

**Ф.И.МАВРИКИДИ**

**Числовая асимметрия  
в прикладной математике**

**Фракталы,  $p$ -адические числа,  
апории Зенона, сложные системы**

**Издательство «Дельфис»  
Москва  
2015**

УДК 511.3  
ББК 22.1  
М122

Автор благодарит коллектив издательства «Дельфис» за многолетнюю поддержку, большой труд по организации усилий многих исследователей в различных областях и создание высокопрофессиональной творческой атмосферы.

Особая благодарность сотрудникам БЕН РАН и её отделу межбиблиотечного абонементов, руководимому Т.С.Колеровой, за отзывчивость и помощь в работе с **слитературой.**

**Маврикиди Ф.И.**

М 122 Числовая асимметрия в прикладной математике. Фракталы,  $p$ -адические числа, апории Зенона, сложные системы — М.: Дельфис, 2015. — 416 с.

ISBN 978-5-93366-075-0

В книге выдвинут постулат о функциональной асимметрии природы, образованной двумя универсальными формообразующими процессами — сжатия и расширения, непрерывности и разрывности. Обоснована двойственность её фрактальной геометрии. В качестве формального аналога двойственности рассмотрена модель числовой асимметрии — объединения вещественных и  $p$ -адических чисел в единую самодвойственную систему. Показано, что она логически связывает различные математические результаты о двойственности, которые согласуются с бинарным характером естественных наук и диалектикой общей теории систем. Апории Зенона рассмотрены с точки зрения приложений математики — как тест на её адекватность естествознанию. Предложено единое толкование всех апорий с точки зрения числовой асимметрии. Рассмотрены возможности согласования математических понятий с основными понятиями языка, биологии, сознания, физики и религиозного мировоззрения.

Книга адресована прикладным математикам, всем исследователям, применяющим математику и системные идеи в своей работе.

**УДК 511.3**  
**ББК 22.1**

ISBN 978-5-93366-075-0

© Маврикиди Ф.И., 2015  
© Издательство «Дельфис», 2015

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге представлен опыт поиска подхода к математической теории систем в её первичном смысле как теории двойной углублённости, двойной осмысленности или конкретности прикладной математики, понятия и методы которой должны быть общими для математики и естествознания. Показано тождество фракталов и системной реальности. Из анализа литературы выдвинуто положение о бинарной динамической природе фракталов, которая заключается в порождении фракталов двумя базовыми природными процессами, общими названиями которых являются: *энтропия — неэнтропия, дивергенция — конвергенция, различение — гомогенизация, сжатие — разрежение, дискретность — непрерывность*. В качестве формального аналога этой пары предлагается самодвойственная числовая система, состоящая из вещественных и  $p$ -адических чисел, связанных отношением инволюционного антиизоморфизма, названная числовой асимметрией.

Показано, что за этой конструкцией стоит междисциплинарная универсальность фракталов, специфически системные явления и ряд согласованных между собой фактов из чистой математики — от теории множеств Мириманоффа, через  $p$ -адические числа Кронекера и Гензеля, арифметику Прессбургера, интуиционистскую логику Брауэра, проективную геометрию до теоретической информатики. Эти факты расширяют арсенал физических методов математики, образуя их логико-топологическое дополнение, непривычное для математической физики, но хорошо узнаваемое в естественных науках.

Ключевым для принятия фрактальной топологии за основу теории систем является общность феномена двойственности, или бинарного архетипа, — сквозное присутствие оппозитивных пар, хорошо известных в методологии и философии науки. Их неполный перечень, продолжающий базовые оппозиции: *локальное — глобальное, единое — многое Платона, часть — целое, материя — символ, внутреннее — внешнее*. Эти общие оппозиции имеют свои формальные аналоги в виде результа-

тов о двойственности — Стоуна, проективной двойственности, преобразования Фурье, парадокса Левенгейма-Сколема. Упомянутые факты позволяют расширить этот список парами: множества Кантора — множества Мириманоффа, вещественные —  $p$ -адические числа, вторая теорема Гёделя — арифметика Прессбургера, соответствия Галуа и принцип двойственности в теории решёток, двойственность *аргументы — функции* в теоретической информатике, известной как принцип неразличимости операторов и операндов.

Анализ опыта приложений математики показывает, что именно бинарность оказалась тем барьером, который обусловил неуспех приложений математики в естествознании. Известной моделью бинарности служат апории Зенона, часто упоминаемые в связи с системной идеей. Их общий смысл в ограниченной адекватности классических методов формализации наблюдаемым явлениям. Предлагаемый подход к построению теории позволяет интерпретировать апории Зенона таким образом, что их структура узнаётся в основных разделах системной теории — биологии, сознании/мышлении человека, естественном языке, физике. Логическая связность формальных результатов позволяет, включив бинарность в модель, превратить парадоксы Зенона из тупиков в естественнонаучных теориях в связующие мосты, открывая тем самым путь к междисциплинарной науке.

Отдельную тему представляет раздел, посвящённый религии — высшей реальности. Показано, что в своих основных положениях религиозное мировоззрение не противоречит математике.

## Введение

В данной работе предпринята попытка интерпретации в теории систем тех математических результатов, которые остались в тени математической физики и не имеют на сегодняшний день общепризнанной естественнонаучной интерпретации.

Основной мотив книги составляет поиск математической теории сложных систем. Во второй половине XX века теория систем наряду с кибернетикой составляли содержание прикладной математики, составляя два её полюса. Теория систем начинала с целостности и была направлена на поиск закономерностей общесистемного характера; кибернетика представляла собой противоположный полюс: она обычными математическими средствами стремилась познать природу целого нефизических объектов и явлений исходя из поведения их частей.

Прикладная математика, возникшая в развитых странах в 1960-е годы, математическими физиками часто понималась как «дистрибьютор» классических математических результатов, как второсортная математика, не имеющая собственного предмета и методов. Иные ожидания были у предметных специалистов, с которыми столкнулись прикладники. Предметники ожидали решения собственных задач, развития их специфических научных методов. Однако взаимодействие математиков со специалистами-естественниками редко проходило в форме диалога. Типичным был монолог математика, который требовал формализации задачи в соответствии с существующими и признанными формальными теориями. Как правило, при этом приходилось подгонять предметную задачу под формальную схему, делая неоправданные допущения и упрощения.

В итоге, как известно, нефизические приложения математики не дали прироста нового знания. Прямолинейная математизация естественных наук не состоялась, однако непрерывная её критика философами и практиками оставила богатую литературу, содержащую много ценного. Эта ситуация требует отдельного разговора и детального технического

анализа с привлечением специалистов разного профиля, имеющих опыт приложений и сформировавших свои взгляды и методы использования математики. Скажем лишь только, что применения математики ограничивались расчётами, что нередко вызывало озабоченность самих математиков, обеспокоенных узостью понимания роли этой науки.

Можно указать целый ряд фактов в основаниях существующей версии математики, ответственных за её ограниченную адекватность. Такими являются игнорирование теории моделей, сведение нелинейности к линейным схемам, ограничение восприятия/наблюдения, выключение чувственного опыта очевидности и сведение всего знания к манипулированию символами. В итоге формализация природы состоялась как частичная, а всё, что не укладывалось в схему, объявлялось ненаучным и вытеснялось. Оправдывалось это «бесконечным приближением к истине». Однако, как показала практика, этот тезис означал такую же бесконечную от неё удалённость.

В самой математике немymi, не имеющими интерпретации остались результаты о двойственности и парадоксы, несмотря на то, что прикладная математика постоянно сталкивалась с этими явлениями. Помимо этого есть скрытая проблема, препятствующая образованию прикладной математики как единого поля знаний. Она заключается в том, что прикладную математику трудно отделить от чистой. Это часто признаётся: возникновение математики в прошлом было тесно связано с нуждами практики. Однако эта практика была всё-таки специфичной – достаточно простой и связанной с техническими задачами (наука начиналась с падающих камней, а не с развивающихся растений). Со временем практика усложнилась настолько, что один человек уже не мог адекватно охватить и осмыслить поведение сложных объектов. Поэтому изменились цели, методы и направленность результатов науки.

«Конечно, специального предмета “прикладная математика” не существует. Зато, безусловно, существуют “прикладные математики” – люди, занимающиеся приложениями математических методов к решению конкретных практических проблем» [Грекова И. Методологические особенности прикладной математики на современном этапе её развития//Вопросы философии №6, 1976, с.104–114].

Это значит, что «прикладная математика» как бы затеряна между наук – без собственных журналов, специализированных советов, критериев научности и результативности. Не секрет, что журналы по инженерным и естественнонаучным дисциплинам плохо воспринимают (если вообще воспринимают) статьи с развитой математикой – инже-

неров и естественников этому не учат, и, соответственно, рецензенты не готовы к квалифицированной оценке. Математические же журналы признают только теоретико-физическую тематику, которая малоинтересна прикладникам. То же при защите диссертации прикладными математиками. Их, как правило, отводят в такие же советы, члены которых математику знают зачастую на уровне школы, а более развитую встречают «в штыки»: рассматривая как посягательство на их компетентность — «у вас уравнения, но у нас своя специфика». В чём заключается эта специфика до сих пор никому не известно.

Поэтому единственными степенями свободы для «прикладных математиков» остаётся программирование, либо занятие одной из физико-математических академических дисциплин. Не имея собственных журналов, они остаются разобщёнными, и их опыт и материал не синтезируется в единую систему взглядов [*Налимов В.В.* Вероятностная модель языка. М.: Наука, 1979, с.161], которая могла бы составить нечто вроде «Курса по прикладной математике». Работая в «иноязычной среде» других специальностей, они утрачивают значимость своей квалификации — руководством признаётся только конечный результат, хотя сама проблема в математическом плане может оказаться просто огромной, под силу разве целой лаборатории, и, зачастую, просто не имеющей общепризнанного математического решения. Задача может формулироваться, например, так: «У японцев (американцев, немцев,...) это есть. Математика, как известно, может всё. Мы тоже хотим. Задача — обеспечить нам это как у японцев (американцев, и т.д.)». Такие ситуации далеко не редкость, и порождены они безответственной популяризацией, экстраполяцией и рекламой возможностей математики, имевшей место (и до сих пор продолжающейся, хотя и в заметно меньшей степени) в период прямо-таки «конвойной» математизации наук.

Кроме того, прикладная математика является в значительной степени производственной, то есть связанной с ресурсами, прибылью, капиталовложениями, конкуренцией. Поэтому всё, что работает в этих областях, никогда не публикуется. Публикуются только результаты рекламного вида, либо паранаучные рассуждения физико-математического характера по заданной теме, причём, как правило, со скрытыми пробелами и намеренными ошибками, препятствующими восстановлению метода. Как следствие, прикладные математики оказались плохо обеспечены эффективными методами и вынуждены в подавляющем большинстве мигрировать в другие, зачастую далёкие от своей специальности, области.

По мнению автора, особенность приложений математики заключается в том, что она перешла от решения простых физических задач, от

схемы чёрного ящика к систематическому изучению распределённых систем: эколого-экономических, больших технических, нейробиологических, организационных, то есть от систем, наблюдаемых извне, к системам, требующим согласованного двойного наблюдения — изнутри и извне. Иными словами, перешла от атомизма к *ан-атомии*, где привычные статистические методы усреднения неадекватны. И аксиоматический, то есть атомистический метод классики оказывается уже явно неполным и потому неприемлемым.

Проблемы возникают даже на уровне таблицы умножения — не все арифметические операции допустимы в системных объектах, хотя процессы, ими реализуемые, сохраняются. Если учесть, что проблема элементарной сущности как далее неделимого объекта сегодня во многом остаётся открытой [Сачков Ю.В. Макромир и микромир/Новая философская энциклопедия, т.2, с.481], то переход к *ан-атомии* не выглядит чересчур произвольным. Приведём в связи с этим одно рассуждение, на которое далее будем ссылаться как на ГЛГ-аргумент (аргумент, вытекающий из результатов Гёделя, Лиувилля, Гельмгольца).

*ГЛГ-аргумент.* Рассмотрим любую физическую теорию, созданную в аксиоматическом методе. Она представляет собой логическую систему с *атомарными* переменными  $x, y, z, \dots t, p, q, \dots$ ; функциями  $f, g, h, \dots$ ; предикатами  $P, Q, R, S, \dots$ ; известными правилами арифметических и логических операций. При помощи гёделевой нумерации сведём её к арифметике натуральных чисел  $\langle N, +, \times \rangle$ . По теореме Лиувилля из геометрии, сложению соответствует сдвиг, умножению — растяжение. Вычитание и деление также понимаются как сдвиги и растяжения, обратные сложению и умножению (хотя и не входят в арифметику натуральных чисел). Отсюда легко перейти к арифметическому 3-мерному евклидову пространству  $R^3$ . Как показал Г.Гельмгольц, евклидово пространство допускает *локально линейные движения и соответствует механике деформируемого твёрдого тела* (МДТТ) [Гельмгольц Г. О фактах, лежащих в основаниях геометрии. В кн. Норден А.П. Основания геометрии. М., 1956, с. 366—383]. Поэтому любые уравнения математической физики, как бы они ни назывались — статистическими, квантовыми, социальной и экономической динамикой и т.д. и т.п., заменяют истинную динамику механикой ДТТ, то есть оказываются изоморфными [Френкель А.А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М.: Мир, 1966, с. 353]. В этом же, кстати, и состоит причина того, что теория вероятностей не может предсказать движение одной частицы, но только однородного большого их числа — большое число однородных частиц есть не что иное, как (деформируемое) твёрдое тело. Иными словами, то, что желает исследователь, и то, что могут уравнения — вещи разные.



Проблемы прикладной математики и теории систем невозможно представить так, как в физике: при помощи простых настольных/лабораторных экспериментов. Если физические объекты «меньше человека» и на них можно смотреть извне взглядом экспериментатора, то системные объекты «больше человека», и на них приходится смотреть как извне, так и в большей степени изнутри. Поэтому единственный способ их осветить — обратиться к мнениям самих участников процесса математизации и людей, так или иначе ею задетых. Уже сложился целый пласт неакадемической литературы в России и за рубежом, авторы которой, видные и опытные учёные-естественники, физики и математики, направили своё внимание на нефизическую реальность, организовав обсуждение способов преодоления физико-математического аутизма, расширения поля зрения науки, согласования её с общечеловеческими ценностями.

Прикладная математика как соответствие математической реальности миру и человеку появилась, конечно, не в XX веке. Вычислительные рецепты древних народов Индии, Вавилона, Китая, Египта, Шумера хорошо известны. Но была и другая сторона математики — пифагорейско-платоническая, идущая от того же корня. Её отличительной стороной были: вовлечённость человека в мир, стремление объяснять, а не переделывать мир, не экспериментальный, а созерцательный (т.е. взгляд изнутри) характер, стремление к постижению Абсолюта, а не абстрагирование от него [Свасьян К.А. Становление европейской науки. М.: Эвидентис, 2002, с. 361–388]. Эту ветвь математики можно назвать, в отличие от физико-технической, *математическим естествознанием*. Именно эта ветвь несёт потенцию синтеза с естественными науками. Беспомощность абстрактной математики в этом направлении можно считать итогом глобального эксперимента по недавней математизации наук.

«Система суждений в математике строится без апелляции к неявно предполагаемым допущениям, здравому смыслу или свободным ассоциациям. Задача заключается в проверке, что результаты действительно следуют из начальных допущений. Бессмысленной является сама постановка вопроса о проверке правильности исходных аксиом в каком-то «физическом» смысле. Математиков беспокоит только логическая состоятельность аксиом — они должны быть внутренне непротиворечивыми. ... У Клини мы находим следующую характеристику принципиальных установок Гильберта: "... символы сами по себе являются окончательными предметами и не должны использоваться для обозначения чего-либо отличного от них. Математик смотрит на

них, а не через них и на то, что находится за ними; таким образом, они являются предметами без интерпретации и значения”. Часто игру в шахматы рассматривают как модель математики, или, если хотите, как пародию на математику. ... Но самое интересное в таком сопоставлении — это то, что логические операции здесь (как и при формальном доказательстве теорем в математике) производятся без какой-либо интерпретации в терминах явлений внешнего мира» [Налимов В.В. Вероятностная модель языка. М., Наука, 1979, с. 141].

Современные антинаучные настроения в существе своём имеют причину именно в неадекватности классических математических методов. В силу своего положения «самой научной из наук» последствия экстраполяции стандартной математики на нефизические области выходят далеко за рамки внутринаучной проблемы. Негативные эффекты математизации, то есть упрощения сложного мира, сегодня известны как гуманитарный, экономический и экологический кризисы. Возник неожиданный ракурс известного тезиса И.Канта о научности математики: *развитие наук лимитируется развитием математики.*

Хорошо известна книга М.Клайна, содержащая обширный материал [Математика. Утрата определённости. М.: Мир, 1984], посвящённая как внутренним, так и прикладным проблемам математики. Для чистого математика-профессионала она не представляет большого интереса из-за неизбежной ограниченности его своей специализацией. Но для прикладного математика, не ограниченного одной математической дисциплиной в своих задачах, эта книга служит хорошим путеводителем — лощией по «прибрежной зоне», освещающая её рифы и подводные камни.

«Теорема Гёделя о неполноте свидетельствует о том, что любая система аксиом не позволяет доказать (или опровергнуть) все теоремы той области математики, для описания которой данная система аксиом предназначена. Теорема Левенгейма-Сколема утверждает, что любая система аксиом допускает намного больше, существенно больше различных интерпретаций, чем предполагалось при её создании. ... Иначе говоря, из неполноты следует некатегоричность [там же, с.316-317] ... Математика продолжает жить на проценты от репутации, заработнойной их предшественниками. ... Чистые математики пошли ещё дальше — они изгнали прикладных математиков из своего братства ... они выбросили за борт богатейший источник идей и беспечно транжируют накопленное ранее богатство. ... Они утверждают, что создают модели для теоретического естествознания. Но в действительности подобная цель их нисколько не интересует. Более того, поскольку

большинство математиков абсолютно несведущи в естественных науках, они просто не в состоянии создавать такие модели [там же, с.351]. ... Итак, все эти ведущие учёные, работающие в основаниях математики, сходятся на том, что попытка создать приемлемую для всех, логически безупречную математику провалилась. Математика – одна из разновидностей человеческой деятельности, и она подвержена всем слабостям и порокам, присущим всему человеческому» [Клайн М. «Математика. Утрата определённости М.: Мир, 1984, с. 381].

Кроме книги М.Клайна, разнообразный и весьма полезный материал для прикладника содержится в работах: *Налимов В.В.* Вероятностная модель языка. М.: Наука, 1979 – широкое обсуждение не только языковой сферы, но и особенностей логики и методологии прикладной математики; *Шрейдер Ю.А., Шаров А.А.* Системы и модели. М.: Радио и связь, 1982 – по математическим основам теории систем; *Тутубалин В.Н., Барабашева Ю.М., Григорян А.А., Девяткова Г.Н., Угер Е.Г.* Математическое моделирование в экологии: Историко-методологический анализ. М. Языки русской культуры, 1999 – по опыту моделирования больших систем; *Блехман И.И., Мышкис Ф.Д., Пановко Я.Г.* Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. М.: Наука, 1983 – по проблемам математической техники в механике; *Петров Ю., Петров Л.* Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. СПб.: БХВ-Петербург, 2005 – по собственно формальным методам преобразования уравнений; *Ненеицова Н.Н.* Прикладная логика. Новосибирск: НГУ, 2000 – первый систематический опыт изложения всего спектра логических проблем для образования прикладников. По мнению автора, первой систематической книгой по теории фракталов системной направленности в русскоязычной литературе, в которой к тому же систематически проводится идея двойственности пространства, числа и динамики систем, является книга: [Александров В.В., Арсентьева А.В. Информация и развивающиеся структуры. Л.: ЛНИВЦ, 1984]. Много ценной информации содержится в книгах и статьях Н.Н.Моисеева.

Эти работы и разнообразный статейный материал, по сути, снимают блокировку мышления прикладника, которую создаёт стандартное математическое образование, психологическим и методологическим стержнем которого является категоричность во всех её проявлениях – синтаксических и семантических.

Отдельно следует отметить наиболее желательную в приложениях проблему прогноза, особенно в теории принятия решений, которая имеет смысл предсказания будущего – сложной системы, а не полёта

снаряда, ракеты, то есть материальной точки. Её приложения весьма обширны – от политических, социальных до коммерческих. Здесь, со времён Аристотеля, известна проблема фатализма – связь между истиной (т.е. точностью), временем и необходимостью (т.е. доказуемостью), которая полностью игнорируется математикой [Карпенко А.С. Фатализм и случайность будущего. М.: ЛКИ, 2008]. Эта тема, как и апории Зенона, пока полностью принадлежит философии. Опыт альтернативной науки – прогностики изложен в: [Бестужев-Лада И.В. (ред.-сост.) Мир нашего завтра. М.: Эксмо, 2003]. Ничего содержательного математика в этом направлении пока предложить не может, продолжая полагаться на дифференциальные уравнения в евклидовом пространстве. Модальная логика, семантики возможных миров, имеющие явную направленность в будущее, пока остаются внутренним материалом, не имеющим содержательной интерпретации и отделённым от остальной математической техники.

Сегодня прикладная математика представляет собой композицию двух компонент: более или менее редуцированного традиционного физико-математического аппарата [Lin C.C., Segal L.A. Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences SIAM. Philadelphia, 1988; Strang G. Introduction to Applied Mathematics Wessley-Cambridge, 1986; Logan J.D. Applied Mathematics. Wiley&Sons 2006; Малинецкий Г.Г. (ред.) Будущее прикладной математики. Эдиториал УРСС, 2005] и компьютерных методов вычислений и имитации [Гусев А.В., Малинецкий Г.Г., Торопыгина С.А. Прикладная математика – проблемы и перспективы// Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2013, №44].

Это тот же диалог «человек – машина», сформировавшийся в эпоху кибернетики, только на гораздо более мощной – программной и аппаратной – вычислительной базе, использующий развитую математику информационных процессов (*theoretical computer science, TCS* – англ.). Оказалось, что евклидово пространство плохо приспособлено к решению задач. Собственно разностные схемы решения дифференциальных уравнений, заменяющие гладкое пространство дискретным, являются тому примером. Такая двойственность симптоматична, она означает, что евклидово физическое пространство расширено пространством состояний компьютеров, которое является усечённым фракталом, точнее, подпространством 2-адических чисел. Эта двойственность отвечает существу дела: компьютер есть теоретический, а не просто вычислительный инструмент. Его теория – это теория хаоса и  $p$ -адических чисел, его эмпирия – фрактальная геометрия. Математика теоретической информатики, теория доменов (*domain theory* – англ.) явилась реакцией на эту проблему.

В предлагаемой работе эта двойственность названа числовой асимметрией и для неё показано, что она обеспечена рядом согласованных математических результатов, имеющих эмпирическое содержание.

В конце прошлого века в тени математизации наук зазвучала теория детерминированного хаоса, нелинейной динамики и фракталов Б.Мандельброта. Особенностью фрактальной геометрии явилось то, что она оказалась узнаваемой специалистами во всех разделах естествознания, в психологии, лингвистике, биологии, производстве. Первоначально, как и теория систем, фракталы подверглись обработке теориями математической физики, но без ожидаемого успеха, следствием чего явилось заметное угасание интереса к этой теме. Тем не менее, после периода «бури и натиска», математическая разработка фрактальной теории продолжается: в многочисленных публикациях присутствуют прямые или косвенные ссылки на фрактальную геометрию или содержатся отдельные разделы, главы, посвящённые вопросам её теории, — распределение публикаций по теории фракталов само является фракталом.

Теории фракталов и детерминированного хаоса обязаны своим звучанием развитию цифровых компьютеров. На заре развития вычислительной техники был недолгий период, когда цифровые компьютеры конкурировали с аналоговыми, построенными на идеологии дифференциальных уравнений. Затем была попытка создания АЦВК — аналого-цифровых вычислительных комплексов. Результат сегодня налицо: функции аналоговых полностью поглощены цифровыми. В частности, именно благодаря цифровым, стало возможным увидеть нелинейность в полном объёме — заработали рекурсивные алгоритмы, появились фрактально-хаотические странные аттракторы, фрактальные образы. Эти новые объекты воспринимались классикой математики как патологические, не имеющие естественнонаучного смысла, как зоопарк красивых фигур.

Однако изучение математики нелинейности обнаружило многочисленные связи практически со всеми разделами, так же как и изучение фракталов продемонстрировало единство топологии всех естественных наук. Возникло новое основание, взамен прежнего механико-математического, для построения системной теории, выработки формальных методов междисциплинарной идеи. Стало возможным видеть *сквозь символы, вскрывать чёрные ящики понятий* и наблюдать как внешнюю, так и внутреннюю динамику.

В этой ситуации напрашивается сведение эмпирической универсальности фракталов, цифровых компьютеров и математики нелинейности в единую основу для прикладной математики. Как представляется автору, для такого шага есть основания. Данная работа представляет опыт такого рода.

Известно, что в морском путешествии самое красивое — близость берега, а в сухопутном — вид приюта. Кроме того, на береговой линии сходятся все стихии, необходимые человеку для жизни — тепло (Солнце), земля, вода, воздух, известные как четыре первоэлемента древних. Это соображение и определит строй нашего изложения — возможно эклектичный, но так легче понимать задачи прикладной математики. Прикладная математика, собственно, из-за своей двойной углублённости, есть пример береговой линии, границы взаимодействия естественных наук и математики (подробнее об этом см.: [Налимов В.В. Вероятностная модель языка. М.: Наука, 1979, гл. IV]). Поэтому мы будем пользоваться всеми доступными (естественно, пониманию автора) идеями и фактами естественных наук, не ограничивая себя лишь физико-математическим материалом, хотя центральным является именно содержание самой математики. Такое расширение экспериментальной базы наполняет содержанием ранее немые математические структуры и даёт возможность выхода на системные идеи.

Поэтому метафорически траектория логики нашего изложения — это геометрия береговой линии — классический пример фрактала. Это значит, что в нашем движении будет множество округлений и прямолинейных участков — точно повторить фрактал невозможно. Мы будем стремиться лишь в общих чертах уловить очертания берегов и удостовериться в их пригодности для жизнедеятельности математики и математиков. Поэтому многие факты математики лишь упомянуты своим первоначальным смыслом.

Каждая из затрагиваемых в книге тем может быть развита в своём направлении, своими методами. Интерес представляет не логика специализации, а логика синтеза. Поскольку мы сосредотачиваем внимание на нефизических сложных системах, то можно вспомнить в связи с этим мысль Н.Н.Моисеева: «Для того чтобы человек имел нужное понимание (понимание, а не знание, что не совсем одно и



то же), ему необходим голографический портрет явления. А его могут дать только интерпретации. В построении таких интерпретаций на основе эмпирических данных (а значит, и согласованных с ними) и состоит основная задача современной науки» [Моисеев Н.Н. Как далеко до

завтрашнего дня...1917–1993. Свободные размышления. М.: Аспект Пресс, 1994, с. 199]. Сложные системы как раз и являются многогранными объектами, дающими для анализа разнообразные данные различных наук (междисциплинарная реальность).

**О терминах подзаголовка.** *Фракталы* – естественноприродная геометрия, являются равнодействующей сил отталкивания (деления) и притяжения (соединения). Их универсальность и вездесущность подтверждены большим числом экспериментальных работ, не только в материальных, но и в гуманитарных науках. *p-Адические числа (2-адические числа)* являются числовым содержанием фракталов. Они обеспечивают связь материальной теории с теоретической информатикой, дедуктивными теориями классической математики и включают в арсенал моделирования много новых полезных результатов. *Апории Зенона* понимаются как неадекватность формального отображения всей чувственно воспринимаемой реальности (а не только движения), то есть в итоге невозможность формализации естества Природы стандартными средствами. Это ключевой момент, поскольку все естественные науки потому и «естественные», что полагаются именно на полноту чувственного восприятия. *О сложных системах* мы упоминаем по ходу накопления теоретического материала, исходя из эмпирии фракталов. Наша схема позволяет восстановить бинарный архетип и дополнительность, хорошо известные в естественных науках и философии, при помощи результатов, ранее не вовлекавшихся в математическое моделирование. Иными словами, дополнительность присуща и самой математике.

**О структуре книги.** Книга состоит из двух частей. В первой части даётся интерпретация результатов, связанных с фракталами и *p*-адическими числами. В математическом отношении эта часть не содержит ничего нового. Мы лишь последовательно развиваем интерпретацию С.Улама *p*-адических чисел как инвариантов бесконечной делимости материи и общей основы противоположностей. Именно здесь включается богатый арсенал философии и положения естественных наук. Сквозной идеей этой части является согласование результатов о двойственности – эмпирии фракталов и самой математики. Во второй части она применяется в очень небольшом объёме к поиску соответствий с основными разделами системной науки – языком, биологией, сознанием, физикой. В общенаучном плане – диалога науки и религии, рассмотрены соответствия с религиозным мировоззрением.

Как оказалось, для прикладной математики камнем преткновения стало то, что ненаблюдаемо. Поэтому мнения и видение учёных разных специальностей служат «экспериментальным материалом», и дру-

гого пути преодоления физического аутизма для математики не видно. Поэтому в изложении переплетены материал естественных наук и формальный материал математики, представленные цитатами, коих много и они зачастую обширны. Фокус изложения расположен в области, которую впервые описал И.В.Гёте, а позже – П.А.Флоренский, и в которой прикладные математики оказываются всякий раз, когда им приходится разрабатывать модель нового явления. Эта область формализации задачи – *между явлением и уравнением* – является обязательной для приложений, она связывает понятия формальной теории с понятиями и методами измерения конкретной науки. Лишь тогда формальная техника вычислений не разойдётся с процессом:

«Если естествоиспытатель хочет отстоять своё право свободного созерцания и наблюдения, то пусть он вменит себе в обязанность обеспечить права природы. Только там, где она свободна, будет свободен и он. Там, где её связывают человеческими установлениями, он будет связан и сам. ... Теория – это обыкновенно результаты чрезмерной поспешности нетерпеливого рассудка, который хотел бы избавиться от явлений и подсовывает поэтому на их место образы, понятия и даже слова. ... Нет ничего труднее, чем брать вещи такими, каковы они есть на самом деле. ... Все попытки решить проблему природы являются по сути дела, конфликтами мыслительной способности с созерцанием» (цит. по [Свасьян К.А. Гёте – естествоиспытатель. М.: Evidentis, 2001, с. 88–89, 96, 98–111]).

Или, говоря словами П.А.Флоренского,

«в произведении два слова, слово действительности и слово художника соединяются в нечто целое. ... То, что говорит о себе чрез произведение самая действительность, есть конструкция в произведении; а то, что говорит об этой действительности художники, есть композиция произведения. ... Конструкция есть то, чего хочет от произведения самая действительность; а композиция – то, чего художник хочет от своего произведения» [Флоренский П.А. Анализ пространственности (и времени) в художественно-изобразительных произведениях / Флоренский Павел. Собр. соч. История и философия искусства. М.: Мысль, 2000, с. 152–153].

Конструкция и композиция в этом рассуждении Флоренского точно соответствуют теоремам Э.Бета и Крейга теории моделей: *синтаксис теории определяется семантикой предмета*.



Отрицание есть простейшая форма связи, или, как говорят китайцы, «определение указывает не только на то, что оно определяет, но и на то, что остаётся за его рамками». Несмотря на то, что автор не является физиком ни по образованию, ни по опыту работы, который полностью состоит из моделирования в нефизических, то есть системных областях, он считает своим долгом отметить сильное влияние работ пионеров  $p$ -адической физики – российских математиков: В.С.Владимирова, И.В.Воловича, Е.И.Зеленова, А.Ю.Хренникова, знакомство с которыми способствовало пониманию  $p$ -адических чисел даже в их нефизической интерпретации. Эта интерпретация имеет собственный вход в теорию систем с работ С.Улама 1955-57 годов, которые позже, в 1984 году, были развиты А.Н.Паршиным, и которая поддерживается эмпирией теории фракталов. С неё начиналось развитие фрактально – системно –  $p$ -адических взглядов автора. Именно идеи работ Улама и Паршина являются для автора определяющими. В силу того, что  $p$ -адические числа полностью отсутствуют в образовании и, соответственно, в литературе, хронология знакомства с работами здесь буквально броуновская.

Автор воздерживается от окончательных диагнозов в различиях подходов, оставляя вопрос открытым. Во всяком случае, без работ российских математиков, пионеров  $p$ -адической науки, сложности возросли бы экспоненциально.



# ЧАСТЬ 1



## Глава 1

### Функциональная асимметрия Природы. Топологизация понятий

В этом разделе речь пойдёт об одном общем явлении — делимости, её видах и инварианте процессов деления. Явление делимости вещества, объектов, процессов специальное внимание привлекло лишь в последнее время.

Бесконечная делимость материи есть система философских и общенаучных взглядов, которая является оппозиционной атомизму. Она настолько очевидна, что трудно сказать, когда она появилась в человеческой мысли. Попытка проследить её возникновение, как было удачно замечено в [1, р. 97], приводит к концу первого параграфа книги Бытия, когда Бог *отделил* свет от тьмы.

Начало её научного обсуждения можно вести с Аристотеля и Анаксагора. Делимость есть атмосфера, в которой действует современная наука, чьей ведущей парадигмой является редукционизм — *выделение* всё более элементарных объектов как познавательной понятийной базы. Моментальный снимок современной научной теории даёт пример ограниченной делимости материи. Сам процесс делимости виден на больших временных и пространственных масштабах [2, 3, 4].

Наиболее известные примеры делимости материи: разрушения пород, конструкций и т.п., разложения организмов, деления клетки, испускание элементов материи в ядерных реакциях. Но материя не является единственным примером проявления делимости. Делимость также неявно отражена в семантике понятий разделённости, отделимости, членности, сложности, разложимости, гетерогенности, различия, которые присущи лексиконам всех, в том числе и нефизических, наук. Нижеследующие примеры призваны раскатать интуицию и помочь увидеть делимость как самостоятельную степень свободы явлений.

### **Делимость и границы**

*Языковая номинация* – выделение объекта определением. Она есть как в естественных, так и в формальных языках. Номинация не только выделяет, но зачастую и создаёт объект.

Древо Порфирия и поиск атомов смысла в языке, ведущие к делению смыслового поля: «Смысловое поле слов безгранично делимо. Представление об атомах смысла, столь необходимое для построения логической семантики, в психологическом плане не более чем иллюзия» [5].

*Ан-атомия* в биологии – как отрицание атомизма, то есть неделимости. На одном полюсе науки – гены и микромир физики, на другом – единство в разнообразии в теории эволюции.

*Одновременность двух событий*, сосуществование явлений, процессов и т.д. Общее название – синхронное существование. Здесь увидеть делимость – значит увидеть общую границу раздела событий.

*Интенциональные явления* и рефлексия в психологии – видение чего-то, например, своего Я или какой-либо внешней ситуации, фрагмента или картины во внутреннем мире человека. В этой области, «вопреки механистическому «атомизму», нет никаких неизменных, раз и навсегда данных элементов, вещей, предметов и т.д., чисто внешне связанных друг с другом» [6, с. 393]

*Отрицание* в логике и языке, как отделение истины от лжи (формальная логика), одного объекта от другого (естественный язык). «Всякое определение (т.е. номинация. – Ф.М.) есть отрицание» – Б. Рассел. Любое определение указывает не только на то, что определяется, но и на то, что остаётся за его рамками. Здесь так же, как и в одновременности, наличие делимости маркируется границей. Заметим, что делимость является материнским понятием всей математики.

«Всякое материальное тело, всякая определённая фигура становится определённой только в результате отграничения от всего остального» [Спиноза Б. Избр. произведения. Т. II, 1957, с. 568].

