ПЛАТОНОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР ДОЛЖЕН СУЩЕСТВОВАТЬ

"Математика – посредник между духом и материей".
Г. Штейнгауз [1].

"Изобрел для них НАУКУ ЧИСЕЛ, из НАУК ВАЖНЕЙШУЮ".
Эсхил, "Прикованный Прометей".

0. В книгах В.И.Арнольда [2-3] есть разделы, в которых он переворачивает всю историю математики Древнего мира, **описывая происхождение математики**:

" В Египте, задолго до пребывания там Моисея, жил величайший Тот, великий посвященный. Открытия Тота описаны, например, историком I в.до н.э. Диодором Сицилийским, а также Платоном в его диалоге "Федр" ***(Он первым изобрел число, счет, землемерие, звездочетство, а также письмена****). У греков потом его теории стали распространяться под именем Гермес Трисмегист, и в средние века была книга " Изумрудная скрижаль" и было много изданий этой книги, например, в библиотеке Ньютона, который тщательно его изучал. И очень многие вещи, которые приписывают Ньютону, на самом деле уже там содержались".*

Дальше, через много поколений геометрия Тота дошла через Пифагора до Эвклида, который уже не был связан, как Пифагор, обязательством не публиковать полученные им от египетских жрецов научные сведения, Пифагору пришлось лишь устно пропагандировать свою науку, но держать ее в тайне.

1. А теперь после исторических намеков перейдем к вопросу о самой сущности математики. И вот перед нами Платоновская точка зрения, известная как **"математический платонизм",** для которого "характерно рассмотрение математических объектов (точек, линий, плоскостей, чисел, структур и т.д.), а также математических законов **как существующих в идеальном мире. Они существовали всегда, еще до существования нашей Вселенной, и они существуют независимо от того, думает ли о них какой-нибудь математик или нет. Эти объекты и законы являются частью нематериальной, неизменной реальности**"[4].

В частности, подчеркивает Платон, **математические истины относятся** не к окружностям, треугольникам и квадратам, которые можно нарисовать на клочке папируса или начертить палочкой на песке, **а к абстрактным объектам, которые пребывают в идеальном мире – вместилище подлинных форм и совершенств**. Этот платоновский мир математических понятий отделен от мира физического, и именно там, в этом первом мире, верны математические суждения наподобие теоремы Пифагора. Квадрат, который мы чертим на бумаге, лишь несовершенная копия, приближение к истинному, абстрактному квадрату (об этом еще в 3.II и в [5]).

Платонизм в самом широком смысле слова предполагает веру в некие вечные, незыблемые абстрактные объекты. Согласно платонизму, реальное существование математических понятий – столь же объективный факт, сколь и существование самой Вселенной.

2. Математический платонизм по-прежнему очень популярен в современной философии математики. Одним из самых ярких и последовательных платонистов современности, кроме К. Гёделя, Ш. Эрмита,Г. Фреге, Г. Вейля, П. Бернайса, П. Финслера, является Р. Пенроуз, развивающий концепцию «трех миров»: физического, ментального и **платоновского математического мира** (ПММ), которые существуют независимо, но при этом таинственным образом связаны. Он считает, что математические структуры существуют вне времени и пространства. Платоновский мир математических форм, который для Пенроуза не менее реален, чем физический и ментальный. Вот что он пишет:

“ Платон был убежден, что математические высказывания…описывают в действительности не реальные физические объекты…, но некие идеальные сущности. Он полагал, что такие идеальные сущности образуют в совокупности собственный мир, отдельный и отличный от мира физического. Сегодня мы называем этот мир ***платоновским миром математических форм****. Физические структуры – квадраты, круги, или треугольники, … нанесенные каким – либо инструментом на плоской поверхности, равно как и кубы, тетраэдры или шары, вырезанные из мрамора – могут очень близко подойти к этим идеалам, но никогда не совпадут абсолютно. Настоящие* ***математические*** *квадраты, кубы, окружности, сферы, треугольники т.д. не принадлежат физическому миру, но существуют в платоновском идеальном мире математических форм*” [6].

