античной Греции и эпохи Возрождения **Алексея Лосева** (1893 - 1988):

"С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - Золотого Сечения... Их (древних греков – А.С.) систему космических пропорций нередко в литературе изображают как курьезный результат безудержной и дикой фантазии. В такого рода объяснениях сквозит антинаучная беспомощность тех, кто это заявляет. Однако понять данный историко-эстетический феномен можно только в связи с целостным пониманием истории, то есть, используя диалектико-материалистическое представление о культуре и ища ответа в особенностях античного общественного бытия».

«Закон золотого деления должен быть диалектической необходимостью. Это – та мысль, которую, насколько мне известно, я провожу впервые», - убежденно высказывался Лосев более полувека назад в связи с анализом культурного наследия древних греков.

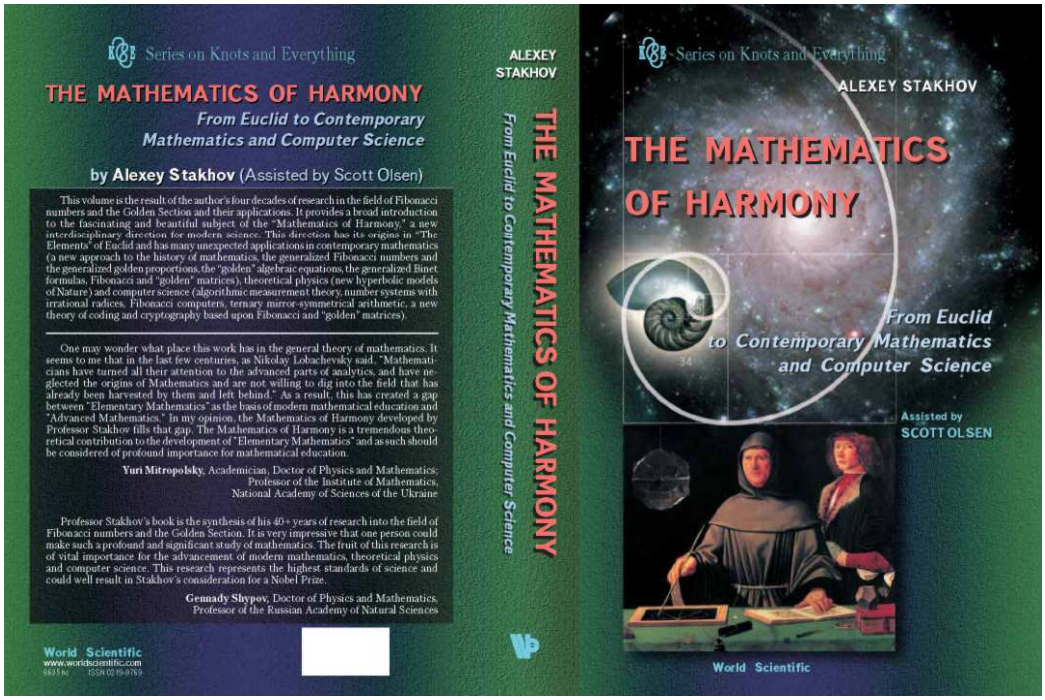
В 17 в. подобную же мысль выразил Иоганн Кеплер в следующих словах:

«В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».

Напомним, что старинная задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении, которая упоминается в этом высказывании, – это и есть «золотое сечение»! В высказывании Кеплера «золотое сечение» поставлено в один ряд с «Теоремой Пифагора» - одной из самых знаменитых теорем геометрии.

С золотым сечением тесно связаны числа Фибоначчи, открытые в 13 веке итальянским математиком Леонардо из Пизы, по прозвищу Фибоначчи. Они составляют числовой ряд, начинающийся с двух единиц, в котором каждое последующее число является суммой двух предыдущих. Отношение соседних чисел ряда Фибоначчи в пределе стремится к золотому сечению.

В этих высказываниях **Алексей Лосев** и **Иоганн Кеплер** в очень отчетливой форме сформулировали «золотую» парадигму античной космологии. «Золотая» парадигма современной науки – это возрождение античной «золотой» парадигмы с учетом новейших научных достижений в этой области. Эти достижения изложены в книге «*The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science* [1].