*Общая теория систем* как поиск общих для основных научных дисциплин закономерностей имеет в качестве базового принципа принцип *декомпозиции систем* на подсистемы, под-под-... подсистемы. Этот процесс деления всегда обрывался введением «чёрного ящика», который является кибернетической интерпретацией атомизма, и удержал кибернетику в лоне физики, не дав ей выйти к естественным наукам [Шрейдер Ю.А. Сложные системы и космологические принципы. Полная версия в Герасимова И.А. (отв. ред). Противоположности и парадоксы. М.: Канон+, 2008, с. 287–317]. В последнее время, однако, стал ясен

изоморфизм между системной реальностью и естественными языками. Он выражается универсальным характером текстовой формы: язык — словарь — текст — предложение — лексема — слово — слоги — буква..., что тождественно процессу декомпозиции в теории систем. Этот факт и лёг в основу лингвистического подхода к анализу и проектированию систем и метода структурирования (дерева) целей и функций [7; 8, с. 231, 276]. Неслучайно поэтому, что наряду с языком биология с её *анатомией* также является признанным истоком системной теории. Язык и биология в этом не противоречат друг другу.

С полидисциплинарностью теории систем связано большое число фактов. Это *дополнительность* в общенаучном понимании (см. обзор [9]). Примерами могут служить: восточная недuality и антиномизм русской религиозной философии как сопряжение двух законов, философская диалектика как борьба противоположностей. В позитивной науке — диссипативная структура как распадающаяся устойчивость.

Поэтому динамика систем является общенаучным воплощением принципа дополнительности. Это означает *различение* свойств, явлений и характеристик без отделения-автономии и объединение без слияния-исчезновения. Примеры пар дополнительных понятий: устойчивость и адаптационная способность, самостоятельность и контролируемость, детерминизм и хаотичность, предсказуемость и случайность, кооперация и конкуренция, эгоизм и альтруизм, логичность и парадоксальность, идеальное и материальное, разум и материя, слово и число, материя и понятие, внутреннее и внешнее, типичное и уникальное, структура и функция, программа и материя, теория и объект.

В *математике* делимость присутствует не только как знаменатель дробей и алгебраических выражений, но как, например, ряд фактов двойственности математической истины. Например, обращение стрелок и соответствия Галуа в теории решёток и порядка, двойственность Стоуна, имеющая различные обличья, проективная двойственность и другие. Такая двойственность сродни лингвистической. Она сопрягает два различных факта, связанных какой-либо простой операцией. Причём осуществление этой операции не требует технических усилий, а зачастую является сменой точки зрения. Другим хорошо известным примером является различение экстенсивной (аддитивной) и интенсивной (делимости) бесконечности в вопросе о существовании актуальной бесконечности. Семантику делимости как дополнительности можно усмотреть и в результатах о независимости аксиом теории множеств, когда с одной и той же системой совместимы аксиомы и их отрицания (аксиомы параллельности, непрерывности, выбора, фундирования). Таким образом, истина в математике даёт примеры составленности из двух различных частей.

Что является общим для всех процессов делений—различений? Что здесь является инвариантом? Для понимания этого можно обратиться к развитой в конце XX века теории фракталов, инициатором которой явился Б.Мандельброт [10]. Для нас важна особенность этой теории, заключающаяся в трансдисциплинарности фрактальных структур и единстве способа их исследования – масштабной симметрии, скейлинге. Фракталы как раз и являются следами бесконечной делимости материи. Здесь делящей операцией является скейлинг. Их топологические примеры – множество Кантора, ковёр Серпинского, континуум Менгера и их разнообразные варианты, которые получаются каким-либо вариантом процесса бесконечного деления-вырезания, подсказывают этот инвариант:

Инвариантом процесса бесконечной делимости являются границы тел, процессов, значений смысла. Именно они являются истинными фракталами, в противовес физическим, то есть фракталам с ограниченным диапазоном скейлинга.

Фрактальная теория является синонимом теории иерархического строения материи, вложенности материальных структур друг в друга на всех масштабах [11, 12]. Иерархию можно рассматривать как геометрию последовательного деления. Бесконечная иерархия суть бесконечная делимость материи. Её вариант известен как фрактальная космология [13, 14].

Но граница не является физическим понятием и, как следствие, не привлекает специального внимания в научной литературе. Физика, бывает, оперирует квантованным, дискретным пространством-временем, но не вводит и не рассматривает границу как самостоятельное понятие.

Если с делимостью материи всё более или менее понятно, то как быть, например, с делимостью пространства, времени, смыслового поля? Что здесь делится? Однако если обратиться к нефизической реальности, то оказывается, что нефизические разделы науки, объединяемые фрактальной топологией, дают необходимый эмпирический материал.

Прежде всего, упомянем математику. В математике понятие пустого множества выполняет вспомогательную функцию, аналогичную пробелу в естественном языке. Здесь известна конструкция универсума множеств Дж. фон Неймана, которая строится из пустого множества:

$$\emptyset, (\emptyset), (\emptyset, (\emptyset)), (\emptyset, (\emptyset), (\emptyset, (\emptyset))), \dots (\emptyset, \dots((\emptyset))\dots), \dots$$

Из чего состоит этот универсум, который получается *от-делением* одного пустого множества от другого? Очевидно, из границ между пу-



стыми множествами, или из границ и пробелов. Физически это бессмыслица, экспериментально ненаблюдаемые дыры внутри дыр, расположенные между дырами. Поэтому в физике нет пустого множества, и, соответственно, её понятия не приспособлены для описания такого мира. Но, с другой стороны, эта метафора «поверхности внутри поверхностей» – один из образов геометрии в биологии [15].

Поверхность, оболочка есть синонимы формы и, соответственно, пространство фракталов есть пространство форм. Э.Шредингер в разделе «Форма, а не содержание – фундаментальная концепция» своей книги 1952 года неявно указывает на форму в качестве инварианта процессов бесконечного деления как последовательного увеличения разрешающей способности, то есть скейлинга, наблюдения структуры материи [16].

Далее, очевидно, что естественный язык не является физически наблюдаемой сущностью. Из чего же он состоит? Что он есть? Где он есть? Прежде всего следует обратиться к понятию Сущности – фундаментальному понятию философии имени языка. Сущность – это то, что не нуждается в чём-либо для своего существования и подлежит всякой вещи. Она имеет иерархическое строение – дерево Порфирия, её действие – диарезис, дихотомическое деление [17, с. 32–34]. Движение по иерархии Сущности, связывающее человека с миром, является одновременно и логическим, и онтологическим, то есть на ней располагаются и вещи, и понятия [17, с. 37]. Математически эта двойственность соответствует тому, что делимость под видом фракталов появляется и в идеальном мире – в фазовых пространствах динамических систем, множестве нелинейных зависимостей, и в материальном мире. Поэтому оправдан взгляд на материю языка в виде теории «чистых оппозитивных сущностей» Ф. де Соссюра и контрастной теории значения [17, с.138]. Согласно этим воззрениям, слово определяется по контрасту с другими словами, и в языке нет ничего кроме различий.

Однако границы не только отделяют, но и связывают. Таковы, например, границы тел, органов, систем в биологии. Поэтому, например, принцип единства организма и среды предполагает наличие границы между организмом и средой, которая выполняет ещё и связующую функцию: кожа не только защищает, но и, например, дышит. В языке этот принцип выглядит как неконтрастная теория значения [17, с. 138]. *Ан-атомическое* строение тел и внутренних органов можно, сдвинув внимание с процесса скейлинга размеров плоти [18, р. 36] на накапливающиеся очертания их поверхностей, интерпретировать как вспенённые поверхности, поверхности внутри поверхностей.

Связь языка и мышления также проходит через понятие границы. Ощущение и восприятие человека, служащие для получения системной

информации о мире, начинаются с прямого контакта органов с окружающей средой и разнообразными физическими энергиями. *Субстанцией контакта как раз и является граница. В психофизике о её роли свидетельствуют названия методов исследования порогов чувствительности — метод границ, метод обнаружения сигналов* [19, с. 23–25, 52–53].

«Экспериментально на широком материале было доказано, что бинарная структура “единица–пара” составляет первичную молекулу докатегориального мышления. Суть этой психологической операции в том, что она в одно и то же время и двухэлементна, и нерасчленима на два элемента. Элементы одновременно слиты и обособлены. ... Дуальность у истоков мышления предшествует единичности. Б.Ф.Поршневу связывает с дипластией более широкое определение. По Поршневу, это присуще только человеческому сознанию — психологический феномен отождествления двух элементов, которые одновременно исключают друг друга. Операция дипластии универсальна, считает Поршневу, ибо она охватывает сочетания и представлений, и действий, и слов, и отношений. Её структура одновременно и простая, и сложная. В ней действует психологический принцип: всякое объединение противопоставляет, мера противопоставления есть мера объединения. ...Сущность оппозиции обнаруживается не в соотношении элементов, а в одном элементе, который есть полярная двузначность. В пределах дипластии формальная логика не действует: здесь нет однозначности, нет закона исключённого третьего. И если дихотомию можно ввести в интеллект ЭВМ, то операция дипластии непосильна для счётно-решающего устройства» [Ястребова Н.А. Дипластия и эстетическое сознание/ Актуальные вопросы методологии современного искусствоведения. М., 1983, с. 316–332].

Собственно, и физика, как наука о законах природы, начинается с исследования взаимодействия, то есть восприятия контакта, областей пространства-времени, которое затем представляется в символическом виде. Таким образом, логическая и онтологическая фрактальность сходится с человеческим восприятием.

Языки в целом также воспроизводят обсуждаемое различие. По частоте использования в английском и русском словарях на первом месте стоят не те понятия, которые считаются фундаментальными в философии и науке — материя, сознание, противоречие, разум и т.д., — но служебные слова языков — предлоги, союзы, частицы, — отражающие отношения между вещами. Среди них на первом месте оказываются определённый артикль «the» в английском языке и предлог «в» в рус-

ском. Более универсален лишь знак пробела. Первое творит определённую, выделенность, выполняет различающую функцию.

«The» — наиболее абстрактный элемент языка, придающий смысловую конкретность другим элементам; это конкретизирующая абстракция, то “свое” для каждого, что является “общим” для всех. Семантика второго — вмещённость, “определяет пребывание всякой вещи в какой-то другой, даже самое малое что-то вмещает, даже самое большее чем-то объёмлется”, “представляет мир как систему оболочек”. Русский язык рассеян в отношении определённости вещей и сосредоточен на их окружённости, пребывания внутри чего-то. Вещь определяется не сама по себе, в отличие от другой вещи, но через то большее, внутри чего она пребывает. Таково это мирообразующее в России свойство свёрнутости и заключённости. Отсюда возникает толкование “великой цепи бытия”, связывающей всё сущее. Предлог “в” помогает нам более буквально и вместе с тем концептуально истолковать этот образ, поскольку он описывает модус, каким одно звено сцепляется с другим: одновременно охватывая и охватываясь. Расплетая “великую цепь”, мы получаем отдельные разорванные звенья: “бытие” и “познание”, “материя” и “дух”, “объект” и “субъект”, “физика” и “психология” и другие более частные познавательные категории. Но скрепляющая основа всего — то, что держит все эти звенья вместе, сцепляет их и делает цепью — “в”. Китайская эмблематика начал Инь и Ян, земного и небесного, женского и мужского, — восточный вариант “великой цепи бытия”, изобразительный иероглиф того, что обозначает предлог “в”. Женский тёмный кружок вписан в мужское светлое поле, а мужской светлый — в тёмное женское, и вместе они, обнявшись, образуют круг» [*Эпштейн М.* Предлог «В» как философема. Частотный словарь и основной вопрос философии // Вопросы философии, 2003, №6, с. 86–96].

Приведём в этой связи мысль Б.Рассела:

«Всё наше знание а priori касается чего-то такого, что, говоря точно, не может существовать ни в духовном, ни в физическом мире. Это нечто может быть обозначено лишь теми частями речи, которые не являются существительными, это — качества и отношения. Предположим, например, что я в своей комнате. Я существую, и моя комната существует, но существует ли “в”? С другой стороны, очевидно, что слово “в” имеет смысл; оно обозначает отношение, в котором нахожусь я и моя комната. ... Эти отношения должны быть помещены в мир, который не есть ни духовный мир, ни физический. Этот мир очень важен

для философии, а особенно для априорного познания» [Рассел Б. Проблемы философии. СПб.: 1914, с. 66 – цит. по [17, с. 129]].

*Фрактальность* – в переводе *фрагментированность*, то есть делимость. Фрактальная геометрия видит одновременно и объект, и его составляющие части с некоторым разрешением. Топологическая, то есть геометрическая, семантика трёх универсальных слов – пробела, определённого артикля «the» и союза «в» – в точности воспроизводит фрактальный взгляд на мир. Вещь, на которую указывает артикль «the», окружённая системой оболочек, сама вследствие своей делимости предстаёт как оболочка для своей, различимой посредством пробела части-подсистемы, на которую вновь указывает «the», которая, будучи делимой, в свою очередь становится оболочкой для другой, обнимаемой ею части и т.д.

Какова роль делимости? Какие события она производит? В случае с материей ответ понятен. При движении по координате делимости происходит изменение свойств материальных образований: механические свойства через тепловые, электрические и т.п. переходят в квантовые [20]. То же видно и при разложении света призмой на цвета радуги.

Обращение к языку вводит в рассмотрение сосуществование оппозиций, отсутствие логических тупиков, гетерогенность смысла – энантиосемии и полисемии [21].

Рассмотрим лист белой бумаги, который выкрашен с одной стороны в чёрный цвет или на ней изображён цветной рисунок, пейзаж, например. Механика, то есть переворачивание листа, моделирует закон исключённого третьего или абстракцию в случае с рисунком. Запустим мысленно процесс бесконечного деления–разрезания листа. Он сведёт наш опыт к элементарным частицам. При этом, очевидно, исчезнет различие между сторонами листа. Получается отрицание закона исключённого третьего. Артикль «the» переходит в союз «в». Дальнейшее движение по координате делимости при достижении точной масштабной симметрии приводит к безмассовым частицам, то есть к свету. Свет часто упоминается как субстанция чистой геометрии.

Таким образом, феноменологически делимость работает как причинность качеств, включающая многозначность значений смысла, разнообразие явлений. Логически она включает в рассмотрение дополнительность, сосуществование оппозиций, отрицание закона исключённого третьего.

Но отрицание закона исключённого третьего само является утверждением логики и поэтому может быть подвергнуто отрицанию. Эта

петля автореференции формально описывается следующим образом. Исходя из дилеммы истинности некоторого утверждения  $A$ , имеем:

закон исключённого третьего  $A \vee \neg A$  ,  
 его отрицание  $\neg ( A \vee \neg A ) = \neg A \wedge A$  ,  
 дилемма законов  $( A \wedge \neg A ) \vee ( A \vee \neg A )$  ,  
 отрицание этого утверждения  
 $\neg ( A \wedge \neg A ) \vee ( A \vee \neg A ) = ( \neg A \vee A ) \wedge ( A \wedge \neg A ) = B \wedge \neg B$   
 и так далее.

Эта последовательность демонстрирует сосуществование противоположностей с более сложной структурой, семантикой. Здесь неявно скрыто иное, лингвистическое понимание отрицания, отличное от логики классической математики (об этом и о дизъюнкции – ниже). Таким образом, действие делимости работает ещё и как усложняющий–упрощающий механизм, часто упоминаемый в общей теории систем.

«Изучая историю науки, мы замечаем два явления, которые можно назвать взаимно противоположными: то за кажущейся сложностью скрывается простота, то, напротив, видимая простота на самом деле таит в себе чрезвычайную сложность» [Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983, с. 95].

Замечание Пуанкаре имеет аналог в лингвистике. Это представление о прозрачности знака. Рассматривая картину, мы можем видеть либо цветные мазки, слой краски, следы кисти, либо её содержание, пейзаж и людей. «Мы воспринимаем содержание картины и смысл знака, только переставая воспринимать саму материю картины или знак» [17, с. 209]

Суммируя, нетрудно видеть, что дополнительность и сосуществование противоположностей имеет смысл рассматривать как природное явление со своими причинно-следственными связями. Их действие узнаётся в процессах развития, которым много внимания уделили в своё время кибернетика и системный анализ. Развитие как раз и включает в себя как отличительные черты усложнение, появление–угасание качеств.

Косвенно естественность закона исключённого третьего можно усмотреть из многовекового опыта решения парадоксов. Здесь аргументы «за» и «против» уравнивают друг друга и неотделимы [22]. Это может служить указанием того, что естественным решением парадоксов является какой-либо вариант принципа дополнительности.

*Фракталы-как-границы* узнаются в Ничто Леонардо да Винчи и его технике рисунка «сфумато» – «середине, которая имеет свет и тень и которую нельзя назвать ни светом, ни тенью, но равно причастную

свету и тени». Это зримость незримого, диалог света и тени, неуловимость перехода от объекта к воздуху:

«... граница вещи есть поверхность, которая не есть часть тела, облечённого этой поверхностью, и не есть часть воздуха, окружающего это тело, а есть то среднее, что находится между воздухом и телом. ... Ничто — то, что не причастно никакой вещи. Следовательно, поскольку границы тел не являются какой-либо их частью, а взаимно являются началом того и другого тела, эти границы ничто, и потому поверхность — ничто. ... Ничто не имеет середины, и границы его — ничто. ... Наименьшая природная точка больше всех математических точек, и доказывается это тем, что природная точка обладает непрерывным количеством, всякая же непрерывность делима до бесконечности. А математическая точка неделима, ибо она не есть количество. ... Среди великих вещей, которые находятся меж нас, Ничто — вещь величайшая. Ничто обретается во времени, и члены его протянуты в прошлое и будущее, оно присваивает ими все прошлые творения или имеющие быть и в неживой, и в живой природе, но ничем не владеет из неделимого настоящего. Оно не распространяется на бытие какой-либо вещи. ... Точка во времени должна быть приравнена к мгновению, а линия имеет сходство с длительностью известного количества времени. И подобно тому как точки — начало и конец линии, так мгновения — граница и начало каждого промежутка времени» [*Баткин Л.М. Леонардо да Винчи о бесконечном// Природа 1983, №7, с. 76–87*].

**Соединимость.** Расширим наш опыт. Делимость порождает разрывность, различие. Явление, дополнительное делению — соединение, является условием её осуществления и действует противоположно. Оно так же привычно и имеет много синонимов (в нижеприведённых цитатах некоторые из них подчёркнуты).

«Наука всегда обречена периодически переходить от атомизма к непрерывности и обратно и... эти колебания никогда не прекратятся» [*Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983, с. 491*].

«Поочерёдно выступающие на передний план точки зрения “теории поля” и “элементарных частиц” представляют собой в данное время или (топологически) евклидов континуум, в котором основные объекты являются функциями непрерывно меняющегося времени или частицы, внутреннее содержание которых не анализируется» [*С.Улам Нерешённые математические задачи, М.: Наука, 1964, с. 106*].

«Понятие *сходства (подобия)* фундаментально. Без него не может обойтись ни жизненная практика, ни научная теория, ни природа, ни искусство. ... *Уподобление* и *разуподобление* формируют материальные и духовные ценности, социальную жизнь и культуру — массовую и элитарную. От понятия подобия ведёт пути в сторону семиотики и семантики, фигур речи и фигур, фигурирующих на подмостках, кафедрах, трибунах и экранах. ... Отношения между действительностью и теми или иными формами воспроизведения развиваются на шкале, идущей от *подобия* к истинности». [Арутюнова Н.Д. Язык и мир человека. М.: Языки русской культуры, 1999, с. 631].

«Большое количество теорий и объяснений греков принадлежат к одному из простых логических типов. Характеристика первого типа в том, что объекты классифицируются или объясняются в отношении одного к другому, или — иначе — *пары противоположных* принципов, второй — вещь объясняется путём *сходства* или *соединения* с чем-либо ещё» [Lloyd G.E.R. *Polarity and Analogy*. Two Types of Argumentation in Early Greek Thought. Cambridge U.P. 1966, p. 7].

«*Разделение* и *соединение* являются двумя неразрывными жизненными актами. Может быть лучше сказать так: неизбежно, хочешь или не хочешь, переходить от *общего* к частному, от частного к *общему*, и чем деятельнее будет поддерживаться взаимоотношение этих функций духа, подобно *вдыханию* и *выдыханию*, тем лучше будет для жизни и её друзей» [Гёте И.В. Избранные философские произведения. М.: Наука, 1964, с. 309].

Вместе с делимостью соединение образует динамическую пару базовых формообразующих процессов природы, которая известна под разными названиями в разных контекстах. Исходно у Анаксимена она появляется как «разрежение и сгущение». Современные общенаучные названия: энтропия—негэнтропия, конвергенция—дивергенция, концентрация—рассеяние.

Один член этой пары порождает разрывность, различия, гетерогенность, ведёт к образованию границ, хаотизирует; второй — непрерывность, сходство, гомогенность, стирает границы, упорядочивает. Понятия, характеризующие второй член пары часто начинаются частицей *син-*: синтагма, синтез, синтаксис, синестезия, синхрония, синтетика, синдром, синергия, симфония, синкретика. Отдельно стоит *гомонойя* (омония *ὁμόνοια* греч.) — согласие мыслей, разума.

Приведём вновь для раскочки интуиции и пополнения «экспериментальной базы» и другие примеры, не заботясь о сводимости их друг

к другу. Их роль в нашем рассмотрении заключается в том, что они выполняют роль, аналогичную координатным системам механики, но во фрактальной геометрии нефизических наук.

Прежде всего это, наверное, Любовь и Вражда, гармония и дисгармония как принципы античной философии, означающие пару слияние—разделение. Их восточный аналог — Инь и Ян — имеет смысл силового и консервативного начал.

Космическая симпатия означает сочувствие, соответствие предметов или явлений, их взаимодействие, соучастие одного происходящего в другом, динамическую взаимосвязь целого и частей, а также всеобъемлющего тела — мира. Физической основой её является состоящее из огня и воздуха дыхание (пневма), распространяющееся одновременно к центру и к периферии тела [23, с. 608].

Пара синхрония—диахрония известна в нефизических разделах науки. Диахрония характеризует историческую последовательность развития явлений. Синхрония — сосуществование этих явлений в определённый момент времени. Диахронически разделённые явления не образуют систему. Синхронически связанные — систему образуют. Эта пара топологически аналогична парам развитие — функционирование, эволюция — организация, история — структура в исследованиях сложных систем [23, с. 163].

Путь вниз — возрастание энтропии и дезорганизация — сопряжён с путём вверх — убыванием энтропии и повышением организации. Эта пара формирует логику круговорота,

«восходящая ветвь которого образована процессом возникновения живого вещества, а нисходящая — процессом разложения органических остатков. ....Гибель старого и возникновение нового — это, по существу, старая притча о распутье дорог и судьбе; это один и тот же процесс изменения энтропии в одну из двух взаимно противоположных сторон: либо в сторону возрастания, либо в сторону уменьшения» [24, гл. III, IV, VI].

Возможно, наиболее простой пример лабораторного масштаба даёт свет. Линза и призма в исследовании световых явлений действуют дополнительным образом. Линза фокусирует, то есть конвергирует, световую энергию. Призма расщепляет, то есть рассеивает её. Линза гомогенизирует, призма создаёт раду, то есть образ.

Так же просто увидеть эту пару в механике: центробежные и центростремительные силы, силы отталкивания и притяжения.

В биологии единство ветвления и слияния, эволюционного разнообразия и генетического однообразия даёт пара изменчивость—на-



следственность. Изменчивость разделяет виды и организмы, создаёт отличия, наследственность – их связывает. Другой пример дают макро- и микроэволюция. Микроэволюция – это возникновение внутривидовых форм (дробление видов), макроэволюция понимается как возникновение надвидовых форм, ведущих к образованию родов более высокого ранга. Первый процесс происходит на генетическом микроуровне, второй – на организационном макроуровне [25, гл.3].

Эти явления развиваются на древесной структуре. Древесные и иерархические структуры – общее место в биологии. Здесь в полную силу работает метафора Мирового Древа из мифологических представлений. Она служит пространством оппозиций, которое узнаётся в повседневной жизни – строении нервной системы, систем кровообращения и дыхания человека, древа жизни и эволюции. Своды законов и генеалогические деревья также вкладываются в него [27–29, 30].

В психологии – ощущение и восприятие как объект и контекст, как аналог биологического принципа единства организма и среды:

«... общий принцип восприятия, а именно восприятия сигналов, зависит не только от непосредственной сенсорной информации, которую он несёт в себе, но также и от контекста, в котором он возникает» [Шиффман Х. Ощущение и восприятие. Питер, 2003, с. 86].

В человеческом восприятии это вечный спор глаза и уха. Зрением мы воспринимаем синхронный, одномоментный срез реальности. Слух же служит для восприятия временной последовательности, процессов – даёт диахронную координату.

Эстетическое, художественное восприятие также является дополнительной структурой. Образ гетерогенен, логика – гомогенизирует. Образ – синтетическое, разнокачественное образование многих понятий, транспарантное единство [31, с. 20]:

«Эстетическое освоение действительности происходит в единстве двух форм человеческого познания: чувственной и рациональной. Художественное обобщение содержит предметно-образные и понятийно-логические компоненты, объединяет живое созерцание и абстрактное мышление. ... В эстетическом познании и восприятии мира обсуждаемая пара предстаёт как сукцессивные процессы – воспринимаемые последовательно, и симультаные – воспринимаемые одновременно. В итоге возникает двойная организация как времени, так и пространства» [Гончаренко С.С. Зеркальная симметрия в музыке. Новосибирск: Новосиб. гос. консерватория им. М.И.Глинки, 1993, с. 7, 13–14].

Нейрофизиология зрения фиксирует два его основных механизма, пополняющих наш экспериментальный материал:

«Как показывают исследования зрительного восприятия, в модели мира, создаваемой мозгом, помимо механизма классификации участвует второй механизм. Благодаря первому мы опознаём объект, относим его к определённому классу; благодаря второму механизму мы видим его, то есть можем описать во всех мелких деталях. ... Классификация – очень вырожденное описание, она совершается с помощью минимального числа признаков. Но классификация не единственный механизм зрения. Одновременно происходит отнюдь не вырожденное, но, напротив, полное описание предметов внешнего мира с их деталями и пространственными соотношениями как между деталями внутри предметов, так и между самими предметами. ... Необходимость выделения двух механизмов описания зрительного мира сформулирована на основании ряда фактов, которые известны каждому из повседневного опыта». [Глезер В.Д. Зрение и мышление. СПб, 1993, с. 13, 174, гл.VII].

Как видно, энтузиазм, сопровождающий фрактальную геометрию, является оправданным. Фракталы, по сути, есть расширение наблюдаемости, введение в неё второй, помимо абстракции-выхватывания, функции восприятия – детализировки. Это аналогично наведению теоретической резкости на объекты евклидовой геометрии.

В исследовании мышления также присутствуют два полюса, соответствующие двум типам взаимосвязей между компонентами объекта, двум типам абстракции. Первый тип характеризует органическую связь между элементами, когда нет ни одной зоны, где можно было бы их разделить и изучать взаимосвязанно. Второй – когда элементы изначально разделены физически и пространственно. Первому соответствует абстракция взаимопроникновения как форма дополнительности, второму – абстракция расчленения объекта.

«Соответственно этому...первый способ мышления, использующий первый уровень абстракции, будем называть недизъюнктивным. И, наоборот, второй способ мышления, использующий второй уровень абстракции и основанный на другой онтологической предпосылке, обозначим как дизъюнктивный. ... Мышление как реальный, живой процесс ...не является дизъюнктивным. Недизъюнктивный подход в своей исходной наиболее общей форме реализуется как анализ через синтез в процессе мышления. Подытоживая наши рассуждения, можно сказать, что существует не один, а по крайней мере два основ-

ных способа мысленного расчленения опознаваемых объектов: на 1) дизъюнктивные (например в математике) и 2) недизъюнктивные (например, в психологии) объекты или компоненты» [Брушлинский А.В. Мышление и прогнозирование М.: Наука, 1979; Субъект: Мышление, учение, воображение. М. – Воронеж, 2003, с. 113, 118, 163].

Соответственно, выделяют два типа мышления – дивергентное (творческое) и конвергентное (стереотипное).

«Дивергентное решение проблемы включает множество вариантов, каждый из которых можно рассматривать как верный. Иной способ решения проблем основан на конвергентном мышлении. В этом случае правильный ответ один, и он формируется согласно закономерностям логического мышления. ... На нейрофизиологическом уровне конвергентное функциональное объединение нейронов подразумевает их более стабильную организацию с устойчивыми, чётко определёнными фокусами взаимодействия. Напротив, дивергентное взаимодействие – это гибкая интеграция диффузно распределённых нейронных ансамблей ритмической активности». [Разумникова О.М. Мышление и функциональная асимметрия мозга. Новосибирск: СО РАМН, 2004].

Эти два режима мышления определяют, соответственно, женский и мужской тип личности [32]. Левое полушарие работает аналитично, абстрагируя жёсткие связи между предметами внешнего мира и словом, формируя его символическую модель; правое – обеспечивает целостное синтетическое описание мира, даёт иконическую, то есть образную, модель. Это обуславливает деление людей на правшей и левшей. По мысли авторов, асимметрия полушарий мозга является кульминацией природной асимметрии. [33, гл.3].

Аналогична ситуация в психологии, где различаются синхронические и диахронические теории. Первые пользуются теориями синхронного ряда – механистическими типа стимул–реакция (который, как и схема вход–выход «чёрного ящика» кибернетики, явно является копией второго закона механики). Они локальны во времени. Вторые рассматривают поведение индивида на значительно больших кросс-временных масштабах и вводят в анализ контекст, критикуя тем самым синхронистические теории [34, с. 348].

Язык является областью, возможно, самой богатой примерами. Обсуждаемая функциональная асимметрия в языке обусловлена двойным модусом его существования, двукратной, материально-идеальной соотнесённостью. Основное назначение всякого языка в том, что, с

одной стороны, он служит средством материализации мышления, с другой – идеализации действительности [35, с. 8–9, 19], и сочетает в себе свойства отображения и обозначения. Глобальная асимметрия сохраняется и на уровне знака:

«Свойство неоднозначного соответствия формы словесного знака его содержанию, сформулированное в науке о языке в виде принципа “асимметричного дуализма” придаёт словесному знаку особенную семиологическую черту – двойной репрезентации знака – в системе и в речевых актах. Сущность семиологической природы словесного знака, являющегося языковым коррелятом познавательных категорий отождествления и различия, заключается в способности дифференцировать и отождествлять себя по отношению к другим знакам» [Карцевский С.О. Об асимметричном дуализме лингвистического знака / Звегинцев В.А. История языкознания XIX–XX веков в очерках и извлечениях. Ч. II, М.: 1965, с. 22–23].

Здесь уместным будет рассмотрение асимметричного дуализма рациональных чисел в арифметике. Знак рационального числа имеет вид  $x = m / n$ , где  $m$  и  $n$  – натуральные числа. Само число образуется композицией двух операций – деления и сложения. То есть сначала целое разделяется на  $n$  частей, из которых затем  $m$  соединяются в новую целостность, образуя величины числа. Такое совпадение не случайно. Семиотика давно установила аналогию между алфавитными и числовыми системами.

Представление о «двух языках» также, по-видимому, вкладывается в схему асимметрии как аналог пары микро- и макроэволюции в биологии. Всякий человеческий язык имеет часть, общую для всех языков народов Земли, и часть, специфическую для данного этноса, отражающую его национальное своеобразие. На одном из них люди говорят о (наблюдаемых) явлениях – вещный язык, на другом – о (ненаблюдаемых) сущностях (язык молчания, понятий) [17, с. 7, 108, 166]. Эта пара соответствует дедуктивному и индуктивному началу в языке [36].

Собственно, и само слово может служить и как языковая номинация, то есть быть термом, и представлять понятие, которое отражает связи предметов и явлений действительности, фрагменты действительности, системы знаний [23, с. 513]. То есть слово как последовательность букв алфавита также служит и различению, и объединению. Как знак оно материально, то есть непрозрачно для видения деталей, и прозрачно, то есть представляет картину, фрагмент реальности, одновременно.

Парадигматика как совокупность слов, в чём-то отличных друг от друга, имеет различающий смысл, является дивергентной структурой. Оппозиция – основа парадигматики. Синтагматика – как объединение слов по признаку сочетаемости, общности, действует конвергентно.

Более общо дополнительность отражена в паре синхрония–диахрония. Синхронию, как состояние языка в определённый момент времени, можно сопоставить образу в человеческом восприятии. Диахронию как последовательность развития языка – логике. Здесь сложность заключается в понятии времени. В области синхронии можно выделить словарь как множество дискретных элементов и грамматику, как способ их связи. Словарь – дивергентное понятие, грамматика – конвергирующее. Диахроническую последовательность можно также мыслить как множество событий–состояний языка с правилами следования–преобразования значений его единиц. Если представить себе одновременное осуществление такого анализа синхронического и диахронического состояний языка, то станет ясно, что времена этих процессов различны.

В целом нежесткость правил, классификаций, подвижность границ объёмов понятий, многочисленные примеры оппозиций и пар противопоставлений, проявляющиеся в виде устойчивого явления «нет правил без исключений» на всех уровнях языка, свидетельствуют о присутствии отрицания закона исключённого третьего в логике языка (см. выше).

С этой логической точки зрения, всё концентрируется к известной проблеме дизъюнкции, смыслу союза «ИЛИ». Различают два его значения: исключаящее ИЛИ и объединяющее ИЛИ, принятое в формальной логике [37, 38]. Можно видеть, что семантика этого союза в точности соответствует рассматриваемой асимметрии процессов слияния–различения. Элементами языка, которые оказывают влияние на значения его смысла, являются средства выражения импликации, следования событий. В связи с последующей импликацией ИЛИ действует объединительно, синонимично конъюнкции (именно этот смысл он имеет в формальной логике, где употребляется в несвойственном ему значении [37, с. 148]), союзу И–И. Вне связи с импликацией действует разделительно, как исключаящее ИЛИ [37, с. 148]. Связь между этими значениями устанавливается отрицанием в его лингвистическом смысле «не-А, значит В». Отрицание в лингвистике означает оппозицию высказыванию как наличие или понимание факта, не входящего в его область определённости, номинации. Поэтому «неразделяющее ИЛИ» = «объединяющее ИЛИ», то есть конъюнкции. Отрицание закона исключённого третьего есть утверждение о дополнительности в рассмотренном выше смысле.

Таким образом, союз «ИЛИ» формально имеет два противоположных значения: разделительной дизъюнкции и объединительной

конъюнкции. Он отражает либо наличие взаимодействия, либо его отсутствие. Геометрия этого слова есть граница, и, соответственно, язык, в смысле оппозитивной теории значения, состоит из значений слова ИЛИ.

Эта ситуация аналогична семантике иероглифа *luan* в китайском языке. Если в семантике союза ИЛИ соотнести делимость как различающее OR с разрушением порядка, а соединение AND с упорядочиванием, то аналогия с парадоксальным смыслом этого иероглифа становится очевидной [39, с. 191–197].

Такой же двойственной является геометрия пары: метафора—логика.

«Недостаточность логики в обычном языке восполняется использованием метафор. Логика и метафоричность текста — это два дополняющих друг друга его проявления» [Налимов В.В., цит. по кн. Арутюнова Н.Д. Метафора и дискурс. М.: Прогресс, 1990].

«Классическая метафора — это вторжение синтеза в зону анализа, представления (образы) в зону понятия, воображения в зону интеллекта, единичного в зону общего, индивидуальности в страну классов» [Арутюнова Н.Д. Метафора и дискурс. Вступ. статья в кн. Теория метафоры. Арутюнова Н.Д. (сост.) М.: Прогресс, 1990, с. 5–32].

Избирательность и суммирование — два шаблона взаимодействия в неживой природе.

«Избирательность как свойство отражения в неживой природе создаёт арсенал возможностей для избирательного отражения на уровне органической природы...является предпосылкой формирования на высоких ступенях развития жизни аналитических способностей органов чувств — ...тонкого различения цветов, звуков, запахов, вкусовых ощущений и т.д. ... Суммарность в общих чертах кажется свойством, противоположным избирательности ... Во взаимодействиях, в которых количественные особенности не оказывают такого (тонкого, адекватного) воздействия на процесс отражения, проявляется способность к суммированию воздействий. ... Создание модели нейрона и его основных свойств пространственного и временного суммирования оказалось возможным, поскольку в неживой природе имеют место аналогичные свойства, хотя бы и в более элементарной форме. Запоминающие устройства кибернетических систем основаны на возможности сохранения следов неорганическими телами и т.д.» [Тимирязева Н.В. Особенности отражения в неживой природе // Философские науки, 1964, №5, с. 53–58].