Несмотря на свою популярность, платонизм — это не господствующая доктрина. Он сталкивается с серьезными вызовами, главный из которых — эпистемологическая проблема: если математические объекты находятся в нематериальном, внепространственном мире, то как мы, физические существа, можем иметь о них знание?

3. Наконец, в качестве доказательства существования ПММ, приведем, по крайней мере, следующие три фундаментальные математические открытия:

I. Квадратный корень из 2 ($\sqrt{2}$) и другие иррациональные числа.

II. Квадрат с единичной стороной, треугольник с единичными катетами и диагональю $\sqrt{2}$, а также другие подобные многоугольники.

III. Фракталы.

I. Утверждение 1. Квадратный корень из 2 ($\sqrt{2}$), как и все иррациональные числа, могут существовать только в ПММ.

Поясним сначала с геометрической точки зрения БЕЗГРАНИЧНОСТЬ знаков $\sqrt{2}$ = 1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317… .
Казалось бы в массиве цифр, содержащий, к примеру, $10^{1000^{1000}}$ первых знаков переменной $\sqrt{2}$, присутствуют совсем непонятные, неизвестно откуда взявшиеся цифры. Но, возразят, ведь и так ясно, что $\sqrt{2}$ это длина гипотенузы треугольник (1, 1, $\sqrt{2}$). Вот этот ответ и проявил неявное использование и неосознанную веру в ПММ. Все дело в том, что в нашем физическом мире и такой треугольник не существует [7] и, тем более, его длина $\sqrt{2}$ [8]. Но все встает на свои места, если понять, что $\sqrt{2}$ можно вычислять через аппроксимирующую последовательность реально существующих пифагоровых треугольников вида (n, n+1, m) при соответствующих значениях m и n. Разделив все три числа на n, получаем рациональные значения длин катетов и гипотенузы (1 , 1+1/n, m/n), где 1 , 1+1/n –длины сторон прямоугольного треугольника, а m/n – длина гипотенузы, которая и является приближением к $\sqrt{2}$.
Вот для примера четверка пифагоровых треугольников:

(119, 120, 169); (1)

(4059, 4060, 5741); (2)

(803760, 803761, 1136689); (3)

(2028178425302119325034939767053000214227898163782 60,
2028178425302119325034939767053000214227898163782 61,
2868277435974764425373324340745202604781066191640 61). (4)

В первом из них m/n= 1.42016806722689075630252100840336134 4537.

Во втором m/n= 1.41438778024143877802414387780241438778 0.

В третьем m/n= 1/414214442122026475564845227431073952423

и в четвертом m/n=1.414213562373095048801688724209698078569.

Для последнего из них отношение гипотенузы к катету отличается от точного значения $\sqrt{2}$ на величину 10^{-50}. Вот откуда тянутся корни к $\sqrt{2}$ - это последовательные длины гипотенуз рациональных пифагоровых треугольников, которые действительно существуют и аппроксимируют несуществующий треугольник (1, 1, $\sqrt{2}$) и при дальнейшем увеличении m и n можно получить сколь угодно точные его приближения, что обусловлено безграничным количеством пифагоровых треугольников вида (1 , 1+1/n, m/n), откуда и следует БЕЗГРАНИЧНОСТЬ количество знаков $\sqrt{2}$.

Вот эта безграничная последовательность пифагоровых треугольников и приводит нас к предельному несуществующему в физическом мире треугольнику (1, 1, $\sqrt{2}$) и его длине $\sqrt{2}$ место которым только в ПММ. Поэтому если вычислитель может достигать даже триллионного разряда переменной $\sqrt{2}$, а потом еще большего, то это только означает, что все остальные БЕЗГРАНИЧНЫЕ разряды уже имеют место быть и место им только в ПММ: они обязаны там находиться, иначе теряет смысл само существование $\sqrt{2}$, поскольку ни в книгах, ни в головах математиков им места недостаточно.

