А.П. Стахов, С.Х. Арансон, И.В. Хантон

ЗОЛОТАЯ ФИБОНАЧЧИЕВА ГОНИОМЕТРИЯ, РЕЗОНАНСНАЯ СТРУКТУРА ГЕНЕТИЧЕСКОГО КОДА ДНК, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИБОНАЧЧИ-ЛОРЕНЦА И ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Часть I. «Золотая» фибоначчиева гониометрия и «золотые» матрицы Фибоначчи

Оглавление

Аннотация

Часть I. «Золотая» фибоначчиева гониометрия и «золотые» матрицы Фибоначчи

1. **«Золотая» фибоначчиевая гониометрия**
   - 1.1. Числа Фибоначчи и формула Бине
   - 1.2. Симметричные гиперболические функции Фибоначчи
   - 1.3. λ-числа Фибоначчи и формула Газале
   - 1.4. Гиперболические λ-функции Фибоначчи
2. **«Золотые» матрицы Фибоначчи**
   - 2.1. *Q*-матрицы
   - 2.2. Золотые матрицы, составленные из симметричных гиперболических функций Фибоначчи
   - 2.3. G_λ-матрицы
   - 2.4. Золотые матрицы, составленные из гиперболических λ-функций Фибоначчи

Часть II. Резонансная структура генетического кода ДНК

3. **Закон Jean-Claude Perez**
   - 3.1. Предварительные сведения о генетическом коде ДНК
   - 3.2. Фибоначчиевые резонансы генетического кода (SUPRA-код ДНК). Закон Jean-Claude Perez
4. **Три модификации закона Jean-Claude Perez, основанные на числах Фибоначчи и золотом сечении**
   - 4.1. Первая модификация
   - 4.2. Вторая модификация
   - 4.3. Третья модификация
5. **Гармонический анализ генетических кодов на основе λ-чисел Фибоначчи и золотых λ- пропорций**
   - 5.1. Асимптотические свойства λ-чисел Фибоначчи
   - 5.2. Резонансные λ-фибоначчиевые таблицы
   - 5.3. λ-универсальные генетические коды $\overline{K_\lambda}$ при λ>1
   - 5.4. Правило нахождения показателя гармонии λ для реальных генетических кодов при $\lambda \geq 1$
   - 5.5. Вычисление показателя гармонии λ для β-цепи молекулы инсулина

Часть III. Преобразования Фибоначчи-Лоренца и их связь с золотым универсальным генетическим кодом

6. **Преобразования Лоренца**

7. **Двумерные преобразования Фибоначчи-Лоренца**
7.1. Собственные двумерные преобразования Фибоначчи-Лоренца
7.2. Несобственные двумерные преобразования Фибоначчи-Лоренца
8. Взаимосвязь между резонансной структурой генетического кода при λ=1 и преобразованиями Фибоначчи-Лоренца
8.1. Отображение фибоначчиевой световой молекулы в универсальный генетический код
8.2. Отображение универсального генетического кода в фибоначчиевую световую молекулу
8.3. Классические преобразования Лоренца не являются носителем универсального генетического кода

Часть IV. Другие приложения чисел Фибоначчи, золотого сечения и золотой фибоначчиевой гониометрии

9. Геометрия Боднара
10. «Золотые» геноматрицы Петухова
11. Числа Фибоначчи в Периодической системе Менделеева

Заключение

Литература

Аннотация

Статья посвящена взаимосвязи между фибоначчиевой гониометрией, резонансной структурой генетического кода ДНК и преобразованиями Фибоначчи-Лоренца. Основой этой взаимосвязи является «золотая пропорция» (или «золотое сечение») - древнейшая научная парадигма о гармонии и красоте.

Рассматриваются также другие приложения чисел Фибоначчи, золотой пропорции и золотой фибоначчиевой гониометрии, в частности, новая геометрическая теория филлотаксиса Боднара, «золотые» геноматрицы Петухова и новая интерпретация периодической системы Менделеева.