Здесь остаётся добавить только то, что геометрия нейрона, как известно, имеет древовидную форму. Тогда известное высказывание Дж. фон Неймана о том, что «лучшей моделью нейрона является сам нейрон», приобретает далеко не специально научный смысл.

Семиотика является перекрёстком многих наук, в том числе о языке, мышлении:

«Инвариантом всех систем смыслообразования является биполярная структура, на одном конце которой размещён генератор недискретных текстов, а на другом полюсе — дискретных; генератор дискретных текстов увеличивает текст по принципу линейного присоединения сегментов, генератор недискретных — по принципу аналогового расширения». [*Лотман Ю.М.* Мозг-текст-культура — искусственный интеллект // Семиотика и информатика. 1981, вып.17, с. 10–11].

Авторы книги [33] в качестве различия людей на правшей и левшей обосновывают гипотезу о различии пространственно-временной организации активности их психики. В её основе лежит асимметрия между прошлым и будущим:

«Противоположно содержание индивидуальных прошедшего и будущего времени, составляющих части сознания: психомоторные и психосенсорные процессы; чувственное и абстрактное познания, сенсорно-перцептивные и речемыслительные процессы ... Можно выделить различия при сопоставлении прошлого и будущего по содержанию: известно—неизвестно, дискретно—непрерывно. ... Эти различия предполагаются важными для реализации двух главных составляющих сознания — психосенсорных и психомоторных процессов. ... Асимметрия — достаточная степень противоположности индивидуальных свойств прошедшего и будущего времени обязательна, видимо, для того, чтобы сознание человека было ясным, а психическая деятельность эффективной. ... Согласно допущению о двух направлениях времени, и психосенсорные, и психомоторные процессы совершаются параллельно и одновременно, но в разнонаправленных временах — от настоящего к прошедшему и от настоящего к будущему» [33, с. 174–175, 176].

Судя по изложению, авторы под двумя временами имеют ввиду два направления одного физического времени. Известно, однако, какие большие сложности несёт это обращение времени в исследованиях необратимых явлений в физико-химии (см. например, работы И.Пригожина и его школы) и особенно в естественных науках. Если

принять во внимание то качественное различие между процессами сознания, которые авторы анализируют [33], и тот факт, что воображение, опираясь на прежний чувственный опыт, так же как и мышление, является генератором нового, то есть обращено в будущее [6, с. 381–403], то имеет смысл обратиться к проблеме фатализма и случайности будущего, известной со времён Аристотеля и по сей день, но отсутствующей в арсенале точных наук. Её логическое содержание составляет применимость закона исключённого третьего к предсказаниям о событиях будущего или более обширной проблемы «логика и время». К настоящему времени в этой проблеме существует представление о возможном её решении в виде временных структур, линейных в прошлое и ветвящихся в будущее [40, с. 153–180]. Это один из видов пары детерминизм (фатализм) – случайность (свобода воли). Такая временная асимметрия ближе функциональной асимметрии сознания, так как имеет с ней общую конвергентно–дивергентную топологию.

В *географии* как фундаментальное свойство отмечается дуализм географического пространства (среды), состоящий в сосуществовании рассеянных систем с нуклеарными, то есть системами с центром (фокусом). За этим дуализмом стоит сопряжённая пара рассеяния вещества и его концентрации вокруг точек роста [41].

В *геологии* рассматриваемая пара процессов представлена денудацией и аккумуляцией, сносом и осадконакоплением. Как и во всех других естественных науках, в геологии сосуществуют методы измерения и наблюдения, дедуктивные и описательные теории. Наличие многочисленных исключений из правил, так же как и в естественном языке [42, 43], доказывает присутствие глобальной дополненности в логике этой науки.

В *физико-химии* – это энтропия и энергия, диффузия и реакция, диссоциация и агрегация. Здесь она известна как конкурирующая пара, которая рассматривается как аналог пар причина–следствие, детерминизм–случайность. Эта аналогия иллюстрируется многочисленными примерами из термодинамики, кинетики, физической химии, физики атмосферы и даже социологии – интеграция и сегрегация групп людей [44].

В *химии* – захват и потеря электронов, окислительно-восстановительные реакции. Захват и испускание элементарных частиц в ядерных реакциях также вкладываются в обсуждаемую топологическую пару.

Вариантом пары энтропия-энергия является оппозиция энтропия–информация Л. Бриллюэна, связанная с неопределённостью и предсказуемостью. Её синонимом является пара динамика–термодинамика [45, ч. III]. В теории динамических систем она представлена показателями Ляпунова. Движение с положительными показателями Ляпунова ведёт к разбеганию траекторий и непредсказуемости. От-



рицательные показатели ведут в область сжимающихся траекторий и увеличения определённости.

*Теория организации социальных структур* в своём поиске единства законов природы с законами общества под влиянием картины мира детерминированного хаоса выделяет бинарность природы социума в виде пар: разнообразие—униформизация, жесткость—гибкость, предсказуемость—свобода и т.д. [46], которые оказываются более адекватными определяющим проблемам этой науки, нежели механистическая парадигма.

В истории развития и становления вычислительной техники был период конкуренции между цифровыми и аналоговыми вычислительными устройствами. Топологически эта пара эквивалентна паре термодинамика—динамика.

В *математике* естественным синонимом пары конвергенция—дивергенция служит пара определимость—неопределимость. Она всегда появляется при формализации любой содержательной, особенно нефизической, задачи. Её содержание — в противопоставлении ограничения, исчерпываемости степеней свободы объекта, и разнообразия, вариативности его поведения. Её синоним *формализуемость—неформализуемость* есть версия пары закона исключённого третьего и его отрицания. Теорема Э.Бета об определмости практически не упоминаемая в курсах, есть критерий возможности успешного применения математики. В основаниях математики эта оппозиция имеет вид противопоставления *формализма Гильберта интуиционизму Брауэра*.

Определимость подлежит доказуемости, вычислимости и прогнозируемости. Тогда как неопределимость поведения объекта отражается как (неустраняемая) случайность. Топология случайности — гетерогенность пространства, окружающей среды. Известная из учебников фраза «Мы не можем знать всех мельчайших деталей полёта подброшенной монеты и условий её контакта при падении» есть не что иное, как признание наличия множества границ однородностей. Эта оппозиция перетекает в физику под видом детерминизм—случайность.

Попытки решить эту проблему при помощи последовательного исчерпания множеств степеней свободы трансформируют её в пару локальное—глобальное, которая известна как принцип Маха [47]. Другие обличья этой оппозиции: строгость—смысл, строгость—реальность, синтаксис—семантика [48]. Здесь известен слоган Р.Тома: «Чем больше строгости, тем меньше смысла».

В *теории множеств* конвергентный характер имеет аксиома выделения, дивергентный — аксиома множества степени. Заданию множества как набора вещей, по Кантору, противостоит его понимание как синонима свойства, атрибута, предиката [49, с. 328–340].

В *формальных теориях*: дедукция — конвергентна, индукция — дивергентна. Таковы же действия кванторов существования  $\exists$  и всеобщности  $\forall$ .

В *теореме Лиувилля*, дающей описание возможных непрерывных движений, присутствует редко упоминаемая в моделировании *инверсия*. Инверсия есть не что иное, как сопряжение большого с малым, конвергенции с дивергенцией. Чем ближе малая область к центру окружности инверсии, тем больше рассеивается её образ при этом преобразовании. И обратно — при отображении окрестности конечного диаметра вне окружности в её внутренность диаметр образа уменьшается.

*Диалектика* в своих началах содержит противопоставление диады как принципа неопределённости и множества — монаде как принципу единства и стабильности. По Платону, понимание «подобий» и «различий» является центральным методом философской диалектики. В «Федоне» он изложен как метод собирания и разделения [50, р. 432]. Под диалектикой Платон понимал именно диалог логических операций расчленения и связывания понятий [23, с. 154].

*Единое—Многое*. Обсуждаемая пара процессов порождает известную со времён Платона пару Единое—Многое [51, с. 117–128]. Она является выражением ограниченной делимости и соединимости. Сложные гетерогенные среды, распределённые физико-технические объекты, картины и образы искусства, формальные системы и теории, описательные теории естественных наук, видимые, слышимые, то есть воспринимаемые человеком стимулы внешнего мира ограничены с одной стороны — точностью измерений, порогом восприятия, ограниченным смыслом деловой прозы и терминологии, с другой — горизонтом восприятия, горизонтом взаимодействия и т.д.

Упомянутые выше «анализ через синтез» мышления и «единство разнообразия» биологии являются частными примерами этой пары категорий. Говоря современным языком, эта проблема заключается в формализации связи свойств целого и его частей. В теории систем она является центральной, в частности, в практике управления большими системами, и имеет много облиций — *факторизация и интеграция, моноцентрические и полицентрические системы, структура и функция, внутренние и внешние критерии эффективности* и т.д.

В *физике* это проблема трёх (и многих) тел — как в классической, так и в квантовой теории [52, 53]. В физике мезо- и наноструктур, связанной с производством электроники, Единое—Многое принимает вид *диффузно-баллистических* (траекторных) систем [54]. В этом плане также возникает проблема двойного смысла союза «ИЛИ» [55]. В настоящее время сформулирована онтологическая интерпретация этой проблемы, касающаяся

многих ключевых понятий: выделенной системы, объекта и субъекта, измерения и т.д., опирающаяся на философию досократиков [56].

Определение множества по Кантору — «многое, мыслимое как единое» — является переформулировкой положений Платона и Зенона этой проблемы. По Платону: «Как может Единое быть Многим?». Решение Платона: Единое имеет противоположные определения [51, с.118,121]. «Зенон, передают, говорил, что если бы кто-нибудь определил ему, что такое единое (из которых состоит многое), он мог бы сказать, что такое сущее» [57, с. 3, подробнее — гл. VII].

«...так называемые парадоксы Кантора отнюдь не парадоксальны для диалектики. Такого рода парадоксами изобилуют творения Платона, Плотина, Прокла, св. Дионисия Ареопагита, Бруно, Шеллинга, Гегеля (с ними созвучна мысль Кантора)» [Свасьян К.А. Проблема символа в современной философии. М.: Академический проект, 2010, с. 141].

Вариант этой пары в математике — *природа простых чисел*. Простое число — это то, которое, с одной стороны, делится на части — единицы, то есть является множеством, а с другой — не делится, то есть едино. Иными словами, простое число есть пример дипластии Поршнева.

Таково же содержание известного логического парадокса: «Брадобрей бреет тех, кто не бреется сам». Здесь «брадобрей» имеет двойной смысл. Конвергентный, материальный указывает на конкретного индивидуума. Дивергентный, прозрачный, контекстно-зависимый — на наличие множества людей, объединённых фактом пользования его услугами. Проблема заключается в попытке ограничиться одним, а не двумя, как у Платона, определением Единого.

Интересен пример теоремы К.Гёделя о неполноте. В контексте этой проблемы она устанавливает невозможность вывода свойств целого, то есть непротиворечивости или полноты формальной теории в целом, из свойств, то есть доказуемости, её отдельных составляющих — теорем. В более широком контексте программы Гильберта формализации всей математики на основе теории множеств локальные положительные частные результаты формализации не обеспечивают выполнения желаемого — решения глобальной задачи [58].

Более частные примеры из математики — сортировка и группирование в комбинаторике, преобразование Фурье, связывающее пространство координат с пространством импульсов, как представление квантового принципа дополнительности Н.Бора.

Но, возможно, наиболее выразительным формальным коррелятом пары Единое—Многое может служить понятие *полностью несвязного*

*локально компактного топологического пространства  $p$ -адических чисел  $Q_p$* . Здесь Единое – пространство, состоящее из отдельных частей, которые в свою очередь сами являются такими пространствами.

В *химии* – задача получения материалов с заданными свойствами в зависимости от строения и атомно-молекулярного состава.

В *методологии науки* – анализ и синтез, редуционизм и холизм, индукция и дедукция, измерение и наблюдение как абстракция и образ, логика и вербальное описание, точность и понимание и др. При ближайшем рассмотрении топология этих пар понятий повторяет топологию пары Единое–Многое как результата комбинации разделения и соединения. Опыт редуционизма – сведения пары к одному члену – демонстрирует бесплодность усилий, причём как в физике [59], так и в языке [17, с. 166–169].

С точки зрения редуционизма материальные образования, порождаемые как дивергентными, так и конвергентными процессами, состоят из одних и тех же элементов и потому формально неотличимы. Эта двойная, противоречивая причинность явлений отмечена Платоном [60]. Они неотличимы и морфологически. Дивергентный процесс можно мыслить как две стрелки, исходящие из одной вершины (графа, структуры, сети). Конвергентный – как две стрелки, входящие в такую же вершину. Сетевые структуры поэтому есть не что иное, как следы этой базовой пары процессов, пространство, ими формируемое.

Интересно по этому поводу мнение И.М.Гельфанда о том, что современная глобализация является объединением человечества именно по «вещному» языку, в то время как язык духовного единства отсутствует [61, с. 461–472].

В *мировой культуре* пара конвергенция–дивергенция представлена парой культурный герой–трикстер в разных её вариантах: Прометей–Эпиметей, космогония–карнавал [62, гл. 1], аполлоническое и дионисийское [23, с. 31]. Первым членам этих пар соответствует комплекс понятий, связанных с логикой, рациональностью, порядком, абстрагированием. Вторые члены характеризуют чувственность, иррациональность, беспорядок, открытость миру.

Первичность принципа дополнительности в науке обсуждается также А.Н. Паршиным [63, с. 139–170]. Поэтому можно сказать, что программа математизации (нефизических) наук XX века представляла собой лишь вариации на эту древнюю тему. В недавней истории науки эту пару – редуционизм–холизм – представляли кибернетика и системный анализ.

Философия показывает, как члены рассматриваемых пар противоположностей в разных контекстах воспроизводят основное противоре-

чие между характеристиками целостности, всего мира и его отдельных образований. Являясь ресурсом осуществления один другого, чередуясь как причина и следствие, пара базовых процессов порождает в природе известное явление существования циклов и ритмов, всемирного круговорота. В работах [24, 64] на большом количестве примеров из различных областей знания показано, что круговороты являются формой бытия движущейся материи на разных масштабах:

«Круговорот материи есть наиболее общая форма её самодвижения (и всеобщего взаимодействия в природе), а последнее представляет собой спонтанную силу материи, её активность, действенность. ... Самодвижение есть инвариант — устойчивость своего существования материи. Как круговорот оно инвариантно по форме». [*Петрушенко Л.А.* Единство материи, самодвижения и организованности. М.: Мысль, 1975, с. 7–8].

«В целом мы получаем картину сложного переплетения множества круговых движений, каждое из которых пронизано определённым противоречием, имеет относительно самостоятельный статус существования, но вместе с тем производно от другого кругового движения (круговорота), “сцепляется” с другим в каком либо своём звене и оказывает на него воздействие. .... Природа в пределах “планетных сфер” (атмосферы, биосферы, гидросферы, океаносферы, литосферы) функционирует в кружевах круговоротов, этих своеобразных клеточек самодвижения, из которых складывается функциональная целостность планетарного процесса... Диалектика природы такова, что каждый круговорот, в свою очередь, “соткан” из других, то есть развёртывается как круг кругов... В целом создаётся картина всеобщей взаимосвязи и всеобщего взаимодействия, где в диалектике отдельного отражено глобальное целое, а целое есть мировой круговорот — статистически сотканная сеть разномасштабных круговоротов в природе» [*Лойфман И.Я., Стадник А.А.* Единство природы и круговорот материи. Свердловск, 1988, с. 65, 149].

Проявления круговых движений столь же разнообразны, как и проявления пары конвергенция—дивергенция. В их основе лежит явление превращаемости форм энергии и движения материи [24, гл. VI]. Поэтому эта пара даёт наиболее общую структуру круговорота [64, с. 136]. Косвенно сетевые структуры описываются и как вершины, соединённые хордами, и как вершины, связанные дугами. На сетях и графах замкнутые пути гомеоморфны окружностям, то есть циклам.

Если рассмотреть круговороты с содержанием деление—соединение в разных точках *координаты делимости*, то разнообразие форм и качеств материи можно вложить в схему настоящего раздела. Топология так ор-

ганизованной материи характеризуется как «неисчерпаемая гетерогенность» [24, с. 271], что является синонимом фрактальной геометрии, геометрии делимости, иррегулярной геометрии границ. Симптоматично, что фундаментальность циклов обратила на себя внимание математиков:

«Сама ”логика” живой природы отлична от логики рационального, естественнонаучного мышления. В живой природе основную роль играет её организация в циклы, открытые Ю. Либихом и иногда называемыми циклами Либиха. Например, трупы и отходы животных поглощаются бактериями, бактерии являются основой роста растений, растения поедаются животными. Живая природа состоит из сотен и тысяч таких циклов. Наоборот, логическое мышление состоит из цепи силлогизмов, соединённых как бы в прямую линию. Когда в рассуждении образуется цикл — вывод совпадает с предпосылкой, это считается грубой ошибкой, “порочным кругом”. Наоборот, вмешательство технологической цивилизации в природу приводит к разрыву “циклов Либиха”, что выражается, например, в накоплении непоглощённых отходов. Таким образом, человек строит картину мира, в которой ему не находится места, прежде всего просто как живому существу. Но и в более глубоком смысле — как существу мыслящему и думающему. ...Философ А.Ф.Лосев сказал: “Читая учебник астрономии, чувствую, что кто-то палкой выгоняет меня из дому и ещё готов плюнуть в физиономию. А за что?”» [*Шафаревич И.Р.* Из истории научного мировоззрения. Историко-математические исследования. 2-я сер. Вып. 6 (41), РАН. Янус-К, М.: 2001, с. 11–34 (цит. по кн.: Две дороги к одному обрыву. М.: Айрис Пресс, 2003, с. 39)].

«Вывод, который теперь можно сделать, состоит вот в чём. В современной науке изучение разных циклов — не только в биологии, но и экономике, где есть, например, кондратьевские волны, и в языковых метафорах, таких как ”цикл стихов” или “оборот речи” — играет важную роль. Но мы в этом ничего не поймём, если представление о циклах не будет входить, так сказать, в онтологию бытия. Существование циклов должно быть исходным принципом, наподобие принципа относительности или даже глубже. Тогда любое изучение циклов или ритмов в любой области знания будет исходить из этих твёрдо установленных принципов. Я думаю, что приведённые рассуждения не есть только рассуждения по поводу времени, а представляют собой фрагмент будущего представления о космосе, которое нам предстоит развить» [*Паршин А.Н.* Средневековая космология и проблема времени // Вопросы философии, 2004, №12, с. 70–88].

В наших рассмотрениях мы не делали различия между разными видами дивергенции и конвергенции. Например, ветвление в биологии отлично

от энтропии как рассеяния в физике. Первое есть проявление жизни, второе – угасания. Точно так же (транспарантное) единство в многообразии отлично от многочисленной гомогенности. Устойчивость как гибкость в движении отлична от устойчивости как неподвижности механики и т.д.

Второе наше упрощение состоит в абстрагировании от энергетических ограничений, сопутствующих бесконечной делимости. Оно вполне привычно для математики. К тому же физика за прошедший XX век практически сняла если не все, то многие из них. Разница между бесконечностями в том, что бесконечная делимость актуальна и обеспечена фрактальной геометрией природы, то есть самой Природой как «суперколлайдером». А бесконечность математической физики имеет лабораторный характер и требует для своего осуществления энергии извне. Экстраполяция поэтому не представляет сложности.

С учётом этих оговорок подытожим наши экспериментальные наблюдения. Представляется, что выделение делимости как отдельной степени свободы движения объектов даёт возможность увидеть единство разнообразных и разнокачественных явлений.

Инвариантом бесконечной делимости являются границы.

Границы создаются самыми разнообразными процессами, которые присутствуют в естественных науках. Субстанция границ, более известная как фрактальная геометрия природы, является общей как для материальных, так и для идеальных объектов. Граница – нефизическая сущность. Она неотделима от материальных образований, но, очевидно, отлична от них. Мир как единое целое состоит из границ зримых тел, систем, процессов, которые, в свою очередь, состоят из границ своих частей, подсистем, подпроцессов, которые, в свою очередь, состоят из границ.... В то же время этот мир состоит из границ смысла языковых конструкций, языковой номинации, зон человеческого восприятия, которые в свою очередь, состоят из...и т.д. Поэтому в пространстве делимости материальные объекты состоят из того же материала, что и идеальные.

Мир, состоящий из материи, и мир, состоящий из границ, – один и тот же, но в дополнительных режимах зрения, как бы в разных системах «координат».

Такая точка зрения обнаруживает также и функциональную схожесть и согласованность динамики объектов, традиционно относимых к системной теории. Единство объектов и видов движений означает совпадение фазового пространства разных дисциплин. Размерность этого (системного) пространства равна двум по числу базовых формообразующих процессов. Вопрос о семантике двойки – протяжённость как сложение отрезков, или деление на 2 – пока оставим. Заметим, что в это пространство должны поместиться четырёх- и более мерные про-

странства математической физики. Можно пояснить её природу ссылкой на Аристотеля о том, что материя и форма суть две изначальные, несводимые друг к другу причины. Такая обстановка соответствует искомым требованиям системной теории как поля полидисциплинарных и междисциплинарных исследований.

Следующую цитату, по-видимому, нет нужды комментировать:

«...механизмом, который заставляет изменяться неорганический и органический мир, биосферу и, главное для нас, — социосистему, является постоянное противоречие между функциональной асимметрией и морфологической симметрией, которое в каждой системе и подсистеме имеет собственное выражение, но тем не менее схожие топологические характеристики» (Алексеев В.П. Становление человечества. 1984, с. 36).

Продолжим наблюдения, но уже в математике фракталов.

## Литература к главе 1

1. *Mazur J.* Motion Paradox. Dutton, 2007.
2. *Садовский М.А., Писаренко В.Ф.* Иерархия структур от пылинок до планет// Земля и Вселенная, 1984, №6.
3. *Арманд А.Д.* Иерархия информационных структур мира // Вестник РАН, т. 71, №9, с. 797–805.
4. *Красный Л.И.* Система делимости от Вселенной до микромира // Доклады РАН, 2002, т. 383, №6, с. 796–800; *Шноль С.Э., Пожарский Э.В., Коломбет В.А., Зверева И.М., Зенченко Т.А., Конрадов А.А.* Возможные космофизические причины дискретных результатов измерения хода времени процессов разной природы (феномен макроскопического квантования) // Росс. хим. журнал, 1997, №3, с. 30–36; *Якимова Н.Н.* Фрактальная Вселенная и золотое отношение. М.: ЛИБРОКОМ, 2008; *Сухонос С.И.* Теория эволюции иерархических систем. Книга 1. Структурные уровни природы.. М.: Дельфис, 2013.
5. *Налимов В.В.* Непрерывность и дискретность в языке и мышлении. Тбилиси: Мецниереба, 1978, с. 8.
6. *Брушлинский А.А.* Воображение и познание [1970] / Субъект, мышление, воображение. М. – Воронеж, 2003.
7. *Бодякин В.И.* Эволюция понятия система в преддверии третьего тысячелетия/ Анализ систем на пороге XXI века. С. 214–228.
8. *Волкова В.Н., Козлов В.Н.* Системный анализ и принятие решений: Словарь-справочник. М.: Высшая школа, 2004.
9. *Арманд А.Д.* Два в одном. Закон дополнительности. М.: ЛКИ, 2008.
10. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. Freeman. 1982.
11. *Сухонос С.И.* Масштабная гармония Вселенной. М.: София, 2000.



12. Федосин С.Г. Физика и философия подобия от преонов до метagalactic. Пермь, 1999.
13. Coleman P.H., Pietronero L. The Fractal Structure of Universe // Phys. Rep. 213, 1992, p. 311–389.
14. Teerikorpi P., Baryshev Y. Discovery of Cosmic Fractals. 2000.
15. Hoffmayer J. Surfaces inside surfaces. On the origin of agency of life // Cybernetics and Human Knowing. 1998, v. 5, no.1, p. 33–42.
16. Шредингер Э. Наука и гуманизм. М. – Ижевск: РХД, 2001, с. 22–25.
17. Степанов Ю.С. В трёхмерном пространстве языка. М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
18. West G. Life's Universal Scaling Laws // Physics Today, Sept 2004.
19. Шиффман Х. Ощущение и восприятие. Питер, 2003.
20. Самускевич А.В. Диалектика прерывности и непрерывности и иерархический принцип строения материи // Научные труды по философии. Минск: БГУ, 1958, №46, вып.2, ч.1, с. 101–156.
21. Ганеев Б.Т. Парадокс. Уфа, 2001.
22. Вейнгартнер П. Фундаментальные проблемы теорий истины. М.: РОСПЭН, 2005.
23. Философский энциклопедический словарь. М.: Сов. энц., 1983.
24. Петрушенко Л.А. Самодвижение материи в свете кибернетики. М.: Наука, 1971.
25. Назаров В.И. Эволюция не по Дарвину. М.: Комкнига, 2005.
26. Кулик А.В. Вселенский Арборетум // Экология и жизнь. 2001, №4, с. 4–10.
27. Nottale L., Charline J., Grou P. Les arbes de l'evolution. Paris, 2000.
28. Grane M. Hierarchies in Biology // American Scientist, 75 (1987), p. 504–510.
29. Davies J.A. (ed.) Branching Morphogenesis. Springer-Science+Business-Media, 2006.
30. Bejan A. Constructal Theory of Pattern Formation // Hydrolog. Earth Syst. Sci. 11, 2007, p. 753–768.
31. Гачев Г.Д. Воображение и мышление. М.: Вузовская книга, 2006.
32. Разумникова О.М. Отражение личностных свойств в функциональной асимметрии мозга. Новосибирск: Наука, 2005.
33. Брагина Н.Н., Доброхотова Т.А. Функциональные асимметрии человека. М.: Медицина, 1988.
34. Корсини Р., Ауэрбах А. (ред). Психологическая энциклопедия. Питер, 2006.
35. Языковая номинация. Кн.1. Общие вопросы. М.: Наука, 1977.
36. Ярцева В.Н. Языкознание. Б. энц. словарь. М.: Б. Росс. энц., 1998.
37. Падучева Е.В. Опыт логического анализа значения союза ИЛИ // Философские науки. 1964, №6, с. 145–148.
38. Jennings R. Disjunction // Stanford Encyclopedia of Philosophy, Jan. 2001.
39. Тань Аошуан. Загадка иероглифа Iuan – порядок или беспорядок / Китайская картина мира. Язык, культура, ментальность. Языки славянской культуры. М., 2004.
40. Карпенко А.С. Фатализм и случайность будущего: логический анализ. М.: ЛКИ, 2008.
41. Арманд А.Д. География сквозь призму дополненности // Вопросы философии. 2004, №4, с. 117–125.

42. Фролов В.Т. О науке геологии. Ст. 3. Теория познания геологии // Вестник МГУ. Сер.4. Геология. 2002, №1, с. 6–14.
43. Фролов В.Т. О науке геологии. Ст. 2. Геологические теории // Вестник МГУ, сер.4, Геология. 2001, №1, с. 3–11.
44. Muller I., Weiss W. Entropy and Energy: A Universal Competition. Springer, 2005.
45. Пригожин И. От существующего к возникающему. Время и сложность в физических науках. М.: Комкнига, 2006.
46. Tsoukas H. Introduction: Chaos, Complexity and Organization Theory // Organization 5(3), 1998, p. 291–313.
47. Demaret J., Heller M., Lambert D. Local and Global Properties of the World // Foundations of Science 2, (1997), p. 137–176.
48. Marcus S. Imprecision, between variety and uniformity: The Conjugate Pairs // Poznan Studies in Philosophy of Science and Humanities. 1998, v. 62, p. 59–72.
49. Вейль Г. Математика и логика / Избр. труды. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984.
50. Lloyd G.E.R. Polarity and Analogy. Cambridge U.P., 1966.
51. Гайденко П.П. История греческой философии в её связи с наукой. М.: Per Se, 2000.
52. Aerts D. The description of one and many physical systems. In Foundations of Quantum Mechanics, Eds. C. Gruber, A.V.C.P. Lausanne, 63, 1983.
53. Coleman P. Many Body Physics: Unfinished Revolution//arXiv:cond-mat/0307004 v. 2 [cond-mat.str-el] 2003.
54. Ulmo D. Many-Body Physics and Quantum Chaos //arXiv:01712.1154, v. 1 [cond-mat.mes-hall], 2007.
55. Aerts D., D'Hondt E., Gabora L. Why the Logical Disjunction in Quantum Mechanics is Not Classical? // Foundation of Physics, 2000.
56. Verelst K., Coecke B. Early Greek Thought and Perspectives for the Interpretation of Quantum Mechanics: Preliminaries to an Ontological Approach // arXiv:physics/0611064, v. 1 [physics.hist-ph] 2006.
57. Комарова В.Я. Учение Зенона Элейского. Попытка реконструкции системы аргументов.
58. Bell J. Whole and Part in Mathematics // Axiomathes, 14, 2004, p. 289–294.
59. Anderson P. More is Different// Science (N.S.), v. 177, no.4047 (1972), p. 393–396.
60. Платон. Федон 97а, 100е, 101а,в.
61. Гельфанд И.М. Два архетипа в психологии человечества / Будущее прикладной математики. М.: Комкнига, 2008.
62. Косарев А.Ф. Философия мифа. М.: Per Se, 2000.
63. Паршин А.Н. Дополнительность и симметрия / Путь. Математика и другие миры. М.: Добросвет, 2002.
64. Лойфман И.Я., Стадник В.П. Единство природы и круговорот материи. Свердловск, 1988.

## Глава 2

### Фракталы

Феномен бесконечной делимости материи и субстанция границ входят в математическую теорию через фрактальную геометрию природы. Так, Б. Мандельброт в начале 1970-х годов назвал природные образования и множества, их математические корреляты, состоящие из различных частей — подмножеств, фракций. Эти части, в свою очередь, имеют фрактальное строение, состоящее из (разлагаемых) частей, которые также являются фракталами. И так до бесконечности [1]. Собственно фрактальный взгляд на природу означает включение в наблюдение совокупности деталей объекта одновременно на нескольких масштабах размеров. В этом случае однородные физические объекты — тела, объёмы, линии, поверхности — предстают сложными, составными образованиями. Поэтому в природе повсеместно наблюдаются геометрически неправильные, составленные из ломаных, изрезанные линии и поверхности, а математически предпочтительные образы крайне редки:

«Сегодня, как отметил Б. Мандельброт, ... природа сыграла шутку с математиками. Математикам XIX века, возможно, недоставало воображения, но не природе. Те патологические структуры, которые были изобретены математиками, желавшими оторваться от собственного XIX века натурализма, оказались неотъемлемыми для множества хорошо знакомых, повсюду нас окружающих объектов» [*F. Dyson Characterizing Irregularity // Science 200, 1978, p. 677–678*].

«Класс непрерывных функций, не имеющих производной ни в одной точке, оказался неизмеримо богаче класса функций с производными и скорее «патологическими» являются функции последнего типа. Создалась любопытная ситуация, когда оказалось, что те непрерывные функции, которые изучались математиками на протяжении веков, те, которыми они пользовались для описания явлений внешнего мира —

эти функции принадлежат лишь пренебрежимо малому классу всех непрерывных функций» [Ф.А. Медведев Очерки истории теории функций действительного переменного. М., Наука, 1975, с. 222].

Таким образом, в математике, как и в природе, почти все функции оказались недифференцируемыми (современное обобщение классического результата Банаха-Мазуркевича 1931 года на вычислимый анализ и теорию сложности, см. в [2]). Такой взгляд – введение в наблюдение объектов как фрактальных – можно сравнить с наведением резкости оптики визуального наблюдения природных объектов и расширения теоретической точки зрения на объекты математики.

Как пример можно привести книгу. В закрытом состоянии она представляет собой физический объект, с которым можно производить механические действия – взвешивать, бросать, складывать в стопку и т.п. Раскрытая книга, будь то текст, альбом иллюстраций или научный труд – это уже целый мир с множеством деталей, событий, процессов, который вполне умещается в физическом мире закрытой книги. В иллюстрациях детали различимы визуально, в тексте – умозрительно.

«Классическая физика даёт первое приближение к структуре объектов, особенно искусственных объектов. Новая, “фрактальная геометрия” является расширением классической геометрии. Она может быть использована для точного моделирования физических структур от листьев до галактик» [Culik K., Dube S. *Automata – Theoretic Techniques for Image Generation and Compression*// LNCS v.472, 1990, p. 76–90].

*Фракталы и сложные системы.* Многочисленными работами второй половины XX века, посвящёнными разработке фрактальной идеи, был сформирован вывод о том, что подобная фрактально-хаотическая природа типична для предметных областей всех наук: материальных – физики, химии, геологии, географии; гуманитарных – психологии, языка, социума [3–5]. Такая же структура обнаружена у фазовых пространств математики и биологических организмов и образований. Геометрия тонкодисперсной материи (*finely divided matter* – англ.) совпадает с геометрией гранулированных фазовых пространств (*coarse-grained space* – англ.). То есть фракталы присущи материальным и идеальным образованиям, живым и косным, искусственным и естественным объектам. Общим для них всех является наличие скейлинга, то есть возможность различения их частей посредством увеличения разрешающей способности наблюдения – *zooming in* в их структуре, и обнаружения в поле зрения нового объекта, часто подобного исходному. Причём как в направлении к микро-, так

и мегамасштабов. Чередование образов, появляющихся при скейлинге, формирует вторую координату природы объекта — делимость. Укажем здесь только литературу общего характера, содержащую большое число ссылок [6–27].

Наибольший объём литературы имеют физические, материальные фракталы. Работы нефизического характера ограничиваются либо качественными рассуждениями, призванными продемонстрировать наличие фрактальной структуры предмета (чаще всего включением скейлинга), либо прямым применением физико-математической техники — вычислением фрактальной размерности, корреляционных функций, показателей Ляпунова и т.д. без дальнейшей, однако, предметной интерпретации.

Физическим методам доступны только визуально наблюдаемые, материальные фракталы с ограниченным диапазоном скейлинга [28]. Усечённые фракталы представляют собой предварение к атомизму, и, поэтому, в физике они служат своего рода подготовкой исходных данных для стандартной считающей техники и самостоятельного теоретического значения не обрели. Этот факт вызывает дискуссию и критику, инициированную известной статьёй Л.Каданоффа [29] о правомерности квалификации фрактальной теории как самостоятельной дисциплины [30–32].

И действительно, за время применения методов математической физики к исследованию фрактальных структур не было обнаружено нового содержания. С тех пор устоявшимся мнением является то, что фракталы — это «зоопарк» красивых фигур и образов, но не более. Совершенно аналогичная ситуация параллельно фрактальной теории и в тот же отрезок времени сложилась в кибернетике и общей теории систем, которые также признаются несостоявшимися науками, не имеющими самостоятельного содержания [33]. И здесь прямой перенос физико-математической техники не привёл к появлению нового содержания, специфичного предметам наук, составляющих системную теорию. Однако, в отличие от фрактальной идеи, системная возникла в лоне биологии, а не физики, и поэтому здесь критике подвергалась неоправданная экстраполяция методов математической физики.

В итоге в практике теории систем сложилось осторожное, с многочисленными оговорками, отношение ко всему кругу математических методов (см. в [34] соответствующие статьи). Так или иначе, несмотря на свои «очевидную наблюдаемость» и вездесущность, как теория систем, так и фракталы оказались вне математики, т.е. вне науки. Несмотря на этот, казалось бы, «закрывающий» итог, исследование нефизических, системных, объектов в настоящее время не угасает. Причём в этом контексте под видом скейлинга, ренормгруппы, степенных законов, сложности и иерархии явно или неявно присутствуют фракталы [35].

Между точкой зрения физики и другими естественными науками существует большая разница в том, что считать теорией — данные эксперимента, вмешивающегося в природу, или наблюдения, не возмущающие течение её событий. Этот факт часто служит основой критики системной теории — у неё нет эксперимента. Однако очевидно, что у законов природы нет обходных путей и пробелов. Всё наблюдаемое не может существовать вне и помимо них, тем более такое вездесущее явление как фрактальность:

«Самое высокое было бы понять, что всё фактическое есть уже теория: синева неба раскрывает нам основной закон хроматики. Не нужно ничего искать за феноменами. Они сами составляют теорию» [И.В. Гёте Избранные философские произведения. М., 1964, с. 327].