На обложке этой книги изображена картина «*Лука Пачиоли*», написанная итальянским художником **Якоро де Барбари**, учеником Пачиоли. Возникновение этой картины на обложке книги [1] не является случайным. Оно отражает глубокую связь между книгой Луки Пачиоли «*Divina Proportopne*» и книгой «*The Mathematics of Harmony*» [1]. Любопытно подчеркнуть, что книга Луки Пачиоли «*Divina Proportione*» опубликована в 1509 г., а книга «*The Mathematics of Harmony*» [1] в 2009 г., то есть, временная дистанция между этими книгами составляет ровно 500 лет.

Книга Пачиоли написана под прямым влиянием **Леонардо да Винчи** (1452-1519), который был художником-иллюстратором этой замечательной книги. Книга Пачиоли оказала огромное влияние на современников и была одним из первых прекрасных образцов книгопечатного искусства эпохи Возрождения. Историческое значение книги состоит в том, что эта книга была первой в истории науки книгой, посвященной «золотому сечению».



Книга Пачиоли является одним из первых математических сочинений, в котором сделана попытка заложить прочную научную основу для христианского учения о Боге, создателе Космоса. Учитывая свойства золотого сечения, присущие Самому Богу, Пачиоли называет это

сечение *«божественной пропорцией»*. Книга отражает основную идею *«Эпохи Возрождения»* - возрождение интереса к античному искусству, науке и философии, в частности, к *«Пифагорейской доктрине о числовой гармонии Мироздания»* и *«Космологии Платона»*, основанной на «*Платоновых телах*» и «*Золотом Сечении*», которое, согласно Лосеву, является главной гармонической пропорцией Космоса и, согласно Кеплеру, является «одним из сокровищ геометрии».

А теперь вновь обратимся к книге *"Математика Гармонии*» [1]. Сравнивая эпоху Возрождения с современной эпохой, мы должны констатировать, что общей чертой этих эпох является одна и та же тенденция, которая состоит в возрождении интереса к античной идее о гармонии Вселенной, основанной на *«Платоновых телах»* и *«золотом сечении»*. И это утверждение подтверждается рядом выдающихся научных открытий, сделанных в разных областях современной науки: *квазикристаллы*, основанные на Платоновом икосаэдре (**Шехтман**, кристаллография) [2], *фуллерены*, основанные на Архимедовом усеченном икосаэдре (Нобелевская премия по химии - 1996) [3], *"золотые" геноматрицы* (**Петухов**, генетика) [4], *резонансная теория Солнечной системы*, основаная на золотом сечении (**Бутусов**, астрономия) [5], *новая геометрическая теория филлотаксиса* (**Боднар**, ботаника) [6], *фибоначчиевое деление биологических клеток* (**Розин**, биология) [7], *закон структурной гармонии систем*, основанный на обобщенных золотых сечениях (**Сороко**, философия) [8], *«золотая» гармония сердца* (Цветков, медицина) [9, 10], *волны Эллиотта* и *гармоничный менеджмент*, основанные на числах Фибоначчи (**Элиотт, Иванус**, экономика) [11, 12], *фибоначчиева интерпретация Периодической системы элементов* (**Шило, Дринков**, химия) [14], *преобразования Фибоначчи-Лоренца и «золотая» интерпретация специальной теории относительности* (**Стахов и Арансон**, физика) [15, 16], *«золотая» фибоначчиевая гониометрия и решение 4-й проблемы Гильберта* (**Стахов, Арансон**, гиперболическая геометрия) [15, 16], *системы счисления с иррациональными основаниями и концепция «золотой» информационной технологии* (**Бергман, Стахов**, информатика) [18, 19] и т.д. Этот достаточно представительный перечень современных научных открытий, основанных на *Платоновых телах, золотом сечении и числах Фибоначчи*, свидетельствует о том, что современная наука вошла в эпоху *«Золотой» Научной Революции* [20], и этот вывод подтверждается также достаточно внушительным списком книг по этой теме, опубликованных в 20-м и 21-м веке [21-60].