Статья представлена в 4-х частях. Часть 1 посвящена изложению основ «золотой» фибоначчиевой геометрии и «золотых» матриц.

1. «Золотая» фибоначчиевая гониометрия[1]

1.1. *Числа Фибоначчи и формула Бине*

Рассмотрим замечательную числовую последовательность –*числа Фибоначчи* F_n= {0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...}, задаваемые рекуррентной формулой [1, 2]:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (1.1)$$

при начальных условиях

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1. \qquad (1.2)$$

В 19-м веке для любых $n \in Z$ (Z-множество всех целых чисел) французский математик Бине вывел важную формулу, задающую связь «*золотой пропорции*» (или «*золотого сечения*») $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ с числами Фибоначчи

[1] *Гониометрией* называется часть геометрии, устанавливающая соотношения между тригонометрическими функциями. В статье вместо тригонометрических функций рассматриваются *симметричные гиперболические функции Фибоначчи* и *гиперболические* $\lambda-$*функции Фибоначчи* (*золотая фибоначчиевая гониометрия*).

$$F_n = \frac{\tau^n - (-1)^n \tau^{-n}}{\sqrt{5}}, \tag{1.3}$$

откуда

$$(F_n)^2 - F_{n-1} F_{n+1} = (-1)^{n+1} . \tag{1.4}$$

«*Золотая пропорция*» (или «*золотое сечение*») $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ является положительным корнем квадратного уравнения:

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{1.5}$$

которое называется «*уравнением золотой пропорции*» [1, 2].

Дальнейшее развитие эта теория получила в работах А.П. Стахова и его школы [3]-[7], что привело к созданию нового направления в современной геометрии - «*золотой гониометрии*».

1.2. *Симметричные гиперболические функции Фибоначчи*

В виде (1.3) формулы Бине напоминают классические гиперболические функции *sh*(*x*), *ch*(*x*), получаемые, соответственно, из выражения

$$\overline{\varphi}_k(x) = \frac{e^x - (-1)^k e^{-x}}{2}, \tag{1.6}$$

где k=0 и k=1[2], $x \in R$ (R - множество всех вещественных чисел), $e = \underbrace{\lim}_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ – *число Непера*,

$$[\overline{\varphi}_k(x)]^2 - [\overline{\varphi}_{k+1}(x)]^2 = (-1)^{k+1} . \tag{1.7}$$

Именно на внешнее сходство формул (1.3), (1.4) с формулами (1.6), (1.7) обратили внимание А.П.Стахов и И.С.Ткаченко, которые в статье [3] ввели новый класс функций, названных *гиперболическими функциями Фибоначчи* и *Люка*, являющиеся непрерывными аналогами формул Бине (1.3), (1.4). Дальнейшее развитие эти идеи получили в работах А.П. Стахова и Б.Н. Розина [4, 5]. В этих работах введены так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка.*

Далее мы остановимся на рассмотрении симметричных *гиперболических функций Фибоначчи* *sFs*(*x*), *cFs*(*x*), построенных на основе *золотой пропорции* $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и *гиперболических λ-функций Фибоначчи* $sF_\lambda(x)$, $cF_\lambda(x)$, введенных А.П. Стаховым в работе [6]. Последние функции построены на основе *золотых λ-пропорций*, задаваемых выражением [6]:

$$\tau_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}, \tag{1.8}$$

где $\lambda \in R^+$ (R^+ - множество положительных вещественных чисел). При λ=1 имеем $\tau_\lambda = \tau$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi_k(x) = \frac{\tau^x - (-1)^k \tau^{-x}}{\sqrt{5}}, \tag{1.9}$$

---

[2] Здесь и в дальнейшем в выражении $(-1)^k$ вместо значений k=0;1 часто будем употреблять *целые числа* k, и тогда при чётных k получаем $(-1)^k$ =1, а при нечётных k, соответственно , получаем $(-1)^k$ = -1, то есть эффект будет тот же самый, если брать k=0;1.