С точки зрения общей теории систем, с её идеей единства знания, естественные науки во фракталах впервые получили топологические основания для междисциплинарных связей, отличные от прежних механико-математических. Причём помимо топологического единства налицо совпадение свойств, определяющих системный характер явлений с формальными особенностями фрактальных множеств. Поэтому интуитивно фракталы и хаос часто сопоставляются со сложными системами, хотя их связь на едином формальном основании последовательно не рассматривалась.

Отдельные фрагменты топологического единства можно увидеть в характере ряда работ, в которых демонстрируются связи между различными ранее изолированными областями. Наибольший объём имеют работы эмпирического характера, в которых демонстрируется сходство фрактальной природы явлений. Меньший объём — это аналогии между физическими теориями [36–40]. Ещё меньший — попытки разработки аналогов физических теорий на фрактальных множествах [41–45]. И совсем мало — попытки синтеза теорий [46].

В целом, несмотря на разный статус, придаваемый фрактальной геометрии — от структуры отдельного физического объекта, что почти всегда, до структуры пространства-времени, что гораздо реже [47, 48] — методы её исследования остаются классическими, берущими начало в известных результатах [49]. Здесь мы подразумеваем, что существуют результаты, отличные от так называемых классических, но которые не входят в стандартные курсы университетов и тем более технических вузов. Далее мы покажем, что здесь наличествует разница между аксиоматизируемыми и неаксиоматизируемыми формальными системами. Аксиоматизация — это атомизм, неявно на-

следуемый всей формальной техникой. И в этом состоит логический разрыв, определяющий характер результатов.

Формальное совпадение систем и фракталов можно обнаружить при прямом сопоставлении фактов теории систем, накопленных к настоящему времени, с известными результатами математической науки, которые стоят за фрактальными множествами. К ним относятся прежде всего делимость, иерархическое строение, трансдисциплинарность, естественность и открытый характер, плохие определимость и контролируемость, то есть неформализуемость, сетевой паттерн, двойственность характеристики. Рассмотрим эти точки соприкосновения теорий.

1. Теория систем и фракталы имеют общую степень свободы — *бесконечную делимость* объектов. В теории систем это декомпозиция [50], во фрактальной теории — скейлинг. Разница в терминологии дисциплин. В системных исследованиях начинали, как правило, с целого, постепенно переходя к подсистемам, пользуясь общефилософской лексикой. Фракталы оказались нагруженными физической терминологией.

2. Область существования, субстанция фракталов и системных объектов идентичны — это некая *бескачественная трансдисциплинарная* сущность. Различие лишь в том, что для фракталов в математике существуют теоретические аналоги — нульмерные множества и гиперпространства со свойствами универсальности (см., например, [51, 52]). Наиболее известен пример канторова совершенного множества, которое появляется в большом числе разделов математики. А для понятия системы кроме (гипер)графов, которые чаще всего понимаются как распределённые физические объекты со слабыми дедуктивными и выразительными потенциями, таких соответствий не предложено. В последние годы в системной теории графы были развиты в сетевые представления: нейросети и масштабно-инвариантные сети. Однако и это расширение пока не сопровождается развитием аналитической техники.

Усечению фракталов, то есть введению атомов теории, соответствует введение чёрного ящика в теории систем, откуда берёт начало вся механика систем: вход — выход, стимул—реакция, воздействие — отклик и им подобные аналоги второго закона механики. В сетях — это регулярные события, т.е. состоящие из элементарных.

3. Для термина «фрактал», как и для понятия «система», до сих пор не предложено общепринятого формального определения. Поэтому для математики фракталы, так же как и системы, — неудобный объект, трансцендентный, по мнению философов, её классическим методам. Фракталы относятся к иррегулярным феноменам, в противовес регулярным множествам, принятым в математике. Поэтому вычисление их физических характеристик — фрактальной размерно-

сти, хаусдорфовой меры и т.п. — сталкивается с их невычислимостью, отсутствием сходимости соответствующего предельного перехода. Лишь для геометрически правильных фракталов — множества Кантора, кривых Серпинского и Менгера, кривой Коха и им аналогичных искусственных фракталов — эти величины можно посчитать точно. Для естественных фракталов, когда параметры процесса дробления не задаются изначально и не контролируются, ничего математически вдохновляющего, без дополнительных ограничений и предположений, получить не удаётся [53, 54]. Этот теоретический вывод в общем подтверждён практикой — для разнообразных естественных материальных объектов не удаётся построить устойчивую характеристику в терминах фракталов: сказывается нерегулярное поведение скейлинга и размерности. Усреднение, принятое в физике, ограничивает делимость и здесь неадекватно — это способ получения усечённых (материальных) фракталов и, поэтому, не имеет системного значения.

4. Фракталы, как и системы, *не являются физически наблюдаемыми* сущностями. Точный фрактал — это невидимая сеть границ, точная система — невидимая сеть связей. Поэтому, вообще говоря, фрактальную размерность и меру Хаусдорфа для них посчитать невозможно, надо их сначала узреть. В этом причина, почему в теоретической информатике отсутствуют эти числовые характеристики.

5. Фрактальная теория имеет *два истока*: материальные физические системы и алгоритмы теоретической информатики (*theoretical computer science* — TCS). Первая линия представлена усечёнными (пред)фракталами, для неё характерным является использование теории меры для получения физических характеристик. Физика, конечно, допускает бесконечный скейлинг — точную масштабную симметрию, однако чаще всего пользуется приближённым её вариантом, различным образом обосновывая необходимость атомизма и гладкости описания [55, 56].

Информатика напрямую использует бесконечный скейлинг, и для неё естественным является обращение к логике и основаниям математики — формальным языкам, рекурсивным алгоритмам, вычислимости, разрешимости и т.д. Это значит, что теоретическая информатика расширяет познавательный горизонт и арсенал формальных методов, допускаемых наблюдением. Это есть та «оптика», которая осуществляет детализацию физических объектов.

Точно так же в теории систем устоялись два подхода к моделированию: физико-математический и внекоординатный логико-лингвистический [34, с. 246–258].

О роли теоретической информатики в моделировании сложных систем разной природы хорошо известно. *Сетевая парадигма*, отсутствующая



щая в физике, представлена имитационными моделями, например, сетями Петри, нейросетями. Как несущее множество, арена процессов она присутствует в специализированных программных комплексах — экспертных и интеллектуальных системах, нейросетевых системах поддержки принятия решений, автоматизированного проектирования и управления производственными, организационными структурами, сложными техническими и энергетическими объектами. Несмотря на свою незавершённость, такие области как искусственный интеллект, искусственная химия, искусственная жизнь, базирующиеся на вычислительной парадигме, вносят ряд новых идей в познание сложности. Это именно те области, в которых физико-математическая теория оказалась неадекватной. Критика в их адрес заключается в том, что интеллект и жизнь моделируются без биологии, а химия — без свойств материалов. Её корни в ощущении необходимости второй, материальной, компоненты теории.

6. Ещё одним моментом, который позволяет рассматривать системы и фракталы, их результаты и методы с единой точки зрения, является *двойственность* природы фракталов, которая напрашивается на сопоставление с *бинарным архетипом* естественных наук (см. гл. I), составляющих теорию систем. Она рассмотрена ниже.

#### **Итеративная система функций и двумерная семантика фракталов**

Двойной исток фрактальной теории свидетельствует о происходящей конвергенции материальной и информационной компоненты научного знания, по крайней мере, в (нелинейной и широкой) области фракталов, хаоса и сложных систем. Этот процесс обеспечивается общностью топологии пространств делимой материи (*finely divided matter*) и фазовых пространств нелинейных зависимостей (*coarse-grained space*). В пределе бесконечной делимости эти пространства совпадают и становятся нульмерным пространством границ тел и множеств. Формально это выражается в совмещении в одной теории различных, ранее независимых дисциплин — геометрии, динамических систем, алгебры, топологии, логики, теории вычислимости [57].

Наиболее известным примером этой конвергенции является идея Р. Фейнмана — «моделирование физики на компьютерах». Стержень этого направления — прямая аналогия между физическими процессами и процессами вычислений. Привычно противопоставляемые как связные и дискретные множества, они сближаются на дисконтинуальных, фрактальных, которые являются пространством состояний компьютеров. Его алгоритмические преобразования и есть известные образы фракталов. Эта идея уже оформилась в цифровую философию (*digital philosophy*), в которой компьютер понимается как математический концепт, а не вспомогательное устройство [58, 59].

Компьютер вообще можно рассматривать как (приближённое) воплощение двойственности свойств фракталов. Здесь скейлинг имеет вид, с одной стороны, миниатюризации материальной части, с другой — независимости от линейного масштаба нульмерных множеств, то есть символических объектов информатики. Так же как и по фотографии фрактальной структуры нельзя определить её материал, и сказать, с каким разрешением она сделана, так и по результату работы программы нельзя определить компьютер, размеры его деталей — его быстродействие, объём памяти, материальную часть и др. (конечно, с поправкой на развитие функциональных возможностей от поколения к поколению).

Делимость оказывается общим понятием этих двух ветвей фрактальной теории. В формальных методах она появляется, во-первых, в топологической динамике — исследовании нелинейных автономных систем: дифференциальных уравнений (аттракторы Эно, Лоренца, Рёсслера и им подобные), рекуррентных соотношений типа пекаря, треугольного и квадратичного (в том числе сценарий перехода к хаосу М. Фейгенбаума) [60, 61]. И, во-вторых, в составе большого числа компьютерных алгоритмов мультипликативного порождения копий исходных фигур, которые также имеют рекурсивный, нелинейный вид [62].

В обоих случаях процессы приводят к возникновению аттрактора с тонкой фрактальной топологией. Общей чертой этих сценариев порождения фракталов является преобразование исходного (под)множества связного евклидова пространства в несвязное фрагментированное подмножество фазового. Этот переход (неявно — в случае гладких зависимостей, или явно — в алгоритмических процессах) развивается на лексикографическом, часто бинарном, дереве, дереве символов выбранного алфавита. Оно и представляет собой первичную схему процесса делимости, которая ведёт от классических методов на множествах полной меры к символической динамике на нульмерных множествах.

Традиционно фрактальная теория излагается именно в этом направлении. Однако, как оказалось, в естественных системах фрактальности более чем достаточно и нет необходимости её генерирования при помощи какой-либо формальной техники, ограничивая, тем самым, горизонт наблюдения. Обратно, символическая динамика обладает следующим универсальным свойством — любая динамическая система имеет символическое расширение. Это значит, что её динамические свойства могут быть получены комбинаторикой свойств строк символов. Это свойство символической динамики проистекает из универсальности канторова множества — любое компактное метрическое пространство может быть получено из него проекцией [61, ch. 3].

Визуальные образы фракталов весьма различны. Однако, имея ввиду их универсальность, мы ограничимся рассмотрением бинарного лексикографического дерева, соответствующего триадному канторову множеству, которое является классическим примером фрактала. Эта позиция имеет в своей основе универсальность двоичных строк в алфавите  $\{0,1\}$ , возможно, наиболее известном наследии кибернетики, которая имеет точное математическое выражение. Экспериментальное доказательство — компьютеры, генерирующие фракталы и решающие дифференциальные уравнения математической физики.

Лексикографическое дерево представляет самостоятельный интерес. Оно есть перекрёсток материальных и идеальных фракталов, физики и информатики. В теории систем оно известно как бинарное дерево поиска, дерево целей и т.д. В теории фракталов это итеративная система функций (*iterated function system* — *IFS*). Она имеет богатую литературу, принадлежащую, однако, почти целиком компьютерной науке. Её истоком является принцип сжимающих отображений нелинейного анализа. Как стержень теории фракталов она получила развитие благодаря работе Дж.Хатчинсона [63] и была развита трудами М.Барнсли в информатике [64] и К.Фалконером в геометрической теории меры [65]. Суть этих работ в том, что они связали эту простую схему делимости с основными понятиями математической физики и теоретической информатики. В дальнейшем, благодаря Д.Мириманоффу, С.Уламу, А.Роберту и А.Н.Паршину (об их работах позже) арсенал связанных с ней методов пополнился интерпретацией экстраординарными (нефундированными) множествами и  $p$ -адическими числами.

Рассмотрим основные факты, связанные с итеративной системой функций с точки зрения связи физики и информатики.

Итеративная система функций состоит из тех же основных четырёх физических симметрий, что и дробно-рациональные преобразования (группа Мёбиуса), которые предписываются теоремой Лиувилля — сдвига, вращения, растяжения / сжатия и инверсии. Отличие в том, что в (гиперболической) итеративной системе функций систематически используется рекурсия сжимающих отображений при движении по ветвям дерева, реализуя делимость исходного множества. Остальные — сдвиг, вращение, инверсия — дополняют её, формируя внешний облик фрактала. Мы будем придерживаться изложения М.Барнсли [66] как компактного и отвечающего нашим целям.

Пусть  $(E, d_x)$  полное метрическое пространство и  $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$  конечный набор строго сжимающих отображений.

$$f_n : E \rightarrow E, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad .$$

Преобразование называется строго сжимающим, если  $\exists r_n \in (0, 1)$ , такое, что

$$d(f_n(x), f_n(y)) \leq r_n \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in E ;$$

гиперболической итеративной системой функций называется оператор

$$F = \{X, f_1, f_2, \dots, f_N\} ; \quad (1)$$

число  $r = \max \{r_1, r_2, \dots, r_N\}$  называется коэффициентом сжатия оператора  $F$ .

Пусть  $\Sigma$  есть множество бесконечных последовательностей символов  $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$  над алфавитом  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Элемент  $\sigma \in \Sigma$  имеет вид

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \dots , \quad \sigma_k - k\text{-ый элемент строки.}$$

Тогда пара  $(\Sigma, d_{\Sigma})$  — компактное метрическое пространство с метрикой

$$d_{\Sigma}(\sigma, \omega) = 2^{-k}, \quad \text{где } k = \min \{i: \sigma_i \neq \omega_i\}, \quad i=1, 2, \dots \quad (2)$$

В этом случае  $\Sigma$  называется адресным пространством, пространством кодов (*code space*), ассоциированным с итеративной системой функций  $F$ .

Пусть  $\sigma \in \Sigma, x \in E$ . Тогда используя сжимающие свойства  $F$ , можно доказать, что

$$\varphi_F(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ \dots \circ f_{\sigma_k}(x) \quad (3)$$

существует, сходится равномерно по  $x$  и непрерывно зависит от  $\sigma$ .

Множество

$$A_F = \{ \varphi_F(x) : \sigma \in \Sigma \} \quad (4)$$

называется аттрактором  $A_F \subset E$ .

Непрерывная функция, ставящая в соответствие точкам  $x$  аттрактора строки адресного пространства

$$\varphi_F : E \rightarrow A_F \quad (5)$$

называется адресной функцией. Аттрактор является компактным множеством, которое обладает свойством

$$A_F = f_1(A_F) \cup f_2(A_F) \cup \dots \cup f_N(A_F), \quad (6)$$

то есть является неподвижной точкой  $F$ .

Изначально, по Хатчинсону, набор функций имел вид аффинных преобразований

$$f_k(x) = a_0 + r_k \cdot O_k(x - x_0),$$

где  $O_k$  — вращение (поворот),  $r_k$  — сжатие. Соответствующая последовательность имеет вид

$$\begin{aligned} S &= (f_1, f_2, \dots, f_N) \\ E, S(E), S(S(E)), \dots, S(S^{n-1}(E)) \dots & \\ A &= \lim_{n \rightarrow \infty} S^n(E) \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь присутствие элементов трёх физических симметрий видно явно.

Инверсия вообще редко упоминается в моделировании. Так же и во фрактальной теории примеров инверсии немного, хотя её включение в теорию не вызывает технических трудностей. Исключение инверсии из спектра физических движений связано, по-видимому, с механикой. Как показал Гельмгольц, движения деформируемого твёрдого тела — растяжение, вращение и сдвиг — лежат в основе евклидовой геометрии [67]. Здесь возникают сложности интерпретации наглядных образов [1, ch. 18].

Мы рассматриваем итеративную систему функций с условием полной сепарабельности. Как показано в упомянутых работах М.Барнсли, все виды фрактальных множеств могут быть получены из неё. Аттрактор такой системы представляет собой полностью несвязное множество. Обобщение этой самоподобной схемы на самоаффинный случай получается применением к аттрактору, как подмножеству евклидова пространства, аффинных преобразований, что сохраняет четыре основных физических симметрии, и, поэтому, сохраняет её физическое содержание.

Рассмотрим приведенное описание. В теоретической информатике обычным является использование строк символов с приписыванием каждому символу элемента аффинного преобразования — коэффициента сжатия [68, 69 — *space of strings*; 70]. В этом случае нумерация сжимающих функций символами  $\sigma_k$  (3) инвертируется в нумерацию символов сжимающими (аффинными) функциями  $f_n$ .

$$\varphi_F(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{f_1} \circ \sigma_{f_2} \circ \dots \circ \sigma_{f_k} . \quad (8)$$

В этом смысл теоремы об эквивалентности порождения фракталов итеративной системой функций и пространством строк (*string model theorem*) [69, p. 112].

Действие итеративной системы функций разворачивается на лексикографическом дереве. Тогда очевидно, что оно может рассматриваться и как набор аффинных преобразований, и как действия над строками символов. Эти операции состоят из:

подстановки, замены символа в адресе строкой

$$\sigma_k \mapsto (\sigma_i \dots \sigma_m) ;$$

конкатенации, приписывания строк

$$\begin{aligned} u &= \sigma_1 \dots \sigma_k, \quad w = \omega_1 \dots \omega_m, \\ u \circ w &= \sigma_1 \dots \sigma_k + 2^{k+1} (\omega_1 \dots \omega_m) = \\ &= \sigma_1 \dots \sigma_k \omega_{k+1}^1 \dots \omega_{k+m}^m \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь выделена общая для формальных языков и арифметики операция масштабирования, то есть скейлинга, умножения на степень двойки. Эквивалентность арифметических и лексикографических операций показана У.Куайном [71] и реализована в современных текстовых редак-

торах. Сдвиг и сложение являются базовыми операциями компьютерной механики. Умножение, деление и вычитание – это уже программы. Эти две базовые операции являются общими для арифметики и символьных преобразований. Сдвиг различает позиции и является дивергентной операцией, сложение конвергентно по физическому смыслу.

Операции в (9) имеют двойной смысл. Подстановка может рассматриваться и как рекурсия, самоприменимость, имитация нелинейности, то есть движение по дереву, и как замена одного аффинного преобразования некоей их последовательностью, то есть движение, например, по плоскости. Также и конкатенация есть, с одной стороны, сложение движений, с другой – удлинение, детализация описания.

Соответственно, оказываются содержательными две сопряжённые метафоры природы естественных объектов: физическая – материальная, и информационная – языковая. В нашем рассмотрении итеративной системы функций им соответствуют формулы (3) и (8) соответственно. В явном виде это сопряжение присутствует в информатике, где строка символов рассматривается и как элемент символического пространства, и как последовательность аффинных преобразований, то есть непрерывных евклидовых движений.

В нашей интерпретации итеративная система функций представляет собой действие сжимающего оператора, то есть конвергентный процесс, направляемый дивергентной структурой лексикографического дерева. Поэтому рассмотренная выше универсальная пара формообразующих процессов – конвергенции и дивергенции – получает со стороны фрактальной теории как эмпирическое, так и формальное оправдание. Фракталы поэтому есть композиция, равнодействующая этих базовых процессов. Их области существования совпадают. Этот результат – фрактальность предельного множества группы Мёбиуса, так же как и итеративной системы функций – отмечен Б.Мандельбротом [1, р. 178]

### **Бинарное пространство**

Из геометрической теории меры известен следующий факт, касающийся двойственного характера нульмерных множеств: любое подмножество полной меры в евклидовом пространстве может быть получено проекцией из нульмерного, и точно так же любое фрактальное подмножество как множество слов машины Тьюринга воспроизводится проекцией из него же [72, 73]. Следующие рассуждения можно рассматривать как эмпирическую иллюстрацию этого факта.

Сопряжение адресного  $\Sigma$  и евклидова  $E$  пространств в схеме итеративной системы функций проявляется как двойственность интерпретации строки символов. Каждая строка имеет числовую и символическую интерпретацию и, соответственно, моделирует как симво-

лические преобразования, так и физические движения. Такой взгляд позволяет связать фрактальную геометрию с теорией вычислимости и динамическими системами.

В основе этого лежит эквивалентность работы с символами машины Тьюринга и механики последовательных геометрических преобразований итеративной системы функций. Поясним сказанное формально, опустив технические детали.

При выбранной базе  $b$  представления чисел определим интерпретирующую функцию

$$I : \Sigma \rightarrow [0,1] \quad \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \in \Sigma \rightarrow x = 0.\sigma_1 \cdot b^{-1} + \sigma_2 \cdot b^{-2} + \dots + \sigma_k \cdot b^{-k} \in [0,1]. \quad (10)$$

Для каждой строки  $\sigma \in \Sigma$  определим одномерное аффинное преобразование  $f^\sigma(x) = b^{-|\sigma|} \cdot x + I(\sigma)$ , где  $|\sigma|$  — длина строки.

Тогда доказывается, что числовой образ конкатенации строк символов есть композиция аффинных преобразований числовых образов этих строк и точки аттрактора  $A$  итеративной системы функций имеют двойное представление как точки адресного пространства  $\Sigma$  и евклидова  $E$ , между которыми устанавливается взаимнооднозначное соответствие [73–75]. Эта схема просто обобщается на двумерный случай. Таким образом, оба способа генерации фракталов — физический и информационный — оказываются сопряжёнными. (**Замечание.** В дальнейшем нам понадобится уточнение понятия вещественного числа, которое в настоящее время вызывает много нареканий. Интерпретирующая функция (10) даёт основание считать топологию вещественных чисел полностью разрывной, как и  $p$ -адических. Связная прямая  $R$  синтаксически неопределима. Ранее этот факт был отмечен — «с вычислительной точки зрения (т.е. с синтаксической —  $\Phi.M.$ ) действительная  $R$  прямая является фракталом» [Li M., Vitanyi P. An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Application. Springer, 1997, p. 125–126; источник Cai J.-Y., Hartmanis J. // J. Comput.Sci. 49:3 (1994), p. 605–619]. Поэтому у нас основную роль будет играть  $R^\#$  — фрактальный аналог вещественной прямой  $R$ , порождаемый  $p$ -адическими числами).

Сопряжённость символьных и физических преобразований позволяет рассматривать пространство фракталов как бинарное, символьно-евклидово пространство. В нём спектр физических, материальных движений дополняется преобразованиями над символьными, нематериальными объектами, которые появляются благодаря введению бесконечной делимости.

Его элементами являются строки конечной и бесконечной длины. Они преобразуются одновременно и как физические, и как символьные объекты под действием двух формообразующих процессов — дивергенции и конвергенции.

Объектами этого пространства являются объединения строк – видимые кластеры с ограниченным или бесконечным скейлингом, и строки бесконечной длины, ненаблюдаемые образования. Кластеры могут возникать и распадаться под действием пары конвергенция – дивергенция.

Физический объект – кластер – имеет два представления. Первое – привычное, как объём евклидова пространства, ограниченный замкнутой поверхностью

$$V_E \subset R, \quad S_E = \partial V_E \text{ – граница объёма.} \quad (11)$$

Второе – информационное, как множество строк, возникающее при процессе его деления/декомпозиции. Поверхность в этом случае совпадает с объёмом. Объём образуется как поверхности внутри поверхностей.

$$V_E^\# = \{ \sigma \in \Sigma : \sigma = \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_s \dots \} \subset \Sigma, \quad \partial V_E^\# = V_E^\# . \quad (12)$$

Его физический аналог – это область, сотканная из границ его частей подсистем. Граница этой области состоит из границ, которые состоят из границ, которые... Это «толстые линии», «толстые поверхности», «вспенённое пространство-время» [56]. Возможно, хорошим образом здесь будет сравнение с пористой мембраной, переходной зоной взаимодействия двух сред.

Благодаря делимости здесь можно говорить о формальных аналогах материальных образований: телах, молекулах, атомах, элементарных частицах. И о них же, как о текстах, языках, словах и символах. Этот взгляд известен как метафора Л.Витгенштейна о физическом мире как сжатом языке.

Совместное действие деления и движения даёт картину «связанных отдельных» объектов. То есть вводит в рассмотрение понятие сети или графа. Интерпретация итеративной системы функций сетевыми структурами [76] позволяет интерпретировать фракталы как ещё один универсальный природный паттерн. Общим и масштабно-инвариантным сетевым структурам, типичным для сложных систем, в последнее время уделяется большое внимание [77–80].

Топология этого пространства полностью несвязна. Так же как две точки определяют линию, три – плоскость и т.д., цифровая, то есть точечная топология этого пространства содержит в себе, или соткана из всех траекторий, преобразований, отображений между точками и областями. Картина физических движений (см., например, [81]) здесь дополняется символической динамикой [70, 82, Ch.IX,X]. Хорошим примером может служить пространство пикселей монитора компьютера.

Это пространство, по сути, удваивает арсенал техники вычислений. Но мы ограничимся рассмотрением того его свойства, которое специфично для системной идеи.



### Дополнительность

Бинарное пространство состоит из двух топологически неизоморфных, но синтаксически тождественных подпространств — связного и полностью несвязного. Из теории моделей известно, что если теория имеет более одной неизоморфной интерпретации, то она противоречива. Если терм имеет это свойство, то он неопределим. У нас в качестве и неопределимых термов, и противоречивых теорий выступают строки, составляющие итеративную систему функций в принятой двойной интерпретации. Тем самым мы сталкиваемся с общей идеей дополнительности.

Под дополнительностью обычно понимают пару неотделимых и не сводимых одно к другому явлений. Обычно эта пара образует некую целостность [83]. С формальной точки зрения, напрашивается сопоставление этого принципа с алгоритмически неразрешимыми проблемами логики и теории вычислимости и результатами двойственности. Так как в нашем пространстве оказались включёнными процессы, выполняемые машиной Тьюринга, и, следовательно, универсальные вычислительные модели, которые, как известно, являются причиной появления неразрешимых и противоречивых утверждений, то такое толкование алгоритмически неразрешимых проблем имеет основания. К этому подводит и та роль, которую играют два базовых процесса в естественных науках, порождающих пары связанных понятий, рассмотренных в главе 1 и схеме итеративной системы функций. Рассмотрим с этой точки зрения символично-евклидово пространство.

Сначала, основная пара дополнительности. Из двойного представления точек аттрактора и вида интерпретирующей функции (10) следует, что элементы символического подпространства — строки и евклидова — точки, то есть вещественные числа, суть одна и та же строка, рассматриваемая как позиционная запись числа. Если существует строка как дивергентный объект, то существует и её конвергентный образ. Поэтому, если существует евклидово пространство, то существует и символическое, и обратно. В нашей интерпретации: если существуют материальные тела, то существуют и их границы и обратно.

Физически, соответственно, указание координаты, то есть вещественного числа как образа строки символов, порождает траекторию движения в евклидовом. Из (9) и (10) видно: чем длиннее строка, то есть точнее координата, тем длиннее траектория аффинных движений. Иными словами мы имеем внекоординатный прообраз пары пространства координат и пространства импульсов и соотношения неопределённостей в физике. Рассмотрев два образа объекта (11) и (12), можно прийти к паре материя — энергия.

Ещё один физический пример. Рассмотрим строку конечной длины как элемент фазового пространства динамической системы:

$$x = a_i a_{i+1} \dots a_s .$$

Очевидно, что по её внешнему виду невозможно определить, движется ли она к корню лексикографического дерева

$$x = a_{i-1} a_i a_{i+1} \dots a_s$$

или от него

$$x = a_i a_{i+1} \dots a_s a_{s+1} .$$

В первом случае мы имеем сдвиг влево, во втором – вправо. Это хорошо известный сдвиг Бернулли и его обобщение – преобразование пекаря [84, с. 87–98]. Движение влево есть дивергентный, случайный процесс, происходит на растягивающем многообразии. Вправо – конвергентный, на сжимающем многообразии, с увеличением порядка. Каждая точка пространства является седловой. В интерпретации И.Пригожина это есть путь сопряжения динамики и термодинамики [85].

Таким образом, получаем дотеоретические оппозиции пространства: разрывное (дискретное)  $\Sigma$  – и связное (непрерывное)  $E$ . Соответственно: нульмерное, границы – полномерные тела; статика – движение, случайность – детерминизм, идеальное (информация) – материальное (физика). Эти пары неотделимы синтаксическим образом, то есть выписыванием строк символов.

Продолжение – в системной теории. В теории сложных систем Г.Патти высказана идея о характере связи символического и динамического описания [86]. Развивая идеи Дж. фон Неймана о необходимости существования связи программы самопорождения и материи самовоспроизводящихся автоматов, Патти сформулировал проблему в виде принципа дополненности. Для адаптации и развития живые системы помимо динамических, физических свойств должны иметь возможность обладания самоописанием, то есть символическим способом существования. И поэтому живые системы должны обладать значительно большим числом степеней свободы, чем это требуется динамическим описанием. В биологии эта идея приобрела вид билингвы [87, гл.5] двойного – информационно-физического, лингво-функционального – смысла описания систем, от живых до социальных [88]. В физике наблюдается та же бинарность в исследовании сложности [35, 89]. Эта пара ведёт к другой известной проблеме – наблюдателя и объекта, проблеме установления границ между познающим и познаваемым, сформулированной Дж. фон Нейманом [90].

Продолжим рассмотрение в символьном подпространстве. Итеративная система функций преобразует логические проблемы, связанные с действительными числами – неопределимость, несчёт-

ность, невозможность именованя по Э.Борелю – в неразрешимые алгоритмические проблемы теории вычислимости. Простейшая формулировка этих проблем: указать алгоритм, позволяющий определить истинный член дизъюнкции

$$x \in A \vee x \notin A$$

в логической форме

$$P(x) \vee \neg P(x), \tag{13}$$

где  $A$  – множество,  $P$  – утверждение формальной теории,  $x$  – элемент множества или формального языка.

Рассмотрим одну из них. Как показано в [73, Th.3], неразрешимой проблемой является задача «определить, пересекает ли этот аттрактор итеративной системы функций отрезок линии на плоскости с концами  $[0,0]$  и  $[1,1]$ ». В связи с этим рассмотрим на таком отрезке вариант сжимающего процесса – метод исчерпания, то есть аксиому Архимеда.

Его формулировка в простейшем виде на связной прямой  $L$ :

$$\forall \varepsilon > 0, M > 0 \quad \varepsilon, M \in L, \exists n \in \mathbb{N} \quad n \cdot \varepsilon \geq M.$$

Теперь вместо  $L$  рассмотрим процесс на пересечении прямой с аттрактором итеративной системы функций, на гранулированной прямой  $L \cap A \subset R^2$ . Движение теперь возможно по несвязному множеству точек, то есть выбор шагов  $\varepsilon > 0$  должен выбираться из условия

$$n \cdot \varepsilon \in L \cap A \vee n \cdot \varepsilon \notin L \cap A, \tag{14}$$

то есть механическое движение оказывается невозможным из-за неразрешимости этой задачи. Оно оказывается зависимым от решения последовательности задач. Для связных областей (14) выполняется автоматически, для несвязных – логика процесса определяется интерпретацией Брауэра-Гейтинга-Колмогорова интуиционистской логики. Неразрешимость в общем случае (13) означает отрицание закона исключённого третьего, отличающего интуиционизм от классической логики.

Метод исчерпания как последовательность шагов, приводящих к цели, имеет, очевидно, двойной, измерительно-алгоритмический характер. Разница между измерением (физика) и алгоритмом (информатика) в свете двойственности строки очевидна. Последовательность отрезков, не помеченных символами, но с определёнными длинами есть измерение. Этот процесс одинаков для физических величин – весов, длин, энергий, зарядов и т.п. Последовательность отрезков, помеченных символами, но с неопределёнными длинами следования – запись алгоритма. Алгоритм не различает длины отрезков выполнения операций, поэтому современные компьютеры оказываются теоретически эквивалентными машине Тьюринга. Когда определены и символы, и длины отрезков – это технологии. Их положительные и отрицательные свойства в проблеме неразрешимости типа (13), (14).

Ещё одна неразрешимая проблема, которая представляется естественной для нашего пространства — теорема Райса-Успенского в теории формальных языков. Она гласит: любое нетривиальное свойство рекурсивно-перечислимого языка, то есть языка машины Тьюринга, неразрешимо. Здесь мы имеем пример, параллельный теории множеств. Одновременное задание языка как множества слов, то есть рекурсивно-перечислимым способом, и задание этого же набора элементов посредством указания свойства — несовместимы. Первый способ — дивергентный, второй — конвергентный. В целом, это ещё один вариант пары Единое-Многое. Невозможность указания в этой проблеме истинного члена дизъюнкции означает невозможность установления истинности и конъюнкции, то есть общей части множеств (истинности утверждений). Это есть, в свою очередь, неопределимость границ, инвариантов делимости.

Заметим следующее. Термины «(не)определимость», «(не)разрешимость», «(не)доказуемость», «(не)вычислимость», «(не)прогнозируемость», «(не)регулярность» имеют общую лингвистическую основу — (не)возможность предъявления формулы, алгоритма, то есть конечной строки символов, исчерпывающих проблему. И с этой точки зрения эти понятия эквиваленты. Поэтому можно подтвердить гипотезу Р. Пенроуза о нерекурсивной математике фракталов (множества Мандельброта) — любая нетривиальная задача на фракталах неразрешима [73], усилив её: фракталы являются неразрешимыми множествами. Фракталы — вход в нерекурсивную математику, обычная рекурсивная считающая техника на этих множествах невозможна.

Это, в свою очередь, означает, что фракталы можно рассматривать как основания бинарного архетипа и принципа дополнительности в его общенаучном смысле. Пара Единое-Многое не может быть редуцирована к одному из своих членов. Поэтому неразрешимые, нежелательные в физике и технике результаты в системной теории обретают вполне позитивный смысл — как результаты о дополнительности.

Сжимающие отображения являются центральной идеей и стержнем математической техники. Они присутствуют в определении непрерывности, дифференцируемости, различных видах сходимости и пополнений метрических пространств, теории приближённых вычислений. Доказательство в логике является сжимающим процессом, который также порождает множество истинности, имеющее фрактальный характер. В бинарном пространстве они оказываются дополненными «расширяющимися» процессами — процессам исчерпания многообразия противостоят процессы его развёртывания.

Связь идеи дополнительности с результатами о двойственности в математике невозможно установить, не имея числовой интерпретации фрактальных структур. Поэтому мы отложим этот вопрос.

Проблемы неразрешимости отдельных задач в логике и информатике имеют обширную литературу. Однако общее стремление к единственности решения заслоняет их трактовку как отрицания закона исключённого третьего и, в силу этого, их формулировку как общего принципа дополнительности.

Вопросы оснований формальных теорий недавно оказались и в поле зрения теоретической физики [91–94]. Теперь понятия этих теорий получают чисто физические интерпретации. Они часто рассматриваются в контексте горизонтов знания [95], границ метода [96], как источник случайности [97, 98]. Впервые анализируется материнское для математики понятие определмости, которое никогда не появляется в курсах физики и математики. Проблема в том, что в работающей математике отсутствуют содержательные примеры неразрешимых и невычислимых множеств, в то время как в приложениях они типичны [99]. Эту типичность можно сопоставить с типичностью фрактальных структур, и тогда, возможно, неразрешимым парам в физике удастся придать содержательную интерпретацию.

Здесь, возможно, впервые обращено внимание на содержательность основ математики, чего никогда не происходило в период развития кибернетики в XX веке [100]. Отдельно стоит выделить критику [101] и альтернативу канторовской теории множеств [102], которая служит основой всех экстраполяций математических методов.

Эти вопросы возникли вследствие поворота науки к внешнему миру. Поэтому их столкновение с фракталами и системами, по-видимому, неизбежно. Бурный рост теоретической информатики именно в части идей и теорий будет этому явно способствовать.