Таким образом, книга «*The Mathematics of Harmony*» [1] является продолжением и развитием книги Пачиоли «*Divine Proportione"* с учетом современных достижений науки в этой области [2-60]. Обе вышеупомянутые книги преследуют одну и ту же цель и отражают повышение интереса к античной идее о числовой гармонии Мироздания, основанной на «Платоновых телах» и «золотом сечении», что является общей тенденцией в развитии науки в эпохе Возрождения и современной эпохе.

Именно на этом основании мы берем смелость утверждать, что «Математика Гармонии» является «золотой» парадигмой современной науки и касается оснований математики и математического образования, компьютерной науки и всего теоретического естествознания. Суть «золотой» парадигмы состоит в том, что *Платоновы тела, золотое сечение, числа Фибоначчи* и их обобщения – *p-числа Фибоначчи, золотые p-сечения* и *металлические пропорции* должны стать началом любого исследования в области фундаментальных наук. Математика Гармонии существенно расширяет число новых рекуррентных соотношений, «золотых» алгебраических уравнений, новых математических констант, новых гиперболических функций, которые могут быть использованы для моделирования физических, астрономических, химических, биологических, ботанических, экономических и социальных процессов и явлений. Математика Гармония предлагает концепцию *«Золотой» Информационной Технологии* [18, 19] - «золотую» парадигму

компьютерной науки, а также является основой для реформы математического образования, основанного на принципах гармонии и «золотого сечения».

2. Еще раз о «Гипотезе Прокла» и новом взгляде на «Начала» Евклида и происхождение математики

В работе автора [61] развит необычный взгляд на “Начала» Евклида, основанный на *гипотезе Прокла*. Главный вывод из *гипотезы Прокла* состоит в том, что «Элементы» Евклида, величайшее произведение древнегреческой математики, является прямым отражением идеи *гармонии Мироздания*, которая стояла в центре греческой науки и была связана с *Платоновыми телами*, которые символизировали *Основные Элементы Мироздания* (огонь, воздух, земля, вода и эфир). Таким образом, *гипотеза Прокла* позволяет высказать предположение, что хорошо известные в античной науке *Пифагорейская доктрина о числовой гармонии Мироздания* и *космология Платона*, основанная на правильных многогранниках, были отражены в величайшем математическом сочинении греческой науки *Началах* Евклида. И это было главной целью Евклида!

Для построения полной теории *Платоновых тел,* в частности, *додекаэдра,* Евклид ввел в рассмотрение Теорему II.11, в которой описал *задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении,* известную в современной науке как *золотое сечение.*

Из *гипотезы Прокла* логически вытекает, что «Начала» Евклида послужили источником двух математических теорий – *Классической Математики,* которая позаимствовала в «Началах» Евклида аксиоматический подход, теорию чисел и теорию иррациональностей, и *Математики Гармонии,* которая позаимствовала в «Началах» Евклида *золотое сечение* и *Платоновы тела*.

Признание *гипотезы Прокла* приводит к выводу, что *Математика Гармонии* должна занять достойное место в системе современных математических теорий. Математика Гармонии является новым междисциплинарным направлением современной науки, а ее введение в современное математическое образование может стать основой для реформы образования, основанной на идеях *гармонии* и *золотого сечения.*

Обсуждая *гипотезу Прокла,* мы должны указать на ту роль, которую играют *Платоновы тела* в книге Луки Пачиоли «*Divina Proportione*». Книга Пачиоли является одним из первых математических сочинений, в котором христианская доктрина о Боге как творце Вселенной получает научное обоснование. Пачиоли называет золотую пропорцию «божественной» и выделяет ряд свойств золотой пропорции, которые, по его мнению, присущи самому Богу:

«Первое заключается в том, что существует только она одна, и невозможно привести примеры пропорций другого рода или хоть сколько-нибудь отличающихся от нее. Эта единственность, согласно с политическим и философским учениями, есть высочайшее свойство самого Бога. Второе свойство есть свойство святой триединости, а именно, как в божестве одна и та же сущность заключается в трех лицах – отце, сыне и святом духе, так же и одна и та же пропорция этого рода может иметь место только для трех выражений, а для большего и меньшего выражений не существует. Третье свойство заключается в том, что, подробно тому, как Бог не может быть ни определен, ни словом разъяснен, наша пропорция не может быть выражена ни доступным нам числом, ни какой бы то ни было рациональной величиной и остается скрытой и тайной и поэтому математиками названа иррациональной. Четвертое свойство заключается в том, что, подобно тому, как Бог никогда не изменяется и представляет все во всем и все в каждой своей части, и наша пропорция для всякой непрерывной и определенной величины одна и та же, велики или малы эти части,