где k=0;1, $x \in R$. При k=0 функция $\varphi_k(x)$ называется *симметричным гиперболическим синусом Фибоначчи* $sFs(x)$, при k=1 - *симметричным гиперболическим косинусом Фибоначчи* $cFs(x)$ [4,5].

Но тогда при любом $n \in Z$ выполняются соотношения

$$\varphi_k(n) = F_n . \tag{1.10}$$

Отсюда при любом чётном $n \in Z$ получаем: $sFs(n) = F_n$ а при нечетном $n \in Z$ мы имеем: $cFs(n) = F_n$. Эти соотношения показывают, что симметричные гиперболические функции Фибоначчи $sFs(x)$, $cFs(x)$ отличаются от классических гиперболических функций $sh(x)$, $ch(x)$ тем, что при целочисленных значениях аргумента x они принимают целочисленные значения, являющиеся числами Фибоначчи F_n.

Функции (1.9) обладают следующими важными свойствами:

$$\begin{aligned} &\varphi_k(x) = \varphi_{k+1}(x-1) + \varphi_k(x-2) \\ &\left[\varphi_k(x)\right]^2 - \varphi_{k+1}(x-1) \times \varphi_{k+1}(x+1) = (-1)^{k+1} \\ &\varphi_k(-x) = (-1)^{k+1} \varphi_k(x). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Отсюда для симметричных гиперболических функций Фибоначчи получаем соотношения:

$$\begin{aligned} &sFs(x) = cFs(x-1) + sFs(x-2) \\ &\left[sFs(x)\right]^2 - cFs(x-1)\,cFs(x+1) = -1 \\ &sFs(-x) = -sFs(x) \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} &cFs(x) = sFs(x-1) + cFs(x-2) \\ &\left[cFs(x)\right]^2 - sFs(x-1)\,sFs(x+1) = 1 \\ &cFs(-x) = cFs(x) \end{aligned} \tag{1.13}$$

1.3. λ-*числа Фибоначчи и формула Газале*

В 1999 г. египетский исследователь Мидхат Газале ввел следующее обобщение чисел Фибоначчи [8]. Зададимся действительным числом $\lambda > 0$ и рассмотрим последовательности:

$$F_\lambda(n) = \left\{0, 1, \lambda, \lambda^2 + 1, \lambda^3 + 2\lambda, \lambda^4 + 3\lambda^2 + 1, \ldots\right\}, \tag{1.14}$$

задаваемые рекуррентным соотношением

$$F_\lambda(n) = \lambda F_\lambda(n-1) + F_\lambda(n-2) \tag{1.15}$$

при начальных условиях:

$$F_\lambda(0) = 0, \quad F_\lambda(1) = 1. \tag{1.16}$$

Заметим, что рекуррентное соотношение (1.15) при начальных условиях (1.16) порождает бесконечное множество новых числовых последовательностей, так как каждому λ соответствует своя числовая последовательность типа (1.14), члены которой $F_\lambda(n)$ называются λ-*числами Фибоначчи* [6].

Ясно, что при $\lambda = 1$ λ-числа Фибоначчи сводятся к классическим числам Фибоначчи. При $\lambda = 2$ λ-числа Фибоначчи совпадают с числовым рядом, известным в математике под названием *ряда Пелли*: 0, 1, 2, 5, 12, 29, ... В [8] для любых $n \in Z$ и положительных $\lambda \in R^+$ египетский исследователь Мидхат Газале обобщил формулу Бине (1.3) и выразил λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ через *золотую* λ-*пропорцию* (1.8). Эта формула, названная в [6] *формулой Газале*, имеет вид

$$F_\lambda(n)=\frac{(\tau_\lambda)^n-(-1)^n(\tau_\lambda)^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}, \tag{1.17}$$

откуда вытекают следующие свойства λ-чисел Фибоначчи $F_\lambda(n)$:

$$\begin{aligned}&[F_\lambda(n)]^2-F_\lambda(n-1)F_\lambda(n+1)=(-1)^{n+1}\\&F_\lambda(-n)=(-1)^{n+1}F_\lambda(n).\end{aligned} \tag{1.18}$$

Золотая λ-пропорция (8) является положительным корнем квадратного уравнения

$$x^2-\lambda x-1=0, \tag{1.19}$$

которое называется *уравнением золотой λ-пропорции*.