Синонимами оказываются известные выражения: «Fractals Everywhere» (M.Barnsley), «Undecidability Everywhere» (K.Svozil), «Universal Computation», «Incomputability in Nature», «Randomness Everywhere» [103], “Paraconsistency Everywhere” (G.Restall), “Words and Languages Everywhere” (S.Marcus), “Adjoint Functors Everywhere” (S.McLane).

Несколько слов о самоподобии фракталов. Очевидно, что числовая прямая  $R$  и евклидово пространство  $R^3$  являются также самоподобными. Но это тривиальный факт. О подобии двух объектов имеет смысл говорить, если они с различимой структурой или формой. Самоподобие фракталов именно такого вида, это самоподобие конвергентно-дивергентных объектов, т.е. целого, состоящего из частей. Поэтому фракталы впервые

наглядно демонстрируют это соотношение части и целого. Установление самоподобия физическими методами и/или измерениями невозможно: мешает бинарность понятия. Факт самоподобия должен быть дан до применения методов математической физики, то есть он должен быть фактом наблюдения. Для этого требуется наблюдатель. Или инверсия — не собственное движение в евклидовом пространстве. Инверсия сопрягает базовую пару процессов, но требует выхода за пространство для своего осуществления. Самоподобие — движение образов, а не точек и векторов. Без инверсии самоподобие — неопределимое понятие, усугубляющее трансцендентность фракталов методам классической математики.

То, что мы предпримем в дальнейшем изложении, может быть охарактеризовано как попытка построения (редко упоминаемой в науке) метафорической логики — логики связи разделов системной теории (см. [104]). Здесь точностью является полнота связей, полнота воспроизведения разнообразия, в отличие от математической логики — логики исчерпания разнообразия. Для этой цели мы попытаемся согласовать различные известные математические результаты, которые скрываются за фрактальной геометрией. Метафора есть также связь образов, дополнительная к дедукции логическая техника в языке. В евклидовом пространстве она бессмысленна, а на фракталах она оживает. Если говорить формально, построенное бинарное пространство является связным по дугам — ветвям дерева итеративной системы функций [105]. Тем самым в нём инверсия становится собственным движением.

## Литература к главе 2

1. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. Freeman, 1982.
2. *Breuzmann J.M., Juedes D.J., Lutz J.H.* Baire Category and Nowhere Differentiability for Feasible Real Functions // *Mathematical Logic Quarterly*, v. 50, no.4/5, 2004, p. 339–350.
3. *Gleik J.* Chaos: Making a New Science. Heinemann, London, 1988.
4. *Grebogy C., Yorke J.* The Impact of Chaos on Science and Society. United Nation University Press, 1997.
5. *Golub J.P., Cross M.C.* Chaos in Space and Time // *Nature*, v. 404 (6779), 2000, p. 710–711.
6. *Stanley H.E. et .al.* Scaling and Universality in Animate and Inanimate Nature // *Physica A*, 1996, v. 231, no. 1–3, p. 20–48.
7. *Stanley H.E. et .al.* Scaling in Nature // *Physica A*, 1999, v. 273, no.1–2, p. 46–59.
8. *Weibel E.K.* Fractal Geometry — A Design Principle for Living Organisms // *Am. J. Physiology*, 261 (6), 1991, p. 361–369.
9. *West B.J. et. al.* Chaos and fractals in Human Physiology // *Sci. Am.* 262, (1990), p. 40–49.
10. *Brown J.H. et. al.* The Fractal Nature of Nature // *Phil. Trans. R. Soc. London B*, v. 357, (2000), p. 619–626.

11. *Gisiger T.* Scale Invariance in Biology: a coincidence or Footprint of Universal Mechanism? // *Biol.Rev.*, v. 76, (2001), p. 161–209.
12. *Changizi M.A.* Universal Scaling Laws for Hierarchical Complexity in Languages, Organisms and Other Combinatorial Systems // *J.Theor. Biology*, v. 211, (2001), p. 277–295.
13. *Schroeder M.* *Fractals Chaos, Power Laws.* Freeman, 1990.
14. *Pietronero L, Labini F.* Fractal Universe // *Physica A*, v. 280 (1–2), p. 125–130.
15. *Eckmann J.-P.* et. al. Fractal Dimension of Visible Universe // arXiv; astro-ph. O301034. v. 1, 2003.
16. *Baryshev Y., Teerikorpi P.* Discovery of Cosmic Fractals. WS, 2002.
17. *Goodshield M.F., Mark D.M.* The Fractal Nature of Geographic Phenomena // *Annals of Assosiation. Am. Geographers*, v. 77(2), 1987, p. 265–278.
18. *Gouyet J.-P.* *Physics and Fractal Structures.* Springer. N.Y., Masson Paris, 1996.
19. *Turcotte D.* *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics.* Camb.U.P., 1997.
20. *Seuront L.* *Fractals and Multifractals in Ecology and Aquatic Science.* CRC Pr., Taylor and Francis, 2010.
21. Siguhara, May Application of Fractal Geometry to Ecology // *TREE* 5, 1990, p. 79–86.
22. *Brown J.H.* et. al. The Fractal Nature of Nature // *Phil. Trans. R. Soc London B*, v. 357, 2002, p. 619–626.
23. Gentry Th. Fractal Geometry and Human Understanding / in F.D.Abraham, A.R.Gilden (eds.) *Chaos Theory in Psychology.* Greenwood P.C., 1995.
24. *Murthy C.A.* et. al. Multilayer Perception and Fractals // *Inform. Sci.* 112, 1998, no.1–4, p. 137–150.
25. *Rothschild W.G.* *Fractal Geometry in Chemistry.* J.Wiley & Sons, 1998.
26. *Shannon B.* Fractal Patterns in Language // *New Ideas in Psychology*, v. 11(1), 1993, p. 105–109.
27. *Cross S.S.* Fractals in Pathology // *J. of Pathology* 182910, 1997, p. 1–8.
28. *Malsai O., Lidar D., Biham O., Avnir D.* Scaling Range and Cutoffs of Empirical Fractals // *PRE* 1997, v. 56, no.3, p. 2816–2828.
29. *Kadanoff L.* Fractal Geometry: Where Is the Physics // *Physics Today*, v. 39, 1986, p. 6–7.
30. *Maddox J.* Gentle Warning on Fractal Fashions // *Nature*, v. 322, 1986, p. 303.
31. *Avnir D.* et. al. Is Geometry of Nature Fractal? // *Science.*, v. 279, 1998, p. 34–40.
32. *Mandelbrot B.* Is Nature Fractal? // *Science*, v. 279 (5352), 1998, p. 783–786.
33. *Mouseev H.H.* Тектология Богданова и общая теория систем // *Вопросы философии*, 1995, №8.
34. *Волкова В.Н., Козлов В.Н.* Системный анализ и принятие решений: Словарь-справочник. М., Высшая школа, 2004.
35. *Badii R., Politi A.* *Complexity.* Camb.U.P., 1997.
36. *Montroll E.W., Schlesinger M.F.* Maximum Entropy Formalism, Fractals, Scaling Phenomena, and 1/f Noise: A Tale of Tails // *J. Stat. Phys.* V. 32, no.2, p. 209–230.
37. *Nicolis J.S., Tsuda I.* On Parallel Between Zipf's Law and 1 / f Processes in Chaotic Systems Possessing Coexisting Attractors // *Progr. Theor.Phys.*V. 82, no.2, 1989, p. 254–274.

38. Nicolis G., Nicolis C., Nicolis J.S., Chaotic Dynamic, Markov Partition and Zipf's Law // J.Stat.Phys. vol. 54, no.3/3, 1989, p. 915– 924.
39. *Lavenda B.H.* Fractals, Clusters and Order-Statistics: A New Relation Between Probability and Entropy // Int.J.Theor.Phys. V.35, no.9, 1996, p. 1993–2011.
40. *Lavenda B.H.* The Analogy Between Coding Theory and Multifractals // Phys.A: Math. Gen., v. 31, (1998), p. 56512–5660.
41. *Triebel H.* Fractals and Spectra. Birkhauser, 1997.
42. *Triebel H.* Theory of Function Spaces III, Birkhauser, 2006.
43. *Kigami J.* Analysis on Fractals. C.U.P. 2001.
44. *Beck C., Schlogl F.* Thermodynamic of Chaotic Systems. CUP, 1995.
45. *Falconer K.* Techniques in Fractal Geometry. J.Wiley & Sons, 1997.
46. *Jorgensen P.E.T.* Analysis and Probability, Wavelets, Signals, Fractals. Springer, 2006.
47. *Nottalle L.* Fractal Space-Time and Microphysics. World Scientific, Singapore, 1993.
48. *Kroeger H.* Fractal Geometry in Quantum Mechanics, Field Theory and Spin Systems // Physics Reports, v. 323, no.2, 2000, p. 81–181.
49. *Edgar G.A.* Classics on Fractals. Addison – Wesley, 1992.
50. *Бодякин В.И.* Эволюция понятия система в преддверии третьего тысячелетия. В кн. Анализ систем на пороге XXI века, ч. III, 1997, с. 214–217.
51. *Kechris A.S.* Classical Descriptive Set Theory. Springer, 1995.
52. *Lipscomb S.L.* Fractals and Universal Spaces in Dimension Theory. Springer Science+Business Media, 2009.
53. *Ko, Ker-I.* On the Computability of Fractal Dimensions and Hausdorff Measures // APAL, 93 (1998), no 1–3, p. 195–216.
54. *Beardon A.F.* On Hausdorff Dimension of General Cantor Sets // Proc. Camb. Phil. Soc., v. 61, (1965), p. 679–693.
55. *Джекив Р.* Знакомьтесь с масштабной симметрией // УФН, 1973, т. 103, вып. 4, с. 743–754.
56. *Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д.* Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // УФН, 1985, т. 146, вып. 3, с. 493–506.
57. *Agnes C., Rasetti M.* Undecidability and Chaos in Word-Coded Dynamics // Chaos, Solitons and Fractals. V. 5, no 2, p. 161–175.
58. *Wolfram S.A.* New Kind of Science. Wolfram Media, 2002.
59. *Chaitin G.* Meta Math! Pantheon N.Y. 2005; math.HO/0411091.
60. *McCauley J.L.* Chaos and Fractals. An algorithmic Approach to Deterministic Chaos. Cambridge U.P. 1995.
61. *Kurka P.* Topological and Symbolic Dynamics. SMF, Paris, 2003, ch. 1, 2.
62. *Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D.* Chaos and Fractals. 2-ed. Springer-Science+Business-Media, 2004.
63. *Hutchinson J.* Fractals and Self-Similarity//Indiana Univ. J. of Mathematics, 1981, v. 30, no.5, p. 713–747.



64. *Barnsley M.F.* Fractals Everywhere. Academic Press, 1988; Barnsley M.F. Superfractals. Camb. U.P. 2006.
65. *Falconer K.* Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Wiley, 1990, 2003.
66. *Barnsley M.F.* Transformations Between Self-Referential Sets // Am. Math. Monthly. V. 116, (2009), p. 291–304.
67. *Гельмгольц Г.* О фактах, лежащих в основаниях геометрии / Об основаниях геометрии. М., Гостехиздат, 1956.
68. *Merzenich W., Staiger L.* Fractals, Dimension, and Formal Languages. / In. G.Rozenberg, A. Salomaa Developments in Language Theory. WSPC, 1994, p. 262–271.
69. *Edgar G.A.* Measure, Topology, and Fractal Geometry. Springer, 1990.
70. *Barnsley M.F.* Superfractals. CUP, 2006.
71. *Quine W.V.* Concatenation as a basis for arithmetic // JSL, v .11, no.4, 1946, p. 105–114.
72. *Falconer K.* Digital Sundials, Paradoxical Sets and Vitushkin Conjecture // The Mathematical Intelligencer. v. 9, no.1, p. 24–27; его же Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Wiley, 2003, ch. 6.
73. *Dube S.* Undecidable Problems in Fractal Geometry // Complex Systems 7 (1993), p .428–432.
74. *Fu K.S.* Syntactic Pattern Recognition and Applications. Prentice Hall, 1982, перевод первого издания Фу К.С. Структурные методы в распознавании образов. М., Мир, 1977.
75. *Kulik K., Dube S.* Encoding Images as Words and Languages // Int. J. of Algebra and Computation. V. 3, no.2, p. 211–236.
76. *Stark J.* Iteration Function System as Neural Network // Neural networks. V. 4, 1991, p. 679–690.
77. *Capra F.* The Web of Life. Flamingo, 1997.
78. *Capra F.* Hidden Connections. 2002.
79. *Caldarelli G.* Scale-Free Networks Oxford U.P., 2005.
80. *Newman M.E.J.* Structure and Function of Complex Networks // arXiv:cond-mat/0303516, v. 1. 2003; его же Networks. An Introduction. Oxford U.P., 2010.
81. *Mamford D., Series C., Wright D.* Indras’s Pearls. Cambridge U.P., 2002.
82. *Perrin D., Pinn J.E.* Infinite Words. Elsevier, 2004.
83. *Арманд А.Д.* Два в одном. Закон дополнительности. М., ЛКИ, 2008.
84. *Пригожин И.Р., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. М., УРСС, 2000.
85. *Пригожин И.Р.* От существующего к возникающему. М., Комкнига, 2006.
86. *Pattee H.* Dynamic and Symbolic Modes of Complex Systems // Int. J. of General Systems, 1977, v. 3, p. 259–266.
87. *Заренков Н.А.* Семиотическая теория биологической жизни. М., Комкнига, 2007.
88. *Hoffmeyer J., Emeche C.* Code-Duality and the Semiotics of Nature / In M.Anderson, F.Merrell (eds) On Semiotic Modelling. M. De Gruyter, Berlin, N.Y., 1991, p. 117–166.
89. *Augenstein B.* Complexity, Universal Libraries, DNA sequence // Chaos, Solitons and Fractals, 1999, v. 10, no. 6, p. 953–973.

90. *Pattee H.H.* The Physics of Symbols: Bridging the Epistemic Cut // *Biosystems*, v. 60, 2001, p. 5–21.
91. *Wolfram S.* Undecidability and Intractability in Theoretical Physics // *Physical Review Letters*, v. 54, no.3, 1985, p. 735–738.
92. *Pour-El M., Richards I.* Computability in Analysis and Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
93. *Svozil K.* Randomness & Undecidability in Physics. World Scientific, Singapore, 1993.
94. *Da Costa N.C.A., Doria F.A.* Undecidability in Classical Mechanics // *Int. J. of Theor. Physics*, v. 30, no.8, 1991, p. 1041–1073.
95. *Svozil K.* Physical Unknowables // arXiv: physics. 0701163 v.1 2007.
96. *Bennett C.H.* Universal Computation and Physical Dynamics // *Physica D* 86 (1995), p. 268–273.
97. *Wolfram S.* Origin of Randomness in Physical Systems // *Physical Review Letters*, v. 55, no.5, 1985, p. 449–452.
98. *Kalman R.E.* Probability in the Real World as a System Attribute // *CWI Quaterly*, v.9 (3), 1996, p. 181–203.
99. *Cooper S.B., Odifredi P.* Incomputability in Nature./ In S.B.Cooper, S.S.Goncharov (eds.) *Computability and Models: Perspectives East and West*. Kluwer, 2003.
100. *Calude C, Jürgensen H., Zimand M.* Is independence an exception // *Appl. Math. Comput.* 66, 63–76 (1994); Chaitin G. How Real Are Real Numbers // arXiv: math. HO/0411418, v. 3, 2004.
101. *Weaver N.* Mathematical Conceptualism // arXiv:math.LO/0509246, v. 2. 2005.
102. *Barwise J., Moss L.* On the Mathematics of Non-Well-Founded Phenomena. CSLI Press, 1996.
103. *Calude C.S., Chaitin G.J.* Randomness everywhere, *Nature* 400, 22 July (1999), p. 319–320.
104. *Герасимова И.А.* Единство множественного. М., Альфа-М, 2010.
105. *Nadler S.B.* Hyperspaces of Sets. Marcel Dekker, 1978.

## Глава 3

### Нефундированные множества и $p$ -адические числа

Рассмотренная в предыдущей главе схема порождения фракталов итеративной системой функций с точки зрения «гладкого мышления» математической физики может показаться искусственной подобно многочисленным схемам, которые появлялись в математических моделях кибернетики и системного анализа.

В математике известны соответствия: между аксиоматикой и геометрией — неевклидова геометрия, между геометрией и числовой системой — евклидова геометрия и вещественные числа. Для фрактальной теории такого соответствия не введено в практику. Пара вещественные числа—фракталы, как известно, прироста знания не дала. Однако далеко не все формальные структуры вовлечены в математическое моделирование. В этом разделе мы попробуем свести понятия и рассмотрим мотивы введения в качестве числового соответствия фрактальной геометрии  $p$ -адические числа.

Существует вторая основная, наряду с вещественной  $R$ , числовая система  $p$ -адических чисел  $Q_p$ . Её фундаментальное значение следует из известной теоремы алгебры: любое числовое поле содержит  $R$  или  $Q_p$  в качестве простого подполя. Интерпретация  $p$ -адических чисел до сих пор остаётся проблематичной, неясен их физический или иной смысл.

«Хотя эти числа проникли в некоторые математические дисциплины, теорию чисел, алгебраическую геометрию, алгебру, топологию, анализ, они до сих пор не раскрыли своего потенциала в физике» [*Robert A. A Course in  $p$ -Adic Analysis*. Springer, 2000, Pt. V.]

Возникшая в 1994 году  $p$ -адическая физика [1] пока не дала их ясного толкования [2, 3]:

«... физический смысл описания физических величин  $p$ -адическими числами прояснён, по-видимому, не был. Неясно, каковы те экспериментальные ситуации, в ходе которых измерение каких-либо физических величин с должной необходимостью производится с помощью  $p$ -адических чисел. И прежде всего, каковы те ситуации, в которых очевидным образом должна нарушаться аксиома Архимеда» [Паршин А.Н. Размышления над теоремой Гёделя / Путь. Математика и иные миры. М.: Добросвет, 2002, р. 96–97].

Необходимость использования  $p$ -адических чисел физика мотивирует возможным нарушением аксиомы Архимеда вблизи планковской длины: поведение пространства-времени здесь не соответствует топологии поля действительных чисел. Взамен прежних фундаментальных сущностей — полей, частиц, струн — предлагается ввести единую субстанцию числового поля  $Q_p$ , которое способно воспроизвести флуктуации топологии и размерности пространства-времени, его метрики и сигнатуры [4]. Из этого можно сделать вывод, что базовой интерпретацией  $p$ -адических чисел в физике являются иррегулярные явления на микроуровне. В качестве одного из возможных приложений авторы [1] указывают фрактальные и хаотические структуры. Визуальное сходство геометрии множеств  $p$ -адических чисел и фракталов не раз отмечалось в литературе [5–7].

Продолжим подбор математического содержания фрактальной геометрии и рассмотрим в качестве её числовой основы  $p$ -адические числа, а в качестве теории множеств — экстраординарные множества Д.Мириманоффа, которые недавно вошли в практику как нефундированные множества в теоретической информатике [8, 9].

*p*-Адические числа синтаксически неотличимы от вещественных, многие теоремы вещественного анализа переносятся на  $p$ -адический анализ, но многие разительно отличаются. Отличия коренятся в различии топологий. Связной топологии вещественных чисел в одном и том же синтаксисе противостоит полностью несвязная топология  $p$ -адических. Всякое связное множество здесь состоит из одной точки. Их естественная иерархическая структура тождественна итеративной системе функций. Поэтому  $p$ -адические числа естественным образом соотносятся с делимостью.

В этом состоит их интерпретация в нашей модели. Как было показано в разделе 2, в этом случае возникает нарушение аксиомы Ар-

химеда. Точнее, формула этой аксиомы  $n \cdot \mathcal{E} = M$ , так же как строка итеративной системы функций, может иметь два истолкования: как движение по прямой (аддитивная форма) и как последовательность масштабных трансформаций, деления, скейлинга (мультипликативная форма). В этом случае нарушение аксиомы выглядит как неадекватность линейных измерений объектов, получаемых делением.

Именно такую их интерпретацию впервые дал С.Улам в своих рассуждениях об (актуальной) бесконечности в физике:

«Поочерёдно выступающие на передний план точки зрения “теории поля” и “элементарных частиц” представляют собой в данное время или (топологически) евклидов континуум, в котором основные объекты являются функциями непрерывно меняющегося времени, или частицы, внутреннее содержание которых не анализируется.

Интерпретация этих первично малых единиц пространства развивается через следующие стадии: атом становится ядром, окружённым электроном, ядро, в свою очередь, выдвигает свои внутренние компоненты — нуклоны и далее; в настоящее время протоны и нейтрино, возможно, теряют своё право на статус “частиц”, обнаруживая составные элементы. Всё это, так сказать, в сторону уменьшения. В то же время в направлении распределения физической Вселенной в целом тоже, по-видимому, существует такой итеративный процесс: звёзды оказываются собранными в скопления, скопления — в галактики. Существуют скопления галактик, сверхгалактик, и, может быть, можно увидеть, что существует бесконечная иерархия на другом конце шкалы.

Поэтому, может быть, интересно вообразить такие процессы, продолжающиеся неограниченно, и, в частности, рассмотреть случай, когда распределение массы (или энергии) продолжается всё время, не приводя в пределе к системе действительных чисел или евклидову континууму, в котором определено данное поле.

Напротив, вообще говоря, эти пределы будут подобны канторовому множеству и будут иметь топологию скорее  $p$ -адических, чем действительных чисел» [Улам С. Нерешённые математические задачи, М.: Наука, 1964, с. 106, 120].

Приведём обзор выводов Улама, касающийся нашей темы [10]. Они охватывают основные вопросы, как собственно математические, так и общенаучного значения.

1. Поведение бесконечных систем не обязательно является пределом поведения их конечных аппроксимаций.

2. Распространение анализа на описание комбинации дискретности с непрерывностью для физических свойств приводит к структуре канторова совершенного множества. Соответственно, не только действительные числа характеризуют физически содержательные величины.

3. Множество материальных точек само по себе не является ни евклидовым континуумом, ни набором дискретных точек. Модели канторова множества могут быть адекватны для физических моделей, которые топологически не являются ни евклидовым континуумом (теория поля), ни соответствуют понятию элементарных частиц, внутренность которых далее не анализируется (как в современной теории кварков), то есть в случае, когда происходят непрекращающиеся процессы подразделения физических сущностей, таких как масса.

4. Подобные процессы приводят к распределениям типа канторова совершенного множества с топологией, более соответствующей  $p$ -адическим, нежели вещественным числам.

5. Канторово множество важно как модель и конфигурационного пространства, и фазового, и в конце концов эта конструкция должна быть осуществлена в пространстве Минковского—Лоренца.

6. В этом случае физические структуры представляются с бесконечно увеличивающейся сложностью, и аксиома регулярности теории не может быть удержана. Также теряет своё значение в физике и аксиома непрерывности СН.

7. По словам Улама, «похоже на то, что физические явления радикально меняют свои физические свойства в малом». Поэтому дальнейшая геометризация физики не осуществляется простым обобщением понятий евклидовой геометрии, так как дифференциальная метрика никогда не отразит существенных свойств непрекращающихся процессов деления, но должна основываться на радикальных изменениях локальной топологии (так, как в канторовом множестве).

8. Очевидный аргумент для развития теории систем на основе  $p$ -адических чисел: «... физика не была бы возможной, если электрон и протон не были бы во многом тождественны. Если это подобие или идентичность подмножеств Вселенной не существует, не могло бы быть никакой физики» [10, p. 1781–1785].

Таким образом, Улам толкует  $p$ -адические числа как инварианты процессов деления (канторово совершенное множество — фрактал), единой субстанции противоположных начал (отрицательный электрон и положительный протон) и, далее, качественного разнообразия (единство разделов физики как единой науки). Стоит отметить последовательность его взглядов: он отказывается от барьера планковской

длины в реализации своих идей обобщения группы Лоренца в теории относительности [11]. Тем самым, очевидно, что Улам имеет в виду *актуальную бесконечность* делимости.

### Экстраординарные множества

Не раз в литературе обращалось внимание на то, что понятие множества неотделимо от человеческого восприятия и интуиции и ими же определяется. Так, К.Гёдель связывал известные парадоксы с этим фактом и отмечал возможность новых интуиций [12, 13]. Более определённо математические конструкции и интуиция связаны в мысли Г.Биргкоффа:

«... если физическая интуиция была источником многих глубочайших идей чистой математики, насколько важнее она для прикладной, постоянно сталкивающейся с проблемами жизни, безмерной глубины и сложности. ... Может случиться, что со временем физическая интуиция станет играть меньшую роль как в чистой, так и в прикладной математике. Но это будет лишь потому, что мы живём в век, когда приложения математики выходят за границы физики и техники и начинают проникать в химию, биологию, экономику и административные науки. Я предсказываю, что исследование этих предметов, стимулируемое показаниями всех наших чувств, а не только чувством логики, приведёт к новым важным математическим понятиям» [Биргкофф Г. Математика и психология. М.: Сов. Радио, 1977. с. 88].

Экстраординарные множества Д.Мириманоффа оказались совместимыми с аксиомами теории множеств, подобно этому  $p$ -адические числа Улама не противоречат физическим теориям [14]. Они охватывают, по сути, тот же круг вопросов, что и рассуждения Улама. Но если Улам имел в виду «объективные» мотивы формализации делимости, то Мириманофф более «субъективен»: он использует то, что во фрактальной теории называется увеличением разрешающей способности наблюдения — *zoom in*, или *углублением в детали*. То есть вводит, по терминологии физики, наблюдателя. В его рассуждениях неявно присутствует способность восприятия человеком границ, различий участков пространства и времени [15–17].

Мириманофф, обнаружив «неполную интуицию» в способе образования множеств Кантором, дополняет её. Исходным пунктом его рассуждений был вопрос: «Каковы должны быть необходимые и достаточные условия существования множества индивидов?». К этому его привели парадоксы теории канторовых ансамблей. Его конструкция представляет собой способ их образования в универсуме делимых сущностей, иерархического строения материи. По Кантору, множество об-

разуется собиранием различных предметов, а по Мириманоффу, образование ансамблей происходит посредством различения их элементов в рамках некоторой целостности, так сказать, путём открывания «чёрного ящика».

«Пусть  $E$  – множество,  $E^1$  – один из его элементов,  $E^2$  – элемент, принадлежащий  $E^1$ , и так далее. Последовательность от  $E$  к  $E^1$ , от  $E^1$  к  $E^2$  называется «спуском». Такой спуск обрывается, когда встречается неразложимый элемент. В этом случае спуск конечен, но он не обязан быть таковым... Я скажу, что множество ординарное, если оно допускает только конечный спуск; я назову его экстраординарным, если среди его спусков найдутся бесконечные» [15, р. 42].

Мириманофф, по-видимому, первым включил нелинейность и парадоксальность в последовательную теорию множеств и связал, хотя и неявно, эти явления с делимостью. Образование множеств такими процессами Мириманофф называет непредикативным, различая образования [17, р. 33–34]:

$E = (a, b, c, \dots)$  – предикативное,  
и  $E = (E, a, b, c, \dots)$  – непредикативное.

Следуя мысли А. Пуанкаре (существование в математике означает отсутствие противоречий) Мириманофф приходит к выводу, что известные парадоксы теории множеств Рассела, Бурали-Форти означают тот факт, что при определённых условиях множество индивидов может не существовать, даже если сами индивиды существуют. Такими несовместимыми условиями на множество являются «все» и «индивид». Заметим, что «индивид» с латыни есть то же, что «атом» с греческого, и означает «неделимый». То есть существуют условия образования множеств, несовместимые с принципом элементарности, атомизма.

«Изучение различных противоречий, которые мы встретили, высветило следующие факты: в каждом из наших примеров возможно сформировать множество всё более и более обширное, но множество индивидов не существует, каким бы ни было рассматриваемое множество. Возникают новые индивиды, и по необходимости появляются всё более обширные множества, в результате мы наблюдаем наличие бесконечного расширения, которое не предполагает остановки или ограничения» [15, р. 48].

Мириманофф ввёл в рассмотрение множества с разлагаемыми элементами, которые могли бы отразить различия между двумя сортами



множеств. Первый — ординарные множества с неделимыми элементами, второй — экстраординарные с элементами, которые сами являются множествами. Эти множества он иллюстрирует при помощи метафоры зеркала: «... двое детей рассматривают книгу, на обложке которой изображено, как двое детей рассматривают эту же книгу...» [17, р. 212]. По мысли Мириманоффа, эта рефлексивность, или зеркальность, моделирует парадокс Рассела теории множеств.

В последней работе, перейдя к понятию автореферентности, он рассматривает те соотношения, которые вытекают из его конструкции экстраординарных множеств и сегодня составляют базис нелинейной науки. Рассматривая парадоксы Зенона и Канта, Мириманофф отмечает в их структуре несовместимые условия: «Не только множество  $X$  зависит от выбора элементов, но и, в свою очередь, выбор элементов зависит от свойств  $X$ . И эти два условия несовместимы» [17, р. 38]. Такая зависимость известна в аксиомах: это взаимная неопределимость аксиом множества степени и выделения [14, с. 58]. Первая зависимость, очевидно, идёт через сборку, вторая — через разложимость, делимость целого. Это, возможно, первая явная логическая форма связи Единое—Многое. Тем самым бесконечно продолжающимся процессам деления Улама соответствуют бесконечные спуски разлагаемых элементов в экстраординарных множествах Мириманоффа.

Отметим принципиальное различие между двумя способами образования множеств. По Кантору, множество образуется в пустом пространстве, элементы первичны и где-то вне существует их необходимый запас. Это неявно предполагает аксиому выбора  $AC$ . По Мириманоффу, первично целое, элементы вторичны, а материальный ресурс, то есть аксиома выбора, не нужен. Первый способ — вне мира, второй — принадлежит миру. Ординарные множества можно собрать, они состоят из материальных элементов. Экстраординарные состоят из границ, поэтому их нельзя увидеть телесным зрением и собрать. Это умопостигаемая реальность. Канторов процесс — конвергенция от многого к единому, процесс Мириманоффа — дивергенция от единого к многому.

Явления умопостигаемого мира рассмотрены в интерпретациях  $p$ -адических чисел Г.Вейля и А.Н.Паршина. Здесь речь идёт о нефизической реальности, сфере языка и мысли. В 1984 г. Паршин строит бинарное лингвистическое дерево, кодирующее формулы логики, которое служит диадическим аналогом нумерации Гёделя и является иллюстрацией диадической нумерации Р.Смальяна, у которого она используется лишь как технический внутриматематический приём [18]. Тем самым строки символов как объекты логики получают также двойное истолкование — в стандартном натуральном ряде и 2-адических числах.

Интерпретация 2-адических чисел как инвариантов процессов деления, в данном случае – диарезиса, отчётливо видна у Паршина в его толковании известных идеальных чисел Платона. Диарезис – это разделение, деление, различение, разбирательство, решение. Диарезис идей у Платона моделируется делением отрезка пополам, где каждая вещь появляется как предел, возможно, бесконечного деления. Наконец, упомянутое Уламом единство (физических) противоположностей выводится Паршиным на уровень философской диалектики. Именно диадическое дерево, разводящее понятия по разным ветвям, рассматривается им как пространство «единства и борьбы противоположностей». Логически это дополнение закона исключённого третьего его отрицанием. К этому кругу идей Паршин относит универсальную характеристику Лейбница – двоичной записи понятий, корни которой обнаруживаются в древнем Китае в виде кодировки гексаграмм И Цзин, идею генетического кода Дж.Гамова и упомянутую выше теорему Гёделя [19] (недавно освещена эта же идея в естественных языках – см. [20]). Бинарное, диадическое, по Паршину, дерево диарезиса и делимости пространства, времени и материи ведёт к многочисленным философским и математическим оппозициям и парадоксам, уходящим корнями в философию досократиков [21, 22].

Та же нефундированная идея порождения  $p$ -адических чисел изложена Л.А.Калужниным. Она в явном виде вводит языковую номинацию как процесс (вы)деления сущностей в смысловом поле языка – как естественного, так и формального (см.: *Налимов В.В. О бесконечной делимости смыслового поля*, гл.1). Эта схема обща итеративной системе функций и логике. В качестве сжатий она использует сжимающие свойства правила *Modus Ponens*, разделяющего множества истинности последовательности предикатов, выражающих отношение эквивалентности на числовом поле.

Для всякого  $\varepsilon > 0$  отношение  $D_\varepsilon(x, y) = |x - y|_p \leq \varepsilon$  есть отношение эквивалентности на поле  $K$  с неархимедовым абсолютным значением  $|x|_p$ . Когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ , пробегая положительные вещественные числа, то соответствующие предикаты  $D_\varepsilon(x, y)$  пробегают серию всё более тонких эквивалентностей (порождая всё более тонкие различия) [23, с. 347–348]:

$$D_{\varepsilon^{-3}}(x, y) \supset D_{\varepsilon^{-2}}(x, y) \supset \dots \supset D_0(x, y) \supset D_\varepsilon(x, y) \supset D_{\varepsilon^2}(x, y) \supset \dots$$

Заменив в этих рассуждениях предикат, выражающий метрическую неразличимость, на логический предикат, множество неразличимости – на множество истинности этого предиката, « $\varepsilon \rightarrow 0$ » – на последовательное применение правила *Modus Ponens* в его смысле (логического) выделения истинности, а поле  $K$  – на совокупность

строк итеративной системы функций, получим процесс языковой номинации, формальной или естественной. В последнем случае неархимедово нормирование порождается конкатенацией, куда оно входит под видом сдвига строки (см. гл. 2).

Вернёмся к фракталам. Мы упоминали о существующей в литературе аналогии между фракталами и  $p$ -адическими числами. Несколько забегаая вперёд, кратко объясним их интерпретацию как итеративной системы функций [24, p. 17–18].

Итеративная система функций есть (лексикографическое, адресное) пространство строк символов в выбранном алфавите  $\Sigma$ :

$$x = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \quad \sigma_i \in \Sigma .$$

Строку можно рассматривать как результат конкатенации односложных слов – букв, цифр, символов алфавита (ограничимся строками конечной длины – рациональными числами; см. интерпретирующую функцию, разд. 2):

$$\begin{aligned} x &= \sigma_0 + 2^1 \cdot \sigma_1 + 2^2 \cdot \sigma_2 + \dots + 2^n \cdot \sigma_n = \\ &= \sigma_0 + 2 \cdot (\sigma_1 + 2 \cdot (\sigma_2 + 2 \cdot (\dots + 2 \cdot (\sigma_n)))) \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Выражения строки степенным рядом в (1) есть точное определение канонической формы  $p$ -адических  $Q_p$ , в данном случае – 2-адических чисел  $Q_2$ .

$$x \in Q_2 \quad x = a_{-k} \cdot p^{-k} + \dots + a_{-1} \cdot p^{-1} + a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n p^n,$$

$$\text{или } x = a_{-k} a_{-k+1} \dots a_0 a_1 a_2 \dots a_n, \quad (2)$$

$$a_i \in A = \{0, 1, \dots, p-1\} .$$

Запись в виде строки есть один из способов записи  $p$ -адического числа. В этом и заключается числовая интерпретация фракталов и итерированной системы функций. Умножению на  $p$  соответствует сжатие с коэффициентом  $r < 1$ , умножению на  $a_i$  – поворот. Проекция в евклидово пространство включает конкретные величины сдвига и поворота, то есть аффинные преобразования. Таким образом,  $p$ -адические числа есть внекоординатный прототип итеративной системы функций. Внешний облик фрактала получается из них дополнением аффинных движений.

Более формально  $p$ -адические числа получаются обращением порядка на множестве натуральных чисел. Для уяснения этого запишем натуральные числа в двоичной системе счисления. Переход к бинарному дереву далее очевиден. Прямая натурального ряда расщепляется в дерево. В этом случае самые большие по «протяжённости» числа оказываются  $p$ -адически малыми. И наоборот, малые как результаты длительного процесса деления становятся  $p$ -адически большими.