никаким образом не может быть ни изменена, ни по иному воспринята рассудком. К названным свойствам вполне справедливо можно присоединить пятое свойство, заключающееся в том, что, подобно тому, как Бог вызвал к бытию небесную добродетель, иначе называемую пятой субстанцией, а с ее помощью – четыре других простых тела, именно, четыре элемента – землю, воду, воздух и огонь, а с их помощью вызвал к бытию всякую вещь в природе, так и наша священная пропорция, согласно Платону в его «Тимее», дает формальное бытие самому небу, ибо ему приписывается вид тела, называемый додекаэдром, которое невозможно построить без нашей пропорции».

В заключительной части этого высказывания Пачиоли обращает особое внимание на *Платоновы тела,* четыре из которых (*квадрат, икосаэдр, октаэдр, тетраэдр*) символизирует *«четыре элемента – землю, воду, воздух и огонь»*, а пятое тело – *додекаэдр – «дает формальное бытие самому небу»*, то есть, является главной геометрической фигурой Космоса.

Важно также изложить точку зрения **Иоганна Кеплера** на *гипотезу Прокла*. Эта точка зрения изложена Кеплером уже в его первой книге *Mysterium Cosmographicum,* опубликованной в 1596 г. В этой книге Кеплер попытался найти скрытую гармонию Солнечной системы. Он сопоставил орбиты пяти планет, известных в то время, с *Платоновыми телами*. После проверки многочисленных гипотез, связанных с расположением планет, Кеплер создал геометрическую модель Солнечной системы, называемой *Космической чашей*. Заметим, что наиболее ценное сокровище античной геометрии, *Платоновы тела,* было использовано Кеплером для создания *Космической чаши.*

Craig Smorinsky обсуждает в книге [62] влияние идей Платона и Евклида на Иоганна Кеплера:

«Кеплеровский проект в Mysterium Cosmographicum состоял в том, чтобы дать "истинные и совершенные причины для чисел, величин и периодических движений небесных орбит". Совершенные причины должны основываться на простых принципах математического порядка, который Кеплер нашел в Солнечной системе, используя многочисленные геометрические демонстрации. Общая схема его модели была взята Кеплером из Платоновского Тимея, но математические соотношения для Платоновых тел (пирамида, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) были взяты Кеплером из трудов Евклида и Птоломея. При этом Кеплер следовал Проклу в том, что "главная цель Евклида состояла в том, чтобы построить геометрическую теорию так называемых Платоновых тел". Кеплер полностью был очарован Проклом, которого он часто цитирует и называет «пифагорейцем».

Из этой цитаты мы можем сделать вывод, что Кеплер использовал *Платоновы тела* для создания своей *Космической чаши,* но при этом все математические соотношения для *Платоновых тел* были взяты им из 13-й книги «Начал», то есть, он объединил в своих исследованиях *Космологию Платона* с *Началами Евклида*. При этом он полностью верил в *гипотезу Прокла*, что первичной целью *Начал* было дать завершенную геометрическую теорию *Платоновых тел,* которые и были использованы Кеплером в его геометрической модели Солнечной системы.