Золотая λ-пропорция (1.14) обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}&\tau_\lambda-(\tau_\lambda)^{-1}=\lambda\\&\tau_\lambda=\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{...}}}\\&\tau_\lambda=\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+...}}\end{aligned} \tag{1.20}$$

Соотношения (1.18), (1.20) для τ_λ при $\lambda\neq 1$ являются обобщениями аналогичных свойств для *классической золотой пропорции* τ. Они подчеркивают фундаментальный характер как классической «золотой пропорции» τ, так и «золотой λ-пропорции» τ_λ.

В таблице 1 для некоторых целых n и λ приведены значения λ-чисел Фибоначчи $F_\lambda(n)$ и золотой λ-пропорции τ_λ.

Таблица 1. λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$

λ \ n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\tau_\lambda=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$
1	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.61803$
2	-12	5	-2	1	0	1	2	5	12	$1+\sqrt{2}\approx 2.41421$
3	-33	10	-3	1	0	1	3	10	33	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}\approx 3.30278$
4	-72	17	-4	1	0	1	4	17	72	$2+\sqrt{5}\approx 4.23607$

1.4. *Гиперболические λ-функции Фибоначчи*

Основываясь на «формуле Газале» (1.17), в [6] введены так называемые *гиперболические λ-функции Фибоначчи,* совпадающие при $\lambda=1$ с симметричными гиперболическими функциями Фибоначчи, введенными в работе [4]. Введем следующее обозначение:

$$\varphi_\lambda^k(x)=\frac{(\tau_\lambda)^x-(-1)^k(\tau_\lambda)^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}, \tag{1.21}$$

где k=0;1, $\lambda\in R^+$, $x\in R$, τ_λ -золотая λ-пропорция, задаваемая формулой (1.8).

При k=0 функция $\varphi_\lambda^k(x)$ называется гиперболическим λ-синусом Фибоначчи $sF_\lambda(x)$, а при k=1 - гиперболическим λ-косинусом Фибоначчи $cF_\lambda(x)$ [6]. Но тогда при любом $n\in$ Z выполняются соотношения:

$$\varphi_\lambda^n(x)=F_\lambda(n), \tag{1.22}$$

откуда при любом чётном $n\in$ Z получаем $sF_\lambda(x)=F_\lambda(n)$, а при любом чётном $n\in$ Z получаем $cF_\lambda(x)=F_\lambda(n)$. Отметим также, что если в соотношении (1.8) положить $\tau_\lambda=e$, то можно вычислить значение $\lambda=\lambda(e)=2sh(1)$, соответствующее случаю $\tau_\lambda=e$. Но тогда из (1.6) и (1.21) при k=0;1 получаем соотношение

$$\bar{\varphi}_k(x)=\left[ch(1)\right]\varphi^k_{\lambda(e)}(x) \tag{1.23}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} sh(x)&=\left[ch(1)\right]sF_{\lambda(e)}(x)\\ ch(x)&=\left[ch(1)\right]cF_{\lambda(e)}(x). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Функции (1.21) обладают следующими важными свойствами:

$$\begin{aligned} &\varphi^k_\lambda(x)=\lambda\varphi^{k+1}_\lambda(x-1)+\varphi^k_\lambda(x-2)\\ &\left[\varphi^k_\lambda(x)\right]^2-\varphi^{k+1}_\lambda(x-1)\varphi^{k+1}_\lambda(x+1)=(-1)^{k+1}\\ &\varphi^k_\lambda(-x)=(-1)^{k+1}\varphi^k_\lambda(x). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Отсюда для гиперболических λ-функций Фибоначчи получаем соотношения:

$$\begin{aligned} &sF_\lambda(x)=\lambda cF_\lambda(x-1)+sF_\lambda(x-2)\\ &\left[sF_\lambda(x)\right]^2-cF_\lambda(x-1)cF_\lambda(x+1)=-1\\ &sF_\lambda(-x)=-sF_\lambda(x)\\ &cF_\lambda(x)=\lambda sF_\lambda(x-1)+cF_\lambda(x-2)\\ &\left[cF_\lambda(x)\right]^2-sF_\lambda(x-1)sF_\lambda(x+1)=1\\ &cF_\lambda(-x)=-cF_\lambda(x). \end{aligned} \tag{1.26}$$

2. *«Золотые» матрицы Фибоначчи*

2.1. *Q-матрицы*

Известный американский математик Вернер Хоггат развил теорию так называемой *Q*-матрицы [2], которая представляет собой квадратную матрицу следующего вида:

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{1.27}$$

Если *Q*-матрицу (1.27) возвести в *n*-ю степень, то возникает циклическая группа с образующей (1.27), при этом элементами матрицы $Q^n=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n$ являются числа Фибоначчи и эта матрица имеет вид

$$Q^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}. \tag{1.28}$$

Детерминант матрицы (1.28) совпадает со знаменитый «формулой Кассини» (см также соотношение (1.4)) :

$$\det Q^n=F_{n+1}F_{n-1}-\left(F_n\right)^2=(-1)^n. \tag{1.29}$$

Покажем, что матрица $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ (в [2] матрица *Q* названа *генерирующей матрицей для ряда Фибоначчи*) непосредственно связана с уравнением золотой

пропорции $x^2 - x - 1 = 0$, положительным корнем которого является число $x_1 = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ («золотая пропорция»), а отрицательным корнем - число $x_2 = -\tau^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Для этого выпишем характеристическое уравнение матрицы *Q*, которое имеет следующий вид:

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 - x - 1 = 0 \qquad (1.30)$$

Это уравнение, как мы видим, является уравнением золотой пропорции, а числа $x_1 = \tau$, $x_2 = -\tau^{-1}$ являются *собственными значениями* симметрической матрицы *Q*.

Но тогда матрица *Q* подобна диагональной матрице $X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, то есть $Q = TXT^{-1}$, где T называется *сопрягающей матрицей*. В данном случае сопрягающая матрица T и обратная к ней матрица T^{-1} имеют вид: [3]

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} & \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} & \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} \end{pmatrix}. \qquad (1.31)$$

Отсюда матрицу Q^n можно представить в виде:

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = TX^nT^{-1} = T\begin{pmatrix} \tau^n & 0 \\ 0 & (-\tau)^{-n} \end{pmatrix}T^{-1}. \qquad (1.32)$$

Из (1.32) следует, в частности, формула Бине (1.3).

2.2. *Золотые матрицы, составленные из симметричных гиперболических функций Фибоначчи*

В [7] по аналогии с матрицами Q^n вида (1.28) введено понятие "*золотых» матриц*. Рассмотрим следующую символическую матрицу

$$Q_k(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{k+1}(x+1) & \varphi_k(x) \\ \varphi_k(x) & \varphi_{k+1}(x-1) \end{pmatrix}, \qquad (1.33)$$

где функции $\varphi_k(x)$ находятся по формуле (1.9) либо при k=0 (тот же результат получается при любом чётном k), либо при k=1 (тот же результат получается при любом нечётном k), $x \in R$.