Уже в современной теории нефундированных множеств показано их тождество с бинарными деревьями, то есть со структурой 2-адических чисел [9, ch. 18]. Начав с делимости и придя к нефундированным множествам, мы с другой стороны подошли к совпадению фракталов и  $p$ -адических чисел с теорией систем. П.Акцел показал в своей работе, как графы структуры системы преобразуются в нефундированные множества через итерацию взаимодействия вершин-подсистем [8, p. 4]. Получающиеся при этом строки символов вершин представляют собой траекторию смены последовательных состояний. По сравнению со строками символов это темпорализованные строки (*streams*), маркирующие последовательность состояний систем (*labeled transition systems*).

Оказывается, что, несмотря на столь необычную мотивацию введения нефундированных множеств (и  $p$ -адических чисел, соответственно), мы не входим в противоречие с аксиомами теории множеств  $ZF$  [8, 9, 14]. Иными словами, двойная — фундированно-нефундированная — интерпретация строк согласована с основами математики.

#### **Числа как функции**

Отдельно приведём интерпретацию строк и  $p$ -адических чисел как функций.  $p$ -Адические числа вводились К.Гензелем как числовой аналог функций, заданных степенными рядами Лорана. Эта аналогия имеет основание как в классической математике, так и в теоретической информатике. В дополнение стоит отметить, что та же мысль была высказана в критике фрактальной теории [25]. Фрактальная гипотеза несовместима с парадигмой атомизма, фракталы включают темпоральный, динамический элемент. Фракталы как процессы аналогичны иррациональным числам как бесконечным строкам цифр (здесь автор [25] имеет в виду позиционную запись чисел).

Строки чисел/символов являются общим объектом математической физики, теоретической информатики и алфавитных систем естественных языков. Изоморфизм между последовательностями чисел, степенными рядами, векторами  $n$ -мерного пространства, натуральным рядом,  $p$ -адическими числами появляется в различных контекстах. Причём это не только внешнее тождество, но и тот, например, факт, что канторово совершенное множество, которое является общим объектом формальных языков, вычислительных структур, диадических чисел  $Z_2$ , классическим примером фрактала и т.д., как теоретический объект также присутствует во многих разделах науки, как эмпирической (фракталы), так и теоретической (нульмерные множества символической динамики).

Последовательность символов или цифр можно неформально рассматривать как последовательность значений некоторой функции — закона образования этой последовательности. В этом представлении

опущен ряд независимого переменного, которым может быть ряд моментов времени, значений абсцисс и т.д.

Компьютерная математика обосновала алгоритмическое представление непрерывных функций: функция непрерывна, если последовательность её значений вычислима некоторым алгоритмом. И теоретическая информатика явно использует конструкцию «*real numbers as functions*», которая трактует последовательность цифр действительного числа как последовательность значений некоторой функции. Тогда аналогом функции оказываются алгоритмы, таблицы, графы и высказывания логики [26]. В нашей интерпретации как функции могут рассматриваться и  $p$ -адические числа, что совпадает с трактовкой нефундированных множеств как функций [8, 9].

Непрерывные функции можно задать двумя способами: синтаксически – записью  $F(x, y) = 0$ , и «способом Эйлера» – взмахом руки, прочертив линию мелом на доске, карандашом на бумаге. Существует далеко идущая теория, развивающая аналогию между числами и функциями [27]. Мы остановимся лишь на этой двойственности понятия функции. Как неоднократно отмечалось, выразить синтаксически *непрерывность-как-связность* в математике не получилось. Э.В.Бет прямо формулирует проблему как дополненность двух описаний:

«...линия не может быть рассмотрена ни как набор отдельных точек, ни как нечто отличное от них» [*Beth E.W. Foundation of Mathematics. North-Holland, 1965, p. 14*].

Та же мысль у Г.Вейля, если отнести её к вещественной числовой прямой:

«Система действительных чисел подобна двуликому Янусу: с одной стороны, это совокупность (*das Feld*) алгебраических операций + (плюс) и – (минус) и им обратных, с другой – континуальное многообразие, части которого связаны друг с другом непрерывно. Первый лик чисел – алгебраический, второй – топологический. Современная аксиоматика, при всей своей простоте, не терпит (в отличие от новейшей политики) подобного двусмысленного смешения войны и мира; она тщательно отделяет одну сторону от другой» [*Вейль Г. Математическое мышление. М.: Наука, 1989, с. 26*].

Обычная трактовка непрерывных функций – это траектории движения некоторой изображающей точки. Рассмотрев движение как последовательность аффинных преобразований из набора, ограниченно-

го теоремой Лиувилля, и, значит, составляющих итеративную систему функций, мы вложим двойное понимание непрерывной функции в наше бинарное пространство и поле  $p$ -адических чисел.

В общей теории систем, для которой  $p$ -адические числа представляются более естественной числовой базой, нежели вещественные, движению соответствует процедурное представление системы, символическому описанию – факторное [28, с.206 – «Методика структуризации целей и функций, основанная на двойственном представлении объекта»].

Таким образом, мы получили ещё одну интерпретацию фракталов и  $p$ -адических чисел – как алгебру функций. Локально это множество полностью несвязно, состоит из отдельных точек. Глобально оно есть пространство непрерывных функций со свойствами числовой системы – «банахова алгебра». Непрерывность в этом случае означает непрерывность по типу рациональных чисел: если в « $\varepsilon - \delta$ » определении непрерывности считать и  $\varepsilon$ , и  $\delta$  также рациональными. В теоретической информатике это алгебра (конкурирующих) процессов, для которых и были разработаны нефундированные множества.

### Литература к главе 3

1. *Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.*  $p$ -Адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
2. *Dragovich B., Khrennikov A.Yu., Kozyrev S.V., Volovich I.V.* On  $p$ -adic Mathematical Physics // arXiv:0904.4205. V. 1 [math-ph] 2009.
3. *Pitkanen M.* TGD as Generalized Number theory. 2006 (с сайта [http://wippiespace.com/public\\_html/tgdnumber/tgdnumber\\_html](http://wippiespace.com/public_html/tgdnumber/tgdnumber_html)).
4. *Volovich I.V.* Number Theory as Ultimate Theory of Physics / Preprint CERN – TH.4791 1987, p. 13; перепечатано в:  $p$ -Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications 2010, v. 2, p. 77–87.
5. *Coucco A.* Vizualizing the  $p$ -adic integers // Amer. Math. Monthly, 98, 1991, p. 355–364.
6. *Robert A.* Euclidean Models of  $p$ -adic Space / Proc. Of the 4<sup>th</sup> Conf. (Nijmegen); Dekker M. 1997, p. 349–361.
7. *Чистяков Д.В.* Фрактальная геометрия образов непрерывных вложений  $p$ -адических чисел и соленоидов в евклидовы пространства // ТМФ 1996, т. 119, №3, с. 323–337, его же: arXiv. math. DS/0202089, v. 1, 2002.
8. *Aczel P.* Non-Well-Founded Sets. CSLI Lect. Notes 14, Stanford, 1988.
9. *Barwise J., Moss L.* Vicious Circles: On the Mathematics of Non-Wellfounded Phenomena. CSLI Lect. Notes 60, Stanford, 1996.
10. *Augenstein B.* Links Between Set Theory and Physics // Chaos, Solitons and Fractals, v. 7, No.11, 1996, p. 1761–1798; Ulam S. Infinite models in Physics / In Proc. 7-th Symp.

- Appl. Math. (Brooklin Politech. Inst., Apr., 1955), AMS Symp. Appl. Math. V. 7, p. 87–95, N.Y., McGraw Hill Book comp. Inc., 1957.
11. *Everett C.J., Ulam S.* On Some Possibilities of Generalizing the Lorentz Group in the Special Relativity Theory // J. of Combinatorial theory. 1, 1966, p. 248–270.
  12. *Godel K.* What is Continuum Hypothesis/ P.Benaserraf, H.Putnam Philosophy of Mathematics, 1983, p. 470–480.
  13. *Maddy P.* Believing the Axioms // JSL, v. 53, no.2, 1988, p. 481–511.
  14. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М.: Мир, 1966, с. 117.
  15. *Mirimanoff D.* Les Antinomies de Russel et de Burali-Forti et le Probleme Fundamental de la Theorie des Ensembles // L'Ens. Math. 1917, v. 19, p. 37–52.
  16. *Mirimanoff D.* Remarques sur La Theorie Des Ensembles et les Antinomies Cantoriennes-I // L'Ens. Math. 1917, v. 19, p. 209–217.
  17. *Mirimanoff D.* Remarques sur La Theorie Des Ensembles et les Antinomies Cantoriennes – II // L'Ens. Math. 1920–1921, v. 21, p. 29–52.
  18. *Паршин А.Н.* Размышления над теоремой Гёделя / Путь. Математика и иные миры. М.: Добросвет, 2002, с. 67–101; его же: Размышления над теоремой Гёделя // Вопросы философии, № 6, 2000.
  19. *Паршин А.Н.* Идеальные числа Платона. С сайта bfrz.ru, доступ 05.04.2006.
  20. *Roberts M.D.* Ultrametric Distance in Syntax. arXiv: cs.CL / 9810012, 2001.
  21. *Verelst K.* Zeno's Paradoxes. A Cardinal Problem // arXiv: Math. 0604639, v. 1 [math. HO], 2006.
  22. *Verelst K.* On What Ontology Is and Not Is // arXiv: 0803.3359, v. 1 [math. HO], 2008.
  23. *Калужнин Л.А.* Введение в общую алгебру. М.: Наука, 1973.
  24. *Robert A.* A Course in  $p$ -Adic Analysis. Springer, 2000.
  25. *Shenker O.* Fractal Geometry is not Geometry of Nature // Stud. Hist. Phil. Sci., 1994, v. 25, No 6, p. 967–981.
  26. *Abramsky S., Young A.* Domain Theory / In: Handbook for Logic in Computer Science, v. 3, S. Abramsky, D. Gabbay, T.S. Maibaum (eds.), Clarendon Pr., 1994, p. 105.
  27. *Паршин А.Н.* Числа как функции / Путь. М., Добросвет, 2002, с. 7–41.
  28. *Волкова В.Н., Козлов В.Н.* (ред.) Системный анализ и принятие решений. М.: Высшая Школа, 2004.





## Глава 4

### ***p*-Адические числа, нефундированные множества, теоретическая информатика и фрактальная геометрия**

Приведём первичные сведения о *p*-адических числах, расширенные нашей интерпретацией идеей дополнительности. Расширением являются известные факты из топологии, теоретической информатики, нефундированных множеств — в основном это факты, касающиеся свойств нульмерных множеств и ультраметрических пространств. Нульмерные множества представляют собой математический оксюморон — в физических измерениях/наблюдениях они отсутствуют, потому что не опознаются как объект, но существуют «на самом деле». Эти множества не несут какой-либо естественно-научной смысловой нагрузки, не вовлечены в математическое моделирование естественных наук и используются в математике в основном в качестве контрпримеров.

Основу интерпретации составляет связь между вещественными и *p*-адическими числами. Она трактуется как дополнительность между протяжённостью/связностью и делимостью/разрывностью, отмеченная ранее как формальный аналог функциональной асимметрии (гл. 1). Обе числовые системы, рассмотренные с точки зрения топологии, геометрии, алгебры, теории решёток имеют много совпадающих черт, но и много кардинальных отличий [1, p.34; 2, p.280].

Этот факт подводит к идее изложения связи этих чисел как совокупности взаимодополнительных свойств рациональных чисел. Что, однако, предполагает дополнительную обработку материала, поэтому *p*-адические числа мы рассмотрим как логическое зеркало с вещественными. Зеркало, как известно, показывает различие синтаксически неразличимых предметов, когда отличить один от другого становится возможным лишь при предъявлении пары целиком.

Остановимся на наиболее очевидных фактах, не требующих дополнительной техники (подробное рассмотрение в [2, 3]).

1. *Степенные ряды.*  $p$ -Адические числа являются числовым аналогом рядов Лорана и представляются формальными степенными рядами по степеням основания, равного одному из простых чисел  $p = 2, 3, 5, \dots, 13, \dots, 41, \dots$ :

$$x = a_{-n} \cdot p^{-n} + a_{-n+1} \cdot p^{-n+1} + \dots + a_{-1} p^{-1} + a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_k \cdot p^k + \dots =$$

$$= \sum_{i=-n}^{\infty} a_i \cdot p^i \quad a_i \in A = \{0, 1, 2, \dots, p-1\} \quad (1)$$

При  $n = 0$  это целые  $p$ -адические числа  $x \in Z_p$ , которые образуют кольцо; при  $n > 0$  это поле  $p$ -адических чисел  $Q_p$ . Числа/символы в разложении (1) называются цифрами.

Поэтому  $p$ -адические числа изоморфны степенным рядам и наследуют многие из их универсальных свойств. В частности, как следует из практики программирования, степенные ряды являются первичным материалом определения всех видов функций. Соответствие между  $p$ -адическими числами и степенными рядами от переменной  $t$  имеет вид:  $p^n \rightarrow t^n$ .

Форма (1) является также числовым и бескоординатным прототипом итеративной системы функций [2, p.12–17].

2. *Слова.* Второе определение – в виде последовательности строки цифр/символов:

$$x = a_{-n} a_{-n+1} \dots a_0 a_1 \dots a_k \dots .$$

В этом случае множество  $p$ -адических чисел совпадает с декартовым произведением

$$X_p = \{0, 1, \dots, p-1\}^N . \quad (2)$$

Наиболее известна в информатике экспонента двухэлементного множества:

$$X_2 = 2^N = \{0, 1\}^N = \{true, false\}^N = \{\wedge, \vee\}^N = \dots .$$

В качестве символов алфавита этого множества могут выступать любые сущности, связанные отношением отрицания–инволюции, например:  $\neg \wedge = \vee, \neg \vee = \wedge$ . Первое представление (1) употребляется в теории чисел и алгебре, второе (2) – в теоретической информатике как основной тип данных. Здесь делимость выступает под видом формальной определимости (языковой номинации).

3. *Измерения.* Величины  $p$ -адических чисел определяются метриками на  $Q_p$  двух видов.

Аддитивная версия:  
 $\forall x \in Q_p \quad v_p(x): Q_p \rightarrow N \quad v_p(x) = ord_p(x) = -n$  в разложениях (1) и (2),

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y) \text{ и } v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}. \quad (3)$$

Мультипликативная версия:

$$\begin{aligned} |x|_p^\alpha : \mathcal{Q}_p \rightarrow \mathcal{R} \quad |x|_p^\alpha &= p^{-\alpha n}, \quad \alpha > 0 \\ |x \cdot y|_p^\alpha &= |x|_p^\alpha \cdot |y|_p^\alpha, \quad |x+y|_p^\alpha \leq \max\{|x|_p^\alpha, |y|_p^\alpha\} \end{aligned} \quad (4)$$

Эта норма называется неархимедовой или ультраметрикой. Неархимедовость появляется в системной теории под видом неаддитивности, субаддитивности и в аксиомах теории возможностей.

В ультраметрике умножение на  $p$  есть сжатие, на  $a_i$  – вращение:

$$|p \cdot x|_p^\alpha = p^{-1} |x|_p^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Поле  $\mathcal{Q}_p$  в связи с математическим моделированием является двойственным объектом. Как топологическая алгебра оно есть, с одной стороны, модель материи – фрактал, с другой – числовая система. Тем самым оно является числами со свойствами материи или материи с числовыми свойствами. Свойства метрик на  $\mathcal{Q}_p$  играют главную роль в согласовании алгебраических и топологических свойств  $p$ -адических чисел.

Следующее свойство ультраметрики – сжатие натурального ряда – вплотную подводит к известной апории Зенона «Ахиллес и черепаха» и феномену «бесконечное в конечном»:

$$|n|_p \leq 1 \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

Соответственно, (3) и (4) различаются как аддитивная прямая  $\mathcal{R}^+$  и мультипликативная прямая  $\mathcal{R}^x$ . Соответствие между этими прямыми [2, p.23]

$$n \rightarrow p^n, \quad v_p(x) = \alpha \cdot n = -\log |x|_p^{\alpha n}. \quad (5)$$

4. *Аксиома Архимеда.* Соотношениям (3) и (4) отвечают свои аддитивная и мультипликативная (редко упоминаемая) формы аксиомы Архимеда. Аксиома Архимеда является общей формальной схемой метода исчерпания – измерения, координатизации, алгоритмических процессов, доказательств и т.п. С этой точки зрения разложения (1) и слова (2) есть варианты этой аксиомы, записанные для шкалы измерений по базе  $p$ . В  $p$ -адическом анализе оба варианта аксиомы Архимеда слиты в утверждения «множество натуральных чисел плотно в  $\mathcal{Z}_p$ » и «множество рациональных чисел плотно в  $\mathcal{Z}_p$ ». Поэтому в  $p$ -адических числах происходит не нарушение аксиомы Архимеда, а изменение её смысла. Нарушение аксиомы Архимеда есть неявное проявление апорий Зенона «Дихотомия», «Стрела», «Ахиллес и черепаха». Вариант метода исчерпания для символических объектов даёт теория булевых алгебр [4, с.106–107].

Двойной смысл символа числа в нашей модели – (1) и (2) – определяет различие смысла аксиомы Архимеда. Разница между (1) и (2) в том, что (1) есть процедура измерения, (2) – алгоритм.

Для различных  $p = 2, 3, \dots, 43\dots$  справедлива формула произведения, адельная формула:

$$|x|_{\infty} \cdot \prod_{p \geq 2} |x|_p = 1 \quad \forall x \in \mathcal{Q} \quad . \quad (6)$$

5. *Топологическая асимметрия.* Третье, топологическое, определение формально воспроизводит делимость. Это представление  $p$ -адических чисел в виде проективного предела множества [2, p.26–28, 32–34]. Точная формулировка нам не понадобится. Она аналогична формально-лингвистической интерпретации Калужнина, когда единым множеством объявляются все различимые элементы формальной номинации. Пара прямой–проективный пределы аналогична паре конвергенция–дивергенция. Метафорически это пределы по дереву. От корня к кроне – проективный (обратный), от кроны к корню – индуктивный (прямой) предел.

6. *Скейлинг.* Следующее описание аналогично построению нефундированных множеств. «Рассмотрим некоторый объект под увеличением различной силы. Для каждой разрешающей способности увеличения объект выглядит, состоящим из набора (конечного или нет) частиц. Например, при “нулевом” увеличении видна только одна частица – сам объект. Постепенное увеличение разрешающей способности наблюдения представляет каждую частицу в виде кластера меньших частиц, каждая из которых в свою очередь распадается далее на подчастицы и т.д. Наша цель – описать объект таким, каким он выглядит под бесконечным увеличением» [5].

Из определения неархимедовой метрики видно, что она действует избирательно, различает позиции разложения (1) и буквы в (2), то есть является формальным аналогом оператора скейлинга.

7. *Инволюция.* Связь вещественных и  $p$ -адических чисел будем понимать как двойственность смысла строки символов и, в частности, одного символа простого числа  $p$ . Из (1) видно, что «правильная» запись вещественного числа получается из  $p$ -адической отражением относительно десятичной точки [6, с. 15; 7]. Это эквивалентно изменению позиционной записи по обратной базе  $p^{-1}$ , либо переключению смысла  $p$  – с деления на протяжение и обратно. Иными словами:

$$|2|_{\infty} \in R \leftarrow 2 \rightarrow |2|_2 = 2^{-1} \in \mathcal{Q}_2 \quad .$$

Такое определение смысла позиционной записи позволяет трактовать связь двух числовых систем геометрически – как прочтение разложения (1) с двух разных сторон листа бумаги. При взгляде «на лист»

(то есть с верхней стороны) видим  $p$ -адические числа, при взгляде «из листа» (с обратной стороны) – вещественные. Эту двойственность изобразим конечной в обе стороны строкой (причина – в теореме Островского, о чём позже):

$$x_*^* = a_{-n}p^{\pm n} + a_{-n+1}p^{\pm n \mp 1} + \dots + a_0 + a_1p^{\pm 1} + a_2p^{\pm 2} + \dots + a_kp^{\pm k} . \quad (7)$$

В этой записи двойные знаки степеней  $p$  символизируют возможность восприятия строки в двух смыслах. Как вещественное число (3) есть точка, момент времени, так  $p$ -адическое – распределённый объект, строка, алгоритм, слово.

Такие операции порядка 2 называются инволюциями. Это инверсия в геометрии, взятие обратного элемента в теории групп, противоположного в арифметике, отрицание в логике, обращение стрелок в теории решёток и порядка, различные утверждения о двойственности – проективной, Фурье, Стоуна, Понтрягина и т.д. У нас это инволютивный антиизоморфизм, сопрягающий свойства числовых систем, главные из которых – топология, метрики и порядок.

8. Таким образом, строка цифр из алфавита  $(0, 1, \dots, p-1)$  может представлять элементы четырёх типов:

- степенного ряда;
- действительные числа;
- $p$ -адические числа;
- слова формального языка.

Сложение в первом случае происходит без переноса, во втором – с переносом влево на конечное число позиций, в третьем – вправо на бесконечное число позиций, в четвёртом – не определено. Поэтому арифметика и вся считающая техника  $p$ -адических чисел как минимум проблематична. В силу бесконечности операции сложения она не является эффективной операцией. Вся элементарная арифметика неявно базируется на требованиях эффективности, локальности и синхронизма операций. Это хорошо известно в компьютерной науке, где для правильного сложения двух чисел требуется синхронизация действий с разрядами, но полностью отсутствует в символической математике. Поэтому утверждение «*дважды два = четыре*» имеет условный характер. Более точно, здесь возникает вариант известной Суперпроблемы: «Выполнения бесконечного числа операций в конечное время» [*Laraudogoitia J.P. Supertasks// Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2001. Zalta Edward N. (ed.). <http://plato.stanford.edu/archives/nov2001/entries/>]. Она, как и проблема вычислений с бесконечными строками в информатике, находится в стадии изобретения решения. Будет ли оно специфическим техническим*

приёмом или органично войдёт в арсенал моделирования, пока остаётся открытым вопросом.

9. *Числовая асимметрия.* Пара «вещественные— $p$ -адические числа» является формальным аналогом функциональной асимметрии природы (гл.1).  $p$ -Адические связываются с дивергентными процессами, а вещественные — с конвергентными. Иными словами, позиционная запись вещественного числа, то есть с различением позиций, есть код его программы, понимается как  $p$ -адическое число. Если же в ней произведены все операции сложения, то это вещественное число.

Это (зеркальное) различие числа как материальной точки и как строки или последовательности не проговаривается явно, хотя и повсеместно присутствует в математике. Когда говорят о действительных числах, но при этом различают символы разложения, позиции или манипулируют ими избирательным образом — в кривой Пеано, диагональной процедуре,  $\beta$ -разложении, символической динамике, представлении чисел функциями в информатике или бесконечными степенными рядами и т.д., то везде под видом действительных чисел выступает их двойник —  $p$ -адические числа. Наиболее известный пример: определение вещественных чисел последовательностями сжимающих отображений, последовательностями Коши. Здесь распределённый объект — последовательность, заменяется точкой, после чего последовательность исчезает. Никаких других способов введения вещественных чисел, кроме как через посредство  $p$ -адических, в математике нет: геометрические *точки-без-имени* не являются элементами синтаксиса какого-либо языка. Эта неявная двойственность формализации в основаниях математики неслучайна. Она аналогична асимметричному дуализму лингвистического знака в естественном языке.

Таким образом, все четыре облика строк символов имеют общую основу — тождество алфавитных и числовых систем, хорошо известную в семиотике.

10. *Числовая дополненность.* Описанная связь  $R$  и  $Q_p$  делает два пополнения поля рациональных чисел  $Q$  сопряжёнными. Число  $x^* = a_n a_{n+1} \dots a_0 a_{-1} \dots a_{-k}$  при  $n \rightarrow \infty$  стремится к  $p$ -адическому числу одновременно с числом  $x_* = a_{-k} a_{-k+1} \dots a_0 a_1 \dots a_n$ , которое стремится к вещественному числу.

Как известно из функционального анализа, всякое нормированное пространство имеет пополнение. Вспоминая интерпретацию  $p$ -адических чисел как набор сжимающих отображений, заключаем, что сопряжённость  $R$  и  $Q_p$  означает, что в бинарном пространстве числовой асимметрии все предельные переходы и пополнения уже совершены.

Связь вещественных и  $p$ -адических чисел в различных формах неоднократно обсуждалась в литературе [8–11].

«Вещественная и арифметическая картины мира находятся в отношении дополнительности, напоминая отношение между сопряжёнными наблюдаемыми в квантовой механике» [8, с. 214].

Ю.И.Манин видит возможность объединения архимедовых и фрактальных свойств в виде адельной конструкции. Наше толкование связи есть возможный вариант такой дополнительности. В техническом отношении оно сходно с представлениями данных в гибридных вычислительных системах [12, 13] и модели  $q$ -мира [14]. В этих представлениях строка состоит из двух частей, соответствующих вещественным и  $p$ -адическим числам. Общим решением такой связи является существование порога, ниже которого действует  $p$ -адическая геометрия, выше — евклидова. В нашей модели обе числовые системы сопряжены и порога нет.

Таким образом, мы будем считать дополнительностью (или асимметрией)  $R$  и  $Q_p$  инволюцию между двумя интерпретациями одной и той же строки. Мы называем эту связь чисел «зеркальной», имея в виду метафору гиперболического, или «турбулентного зеркала» (*turbulence mirror* — англ.), сопрягающего разные топологии, которое присутствует в литературе по сложности и хаосу [15]. В одном направлении оно сжимает, в другом — растягивает, рассеивает, то есть делит. Доступным для наблюдения оказывается строка символов/цифр конечной длины — конечный код Гензеля или рациональное число соответственно. Это есть числовой образ функциональной асимметрии (см. гл. 1).

Известно, что отображение  $Z_2 \rightarrow R$  однозначно и непрерывно. Обратное отображение тесно связано с канторовой лестницей и не является непрерывным. Здесь проблемой оказывается приём отождествления бесконечных последовательностей девяток, принятый в теории действительных чисел, который разбирать мы не станем.

В нашей интерпретации инволюция взаимнооднозначна, будучи синтаксической операцией. Асимметрия связана только с различием топологий. Тем самым  $Q_p$  допускает три взгляда на свою сущность. Первый — «всё делимо» и  $Q_p$  нульмерно. Второй — «всё связно» и  $Q_p$  есть просто вещественные числа. Третий — комбинированный, наблюдаются и вещественные, и  $p$ -адические числа. Формальное представление чисел и определение метрик архимедовой и ультраметрической не дают средств для различения топологий, как и символ  $p$  для различения процессов конвергенции и дивергенции. Точнее, определения метрик вещественных и  $p$ -адических чисел не дают указания на выбор,

в последнем пункте правил — неравенстве треугольника, обычного или усиленного. Этот выбор должен быть дан *по смыслу числа, которое имеется в виду*, до его определения.

11. *Информатика*. Интерпретация  $p$ -адических чисел в виде слов (2) связывает их (совпадает синтаксис и топология) с формальными языками теоретической информатики [16, 17], теорией доменов (*domain theory*) [18, 19], теорией автоматов [20, 21, 22]. Тем самым расширяется содержание двойственности итеративной системы функций и строк.

Операции над строками — это прежде всего конкатенация и подстановка (см. гл. 2, формулы (9)). Остальные операции те же, что и над строками итеративной системы функций [23].

При этой интерпретации универсальные свойства канторова множества, фракталов и 2-адических чисел расширяются универсальными свойствами вычислительной парадигмы машин Тьюринга [24].

*Вычислимость*. Ряд результатов устанавливает вычислительные аналоги классических структур и пространств. Евклидово пространство не приспособлено для рекурсивных вычислительных процедур. Теория доменов (*domain theory*) явилась выходом из этого затруднения. Тем самым вычислительные процессы из вспомогательных поднимаются до естественных природных.  $p$ -Адические числа как пространство строк естественным образом интерпретируются как домен. Их фрактальная интерпретация как итеративной системы функций позволяет продолжить эту поверхностную аналогию.

*Пространство имеет алгебраическую вычислительную модель, если и только если оно является сепарабельным ультраметрическим пространством [25–29],*

каким и являются множества  $p$ -адических чисел. В евклидовом пространстве для проведения расчётов приходится вводить различного рода дискретные схемы и пространства. Такая точка зрения на  $p$ -адические числа сводит воедино ряд разделов теоретической информатики — профинитную алгебраическую структуру, топологию, теорию пучков, теорию доменов и вычислительные методы [19].

12. *Теорема Островского* [30, р. 22] является версией более ранней теоремы Гёльдера о двух типах измерительных шкал — аддитивной и мультипликативной:

*Поле рациональных чисел допускает только два вида нормирования — обычный (архимедов  $|x|_\infty$ ) или  $p$ -адический (неархимедов  $|x|_p^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ) модули.*



Эта теорема обычно прочитывается как «третьего не дано» (в  $p$ -адической физике см. [31, с. 7]), то есть в исключаяющем значении союза ИЛИ. В нашей модели естественным является ИЛИ по типу конъюнкции (см. гл. 1), объединяющее оба типа нормирования в бинарном пространстве модели.

В связи с этой теоремой и двойственным характером рациональных чисел возникает вопрос об их природе, об онтологии числа вообще. Ответ, который предлагает фрактальная теория, следующий: рациональные числа соответствуют физическим, усечённым фракталам [32]. Общая алфавитная основа вещественных,  $p$ -адических чисел и естественных языков нашей модели расширяет смысл числа вообще до семиотической двойственности – и материя, и слово. То есть  $p$ -адический мир – тот же физический, но содержащий язык и информацию, субстанцией которых являются границы объектов.

Из теоремы Островского прямо следует естественность и необходимость введения в модель двойного нормирования, сопряжённого пополнения рациональных чисел:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{Q} \quad x &= p^k \cdot \frac{a}{b}, \quad p - \text{ не делит } a \cdot b. \quad a, b \in \mathcal{N} \\ |x|_{\infty} &= p^k \frac{a}{b}, \quad |x|_p = p^{-k} \\ \text{Отсюда} \quad \forall \frac{a}{b} \quad 0 \neq \frac{a}{b} \in \mathcal{Q} &\Leftrightarrow |x|_{\infty} \cdot |x|_p = \frac{a}{b} \neq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Из последнего равенства видно, что оба вида пополнения, как и две числовые системы, следует рассматривать совместно. Тогда теория пределов математического анализа должна быть теорией двойных предельных переходов, и сжимающее свойство правила *Modus Ponens* в логике также имеет двойной смысл.

Рассмотрим «информационную» форму этой теоремы, то есть выраженную  $p$ -адическими числами. Для строки конечной длины – аналога рациональных чисел

$$x = a_0 a_1 a_2 \dots a_k$$

возможны два метода измерения. Вещественный, конвергентный, когда ведущей оказывается цифра старшего разряда (сложение в позиционной записи), и  $p$ -адический, дивергентный – ведущей оказывается цифра младшего (старшего в инволюции) разряда. Тем самым из (8) получаем двойную характеристику рациональных чисел, соответствующую функциональной асимметрии модели:

$$\forall x \in \mathcal{Q} \quad \exists X \in \mathcal{Q}_p \quad x = |X|_{\infty} \cdot |X|_p. \quad (9)$$

Эта формула аналогична записи рациональных чисел правильными дробями, но для представления чисел строками цифр сразу из натурального ряда [33, с. 339]. Мы ограничимся базой  $p = 2$ , поскольку это число общо материальным и идеальным процессам. Деление на 2 предшествует счёту и «встроено» в материю. В то время деление на  $p > 2$  требует синхронизации процесса на 3, 5, ... частей. Без этого условия получается череда делений на 2 (поэтому вычислительная техника, основанная на более ёмкой троичной системе счисления, оказалась неустойчивой). В этом случае (9) примет вид аналога адельной формулы:

$$\forall x \in Q \quad \exists X \in Q_2, \quad x = \left| X \right|_{\infty} \cdot \left| X \right|_2 \quad . \quad (10)$$

В компьютерном варианте (10) означает, что для получения рационального числа его сначала нужно записать в позиционном виде, а затем сложить цифры разрядов.

Теорема Островского имеет также и более широкий смысл, который заключён в теореме А.Лемина: «Произвольное метрическое пространство допускает ультраметризацию» [34, Th.7]. Иными словами, произвольное метрическое пространство имеет два облика, второй из которых нульмерный, ультраметрический. Это аналог пары евклидово–адресное пространство в теории итеративной системы функций.

13. *Универсальность.* Поля  $Q_p$  и кольца  $Z_p$  являются нульмерными множествами. Все они гомеоморфны друг другу и канторову триадному совершенному множеству  $C(Q_p - \text{за исключением одной точки})$ , которое изоморфно  $Z_2$ . Гомеоморфизм нульмерных множеств означает, что их свойства не зависят от формы и линейных размеров объектов и/или их изменений, то есть от физических движений. Нульмерные множества конформно инварианты в терминах физики. Тем самым существует только одно нульмерное множество. В физическом пространстве  $Z_2$  присутствует глобально. Говоря языком фрактальной геометрии,  $Z_2 - \text{самоаффинный фрактал, повторяющий себя в каждой точке.}$

Нульмерные множества есть множества границ, а не объектов, и поэтому они являются экстраординарными множествами. Канторово множество  $C$  канторовым является только по названию, но не по генезису. В частности,

$$C \cong \exp C = \exp(\exp(\dots \exp(C) \dots)) = \dots ,$$

вопреки теореме Кантора о мощности множества степени [35, Ch.4 Hyperspaces].

Всякое компактное метрическое пространство есть непрерывный образ  $C$  (это ещё один мотив выбора  $p = 2$  из-за универсальности двойки). Этот факт мы будем далее трактовать как первичность нульмерных

множеств и вторичность вещественных. Эта позиция имеет различные варианты: в теории динамических систем, в компьютерной графике и, собственно, во фрактальной геометрии – в её различных проявлениях.

14. Философия.  $C$ ,  $Z_p$  и  $Q_p$  – полностью несвязные метрические пространства (множества). Первые два – компактны, второе – локально компактно. Нетрудно видеть, что они являются формальными эквивалентами проблемы Единое–Многое Платона: «Единое пространство, состоящее из Многих разрозненных/несвязных частей». Соответственно, они являются «решениями» апории Зенона «О множестве».

15. Кривая Пеано. Факт, формализующий самоподобие фракталов и рефлексивность множеств  $p$ -адических чисел [30, р. 225, 227, 229]:

$$\forall n \in N, \forall p = 2, 3, \dots, 41, \dots \quad Q_p \cong Q_p \times Q_p \times \dots \times Q_p = Q_p^n \quad (11)$$

$$\text{и} \quad Z_p \cong Z_p \times Z_p \times \dots \times Z_p = Z_p^n$$

16. Геометрия. Шаром в метрическом пространстве радиуса  $r$  с центром в  $a$  называется множество

$$\begin{aligned} B_r(a) &= \{x \in X : d(x, a) \leq r\}, \\ d(x, a) &= |x - a|_\infty, \quad X = R, \\ d(x, a) &= |x - a|_p, \quad X = Q_p \vee X = Z_p. \end{aligned} \quad (12)$$

В ультраметрическом пространстве:

- каждая точка шара является его центром;
- если два шара имеют общую точку, то один содержится в другом;
- диаметр шара не превосходит его радиуса;
- все треугольники равносторонние, ультраметрика ведёт себя как порядок величины [2, р. 70].

Шары в  $Q_p$  и  $Z_p$  являются одновременно и открытыми (при взгляде изнутри) и замкнутыми (при взгляде снаружи) множествами (*closed and open – clopen sets*). Расстояние между шарами  $B_1$  и  $B_2$

$$d(B_1, B_2) = d(x_1, x_2) \quad \forall x_1 \in B_1, x_2 \in B_2 \quad (13)$$

есть аналог потенциального поля. Открыто-замкнутыми объектами, то есть имеющими границу, но неотделимыми от внешней среды, являются системы в их натурном, биологическом понимании.

Множество  $Q_p$  является проективной прямой [36, р. 72]. Неформально проективную двойственность можно увидеть из разложения (1), если «включить» инволюцию. Если в (1) «смотреть на лист», то есть видеть  $p$ -адические числа как строки, то вещественные перейдут в точку. Взгляд «из листа» увидит правильно записанные вещественные числа, а  $p$ -адические при этом исчезнут. Тем самым точки разворачи-

ваются в линию, линия сжимается в точку. В таком виде проективная двойственность аналогична паре координата–импульс (см. гл. 2). Эта глобальная двойственность физически предстаёт как двойственность Фурье (подробнее об этом см. [37]).