Главный вывод из этих рассуждений состоит в том, что *Начала* Евклида, величайшее математическое сочинение древних греков, было написано Евклидом под непосредственным влиянием греческой идеи гармонии, которая была воплощена в *Платоновых телах.*

Таким образом, *гипотеза Прокла* позволяет высказать предположение, что хорошо известные в античной науке *"Пифагорейская доктрина о числовой гармонии Мироздания»* и *«Космология Платона»,* основанная на правильных многогранниках, были воплощены в величайшем математическом сочинении греческой математики, *Началах* Евклида. С этой точки зрения **мы можем рассматривать *Начала* Евклида как первую попытку создать "Математическую теорию Гармонии», что было главной идеей греческой науки.**

Выдающийся немецкий математик **Феликс Клейн** (1849—1925), автор книги об икосаэдре [63], написал о *Платоновых телах* следующее: *«Они проходят через всю историю науки. Пифагорейцы видели в них символы некоего мистического совершенства... Тринадцать книг Евклидовых «Начал» служили лишь введением к их построению... А в наши дни они снова вступают в поле зрения математиков, где удивительнейшим образом связывают различные области, указывая путь к дальнейшим исследованиям».* То есть, Феликс Клейн также придерживался *гипотезы Прокла*. Более того. В своей книге [63] Клейн попытался объединить все основные математические теории на основе икосаэдра, который он считал главным геометрическим объектом математики. К сожалению, эта идея Клейна не получила дальнейшего развития в математике. А жаль!

Гипотеза Прокла является исходной для развития нового подхода к истокам математики, которая изложена автором в ряде публикаций [64-68] (см. Рис.1).

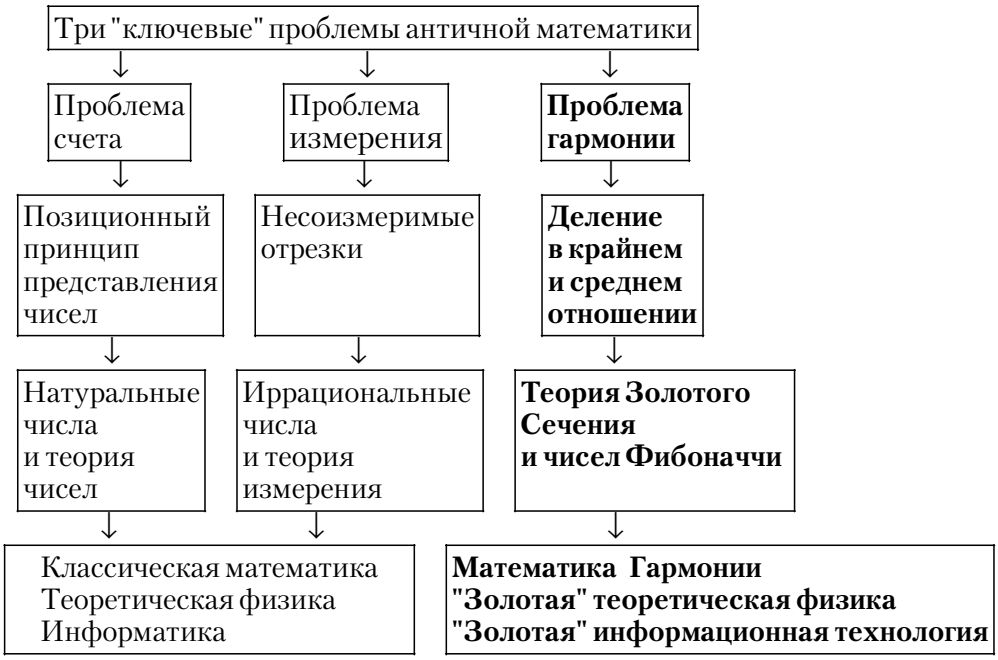


Рисунок 1. Три «ключевые» проблемы математики на этапе ее зарождения

Согласно этому подходу, три «ключевые» проблемы стимулировали развитие математики на этапе ее зарождения. Первая проблема – это *проблема счета*, развитие которой привело к формированию понятия *натурального числа* – одного из фундаментальных понятий математики. «Ключевым» открытием в этой области является *позиционный принцип представления чисел*, воплощенный вавилонянами в своей 60-ричной системе счисления. Вторая проблема – это *проблема измерения*. Эта проблема тесно связана с возникновением геометрии, но «ключевым» открытием в этой области стали *несоизмеримые отрезки*, открытые пифагорейцами при исследовании отношения диагонали к стороне квадрата. Именно это открытие привело к введению *иррациональных чисел* – второго (после натуральных чисел) фундаментального понятия математики. Эти два понятия - *натуральные и иррациональные числа* - и лежат в основе «*Классической Математики*», без которых невозможно представить ее существование.