Отсюда получаем следующие свойства:

$$Q_n(n) = Q^n \ (n \in Z)$$

$$\det Q_k(x) = \varphi_{k+1}(x+1)\varphi_{k+1}(x-1) - \left[\varphi_k(x)\right]^2 = (-1)^k; k = 0;1, x \in R. \qquad (1.34)$$

Но тогда, расписывая при k =0 и k = 1 соотношения (1.33) и (1.34), получаем следующие две матрицы, которые называются *золотыми матрицами, составленными из симметричных гиперболических функций Фибоначчи sFs, cFs*:

---

[3] Алгоритм получения сопрягающих матриц T (и их обратных матриц T^{-1}) для любых симметрических матриц *Q* (не обязательно совпадающих с (1.27), описан в [9]. Там же (глава 6) введено понятие функций от матриц.

$$Q_0(x)=\begin{pmatrix} cFs(x+1) & sFs(x) \\ sFs(x) & cFs(x-1) \end{pmatrix}$$
$$Q_1(x)=\begin{pmatrix} sFs(x+1) & cFs(x) \\ cFs(x) & sFs(x-1) \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

причем

$$\det Q_0(x) = 1 \text{ и } \det Q_1(x) = -1. \quad (1.36)$$

Заметим, что в отличие от матрицы (1.28), матрицы (1.35) являются функциями от непрерывной переменной *x*.

2.3. G_λ - *матрицы*

В [6] предложена квадратная матрица G_λ следующего вида:

$$G_\lambda=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

где $\lambda \in R^+$.

Если G_λ - матрицу (она названа *генерирующей матрицей для* λ *-чисел Фибоначчи* [6]) возвести в *n*-ю степень, то возникает циклическая группа с образующей (1.37); при этом элементами матрицы

$$\left(G_\lambda\right)^n=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \quad (1.38)$$

являются λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$, задаваемые формулами (1.15), (1.16), и эта матрица имеет вид

$$\left(G_\lambda\right)^n=\begin{pmatrix} F_\lambda(n+1) & F_\lambda(n) \\ F_\lambda(n) & F_\lambda(n-1) \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

причем

$$\det\left(G_\lambda\right)^n = F_\lambda(n+1)F_\lambda(n-1)-[F_\lambda(n)]^2=(-1)^n. \quad (1.40)$$

Покажем, что матрица (1.37) связана с уравнением (1.19), положительным корнем которой является число $x_1(\lambda)=\tau_\lambda=\dfrac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$ (золотая λ-пропорция), а отрицательным корнем – число $x_2(\lambda)=-(\tau_\lambda)^{-1}=\dfrac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$.

Характеристическое уравнение матрицы G_λ имеет вид

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}=x^2-\lambda x-1=0. \quad (1.41)$$

Заметим, что уравнение (1.41) является уравнением золотой λ -пропорции, при этом числа $x_1(\lambda)=\tau_\lambda, x_2(\lambda)=-(\tau_\lambda)^{-1}$ являются *собственными значениями* симметрической матрицы G_λ.

Матрица G_λ может быть представлена в виде:

$$G_\lambda = T_\lambda X_\lambda T_\lambda^{-1},$$

где

$$X_\lambda=\begin{pmatrix} x_1(\lambda) & 0 \\ 0 & x_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

а T_λ и T_λ^{-1}- соответственно сопрягающая и инверсная к ней матрицы, задаваемые выражением:

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} \dfrac{\tau_\lambda}{\sqrt{1+(\tau_\lambda)^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{1+(\tau_\lambda)^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+(\tau_\lambda)^2}} & \dfrac{\tau_\lambda}{\sqrt{1+(\tau_\lambda)^2}} \end{pmatrix}, \quad T_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\tau_\lambda}{\sqrt{1+(\tau_\lambda)^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+(\tau_\lambda)^2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+(\tau_\lambda)^2}} & \dfrac{\tau_\lambda}{\sqrt{1+(\tau_\lambda)^2}} \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

Отсюда получаем

$$(G_\lambda)^n = \begin{pmatrix} F_\lambda(n+1) & F_\lambda(n) \\ F_\lambda(n) & F_\lambda(n-1) \end{pmatrix} = T_\lambda (X_\lambda)^n T_\lambda^{-1} = T_\lambda \begin{pmatrix} (\tau_\lambda)^n & 0 \\ 0 & (-\tau_\lambda)^{-n} \end{pmatrix}^n T_\lambda^{-1} \tag{1.43}$$

Из (1.43) следует, в частности, формула Газале (1.17).