Понятие иррационального числа целиком принадлежит ПММ. Математики XIX века додумались лишь воспользоваться этой бесплатной возможностью утащить из ПММ эту идею бесконечных последовательностей, назвав их иррациональными числами, хотя им достались только обозначения и конечные приближения. Вот на этой псевдооснове и был создан математический анализ.

II. Утверждение 2. Идеальный квадрат существует только в ПММ.

(Связанная с 3. I тема только с геометрической точки зрения).

Уже должно быть понятным, что квадрат, составленный из двух треугольников (1, 1, $\sqrt{2}$) может находиться не иначе как в ПММ. А в нашем физическом мире возможно только аппроксимировать этот идеальный квадрат. Для этого приведем пример квазиквадрата, а именно прямоугольника, аппроксимирующего квадрат, для чего вначале построим пифагоров треугольник с почти равными катетами (m, m+1,n). После составления соответствующих уравнений связи параметров m и n, вычисляются сами эти значения от простейшего (3; 4; 5) до более точных (119; 120; 169), (23660; 23661; 33461), (803760; 803761; 1136689) и т.д. Последняя тройка после нормировки имеет вид (1; 1.000001; 1.414214) и это, естественно, не самое лучшее приближение. Точность приближения предполагает неограниченное увеличение.

Совместив пару пифагоровых треугольников, приведенных в последнем случае, получаем приближение квадрата в виде прямоугольника со сторонами 1и 1.000001.

Таким образом, **истинный квадрат является лишь предельной формой аппроксимирующих их фигур, поэтому его истинная форма может существовать только в ПММ.**

Вот это и пытались доказать со времен Платона. Объяснение самого Платона читаем в «Государстве»:

*«Разве ты не знаешь, что, хотя они и используют видимые формы и рассуждают о них**, мыслят они не о самих формах, а об идеалах**, с которыми не имеют сходства; не о фигурах, которые они чертят, а **об абсолютном квадрате**, и абсолютном диаметре… и что в действительности геометры стремятся постичь то, что открыто лишь*

мысленному взору».

По замечанию А.Д.Александрова [9], геометрия будучи **наукой об идеальных, только мыслимых,** фигурах, считается безусловно верной для реальных форм и отношений **при предельном их уточнении**.

И опять же бесценная цитата из Демокрита: “ ***…квадрат с равными сторонами существует лишь в мнении людей, в действительности же всякий квадрат является прямоугольником,*** *у которого основание отличается от высоты на такую малую величину, которая не воспринимается нашим зрением и осязанием. Действительно, не существует таких пифагоровых троек, в которых одно катетное число равно другому, и поэтому в обычном равно-равном квадрате диагональ не может быть соизмерима со стороной* “ [10].

III. Утверждение 3. Фракталы во всей своей общности существуют только в ПММ. Самым рьяным защитником этого утверждения является Р. Пенроуз. В своей книге [6] он задал вопрос “Реален ли математический мир Платона“ и попытался на него ответить, в частности, на примере множество Мандельброта:

“ *Множество Мандельброта совершенно определенно не является изобретением человеческого разума. Оно просто объективно существует в самой математике. Если вообще имеет смысл говорить о существовании множества Мандельброта, то существует оно не в наших с вами разумах, ибо ни один человек не в состоянии в полной мере постичь бесконечное разнообразие и безграничную сложность этого математического объекта. Равным образом не может оно существовать и в многочисленных компьютерных распечатках …– на этих распечатках мы видим не само множество Мандельброта и даже не приближение к нему, но лишь бледную тень очень грубого приближения. И все же множества Мандельброта существует и существует вполне устойчиво: кто бы ни ставил перед компьютером задачу построения множества, каким бы ни был этот самый компьютер, структура в результате получается всегда одинаковая – и чем “глубже” мы считаем, тем более точной и детальней будет картинка. Следовательно,* ***существовать множества Мандельброта может только в платоновском мире математических форм, больше нигде****.*