Наконец, согласно *гипотезе Прокла*, существует еще одна «ключевая» проблема – *проблема гармонии*, которая положена Евклидом в основу его *Начал*. «Ключевым» открытием в этой области является *деление отрезка в крайнем и среднем отношении (золотое сечение)*, введенная Евклидом (Теорема II.11) для того, чтобы дать геометрическую теорию *додекаэдра* –

одного из важнейших *Платоновых тел*. От этой проблемы и берет свое начало *«Математика Гармонии»* как новое междисциплинарное направление и «золотая» парадигма современной науки.

Такой подход приводит к выводу, который может оказаться неожиданным для многих математиков. Оказывается, что **параллельно с *«Классической Математикой»* в науке, начиная с древних греков, развивалась еще одно математическое направление – *«Математика Гармонии»*, которая, как и классическая математика, восходит к *Началам* Евклида, но акцентирует свое внимание не на «аксиоматическом подходе», а на геометрической «задаче о делении в крайнем и среднем отношении» (Теорема II.11) и на теории правильных многогранников, изложенной в 13-й книге *Начал* Евклида.**

Заключение

Таким образом, из проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. **Первый вывод** состоит в том, что одной из главных тенденций в современной науке является ее «глобальная фибоначчизация», что можно назвать и «Золотой» Научной Революцией.
2. **Второй вывод** вытекает из *гипотезы Прокла*. Согласно этой гипотезе, главная цель, которую ставил Евклид при написании своих *Начал*, состояла в том, чтобы дать полную геометрическую теорию *Платоновых тел*, которые отражали 5 *Основных Элементов* (Огонь, Земля, Воздух, Вода и Эфир) и гармонию мироздания в космологии Платона. Это означает, что *Начала* Евклида являются отражением греческой *Доктрины о Числовой Гармонии Мироздания* и могут рассматриваться, как первая попытка создать ***Математическую Теорию Гармонии Мироздания.***
3. **Третий вывод** касается фундаментальной роли, которую играет «золотое сечение» в *Началах* Евклида. Евклид ввел *задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении (золотое сечение)* с целью создать завершенную теорию *Платоновых тел*, в частности, *додекаэдра*.
4. **Четвертый вывод** состоит в том, что *Начала* Евклида является источником двух математических теорий – *Классической Математики* и *Математики Гармонии*. Начиная с Евклида, эти теории развивались параллельно и независимо друг от друга. Многие выдающиеся ученые и мыслители (**Пифагор, Платон, Евклид, Фибоначчи, Леонардо да Винчи, Пачиоли, Кеплер, Кассини, Цейзинг, Бине, Люка, Воробьев, Хоггатт** и многие другие) внесли большой вклад в развитие *Математики Гармонии*.
5. **Пятый вывод** касается Математики Гармонии и ее роли в современной науке. **Она является основой «золотой» парадигмы современной науки, суть которой состоит в том, что *Платоновы тела, золотое сечение, числа Фибоначчи* и их обобщения – *p-числа Фибоначчи, золотые p-сечения* и *металлические пропорции* должны стать началом любого исследования в области фундаментальных наук.** Математика Гармонии существенно расширяет число новых рекуррентных соотношений, «золотых» алгебраических уравнений, новых математических констант, новых гиперболических функций, которые могут быть использованы для моделирования физических, астрономических, химических, биологических, ботанических, экономических и социальных процессов и явлений. Математика Гармония предлагает концепцию *«Золотой» Информационной Технологии* - «золотую» парадигму компьютерной науки. Следует отметить, что многие современные исследователи, включая Эдуарда Сороко [8], Сергея Петухова [4], Иосифа Шевелева [69], Jan Grzedzielski [30], Олега Боднара [6], Виктора Коробко [39], Александра Ивануса [13], Юрия Черепахина [70], Scott Olsen [71]

и многих других, придерживаются такой же точки зрения на роль золотого сечения в развитии современной науки.