17. *Решётки и сети.* Так как синтаксис  $R$  и  $Z_2$  совпадает, а в  $R$  множество интервалов является полной непрерывной решёткой [38], то  $Z_2$  является полной и непрерывной решёткой шаров. По построению связи  $R$  и  $Z_2$  порядок на решётках взаимнообратный. На бинарном дереве при движении от корня к ветвям образуются 2-адические числа, при обращении направления движения – вещественные (проективный и индуктивный пределы, соответственно). Как модуль над самим собой  $Q_p$ , как и  $Z_p$  для любого  $p$  являются решётками [36, р. 69].

В нашей интерпретации – первичности  $p$ -адических чисел и вторичности вещественных – первые порождают ограниченный отрезок вторых.  $p$ -Адические числа актуально бесконечны, вещественные – бесконечны потенциально. Поэтому, так как  $[x, y] \subset R$  есть полная решётка [39, р. 36], то по принципу двойственности решётка  $p$ -адических чисел, порождающая этот интервал, то есть  $[x, y]^{op} = p^{-d \cdot n} \cdot Z_p$ , является полной. Рассмотрим эту идею подробнее. Как известно, множество  $p$ -адических чисел можно получить из вещественных обращением порядка на множестве их позиционных записей. Эти порядки можно объединить в одной конструкции. Рассмотрим порядок на  $Z_p$ , определённый следующим образом (подробнее см. гл.5):

$$\begin{aligned} \xi, \eta \in Z_p \quad \xi &= \xi_\alpha p^\alpha + \xi_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \dots + \xi_i p^i + \xi_{i+1} p^{i+1} + \dots \\ \eta &= \eta_\beta p^\beta + \eta_{\beta+1} p^{\beta+1} + \dots + \eta_i p^i + \eta_{i+1} p^{i+1} + \dots \end{aligned}$$

$$\xi \geq \eta \Leftrightarrow \left\{ \left| \xi \right|_p \geq \left| \eta \right|_p \vee \left( \left| \xi \right|_p = \left| \eta \right|_p \wedge \exists i: \xi_i \geq \eta_i \right) \right\} .$$

Элемент  $T = (1, 1, \dots, 1, \dots)$  является максимальным в этом порядке (переопределённым, противоречивым, *top* – англ.). Элемент  $F = (0, 0, \dots, 0, \dots)$  – минимальным (*bottom* – англ.). Этот порядок есть «по-разрядное» сравнение строк чисел по архимедовой величине, записанное для пространства, где сложение не определено. Переписанный для  $R$ , этот порядок превращается в обычный линейный.

Как известно, решётки полностью определяются своими *meet*- и *join*- операциями [39, р.40], которые можно рассматривать как аналоги пары конвергенции–дивергенция:

$$meet(\xi, \eta) = \inf(\xi, \eta) \quad join(\xi, \eta) = \sup(\xi, \eta) .$$

*Meet* уменьшает архимедову норму сравнения, то есть увеличивает архимедову, *join* — действует противоположным образом. Поэтому

$$meet \propto |\cdot|_p^d, \quad join \propto |\cdot|_p^{-d} \propto |\cdot|_\infty$$

и определённое выше упорядочение  $Z_p$  есть совместное упорядочение по двум этим метрикам. Его можно рассматривать как решёточный вариант теоремы Островского.

Соответствующие *sup* и *inf* в этих определениях достигаются на элементах сравнения в силу непрерывности арифметических операций в  $Z_p$ . Нетрудно также проверить выполнение дистрибутивного и модулярного законов для решёток. Здесь сравнения элементов превращаются в сравнения вещественных чисел. Поэтому  $(Z_p, \geq)$  — полная, непрерывная, дистрибутивная и модулярная решётка;  $Z_2$  — алгебраическая решётка [39, p. 303].

Множество шаров  $Z_p$  является замкнутым относительно объединений (*join*) и пересечений (*meet*), поэтому оно также является полной решёткой, которое может рассматриваться как множество истинности предикатов по отношению следования/выводимости. Такая решётка изоморфна множеству всех подмножеств  $Z_p$ , упорядоченных по включению [39, p. 4].

Более физический пример. В силу  $Z_2 \cong IFS\{0,1\}$  2-адические числа могут рассматриваться как иерархическая нейросеть [см. лит. гл. 2]. А раз такие сети могут порождать непрерывные функции (теорема Колмогорова и её обобщение), то и этот ход рассуждений приводит в интерпретации 2-адических чисел как пространства непрерывных функций над собой [40].

Согласно сетевому представлению, 2-адические числа являются частично упорядоченным множеством — направленным непрерывным частичным порядком (*directed continuous partial order* — *DCPO*).

Теория решёток и порядка для теории систем играет особую роль. Решётки и порядок не являются свойствами изолированных элементов, а описывают отношения между объектами, то есть то, что находится между ними. Эти теории существенно дивергентны, глобальны — в отличие от теорий математической физики, имеющих локальный характер.

Интуитивно ясно, что всевозможные композиции конвергенции—дивергенции образуют пространство со структурой сети или решётки, в котором действует принцип двойственности. Значит, можно ожидать, что числовая асимметрия каким-то образом должна проявиться в результатах теории решёток. Об этом — в следующей главе.

18. *Квадраты чисел.*  $a \in Z_2$  является квадратом в  $p$ -адической арифметике (см. выше замечание о Суперпроблеме) тогда и только тогда, когда

$$a \in 1 + 8 \cdot Z_2 .$$

Числа 4 и 8 неслучайны в общенаучном контексте: перекрёстный бинарный архетип, четыре стороны света, восемь цветов радуги, октавы в музыке и многое другое. В физике это кватернионы и октонионы. Для системной интерпретации квадратов чисел требуется транслировать арифметику в операции формальных языков. Так же должен интерпретироваться и квадратный корень, и вообще, корень  $p$ -ой степени из единицы. Этот вопрос мы оставляем в стороне.

19. *Свободные моноиды и шары в  $Z_p$*  [2, р. 11–12]. Здесь сопряжённость двух видов чисел выражена как сопряжённость слова и материи.

Если  $a = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots = s_n + p^{n+1} \cdot a$  и  $B_r(a)$  – шар радиуса  $r = p^{-n}$  с центром в  $a$ . Множество строк  $s = a_0 a_1 a_2 \dots a_n$  – называется моноидом  $M_p$  над алфавитом  $S = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ . Моноид  $M_p$  имеет различные матричные представления  $M_p \rightarrow GL(Z_p)$ . Для  $n = 2$  справедливо:

$$s \mapsto T_s = \begin{pmatrix} p & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s \in S$$

Тогда

$$T_{a_0} T_{a_1} \dots T_{a_n} = \begin{pmatrix} p^{n+1} & s_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где длине слова соответствует степень определителя, радиусу шара – его величина, центру – элемент верхнего правого угла. Тем самым определено соответствие шары – слова – аффинные преобразования:

$$B_r(a) \leftrightarrow a_0 a_1 a_2 \dots a_n \leftrightarrow T_n. \quad (14)$$

Инъекция  $M \rightarrow GL_2(Z_p)$  является основой построения евклидовых моделей  $p$ -адических чисел. В нашей интерпретации (14) есть та же двойственность строки, которая появилась в итеративной системе функций и связи числовых систем.

20. *Евклидовы образы*. Согласно общей позиции модели – переносу теории на фрактальные, нульмерные множества – мы будем рассматривать (под)множества вещественных чисел как вторичные по отношению к  $p$ -адическим и говорить о способах их порождения из  $Q_p$  или  $Z_p$ .

Базовым способом являются измерения двумя метриками (п.4 и п.5). Первый определяет мультипликативную прямую, второй – аддитивную. Мера Хаара на множестве  $p$ -адических чисел различает аддитивную  $R^+$  и мультипликативную  $R^x$  вещественные прямые:

$$\mu(Q_p) = \left\{ \begin{array}{l} R^+ \quad n \cdot 1 \\ R^x \quad s^Z, \quad 0 < s < 1 \end{array} \right\}.$$

Формально аддитивная прямая соответствует аддитивной мере Хаара [2, р. 115–116], инвариантной относительно трансляций

$$\mu(x + a) = \mu(x),$$

мультипликативная прямая – мультипликативной мере Хаара, инвариантной относительно скейлинга, то есть делимости

$$\mu(a \cdot x) = |a|_p \cdot \mu(x) = \mu^*(x) \quad \text{и} \quad \mu^*(x) = \frac{\mu(x)}{|x|_p}.$$

Для  $p$ -адических единиц эти меры совпадают, и на вещественной прямой они неотличимы. В данном случае неархимедов модуль является модулирующей функцией.

Движения

$$x \mapsto t \cdot x \quad t, x \in Z_p \quad \text{и} \quad x \mapsto x + a$$

различают эти меры. Тем самым пространство вещественных чисел формируется как двумерное, аналогичное комплексному, и явной становится бинарная, то есть аддитивно-мультипликативная структура  $Q_p$ . Одна ось этого пространства есть аддитивная прямая, другая – мультипликативная.

Евклидовы образы  $p$ -адических чисел, порожденные итеративной системой функций, являются, как известно, фракталами. Основу этой техники составляет увеличивающий поток, набор функций вида  $\{e^{-\alpha \cdot i \cdot \ln p}\}_{i=1}^{\infty}$  [41], в котором узнаётся последовательность значений ультраметрики  $\{|x|_p^\alpha = p^{-\alpha \cdot n} = e^{-\alpha \cdot n \cdot \ln p}\}$ . Существуют различные варианты этой техники [42–44]. Сюда же можно отнести многочисленные геометрические образы  $p$ -адических чисел в виде деревьев и иерархий [45–47].

Наиболее естественной представляется техника А.Роберта [2, р. 12–17], из которой мы приведём в качестве иллюстрации лишь основную формулу:

$$\varphi_{v,b} : Z_p \mapsto E : \sum_{i \geq 0} a_i \cdot p^i \mapsto \theta \cdot \sum_{i \geq 0} \frac{v(a_i)}{b^{i+1}}, \quad b \geq p. \quad (15)$$

Здесь  $v(a_i)$  – векторизованные цифры, параметры сдвига, задающие разметку евклидова пространства  $E$ ,  $\theta$  – масштабный множитель, задающий диаметр фрактального множества, поле его порождения. Сравнивая (15) с (9) и (10), положив  $b = p^\alpha$   $\alpha \geq 1$ , видим, что это есть форма теоремы Островского – порождения рациональных чисел последовательными ультраметрическими измерениями. Различные наборы параметров сдвига и масштаба порождают различные визуальные образы фракталов. Евклидовы образы  $Q_p$  получаются трансляцией образов  $Z_p$ . Схема (15) является точным аналогом конструкции меры Хаара [48, р. 51–54].

21. *Бинарная структура  $Q_p$ .* Бинарная структура поля  $p$ -адических чисел в нашей интерпретации неявно содержит указание на инволюцию числовых систем.

*Аддитивная структура.*

Часть разложения (1)

$$[x] = \sum_{i \geq 0} a_i \cdot p^i \in Z_p$$

называется целой частью числа. По нашей интерпретации, это дисконтинуальное, несвязное множество. Часть разложения (1)

$$\langle x \rangle = \sum_{i < 0} a_i \cdot p^i \in Z_{p^{-1}}$$

называется дробной частью числа.

В нашей интерпретации дробная часть представляет вещественные, рациональные числа. Тогда

$$x = [x] + \langle x \rangle \quad Q_p = Z_p + Z_{p^{-1}} .$$

Пересечение множеств – слагаемых в правой части, проявляет двойной смысл натуральных чисел  $Z$ :

$$Z_p \cap Z_{p^{-1}} = Z .$$

Иными словами, символы натуральных чисел  $n$  имеют двойной смысл: как сложение  $n$  единиц и как деление на  $n$  частей. Тем самым оправдан асимметричный дуализм знака.

Поэтому можно говорить о  $Q_p$  как о прямом произведении:

$$Q_p = Z_p \times Z_{p^{-1}} = Z_p \times \text{inv } Z_p = Z_p \times R .$$

Поскольку по любой базе  $p = 2, 3, \dots$   $p$ -адические и вещественные числа изоморфны как множества

$$Z_p \cong [0,1] \subset R ,$$

то множество комплексных чисел  $C$  (не путать с канторовым  $C$ ) имеет ещё два представления:

$$C = R \times R \cong Z_p \times R \cong Z_p \times Z_p \quad (16)$$

Поскольку все  $Z_p$  есть объединение своих копий

$$Z_p = \bigcup_{i \geq 0} p^i \cdot Z_p ,$$

то для всего  $Q_p$  получаем:

$$Q_p = \bigcup_{i \geq 0} p^i \cdot (Z_p \times \text{inv } Z_p) = \bigcup_{i \geq 0} p^i C$$



*Мультипликативная структура.*

Отображение  $x \mapsto |x|_p = p^{-v}$ ,  $v = \text{ord}_p x$  определяет отображение  $Q_p \rightarrow (R^\times)_+ = R_{>0}$  в группу по умножению положительных вещественных чисел, мультипликативную прямую.

21. *Варианты инварианта.* Варианты формального содержания  $Z_2$  в связи с другими разделами математики возникают по наследству от канторова множества  $C$ . Мы приведём лишь результаты в виде цепочки изоморфизмов:

$$\begin{aligned} C &\cong C_{matter} \cong \exp(C) \cong 2^C \cong Z_2 \cong [IFS \equiv \{0,1\}^N] \cong \\ &\cong [Z_2 \rightarrow Z_2] \cong C(Z_2, Z_2) \cong H \cong C_{Bool} \cong C_{Stone} \equiv C. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь знаки эквивалентности (изоморфизма) означают по порядку слева направо:

$C_{matter}$  — модель делимой материи из фрактальной теории;

$C$  — экспоненциально полно, то есть преобразования материи не меняют её числовой природы [35, Ch.4].

Такое распределение материи представляет собой спектр функций истинности булевой алгебры [49; 50, th. 1.39–1.45, p. 81 и далее].

Это материя с числовыми свойствами,  $Z_2$  есть топологическая алгебра [2].

Такое строение материи (нульмерное, дисконтинуальное, фрактальное) совпадает с формальными языками теоретической информатики, является доменом в теоретической информатике (итеративная система функций —  $IFS$ , является центральной техникой порождения фракталов) [39, p. 203; 51, p. 197–205, 272–275]. Это символическое пространство, область действия символической динамики.

Как решётка она совпадает с пространством непрерывных функций над собой [52, 53]. Такой числовой или алгебраический образ материи представим своим полем непрерывных функций по теореме о двойственности Стоуна [54, 55].

Множество 2-адических чисел представляет собой гильбертово пространство с ортонормированным базисом в виде системы ван дер Пата [2, p. 179–195]. Поскольку  $R$  является гильбертовым пространством и решёткой, а инволюция меняет порядок на решётке, то, согласно принципу двойственности для частичного порядка,  $Z_2 = \text{inv } R$  сохраняет истинность утверждений.  $Z_2$  — дисконтинуальная версия гильбертова пространства. В таком виде  $Z_2$  является также и булевой алгеброй — основой символической техники (по той же теореме Стоуна). Фрактальное распределение материи как эквивалентное, по формулировке Стоуна, булевой алгебре носит название стоуново пространства. Стоуново пространство символических объектов есть обратная сторона канторова множе-

ства как фрактальной модели материи. Поэтому (17) есть феноменологическая интерпретация двойственности Стоуна.

22. *Неопределённость, случайность.* Ультраметрика является неопределимой функцией над  $Q_p$  [1, р. 144; 56]. В вещественном анализе она просто отсутствует, в логике делимость также не входит в набор правил преобразования выражений. Лишь в функциональном анализе она присутствует под видом sup-нормы, входящей в теорию как самостоятельная функция.

Неопределимость есть формальный аналог непредикативности — непредсказуемости, непрогнозируемости, невычислимости, несчётности, недоказуемости. Все эти «не-» имеют общую (лингвистическую) основу — невозможность предъявления формального выражения, исчерпывающего, то есть определяющего степени свободы переменной, функции и т.д. И, таким образом, по смыслу неопределимость совпадает с первичным представлением о случайности как о явлении, находящемся вне рамок всех вариантов формализации. Аналогичную аксиоматику, формально повторяющую определение ультраметрики, имеет мера возможности в теории сложных систем, в рамках которой устанавливается её связь с обычным понятием вероятности. Теория возможностей описывает неопределённость парой возможность—необходимость и, в отличие от теории вероятностей, имеет смысл для частично упорядоченных множеств. Она применима к неопределённости, имеющей комбинированную феноменологию — лингвистику, физику, статистику [57, 58].

Такое понимание случайности синонимично понятию случайности или хаотичности по Колмогорову. Конструктивный объект называется хаотичным, если его можно описать, лишь предъявив объект целиком [59], то есть если отсутствует эффективная формальная техника — функция, алгоритм, его описания/порождения. Неопределимость ультраметрики как раз это и означает. Тема связи 2-адик — под видом бинарных строк — с теорией колмогоровской сложности как в её физических, так и нефизических интерпретациях [60] представляется перспективной для приложений. Здесь основное различие в теоретико-множественной основе и связи символических объектов с материальными. На этом пути неразрешимость фрактальных множеств может означать несжимаемость, то есть неформализуемость их описания, необходимость подходить к ним как к существенно дивергентным объектам, то есть образам.

Как следует из аксиом теории возможностей, ультраметрика как мера неопределённости согласована с решёточной структурой и, соответственно, с булевой алгеброй (см. (17)). Её значение для сложных систем следует из представления  $Q_p$  как трансляции своих копий — она более адекватна открытым системам. Величина ультраметрики имеет

локальный характер и не зависит от окружения в евклидовом пространстве. События в теории возможностей могут иметь меру, равную 1, без нарушения общего правила, нормирующего всё пространство также единицей. В этой теории нет понятия полной группы событий, поэтому она более адекватна открытым системам, где трансформация поля элементарных событий является типичным процессом. В терминах ультраметрики

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in A \subset Z_2, \quad |\xi_i|_2^D = 1 \Leftrightarrow \Pi(A) = \max_i |\xi_i|_2^D = 1,$$

где  $\Pi(A)$  — мера возможности события  $A$ . Локальный характер меры возможности делает оправданным её включение в уравнения движения, баланса и т.п. Непредикативность обычного понятия вероятности очевидна — её локальное значение зависит от разбиения всей области. Определение вероятностных характеристик возможно лишь имитацией системы [61]. Введение вероятностной меры является неразрешимой задачей [62, с. 81–83]. Поэтому вероятность не входит ни в одно из базовых уравнений движения математической физики. Следовательно, теория возможностей как модель неопределённости в своих основах представляется более адекватной структуре нашей модели, нежели теория вероятностей.

23. *Принцип переноса (аналогия Акса-Кочена-Ершова)*. В теории моделей известен следующий результат:

Для любого утверждения  $\varphi$  первого порядка в языке нормированных полей, существует  $p_0(\varphi)$  такое, что  $\forall p > p_0(\varphi)$  [1, р. 16; 63, с. 108; 64, с. 329],

$$Q_p \models \varphi \Leftrightarrow F_p(t) \models \varphi. \quad (18)$$

Его аналогом в  $p$ -адической физике можно считать принцип инвариантности законов физики относительно смены числовых полей, который был сформулирован из физических соображений [65]. В нашей модели его аналогом является принцип двойственности в теории решёток и порядка:

*Всякое утверждение, верное для данного частичного порядка, остаётся верным при обращении стрелок, то есть для частично-упорядоченного множества с обратным отношением порядка.* (18\*)

В таком виде он остаётся верным для алгебраических структур и булевых алгебр [39, р. 11, 39, 111]. Поясним принцип переноса. Для этого запишем  $Q_p$  в виде

$$Q_p = R(p^{-N}) \times Q \times Z_p(p^M). \quad (18^{**})$$

Здесь  $N$  и  $M$  задают интервал для рациональных чисел, левее и правее которого «скрываются» вещественные и  $p$ -адические числа соответственно. Тогда (18) должно выполняться для каждого из слагаемых (18\*\*) для любых  $N$  и  $M$ . Примером может служить уравнение неразрывности, которое верно для сплошной среды, то есть  $R$ , и для «жидкости вероятности» ансамбля частиц, то есть  $Z_p$  в теории уравнения Больцмана, решение которого ищется в  $Q$ .

В математике и логике не рассматриваются автореферентные предложения и, соответственно, логика нелинейных, рекуррентных зависимостей вида  $x = F(a, X)$ . Решёточный аналог принципа переноса расщепляет двойственность строки и  $Q_p$  на вещественный и  $p$ -адический смысл топологии. Поэтому аналогично исключительному множеству простых чисел  $p = p(\varphi)$  в (18) у нас возникают исключения, связанные с утверждениями о связности, делимости и других, включающих различие топологий  $R$  и  $Z_p$ . Они по смыслу аналогичны утверждениям о различии характеристик полей в доказательстве принципа переноса.

Отметим, что аналогичные принципы переноса существуют и в нестандартном, и булевозначном анализе. Такая независимость истинности от топологии ставит интересные вопросы, которые требуют отдельного исследования. Кроме того, нетрудно видеть, что произвольность центра шара, понимаемого как точка зрения наблюдателя, объединённая с принципом переноса, есть числовой вариант принципа относительности, причём не только в физике.

24. *Стоуново-гильбертово-банахово содержание.* Числа как функции. Ультраметрическое пространство изометрически вкладывается в гильбертово пространство и в пространство функций [66, 67]. Это значит, что его элементы допускают интерпретацию в виде векторов гильбертова пространства и в виде функций. Тем самым  $p$ -адические числа можно рассматривать как банахову алгебру с инволюцией, то есть  $C^*$ -алгебру.

25. *Лемма Гензеля.* Лемма Гензеля обычно рассматривается как аналог численного метода Ньютона нахождения корней уравнения. Мы упомянем о ней лишь в связи с идеей двойственности. Эта лемма может использоваться для синтеза символических и численных операций в компьютерной алгебре [68]. В основе этой идеи лежит представление степенных рядов  $p$ -адической арифметикой [69]. Этот выпуклый пример двойного смысла математической формулы ставит вопрос об общенаучном смысле леммы Гензеля и её феноменологии — что ей соответствует во внешнем мире?

26. *Поля.* Пространство непрерывных функций можно рассматривать как пространство направлений, задаваемых их градиентами, то есть как полевые сущности. В физике фракталы как нульмерные, неви-

димые сущности интерпретируются как поля [70; также лит. раздела 2]. Та же идея выдвинута пионером  $p$ -адической физики И.В.Воловичем [65]. В этом случае  $Z_2$  может рассматриваться как масштабно-инвариантное поле, и такой взгляд имеет ясное физическое содержание [71], которое наследуется от фрактальной теории [72]. Подобные аналогии были сформулированы как возможность моделирования физических полей алгебраическими [73].

Поэтому, поскольку нульмерных множеств много не бывает, а существует только одно, (17) представляет числовую модель поля, общего материальным и идеальным символическим объектам. Поля есть сущности, общие физике и нефизическим наукам – биологии, языку и сознанию, что подтверждается частым появлением этого понятия и термина «информация» в их лексиконе.

27. *Нефундированные множества.* Нефундированные, или экстраординарные, множества Мириманоффа – это множества, допускающие бесконечную делимость подмножеств и элементов, ан-атомические множества. Они требуют исключения атомизма из основ теории, который формализует аксиома фундирования, она же – аксиома регулярности. Эта аксиома является материнским постулатом для всей математики, она обеспечивает определимость её конструкций.

Аксиомой фундирования (*foundation axiom – FA*) называется формула логики, запрещающая во множествах существование бесконечной убывающей последовательности, сформированной по отношению включения «подмножество – множество» или «элемент – (под) множество».

$$\dots \supset E_n \supset E_{n-1} \supset \dots \supset E_1 \supset E_0 \supset \dots \supset E_{-n} \supset \dots$$

Аксиома фундирования запрещает существование циклов по отношению вложения/принадлежности: любая цепочка, построенная таким образом, должна быть конечной, то есть иметь конечный неразложимый элемент, атом. То есть цепочка должна иметь вид:

$$\dots \supset E_{-1} \supset E_0 = \text{ атом, «черный ящик», «дно элементарности»} \dots$$

[63, с. 221–222]. Тем самым обеспечивается исчерпываемость, конечность процесса. Поэтому все так называемые физические фракталы, то есть фракталы с усечённым скейлингом, являются лишь своеобразной подготовкой к введению обычной теории, что и ограничивает возможности физических моделей фрактальных структур.

Отрицание аксиомы фундирования введением координаты делимости есть первый способ введения нефундированных множеств (см. гл.3).

Второй мотив их оправдания – введение циклических явлений в их экстремально широком разнообразии и проявлениях. Циклические

явления в виде порочных кругов (*vicious circles* – англ.) относятся к запретной теме логики. Они чаще всего невидимы и зрительно, пропуская лишь как отдельные стадии масштабных пространственно-временных процессов, ритмов циклов взаимодействий естественных явлений и объектов. Эта картина типична для системной реальности.

«Математику часто называют наукой о формах. ...Важнейшим источником форм являются циклические движения Земли и Луны. Не так важно то, что эти тела движутся циклически, но то, что результатом этого движения являются чередования освещённости и темноты, дня и ночи, фазы освещённости Луны, смена времён года, порождающая периоды расцвета и угасания. Циклы делают возможной жизнь, они проявляются в нашей жизни делением времени на часы, дни, недели, месяцы, годы. Циклический характер времени можно описать посредством бесконечно разворачивающейся строки вида:

$$\begin{aligned} \text{неделя} &= (\text{Вск} (\text{Пн} (\text{Вт} (\text{Ср} (\text{Чт} (\text{Пт} (\text{Сб}, \text{неделя}))))))) \\ \text{Время Года} &= (\text{Весна} (\text{Лето} (\text{Осень} (\text{Зима}, \text{Время Года})))) \end{aligned}$$

Циклы присутствуют не только в физическом мире, который нас окружает, но и в биологической и психологической реальности. Наши сердца бьются в регулярном ритме, система восприятия работает циклически, наша эмоциональная жизнь претерпевает взлёты и падения. Наше общение с другими людьми протекает в режиме взаимности. Основная структура человеческого общения может быть представлена в виде:

$$\text{разговор} = (1^{\text{i}} \text{ собеседник} (2^{\text{i}} \text{ собеседник}, \text{разговор}))$$

Философ Д.Льюис (Lewis, 1969) установил глубинный источник цикличности в человеческой деятельности, который описал в своём известном изучении природы конвенций. Все социальные институты – от языка до законов и обычаев – основаны на конвенциях, разделяемых данным обществом. ... то, что делает *С* конвенцией, означает, что те, кто принимает *С*, также принимают и то, что *С* разделяется другими членами общества. Например, предположим, что *С* есть соглашение о том, что следует передвигаться по правой стороне улицы. Принять *С* – значит засвидетельствовать, что мы знаем, что движение по правой стороне есть норма. Но это также означает, что и от других мы ожидаем того же, то есть в действительности мы ждём от другого знания того, что он ожидает от нас того же самого, и т.д.» [51, р. 3–6].

Подобными же рассмотрениями обнаруживается цикличность в языке и мышлении – самоописание и самоприменимость, в философии – рефлексии и феномен совместного знания, в производстве – целеполагание, в экономике, теории кооперации, теории игр – представ-

ление о планах и структурах поведения конкурентов и/или партнёров. Здесь общим для всех этих частных является «осведомлённость» о всём мире, нас окружающем, способность взглянуть на ситуацию со стороны — действующий агент в своей «управляющей системе» имеет какую-либо модель или описание мира [74, гл. 5; 75–78].

Из предыдущего описания легко понять, что нефундированные множества никогда не могут быть образованы и сотворены — для их формирования мы должны сформировать их элементы, для этого — элементы элементов и т.д. без надежды на окончание процесса. Стоит ограничиться приближением — усреднением и оборвать процесс, и мы получим обычные, то есть ординарные, множества с атомами и чёрными ящиками.

Третий способ — рассмотрение взаимодействий внешне разделённых объектов. Модели такого рода представлялись в виде графов переходов сложных технических устройств, семантических сетей, сетей. Нефундированные множества на сегодняшний день мотивированы нефизическими областями — совокупностью взаимодействующих объектов в системах коммуникации разной природы, конкурентными процессами. Им сопутствуют графы — маркированные или общего вида. Разнообразие актов взаимодействия не ограничивается числом вершин таких графов, но продолжается непрерывно во всё время сосуществования таких систем. В результате формируется массив строк — историй взаимодействия. Элементами строк являются «буквы» выбранного алфавита предметной области. Например, обозначив две подсистемы буквами **A** и **B**, а их взаимодействие и самодействие последовательностью **AB**, **BA**, **AA** и **BB**, соответственно, получим в режиме реального времени строки — истории вида:

**ABBAVAVVAAAVAVVBA... ,**  
**VVAVVBAABAABAABA... .**

Всю картину взаимодействий можно представить знакомым образом в виде разворачивающейся цепочки взаимодействий:

*Динамика Системы = (1<sup>я</sup> система (2<sup>я</sup> система, (Динамика Системы)).*

Поэтому в общем случае каждой вершине произвольного графа можно поставить в соответствие подобное выражение, а значит, каждой вершине будет соответствовать в данный момент времени некоторое «разворачивающееся» или декомпозируемое множество. Совокупность таких множеств образует декорацию графа. Множества, приписываемые вершинам графа, состоят из множеств, приписываемых его вершинам — потомкам. В теории систем это второе, функциональное,

логики-лингвистическое наряду с объектным, физическим представлением системы [75, с. 206, 246–258].

Отсюда начинается движение к основам формальной теории. Аксиома антифундирования есть эмпирическое обобщение явлений, которые обычно называются нелинейными.

Аксиома антифундирования (*antifoundation axiom – AFA*):

*Для всякого множества  $X$  уравнение в переменных, которые являются множествами  $X = (a, X)$ ,*

*имеет единственное решение в виде*

$$X = (a (a (a (a, X)))) = (a (a (a (a \dots))) \dots) = \dots$$

Соответственно, каждый маркированный граф имеет единственное представление в виде множества [79]. Если он не имеет бесконечных путей, то граф фундирован. Если развёртывание/декомпозиция множеств не имеет терминальной вершины, то граф не фундирован. Сразу получается очень полезный для системной теории вывод:

*Каждой системе, которая может быть изображена связным графом, соответствует единственное нефундированное множество.*

Соответственно, теория множеств для рассматриваемых объектов и процессов оформляется как известная теория Цермело-Френкеля с заменой аксиомы фундирования на противоположную — антифундирования. То есть атомизм заменяется ан-атомией. И в этой системе аксиом утверждение аксиомы антифундирования эквивалентно утверждению о том, что каждая система уравнений имеет решение.

Следует сразу заметить, что довольно непривычная форма аксиомы антифундирования в виде теоретико-множественного уравнения аккумулирует хорошо знакомые вещи:

Нелинейные функции и уравнения

$$y = F(a, y) = F(a, F(a, y)) = \dots = F(a, F(a, \dots, F(a, y))) \dots =$$

Это и непрерывные дроби, итеративные и рекурсивные соотношения нелинейной науки, и нелинейные дифференциальные уравнения и теоремы о неподвижной точке, в том числе в теории порядка и решёток.

Автораферентность в логике, включая известные логические парадоксы:

$$p = S(c, p) = S(c, S(c, p)) = \dots = S(c, S(c, S(c, p))) \dots = \dots$$



Парадокс Лжеца, как видно, есть простейшая форма нелинейности – «диагональный» способ рассуждения:

$$A \Rightarrow \neg A \Leftrightarrow \neg(\neg(\neg(\dots\neg A)))\dots,$$

здесь  $p$  – логическая функция, высказывание,  $c$  – константа языка,  $A$  – утверждение в данной логической теории. Истинностная функция подобных логических формул даёт обычную функциональную нелинейность, приведённую выше. Эта же схема верна и для подстановки – типичного приёма математической техники [80].

Формирование слов, предложений и текстов в, например, формальных языках можно представить в виде разворачивающейся схемы, порождающей строки:

$$\text{Текст} = (1^i \text{ символ } (2^i \text{ символ}, \text{Текст})) = \dots$$

$p$ -Адические числа как нефундированный, нелинейный процесс

$$x = a_0 + p(a_1 + p(a_2 + \dots + p(a_n \cdot p^n Z_p)))\dots = \dots$$

Таким образом, просматривается одинаковый шаблон в теории множеств, чисел, логики, формальных (по крайней мере) языках. Если сюда добавить фрактально-хаотическую геометрию природы, визуальные образы которой также представляются при помощи итерированной системы функций, мы можем надеяться на то, что рассматриваемые конструкции могут иметь содержательные «экспериментальные» подтверждения.

Здесь очевидным становится следующее. Аксиома антифундирования и её варианты задают закон образования бесконечности. Принятие аксиомы антифундирования автоматически влечёт появление актуально бесконечной последовательности скобок в её развёртывании. В отличие от экстенсивной бесконечности стандартного натурального ряда она не требует «маскирующих точек», выражений типа «и так далее», внешнего ресурса для прибавления единицы (как в аксиомах Пеано). Эта бесконечность есть бесконечная делимость, которая известна под видом дурной бесконечности или бесконечного регресса. Поэтому если принять определение бесконечного множества как множества, равномошного своей части (которая, очевидно, равномошна своей части и ...), то актуально бесконечными оказываются только множества, не фундированные хотя бы в одной своей точке.

Нефундированные множества разворачиваются в строки бесконечной длины. Каждое такое множество характеризуется подобным бесконечным словом. Поэтому установление равенства множеств в этом случае вещь недостижимая. Вместо этого понятия вводится понятие «наблюдаемой эквивалентности»: два таких множества «видимо-эквивалентны» или

«может быть, равны» (bisimilar – англ.), если совпадают конечные отрезки слов – строк, которые их характеризуют. Поэтому проблематичным становятся теоретико-множественные операции: пересечение, объединение, в которых существенным образом используется тождество элементов.

В целом нефундированным множествам соответствуют древесные структуры с бесконечно длинными ветвями. Д.Мириманофф вместо понятия равенства или конгруэнтности сформулировал понятие изоморфизма для таких множеств. Два таких множества изоморфны, если изоморфны соответствующие им деревья – схемы их развёртывания или декомпозиции.

Что мы получили, так рассуждая? Подведём краткий итог. Принимая аксиому антифундирования, мы попадаем в обогащённый универсум множеств. В нём уже главную роль играет не элементарность, а сложность. Таким образом, мы избегаем следующих ограничений, которые фиксируются аксиомой фундирования обычной теории множеств:

1. Для всех множеств  $A \quad A \notin A$  ;
2. Не существует конечной последовательности множеств, такой

$$\text{что} \quad A_1 \in A_2 \in A_3 \in \dots \in A_n \in A_1 ,$$

то есть логические циклы недопустимы;

3. Не существует множеств со свойством  $A \in B \wedge B \in A$  ;
4. Если множество  $C = (A, B)$ , то  $C \neq A \wedge C \neq B$  и  $C \notin A \wedge C \notin B$  ;
5. Для всех множеств  $A$  не существует непустого множества  $X$ , такого, что  $X = A \times X$  ;
6. Единственное решение уравнения  $X = X \times X$  есть  $X = 0$  ;
7. существует функций, принадлежащих своей области определения;
8. Невозможна конечная последовательность функций со свойством

$$\text{ством} \quad f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 .$$

Общим местом и явлением в этом универсуме является сосуществование строк символов и «видимо» материальных образований, которые в процессе эволюции переходят друг в друга. Типичным является для строк  $A$  и множеств  $X$  [51] решение уравнений вида:

$$A^\infty = A \times A^\infty$$

$$X = A \times X$$

$$X = X \times X$$

В идеологии нефундированных множеств возникают два вида решений нелинейных уравнений – малая и большая неподвижная точки. Малая соответствует стандартному решению и парадигме *атомизма* и

статике, большая представляет собой аналог фрактального хаотического аттрактора нелинейной науки и вводит в картину *ан-атомию* и движение.