2.4. *Золотые матрицы, составленные из гиперболических λ-функций Фибоначчи*

В [7] по аналогии с матрицами $(G_\lambda)^n$ вида (1.38) введено понятие золотых λ-матриц. Для этого предварительно рассмотрим следующую символическую λ-матрицу

$$G_\lambda^k(x) = \begin{pmatrix} \varphi_\lambda^{k+1}(x+1) & \varphi_\lambda^k(x) \\ \varphi_\lambda^k(x) & \varphi_\lambda^{k+1}(x-1) \end{pmatrix}, \tag{1.44}$$

где функции $\varphi_\lambda^k(x)$ находятся по формуле (1.21).

Отсюда получаем следующие свойства:

$$\begin{aligned} &G_\lambda^n(n) = (G_\lambda)^n \\ &\det G_\lambda^k(x) = \varphi_\lambda^{k+1}(x+1)\varphi_\lambda^{k+1}(x-1) - \left[\varphi_\lambda^k(x)\right]^2 = (-1)^k, \end{aligned} \tag{1.45}$$

где k=0;1, $\lambda \in R^+$, $x \in R$.

Но тогда, расписывая при k=0 и k=1 соотношения (1.44) и (1.45), получаем следующие две матрицы, которые называются *золотыми λ-матрицами, составленными из гиперболических λ-функций* $sF_\lambda(x)$ и $cF_\lambda(x)$:

$$\begin{aligned} G_\lambda^0(x) &= \begin{pmatrix} cF_\lambda(x+1) & sF_\lambda(x) \\ sF_\lambda(x) & cF_\lambda(x-1) \end{pmatrix} \\ G_\lambda^1(x) &= \begin{pmatrix} sF_\lambda(x+1) & cF_\lambda(x) \\ cF_\lambda(x) & sF_\lambda(x-1) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.46}$$

причем

$$\det G_\lambda^0(x) = 1, \quad \det G_\lambda^1(x) = -1. \tag{1.47}$$

Заметим, что в отличие от матрицы (1.39), матрицы (1.46) являются функциями от непрерывной переменной x.

Обсуждение полученных результатов.

1. Как известно, осознание того факта, что геометрия окружающей нас Природы является «гиперблической», является одним из важнейших научных достижений современного теоретического естествознания. Первый шаг в развитии «гиперболических представлений» был сделан итальянским математиком **Vincent Riccati** (1707-1775), который в 18-м веке ввел *гиперболические функции.* Однако, главный шаг в этом направлении был сделан российским математиком **Николаем Лобачевским** (1792–1856), который в 1827 г. обнародовал созданную им «воображаемую геометрию», основанную на гиперболических функциях. Важнейшим шагом в эволюции «гиперболических представлений» является гиперболическая интерпретация специальной теории относительности Эйнштейна, представленная в 1908 г. немецким математиком **Германом Минковским** (1864-1909).

2. Одним из первых ученых, который распространил «гиперболические идеи» на биологию, был украинско-российский ученый-энциклопедист **В.И. Вернадский** (1863-1945). Новая геометрическая теория филлотаксиса, основанная на «золотых» гиперболических функциях - **«геометрия Боднара»** [19] и **гиперболические функции Фибоначчи и Люка (Стахов, Ткаченко, Розин [3-6])** являются прорывом в развитии «гиперболических представлений». **Именно в работах Боднара [19], Стахова, Ткаченко и Розина [3-5], впервые удалось объединить «золотую пропорцию», числа Фибоначчи и Люка с гиперболической геометрией.** Это математическое открытие дало возможность по-новому взглянуть на «золотую пропорцию» - древнейшую научную парадигму. Повидимому, «золотая пропорция» выражает «скрытую гармонию» Природы, которая сводится к «золотой гиперболической гониометрии», объективно проявляющей себя в сосновых шишках, кактусах, ананасах, подсолнечниках и других великолепных созданиях живой Природы.
3. **Новая теория гиперболических функций [6], основанная на «металлических пропорциях» и «формулах Газале», является дальнейшим шагом в развитии «золотых гиперболических представлений».** Можно ожидать, что именно *гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка* [6] являются основой для нового этапа в развитии теоретического естествознания, суть которого состоит в использовании новых гиперболических функций в качестве моделей «гиперболических миров» Природы. Начало этого этапа в современной науке дали блестящие работы украинского исследователя Олега Боднара [19].