6. **Шестой вывод** касается роли Математики Гармонии в современном математическом образовании. Признание *гипотезы Прокла* является не только реабилитацией исторической истины, но и может стать основой для реформы математического образования. Суть этой реформы состоит во введении специального курса **«Математика Гармонии»** в учебные планы всех средних школ, колледжей и университетов. Платоновы тела, золотое сечение, числа Фибоначчи и их обобщения должны стать таким же необходимым элементом математического образования как *теорема Пифагора и аксиомы Евклида*.

Литература

1. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009
2. Гратиа Д. Квазикристаллы. Успехи физических наук, 1988, том 156, вып. 2.
3. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены. Успехи физических наук, 1993, том 163, №2.
4. Петухов С.В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение. Метафизика. Москва, Бином, 2006. — 216-250
5. Бутусов К.П. Золотое сечение в Солнечной системе. – Астрономия и небесная механика. Серия «Проблемы исследования Вселенной», 1978, вып. 7. – 475-500.
6. Боднар О.Я.. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994.
7. Розин Б.Н. Золотое Сечение – морфологический закон живой природы. Сборник «Проблеми гармонії, симетрїії і золотого перетину в природі, науці та мистецтві», Винницкий аграрний унывеситет, 2003, вып. 15.
8. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984.
9. Цветков В.Д. Сердце, золотая пропорция и симметрия. Пущино: ОНТИ РНЦ РАУ, 1997
10. Цветков В.Д. Золотая гармония и сердце, Пущино, ООО «Фотон-век», 2008.
11. Robert Prechter. The Wave Principle of Human Social Behavior and the New Science of Socionomics. Gainseville, Georgia: New Classics Library, 1999.
12. Иванус А.И. Код да Винчи в бизнесе или гармоничный менеджмент по Фибоначчи. — М., Комкнига, 2006.
13. Иванус А.И.. О ключевой роли Золотого Сечения в концепции общества, основанного на знаниях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13854, 05.10.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321036.htm
14. Н.А. Шило, А.В. Динков. Фенотипическая система атомов в развитие идей Д.И.Менделеева // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14630, 09.11.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321073.htm
15. Стахов А.П., Арансон С.Х. Золотая фибоначчиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14816, 04.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm
16. Stakhov, A.P. Aranson, S.Kh. "Golden" Fibonacci Goniometry, Fibonacci-Lorentz Transformations, and Hilbert's Fourth Problem. Congressus Numerantium, 193 (2008), 119-156
17. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
18. Стахов А.П. Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология. Часть 1. Математика Гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14876, 16.09.2008
19. Стахов А.П. Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология. Часть 2. «Золотая» Информационная Технология // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14878, 19.09.2008
20. А.П. Стахов, Математика Гармонии, «Золотая» Информационная Технология и «Золотая» Научная Революция // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15416, 21.07.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0001/005a/00011051.htm
21. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва, Наука, 1978.
22. Hoggat V.E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
23. Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. - Ellis Horwood limited, 1989.
24. Thompson, D'Arcy W. On Growth and Form. New York: McMillan, 1944.