Замысловатые завитки множество Мандельброта не были вызваны из небытия в то мгновение, когда кто-то увидел их на экране компьютера или на распечатке. Не возникли они и тогда, когда впервые была выдвинута человеком лежащая в основе множества Мандельброта идея – причем не обязательно самим Мандельбротом. Потому что, в начале своих экспериментов не имел сколько – нибудь реального представления о тех изящных тонких узорах, что воспроизведены в распечатках. ***Эти узоры “существовали” и прежде, они существуют с незапамятных времен и будут существовать всегда*** *– в потенциально вневременном смысле, предполагающем, что в какое бы время, в каком бы месте, какое бы обладающее сознанием существо ни решило исследовать их структуру, оно всякий раз увидит в точности то же самое, что видим сегодня мы с вами*.

4. И в заключении невозможно не привести высказывания самих математиков по поводу существования ПММ:

” *Я верю, что числа и функции анализа не являются произвольным созданием нашего разума; я думаю, что* ***они существуют вне нас в силу той же необходимости, как и объекты реального мира, и мы их встречаем или открываем и изучаем точно так****, как это делают физики, химики или зоологи*”.

Ш.Эрмит

” *Если мы узнаем что-то в математике, то мы имеем дело* ***с истиной, которая уже существовала, прежде чем мы обнаружили ее.*** *В математике мы совершаем не изобретения, а только открытия*”.

Дж. Нэш

” *Определение радикала долго мучило меня…Наконец, несколько дней назад, я преуспел, - но* ***не благодаря моим тяжелым поискам, а только милостью Бога*** *– так я хотел бы сказать. Ответ пришел внезапно подобно удару молнии и загадка была разрешена; я сам не смог бы выявлять связующую нить между тем, что я знал раньше, моими последними попытками и тем, вследствие чего попытка удалась*”.

К. Гаусс

“*Философия написана в* ***величественной книге*** *(я имею в виду* ***Вселенную****)… Написана же она* ***на языке математики, и знаки ее – треугольники, круги и другие геометрические фигуры****, без которых человек не смог бы понять в ней ни единого слова; без них он был бы обречен блуждать в потемках по лабиринту “.*

Г. Галилей

«Объекты и теоремы математики столь же объективны и независимы от нашего свободного выбора и творческих актов, как и физический мир*. Я имею в виду взгляд, что математика описывает нечувственную реальность, которая существует независимо как от актов, так и от предрасположенностей человеческого разума и лишь воспринимается им».*

К.Гедель

«Я верю, что ***математическая реальность лежит вне нас****, что наша функция — открывать или наблюдать ее, и что* ***теоремы, которые мы доказываем и которые мы грандиозно описываем как наши "творения", являются всего лишь записями наших наблюдений****».*

Г.Х.Харди

ЛИТЕРАТУРА

1. Штейнгауз Г., Математика – посредник между духом и материей, М., 2005.
2. Арнольд В.И., Нужна ли в школе математика ?, М., 2001.
3. Арнольд В.И., Что такое математика ?, МЦНМО, 2002.
4. Зеннхаузер В., Платон и математика, СПб, 2016.
5. О геометрических фигурах в «Началах» Евклида // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.30069, 05.07.2026.
6. Пенроуз Р., Путь к реальности, Москва-Ижевск, 2007.
7. А существует ли прямоугольный треугольник со сторонами 1, 1,√2 // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.29213, 11.11.2024.
8. О возможности построения отрезков иррациональной длины // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.29608, 30.07.2025.
9. Александров А.Д., Избранные труды. Педагогические статьи разных лет, СПб, 2016.
10. Маковельский А.О., Древнегреческие атомисты, Баку, 1946.

М.Пирожков pisigma@mail.ru