Настоящая статья ставит своей целью конкретизировать эти общие положения. Ее главная цель состоит в том, чтобы показать, что *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка* и *гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка* могут быть использованы для теоретического объяснения *«фибоначчиевых резонансов генетического кода»* и для переосмысливания знаменитых *«преобразований Лоренца»* - центрального понятия *специальной теории относительности Эйнштейна*.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воробьев Н.Н**. Числа Фибоначчи. Москва, Наука, **1978.**
2. **Hoggat, V. E**. Fibonacci and Lucas Numbers, Houghton-Mifflin, Palo Alto, California, **1969.**
3. **Стахов А.П., Ткаченко И.С.** Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, **1993** , Т. 208, № 7.
4. **Stakhov A, Rozin B.** On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals **2004**, 23(2): 379-389.
5. **Stakhov A. Rozin B.** The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics,**2006**,V.8,No.3 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)
6. **Стахов А.П**. Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12. **2006** (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm)
7. **Stakhov A.** The “golden” matrices and a new kind of cryptography. Chaos, Solitons & Fractals , **2007**, V.32, Issue 3, 1138-1146.
8. **Gazale M.** Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, **1999** (русский перевод, **2002**).
9. **Беллман Р**. Введение в теорию матриц. Москва, Наука,**1968** , 367 с.

10. **Watson J.D.,Crick F. H**. Molecular structure of nucleic acids . Nature, **1953,** V. 171,P. 738-740.
11. **Дубинин Н.П.** Общая генетика. М.: Наука, **1986,** 559 с.

12. **Льюин Б**. Гены. М.: Мир, **1987**, 544 с.
13. **Айала Ф.,Кайгер Дж.** Современная генетика. М.: Мир, **1988**, Т. 1-3.

14. **Watson J.D., Crick F.H..** Genetic implications of the structure of deoxyribose nucleic acid. Nature, **1953**, V.171, P. 964-967.
15. **Спирин А.С**. Биосинтез белков, мир РНК и происхождение жизни (http:// evolution. Powernet.ru/library/biosynthesis.htm) .
16. **Aranson S., Zhuzhoma E**. On arithmetical and dynamical properties of Lorenz maps of the torus. ArXiv:math. DS/0404464, 26 Apr.**2004,**V.1, P.1-14.
21. **Aranson S., Zhuzhoma E.** On arithmetical and dynamical properties of Lorenz maps of the torus. Institut de Recherche Mathematique de Rennes. France, Prepublication 04-27.April **2004,** P.1-14.
18. **Арансон С.Х., Жужома Е.В.** Арифметические и динамические свойства преобразований Лоренца на торе. Труды Средневолжского математического общества. Материалы Второй Международной научной школы «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Саранск. Россия. **2005 ,**Т.7, №1, С.245-247.
19. **Боднар О.Я.** Золотое сечение и невклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: «Свит», **1994**.
20. **Петухов С.В.** Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение. Метафизика. Москва, Бином, **2006.** С. 216-250.
21. **Шило Н.А., Динков А.В.** Фенотипическая система атомов в развитие идей Д.И.Менделеева // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14630, 09.11. **2007** (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321073.htm)
22. **Кедров Б.М.** Микроанатомия великого открытия. М.: Наука,**1970 .**

(*Продолжение следует*)