25. Gardner Martin. Mathematics, Magic and Mystery. New York: Publishing House “Dover”, 1952.
26. Coxeter, H. S. M. Introduction to Geometry New York: John Wiley and Sons, 1961.
27. Brousseau Alfred. An Introduction to Fibonacci Discovery. San Jose, California: Fibonacci Association, 1965.
28. Huntley H. E. The Divine Proportion: a Study in Mathematical Beauty. Dover Publications, 1970.
29. Реньи Альфред. Трилогия математики (пер. с венг.). Москва: Мир, 1980
30. Grzedzielski Jan. Energetycno-geometryczny kod Przyrody. Warszawa: Warszwskie centrum studenckiego ruchu naukowego, 1986 (in Polen).
31. Померанцева Н.А. Эстетические основы искусства Древнего Египта. М., Искусство, 1985
32. Garland T.H. Fascinating Fibonacci: Mystery and Magic in Numbers. Dale Seymour, 1987.
33. Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи. Киев: Высшая школа, 1989.
34. Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение. Три взгляда на гармонию природы. Москва: Стойиздат, 1990.
35. Runion G.E. The Golden Section. Dale Seymour, 1990.
36. Fisher Robert, Fibonacci Applications and Strategies for Traders. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.
37. Суббота А.Г. "Золотое сечение" ("Sectio Aurea") в медицине. Санкт-Петербург, Изд-во "Стройлеспечать", 1996.
38. Dunlap R.A. The Golden Ratio and Fibonacci Numbers. World Scientific, 1997.
39. Коробко В.И. Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. Москва: Изд-во Ассоциации строительных вузов стран СНГ, 1998.
40. Herz-Fischler, Roger. A Mathematical History of the Golden Number. New York: Dover Publications, Inc., 1998.
41. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
42. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999
43. Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2001.
44. Koshy, T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. New York: Wiley, 2001.
45. Livio, M. The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. New York: Broadway Books, 2002.
46. Боднар О.Я. Золотий переріз і неевклідова геометрія в науці та мистецтві. Львів: Українскі Технології, 2005
47. Петруненко В.В. Золотое сечение квантовых состояний и его астрономические и физические проявления. Минск: Право и жкономика, 2005.
48. Сороко Э.М. Золотое сечение, процессы самоорганизации и эволюции систем. Введение в общую теорию гармонии систем. Москва: URSS, 2006
49. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
50. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. Москва, Знание, серия «Математика и кибернетика», вып.6, 1979 г.
51. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва, Радио и связь, 1984 г.
52. Стахов А.П., Лихтциндер Б.Я., Орлович Ю.П., Сторожук Ю.А. Кодирование данных в информационно-регистрирующих системах. Киев, Техника, 1985 г.
53. Стахов А.П. (редактор). Помехоустойчивые коды: Компьютер Фибоначчи, Москва, Знание, серия «Радиоэлектроника и связь», вып.6, 1989 г.
54. Stakhov A.P. Computer Arithmetic based on Fibonacci Numbers and Golden Section: New Information and Arithmetic Computer Foundations». Toronto, SKILLSET-Training, 1997.
55. Stakhov A.P., Massingua V., Sluchenkova A.A. Introduction into Fibonacci Coding and Cryptography». Харьков, Изд-во «Основа» Харьковского университета, 1999 г.
56. Stakhov A.P. (editor). The Golden Section: Theory and Applications. Mozambique, University Eduardo Mondlane, Boletin de Informatica, No 9/10, January 1999.
57. Stakhov A.P., Sluchenkova A.A. Museum of Harmony and Golden Section: mathematical connections in Nature, Science and Art. Vinnitsa, ITI, 2003.
58. Stakhov A.P. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions: a New Mathematics for Living Nature. Vinnitsa, ITI, 2003.
59. Стахов А.П. Новая математика для живой природы: Гиперболические функции Фибоначчи и Люка». Винница, Изд-во «ITI», 2003.
60. Стахов А.П. Сакральная Геометрия и Математика Гармонии. Винница, ITI, 2003.
61. Стахов А.П. Гипотеза Прокла: новый взгляд на "Начала" Евклида и Математика Гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15195, 28.03.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322026.htm
62. Craig Smorinsky. History of Mathematics. A Supplement. Springer, 2008
63. Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнен6ий пятой степени. Пер. с нем. М.: Наука, 1989.

64. Stakhov A.P. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998.
65. Stakhov A. Fundamentals of a new kind of Mathematics based on the Golden Section. Chaos, Solitons & Fractals, 27 (5), 2005.
66. А.П. Стахов, Роль «Золотого Сечения» и «Математики Гармонии» в преодолении «стратегических ошибок» в развитии математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14688, 12.01.2008
67. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony: Clarifying the Origins and Development of Mathematics. Congressus Numerantium, 193, 2008.
68. Stakhov A.P. Dirac's Principle of Mathematical Beauty, Mathematics of Harmony and "Golden" Scientific Revolution. Visual Mathematics, Volume 11, No. 1, 2009
69. Шевелев И. Метаязык живой природы. М., Воскресенье, 2000
70. Юрий Черепахин, Краткие заметки о роли Математики Гармонии в переходе на новую научную парадигму // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15551, 20.09.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321163.htm
71. Scott Olsen. The Golden Section. Nature's Greatest Secter. New York, Wolker&Company, 2006