Остаётся вопрос «Что такое  $X$ ?» в аксиоме антифундирования и других аналогичных нелинейных выражениях. Если  $X$  — множество, то является ли оно ординарным или экстраординарным? В нашей схеме описание переносится на фрактальные или нульмерные множества. Поэтому если  $X$  — множество Кантора, то процесс антифундирования порождает/восстанавливает его нульмерный образ. Если  $X$  — множество Мириманоффа, то оно является (большой) неподвижной точкой какой-либо нелинейной динамики. Всё дело в том, что нульмерные множества ненаблюдаемы, а вся стандартная, то есть фундированная идеология, как и вся наука, стартует с визуально наблюдаемых сущностей, ординарных множеств. В обоих случаях речь идёт о представлении объекта совокупностью границ. Ниже мы покажем, что здесь дело в двойном способе наблюдения/мышления внешних предметов, при котором оба представления, Кантора и Мириманоффа, имеют равные основания.

Известны возражения против нефундированных множеств. Первое заключается в том, что процессы спуска не оставляют каких-либо материальных конститuentов [81, с. 117]. Второе сводится к тому, что поскольку  $AFA$  совместима с  $ZF$ , то новых фактов ожидать не приходится [82]. Толкование нефундированных множеств как множеств границ снимает их. Имея в виду идею дополненности нашей схемы — двойной смысл числа, строки, множества, пространства, — стоит привести мысль Л.Э.В.Брауэра, который в своей диссертации 1907 г. заметил, что парадоксы могут возникнуть тогда, когда используется пропозициональная функция, определяющая дополнительные, но не разделённые классы и потому не удовлетворяющая условию исключённого третьего (приведено по [83, р. 19]). Таковы предложения естественного (с его асимметричным дуализмом) лингвистического знака и формального языка, где строки символов определены над двумя числовыми системами. Математическая логика, по мысли Брауэра, верна лишь для формулировок с математическим содержанием. А оно определяется взаимнооднозначным соответствием между словом и внешним миром.

Иными словами, прежде чем анализировать и решать парадоксы в рамках какой-либо аксиоматической системы, следует пройти две основательно забытые теоремы — теорему Бета об определмости и интерполяционную лемму Крейга, «расположенные» между внешним миром и миром математических систем. Асимметричный дуализм знака означает существование его двух неизоморфных интерпретаций в виде множеств Кантора и Мириманоффа. В этом случае переменная, терм, формула, теория являются неопределимыми (противоре-

чивыми), и поэтому синтаксическая определимость не исчерпывает семантической. То есть любая формализация оказывается неполной. Определимость является материнским понятием для математики: нет определимости — нет математики. В этом смысл теоремы Бета, лемма Крейга, верная в условиях теоремы Бета, гарантируют отсутствие противоречий — как логических, так и предметных.

## Литература к главе 4

1. *Macysntire A.* Twenty Years of  $p$ -Adic Model Theory // Logic Colloquium'84. J.V. Paris, A.J. Wilkie, G.M. Wilmers (eds.), Elsevier, NH, 1986.
2. *Robert A.* A Course in  $p$ -Adic Analysis. Springer, 2000.
3. *Salzmann H., Grundhofer T., Hahl H., Lowen R.* Classical Fields. Cambridge U.P., 2007.
4. *Владимиров Д.А.* Теория булевых алгебр. СПб.: Изд. С.-Петербургский ун-т, 2000.
5. *Cristol G.*  $p$ -Adic Numbers and Ultrametric Spaces / Waldschmidt M., Moussa P., Luck J.-M. (eds.). From Number Theory to Physics. Springer, 1995, p. 440–475.
6. *Кириллов А.А.* Что такое число. М.: Наука, 1993.
7. *Pitkanen M.*  $p$ -Adic TGD: Mathematical Ideas // arXiv: hep-th/9506097, v. 2, 1995.
8. *Манин Ю.И.* Размышления об арифметической физике / Математика как метафора. М.: МЦНМО, 2008, с. 209.
9. *Махалдиани Н.* Динамика числовых полей и программа согласования пространства в теории полей и струн. Дубна, 1989.
10. *Хренников А.Ю.* Вещественно-неархимедова структура пространства-времени // ТМФ, 1991, т. 86, №2, с. 177–190.
11. *Зеленов Е.И.* Об объединении вещественных и  $p$ -адических теорий. / « $p$ -Adic MathPhys – 2007». The Third Intern. Conf. on  $p$ -adic Mathematical Physics: from Planck-scale physics to complex systems and biology. Moscow, Russia, Oct. 1–6, 2007.
12. *Branicky M.* Universal Computations and Other Capabilities of Hybrid and Continuous Dynamical Systems // TCS, 138, 1995, p. 67–100.
13. *Oorponen P.* A Survey of Continuous-Time Computation Theory / In D.Z. Ku, K.-I Ko Advances in Algorithms, Languages and Complexity. Kluwer, 1997, p. 209–224.
14. *Haran S.* Mysteries of Real Prime. Oxford U.P., 2001.
15. *Peat F.D., Briggs J.* Turbulent Mirror. Harper&Row, 1989.
16. *Merzenich W., Staiger L.* Fractal Dimension and formal Languages / In G.Rosenberg, A.Salomaa. Developments in Language Theory / World Scientific P.C., 1994, p. 262–277.
17. *Fernau H.* Valuations of Languages with Application to Fractal Geometry // TCS, 137(2), 1995, p. 177–217.
18. *Vickers S.* A Fixpoint Construction of  $p$ -Adic Domain // LNCS, v. 283, Springer, 1987, p. 270–289.
19. *Vickers S.* An Algorithmic Approach to  $p$ -Adic Numbers // LNCS, v. 298, Springer, 1988, p. 599–615.

20. *Vuillemin J.* On Circuits and Numbers // IEEE Trans. On Computers 43(8), 1994, p. 868–879.
21. *Pin J.-E.* Profinite Methods in Automata Theory / STACS'2009, p. 31–50, Freiburg, 2009.
22. *Anashin V.* The Non-Archimedean Theory of Discrete Systems // arXiv:1112.5096v1 [math.DS], Dec. 2011.
23. *Barnsley M.F.* Superfractals. Cambridge U.P., 2006.
24. *Kurka P.* Zero Dimensional Dynamical Systems, Formal Languages and Universality // Theory of Comp. Syst. 32(4), 1999, p. 423–433.
25. *Edalat A.* Dynamical Systems, Measures and Fractals via Domain Theory // Information and Computation, 120, 1995, p. 32–48.
26. *Edalat A.* Domains for Computations in Mathematics, Physics and Exact Real Arithmetic // The Bull. Symb. Logic, v. 3, №4, 1997, p. 401–452.
27. *Flagg B., Kopperman R.* Computational Models for Ultrametric Spaces // Proc. of Mathematical Foundations of Programming Semantics 13, ENTCS, v. 6, 1997.
28. *Edalat A. Heckmann R.* A Computational Models for Metric Spaces // TCS, 193, 1998, p. 53–73.
29. *Keye M.* Fractals and Domain Theory/ Mathematical Structures in Domain Theory, v. 14, iss.6, 2004, p. 833–851.
30. *Schikhoff W.H.* Ultrametric Calculus. Cambridge U.P., 1984.
31. *Хренников А.Ю.* Неархимедов анализ и его приложения М.: Физматлит, 2003.
32. *Shenker O.* Fractal Geometry is not Geometry of Nature // Stud. Hist. Phil. Sci. 1994, v. 25, №.6, p. 967–981.
33. *Успенский А.В.* Лекции о вычислимых функциях. М.: ГИФМЛ, 1960.
34. *Lemin A.* On Ultrametrization of General Metric Spaces // Proc. of AMS, v. 131, №3, p. 979–989, 2004.
35. *Todorovic S.* Topics in Topology. Springer, 1997.
36. *Serre J.-P.* Trees. Springer, 1980.
37. *Паршин А.Н.* Дополнительность и симметрия // Вопросы философии, 2001, №4, с. 84–104; также в его кн.: Путь. Математика и другие миры. М.: Добросвет, 2002, с. 139–170.
38. *Скотт Д.* Теория решёток, типы данных и семантика / Данные в языках программирования. М.: Мир, 1982.
39. *Davey B.A., Priestley H.A.* Introduction to Lattices and Order. CUP, 2002.
40. *Scott D.* Continuous Lattices / Lawere F.W. (ed.) Toposes, Algebraic Geometry and Logic // Lecture Notes in Math. V.274, Springer, 1972, p. 97–136.
41. *Bedford T., Fisher A.M.* On the Magnification of Cantor Sets and Their Limit Structures // Monatsh. Math. 1996, v. 121, p. 11–40.
42. *Chystyakov D.V.* Fractal Geometry For Images of Continuous Map of  $p$ -Adic Numbers and  $p$ -Adic Solenoids into Euclidean Spaces // arXiv: math, DS/0202089, v. 1, 2002, первая публикация: ТМФ, 1996, т. 109, №3, с. 323–337.
43. *Khrennikov A., Radya A.*  $p$ -Adic Interpolation and Approximation of Continuous functions by Linear Combination of Shifts of  $p$ -Adic Valuations // J. Approx. Theory, 120, 2003, p. 124–135.

44. *Cuoco A.* Visualising p-Adic Integers // Amer. Math. Monthly, 98, 1991, p. 355–364.
45. *Rammal R., Tiulouse G., Virasoro M.A.* Ultrametricity for Physicists // Rev. Mod. Phys. 58, 1986, p. 765–788.
46. *Holly J.E.* Pictures of Ultrametric Spaces, the p-adic Numbers, and Valued Fields // Am. Math. Monthly, 108, 2001, p. 721–728.
47. *Bradley P.E.* Mumford Dendrograms // arXiv: 0707.3540 v. 1 [cs.DM], 2007.
48. *Nachbin L.* The Haar Integral. Van Nostrand, 1965.
49. *Givant S., Halmos P.* Introduction to Boolean Algebras. Springer, 2009.
50. *Nadler S.B.* Hyperspaces. M.Dekker, 1979.
51. *Barwise J., Moss L.* Vicious Circles: On the Mathematics of Non-Wellfounded Phenomena. CSLI Publ., 1996.
52. *Weger B.M.M.* Approximation Lattices of p-adic Numbers // J. Number Theory, 1986, 24, p. 70–88.
53. *Scott D.* Data types as Lattices//SIAM J. Comput. V. 5, No3, 1976, p. 510.
54. *Stone M.* The Theory of Representation of Boolean Algebras // Trans. AMS, 40, 1936, p. 37–111.
55. *Stone M.* Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology // Trans. AMS, v. 41, No3, 1937, p. 375–481.
56. *Delon F.* Some p-Adic Model Theory // European Women in Mathematics (Trieste 1997), Hundawi Publ. Corp., N.Y., 1999.
57. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. М.: Радио и связь, 1990, гл. 1.
58. *Dubois D., Prade A.* Possibility Theory / In Meyers R.A. (ed.). Encyclopedia of Complexity and Systems Science. Springer, 2009, p. 6927–6939.
59. *Успенский В.А.* Четыре алгоритмических лица случайности // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 10, 2006, с. 71–108.
60. *Li M., Vitanyi P.* An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Application. Springer, 1997.
61. *Pruessner G.* Probability Densities in Complex Systems, Measuring / In Meyers R.A. (ed.). Encyclopedia of Complexity and Systems Science. Springer, 2009, p. 6990–7009.
62. *Натансон И.П.* Теория функций вещественного переменного. М.: Наука, 1974.
63. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976.
64. *Кейслер Г., Чен Ч.Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.
65. *Volovich I.V.* Number Theory as Ultimate Theory of Physics / Preprint CERN – TH.4791, 1987, p. 13; перепечатано в: p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, 2010, v. 2, p. 77–87.
66. *Исмаилов П.С.* Ультраметрические пространства и связанные с ними гильбертовы пространства // Математические заметки. Т. 62, вып. 2, 1997, с. 223–237.
67. *Lemin A., Lemine V.* On a Universal Ultrametric Space // Topology and Application, 103, 2000, p. 339–345.
68. *Limongeli C., Temperini M.* The Uniform representation of Mathematical Objects by Truncated Power Series / In Miola A., Temperini C. Advances in Design of Symbolic Computation Systems. Springer, NY, 1997, p. 33–83.

69. *Colagrossi A., Limongeli C., Miola A.* p-Adic Arithmetic as a tool for Dealing With Power Series / In Miola A., Temperini C. *Advances in Design of Symbolic Computation Systems*. Springer, NY, 1997, p. 53–67.
70. *Altaisky M.V., Bednyakov V.A., Kovalenko S.G.* Fractal Structure of Quantum Gravity and Relic Radiation // *Int. J. of Theor. Physics*, v. 55, No 2, 1996, p. 253–262.
71. *Graner F., Dubrulle B.* Analogy Between Scale Symmetry and Relativistic Mechanics I, II // *PRE* 56(6), 1997, p. 6327–6334, 6335–6442.
72. *Kroeger H.* Fractal Geometry in Quantum Mechanics, Field Theory and Spin Systems // *Phys. Rep.* 323, 2000, p. 81–181.
73. *Домрачёв Г.А., Лазарев А.И.* Приложение теории алгебраических систем для создания иерархии структур твёрдых тел, образующихся при равновесных и неравновесных условиях // *ФТТ*, 1999, т. 41, вып. 5, с. 799–804.
74. *Веденов А.А.* Моделирование элементов мышления. М.: Наука, 1988.
75. *Волкова В.Н., Козлов В.Н.* Системный анализ и принятие решений: Словарь-справочник. М.: Высшая школа, 2004.
76. *Хант Г.* О природе сознания. М.: АСТ, 2004.
77. *Sandri S.* Reflexivity in Economics. Springer, 2009.
78. *Smith V.I.* Rationality in Economics. Cambridge U.P., 2007.
79. *Aczel P.* Nonwelfounded Sets. CSLI Lect. Notes 14, Stanford, 1988.
80. *Hyttinen T., Pauna M.* On the Non-Well-Founded Sets as Fixed Points of Substitutions // *Notre Dame J. of Formal Logic*, v. 42, No 1, 2001, p. 23–40.
81. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.
82. *McLarty C.* Anti-Foundation and Self-Reference // *J. of Philosophical Logic*, 22, 1993, p. 19–28.
83. *Cantini A.* Paradoxes, Self-Reference and Truth in the 20-th Century / *Handbook of the History of Logic*, v. 6. Dov. M. Gabbay, J. Woods (eds.), Elsevier, 2004.





## Глава 5

### Двойственность Стоуна, соответствия Галуа, арифметика Пресбургера, булева алгебра, проективная геометрия

Проинтерпретируем эти результаты в схеме нашей модели. Известные как внутриматематические факты, они не появляются в практике моделирования, за исключением теоретической информатики. Феноменология этих фактов становится ясной с точки зрения двойственной природы фракталов. Все эти конструкции имеют общую основу – пространство  $p$ -адических чисел, что позволяет их объединить естественным образом.

1. *Двойственность М. Стоуна* придаёт эмпирическим фактам о тождестве гранулированной геометрии фазовых пространств нелинейной и символической динамики (*coarse-grained spaces*) с делимой материей (*finely divided matter*) теоретическое обоснование. Тем самым получает формальное выражение узловой вопрос фрактальной теории о связи физики и информатики. Изложим её в расширенном варианте, включив те факты, связь которых с двойственностью Стоуна достаточно очевидна.

Двойственность Стоуна в функциональном анализе сконцентрирована в трёх результатах. Первый устанавливает представимость всякой булевой алгебры ВА полем подмножеств некоторого множества [1].

Второй имеет вид [2]:

*Теория булевых алгебр эквивалентна теории полностью несвязных компактных хаусдорфовых пространств (подмножеств канторова дисконтинуума).*

Третий устанавливает изоморфизм булевых колец и булевых алгебр и определимость произвольного нульмерного компакта булевым кольцом непрерывных функций [3]:

*Каждое нульмерное локально компактное пространство определяется булевым кольцом своих характеристических функций открыто-замкнутых подмножеств.*

Тем самым получаем соответствия:

$$C(Z_2, Z_2) \cong Z_2 \cong BA.$$

Классические результаты Стоуна были развиты в различных направлениях. Характеристические функции подмножеств  $Z_2$  (также  $Z_p$  и  $Q_p$ ) являются локально постоянными, то есть аналогами кусочно-постоянных функций гладкого анализа, и могут интерпретироваться как прототипы алгоритмов теоретической информатики. Поэтому все расширения результатов Стоуна относятся к этой сфере и формулируются как двойственность между булевыми решётками и полностью несвязными компактными пространствами [4–7]. В классической математике они остаются внутренними фактами [8; 9, гл. 2].

Теоремы о полноте для классической логики исчисления предикатов и высказываний

$$BA \models \varphi \Leftrightarrow \vdash_{CL} \varphi$$

являются известным из практики фактом о булевой природе работающей логики математики. В курсах логики обычно не рассматриваются топологические и метрические характеристики формальных систем. К первым относится топология пространства истинности, ко вторым — сжимающие свойства правила *Modus Ponens* и длина вывода. Вывод есть итерация *MP*, вполне аналогичная обычному процессу сжимающих отображений, то есть скрытая автореферентность в логике.

Тогда интерпретация Калужнина  $p$ -адических чисел как последовательности логических сжатий даёт необходимую связь логики с внешним миром. Логическая интерпретация 2-адических чисел следует из диадического варианта гёделевой нумерации Р.Смальяна [10, с. 78–83], которая была проиллюстрирована А.Н.Паршиным [11]: всякая формула логики вкладывается в диадическое дерево. Это «в железе» реализовано в компьютерах и сегодня известно как проблема отображения алгоритмов на материальную структуру вычислительной системы (особенно в теории параллельных вычислений и архитектуре суперкомпьютеров).

Как было установлено независимо в теории фракталов, множество истинности формальных систем имеет фрактальный характер [12], что было проиллюстрировано в [13]. В основе этого факта лежит теорема Ловера об общей природе результатов о неполноте или невозможности Гёделя, Тарского, Рассела, Кантора [14], которые характеризуют пространство истинности формальных систем. Поскольку фрактальные множества являются неразрешимыми (всякая нетривиальная задача на них, или их свойство, неразрешимы [15], и, как известно, для сколь угодно богатых математических теорий разрешимость является скорее исключением, а не правилом), то эти результаты о невозможности продолжают результаты о типичности недифференцируемых функций.

Результаты о невозможности сформировали в XX веке сдвиг внимания от известных антиномий и парадоксов к логике математических моделей. Этот круг идей затрагивает материнские структуры математики: определимость континуума, варианты аксиоматики и теории множеств, общезначимость закона исключённого третьего и многое другое, что говорит о фундаментальности этого явления [16].

Что касается отношения к математическим моделям как способам описания внешнего мира, то по сей день не удалось вернуть эти результаты в лоно классической логики, а предлагаемые решения остаются в сфере логической техники и не обнаруживают видимых связей с физикой и другими естественными науками [17]. Исключение составляет теоретическая информатика, где циклическая причинность и автореферентность всё же оказались задействованы. В этом также можно видеть симптом независимости природы этих результатов, подобно результатам о независимости в теории множеств.

Фрактальность пространства истинности формальных систем имеет прямую связь со свойствами физических процессов, которые в этом случае могут рассматриваться как процессы вычислений [18]. Эта совокупность результатов неявно эквивалентна результатам Стоуна, но получена на эмпирически содержательном материале. Все эти факты оформляют предварительные рассуждения Д.Миримановфа о связи делимости как альтернативе построения теории множеств с известными её парадоксами [19–21].

Известно три способа формализации понятия функции: алгоритмами, таблицами и посредством логических высказываний. Точка зрения теоретической информатики состоит в установлении связи между этими вариантами. Функции обычно являются формальным способом отображения движения (траектория, смена состояний систем и т.п.). Если в математической физике функциями обычно отображаются информационно сжимаемые процессы, то есть те, которые можно задать

формулой или уравнениями, то в теоретической информатике точными оказываются метафоры «программы как процессы», «доказательства как процессы», в которых сопряжение символического объекта и движения очевидно. Соответственно, топологические пространства оказываются сопряжёнными с полными решётками. Это есть вариант двойственности Стоуна:

*Множества полных непрерывных решёток и топологических пространств являются взаимнодуальными.*

Общим для двойственности Стоуна является сопряжение  
*пространство—движение,*

которое принимает различные виды:

*синтаксис—семантика* или *спецификации—вычислительный процесс* [22, ch.7; 23].

Эти сопряжения аналогичны, очевидно, паре *пространство координат—пространство импульсов* в физике.

Ультраметрические пространства в информатике изучаются как главная альтернатива теории доменов, построенной, как известно, на вещественных числах как основном типе данных. В этом варианте двойственность Стоуна известна как двойственность Гельфанда для  $C^*$ -алгебр, двойственность Понтрягина — для топологических групп [23, Ch.5]. Аналогичные результаты в классике формулируются для нульмерных компактов [8, с. 127–131].

2. *Соответствия Галуа.* Поле подмножеств некоторого множества, как известно, является полной решёткой. В случае  $Z_2$  это решётка открыто-замкнутых подмножеств, шаров вида  $B_n = 2^n \cdot Z_2$ . Решётки полностью определяются двумя своими операциями. Операции слияния — *join* — соответствуют теоретико-множественное объединение  $\cup$  и логическая дизъюнкция  $\vee$ . Второй операции расщепления — *meet* — соответствует пересечение  $\cap$  и конъюнкция  $\wedge$  [24]. Вместе эти операции образуют двойную семантику союза ИЛИ в языке.

Бинарное лексикографическое дерево  $Z_2$ , направленное вниз от 1, является полурешёткой, в которой всегда существует *join*, а зеркально отражённое дерево вещественных чисел  $R$ , направленное вверх от 0, является полурешёткой, в которой всегда существует *meet*. Порядки на  $Z_2$  и  $R$  являются взаимнообратными, то есть в нашей схеме связанными инволюционным антиизоморфизмом. Такие решётки называются двойственными:

$$\begin{aligned} \textit{join}(a, b) &= \sup(a, b) \quad a, b \in Z_2, \\ \textit{meet}(a^*, b^*) &= \inf(a^*, b^*) \quad a^*, b^* \in R. \end{aligned}$$

Первая операция даёт элемент, расположенный выше по дереву 2-адических чисел, вторая – ниже по перевёрнутому дереву вещественных чисел.

Рассмотрим следующую конструкцию, которая объединяет эти полурешётки в единую решётку  $Z_2^\#$ , соответствующую бинарному пространству модели. В этой схеме две определяющие операции становятся также двойственными.

На множестве строк  $Z_2$  определим порядок следующим образом:

$$\begin{aligned} \forall a, b \in Z_2 \\ a &= p^k (a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots) \\ b &= p^l (b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n + \dots) \\ a \leq_{Z_2} b &\left\{ \begin{array}{l} k < l \\ \exists i: a_i > b_i, k = l \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Тогда для их образов при инволюции  $p \rightarrow p^{-1}$   
 $a \rightarrow a^*$ ,  $b \rightarrow b^*$ ,  $a^*, b^* \in R$

$$\begin{aligned} a^* &= p^{-k} (a_0 + a_1 p^{-1} + \dots + a_n p^{-n} + \dots) \\ b^* &= p^{-l} (b_0 + b_1 p^{-1} + \dots + b_n p^{-n} + \dots) \\ b^* \leq_R a^* &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} l > k \\ \exists i: b_i < a_i : k = l \end{array} \right\} \Leftrightarrow |b^*|_\infty \leq |a^*|_\infty \end{aligned}$$

Это двойственный порядок – сверху вниз по иерархии и справа налево, то есть обратно, по линейному порядку. Таким образом получаем

$$a \leq_{Z_2} b \Leftrightarrow b^* \leq_R a^* .$$

Очевидно, что *join*- и *meet*- операции существуют для любых элементов и/или их подмножеств. В терминах метрик

$$|\sup(\alpha, \beta)|_2 = |\gamma_{ab}|_2 \geq \max\{|\alpha|_2, |\beta|_2\}$$

и рекурсия  $join(\alpha, (\beta, (\theta, \dots(\phi, \phi) \dots)))$  влечёт  $|\gamma_{\alpha\beta\theta\dots}|_2 \rightarrow \infty$ . Аналогично двойственным образом  $meet(\alpha, (\beta, (\theta, \dots(\phi, \phi) \dots)))$  в числовом выражении эквивалентна  $|\gamma_{\alpha\beta\theta\dots}|_\infty \rightarrow 0$ .

Таким образом, решётка  $(\Sigma, \wedge, \vee) \cong (\Sigma, |\cdot|_\infty, |\cdot|_2) = Z_2^\# = (|\cdot|_\infty, |\cdot|_2)^N$ , то есть множество строк из нулей и единиц с операциями взятия архимедовой и неархимедовой метрик, является самодвойственной решёткой. В ней эти две метрики играют роль числовых функциональных аналогов основных решёточных операций *meet* и *join* соответственно.

Мы пришли к одному из видов – классическому контравариантному – соответствиям Галуа.

Если для частично упорядоченных множеств, в нашем случае  $Z_2$  и  $R$ ,

$$P = (Z_2, \leq_{Z_2}) \quad , \quad Q = (R, \leq_R)$$

определены отображения

$$f^\bullet : Z_2 \rightarrow R \quad , \quad f_\bullet : R \rightarrow Z_2 \quad ,$$

которые в нашей схеме имеют вид:  $f^\bullet = (p \rightarrow p^{-1})$  и  $f_\bullet = (p^{-1} \rightarrow p)$ , такие что  $a \leq_{Z_2} f_\bullet(b) \Leftrightarrow b \leq_R f^\bullet(a)$ , то четвёрка  $(Z_2, f^\bullet, R, f_\bullet)$  называется соответствиями Галуа. Для алгебраической теории решёток и булевых алгебр связки meet и join заменяются соответствующими связками (см. выше). Эта теория, так же как и двойственность Стоуна, была развита в различных направлениях. Её значение в том, что, как и двойственность Стоуна, она сопрягает два различных «математических мира», обладающих каждый своим порядком, таким образом, что информация об одном из них может использоваться для получения информации о другом [25, 26].

Если рассматривать соответствия Галуа на одной полной решётке, то возникает нужная семантика этой конструкции. Её содержание вбирает в себя физические, геометрические и логические отношения – «несовместно», «ортогонально», «полярно». Эта семантика имеет своим истоком работы Г.Биркгоффа и Дж. фон Неймана по логике квантовой механики. В этом случае инволюция имеет смысл расщеплённого отрицания  $inv \propto Neg = (\neg, \sim)$ , компоненты которого определены на разных множествах:  $p = \neg p^{-1}$ ,  $p^{-1} = \sim p$  [27].

Соответствия Галуа могут определяться и для подмножеств полной решётки. В этом случае возникает богатая картина сопряжённых фактов/явлений [28, р. 398]. Как и в случае с фракталами, феноменология конструкции даётся теоретической информатикой. В задачах обработки изображений показано, что join соответствует слиянию (*dilation*), meet – расщеплению (*erosion*) [29].

Принцип двойственности для решёток, верный для алгебраических структур и булевых алгебр [24, р. 39, 111] продолжается на соответствия Галуа как модель и на интерпретацию отрицания в логике. Тогда порядковая двойственность meet's и join's проявляется как классическое отрицание, выражаемое законом де Моргана:

$$a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b) \quad .$$

В этом случае отрицание становится двойственностью между частичными порядками различных частично-упорядоченных множеств – в нашем случае  $R$  и  $Z_2$ , либо внутри одного  $Z_2^\#$  соответственно [30].

3. *Арифметика Прессбургера*. Множество  $p$ -адических чисел  $Q_p$  является интерпретацией арифметики Прессбургера  $AP$  (отличая от  $PA$  – арифметики Пеано). Арифметика Прессбургера не интерпретируется ни в поле вещественных  $R$ , ни в поле комплексных чисел  $C$  [31, р. 128]. Стандартной интерпретацией  $AP$  является теория сложения целых чисел [32, с. 332].

В качестве логической теории  $AP$  рассматривается на стандартном натуральном ряде и является полной и разрешимой формальной теорией. В 1929 г. М.Прессбургер доказал её полноту и непротиворечивость, что укрепило веру Д.Гильберта в правоту своей программы полной формализации математики [33, гл. 3; 5; 34, т. 1, с. 359–366].

Термами  $AP$  являются полиномы с натуральными коэффициентами. Логические связки в  $AP$ , смысл кванторов и истинность формул определяются так же, как и в классической логике. Различие возникает в смысле связки отрицания, логического «не». В стандартных формальных теориях отрицание рассматривается как оператор удаления негативной формулы из системы. Множество истинности негативной формулы по умолчанию полагается пустым. Появление такой формулы в логическом выводе рассматривается как не имеющее ничего общего с реальной действительностью.

Однако, как известно, логика детерминирована стандартным натуральным рядом, но при этом остаётся в стороне неопределимость самого натурального числа, которое входит в аксиомы Архимеда [35, 36], равно как и во все процессы последовательных приближений, вывода, рекурсии. Рассуждения П.К.Рашевского о логических и физических проблемах, связанных с единственностью интерпретации натурального ряда, достаточно точно описывают дискретно-непрерывную структуру его альтернативного варианта [37]. В нашей схеме неопределимость натурального числа означает его двойную (пере)определимость, в которой экстенсивный (стандартный) и интенсивный ( $p$ -адический) ряды сопряжены.

Отличием  $AP$  от стандартных логических теорий является то, что  $AP$  содержит вместе с утверждением  $A$  и его отрицание «не- $A$ » [38, с. 260–261]. Такие системы, как было показано Дж.Майхиллом [39], свободны от парадокса Лжеца, который лежит в основе результатов о неразрешимости, неопределимости и т.п., и могут формулировать истину собственными средствами. В них отрицание имеет смысл «не- $A$ », но « $B$ », то есть негативные результаты имеют непустое, позитивное содержание. В нашей схеме таковы логическая и числовая интерпретации соответствий Галуа. В этом направлении можно видеть аналогию с принципом переноса Акса–Кочена–Ершова. Самый простой пример такого отрицания – аксиома Архимеда: *не-Архимедовость* (обычно понимаемая по сложению) есть *Архимедовость* по делению.

Поэтому можно сказать, что теории, основанные на  $p$ -адических числах, состоят из взаимно-опровержимых утверждений, то есть представляют собой то, что философы называют «единством противоположностей».

Поэтому отрицательные результаты о невозможности единственного решения

$$|= A \wedge \neg A$$

есть результаты о подлежащей скрытой двумерной семантике истины математического универсума. В физике эта ситуация известна как некорректные задачи, которые оказались типичными для нелинейной науки. В связи с решётками этот факт, по-видимому, впервые, был отмечен Г.Биркгофом [40, с. 360]. Им же была высказана мысль о плодотворности исследования оппозиции непрерывность—дискретность:

«... математика обретает глубину, когда люди пытаются применить дискретные методы счёта и логики к геометрии» [Биркгоф Г. Математика и психология. М.: Сов. радио, 1977, с. 87].

Синтаксис булевой алгебры практически совпадает с синтаксисом арифметики Пресбургера, что делает возможным их объединение с сохранением свойств полноты и разрешимости [41], которое, однако, ограничено сегодня техническими задачами теоретической информатики [42, Ch.7, и приведённая там литература]. Этот вариант основан на введении универсального объёмлющего множества и нормы множества в виде количества входящих элементов или одного из вариантов его меры. Таким образом, получается один из видов нормированной булевой алгебры [43; 44, с. 142–144, 172; 45, ch.31].

Однако теперь есть выбор в введении метрики и меры – аддитивная (она же – лебегова) и мультипликативная меры Хаара. Мультипликативная мера Хаара совпадает с ультраметрикой и имеет ту же аксиоматику, что и мера неопределённости в теории возможностей (см. гл. 4) [46, с. 18–20; 47, р. 26–27]. В самом простом случае эта связь выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi(A \cup B) &= \max(\Pi(A), \Pi(B)) , \\ N(A \cap B) &= \min(N(A), N(B)) , \\ \Pi(A) &= [N(A')]^{-1} . \end{aligned}$$

Мера возможности  $\Pi(A)$  определяется на множестве-степени  $P(X)$  исходного  $X \supset A$  через функцию возможности  $\pi(\xi)$ :

$$\Pi(A) = \max_{x \in A} \pi \xi ,$$



которую можно задать ультраметрикой

$$\pi(\xi) = |\xi|_p^d \quad \xi \in A, B \subset Z_p \vee Q_p.$$

Первое равенство есть выражение для меры возможности, второе — для меры необходимости (действительности)  $N(A)$ , третье — двойственность между этими мерами. Здесь вместо обычной аддитивной дополнителности  $\Pi(A) = 1 - N(A')$  введена мультипликативная, которая оставляет инвариантной пару конвергенция—дивергенция и отвечает принятой семантике пары возможность—действительность, заключающейся в том, что ни один из её членов не обращается в нуль, не исчезает. Такое соотношение согласовано с семантикой соответствий Галуа. Множества  $A$  и  $A'$  связаны отрицанием в этом смысле.

Очевидно, что первое на решётке есть *join*-операция, второе — *meet*-операция, третье — обращение порядка.

Теорема Стоуна, объединяющая (делимую) материю с булевой алгеброй, осуществляет то, что называется семантическим замыканием — единством материи и символа [48, 49], языка и материи [50, 51], умопостигаемого и физического пространства [52, с. 75, 84, 100]. В итоге мы получаем формально согласованные аналоги ряда известных системных оппозиций: материя—символ как феномен материального эквивалента функции и обратно, анализ—синтез, предсказуемость—случайность и т.д., определяющими природу сложных систем и самого понятия сложности как отрицания закона исключённого третьего или неразрешимости основных задач математического их моделирования [53].

Иными словами, логика фрактального мира, где объекты являются экстенсивно-интенсивными и потенциальная экстенсивная бесконечность сопряжена с актуально бесконечной делимостью, является интуиционистской. В физическом подпространстве работает закон исключённого третьего, в символическом — его отрицание. Поэтому требование конструктивности доказательств в интуиционизме имеет смысл различения подпространств (см. в гл. 2 — фракталы, (13), (14)).

Бинарные строки имеют двойной смысл: обычного канторова и конструктивного континуумов, соответственно.  $p$ -Адические числа в этом случае представляют собой свободно становящиеся последовательности, а их проекции в физическое пространство, то есть фракталы, оказываются средой свободного становления. Дедуктивная, то есть конвергентная, логика есть часть интуиционистской. Вторая логическая ветвь — индуктивная логика от частного к общему — является, очевидно, дивергентным процессом. Проблема оппозиции  $CL - IL$  заключается в тождестве синтаксиса  $R$  и  $Z_p$ .

Все три перечисленные двойственности присутствуют в апориях Зенона «Дихотомия», «Стрела», «Ахиллес и черепаха»:

«... как задаётся Зеноном множество. Оно задаётся либо путём последовательного деления целой величины на части, ... либо путём последовательного соединения таких же частей в целое... неперменная последовательность деления (или соединения) совпадает в аргументах Зенона с неперменной последовательностью проводимого доказательства — это самый существенный момент в составленных Зеноном условиях, которого не заметили его комментаторы» [54, с. 8].

Недавно эта связь предстала в виде фрактальных образов [55]. Собственно проблема апорий заключается в интерпретации отрицания закона исключённого третьего. Несколько шире: обсуждаемые двойственности могут служить толкованием проблемы Парменида о тождестве бытия и мышления, формальным аналогом которой служит фрактальная материя в виде  $Z_2$  и булева алгебра с арифметикой Пресбургера.

4. *Булевы алгебры.* Вернёмся к булевым алгебрам [43] и опишем ситуацию с двойственностью, которая усматривается в их структуре. Булевы алгебры, как известно, формализуют «правильную» математическую логику.

Булева алгебра в зависимости от интерпретации имеет различный смысл, который совпадает со смыслом данных в теории возможностей. Логическое следование для высказываний соответствует структуре данных. Теоретико-множественное включение параллельно содержанию данных, а событийная структура аналогична отношению данных к реальности с точки зрения пары возможность–действительность. Булевы алгебры с мерой возможности можно рассматривать как вариант нормированных булевых алгебр, где мера множества согласована с её решёточной и числовой основой.

В теории булевых алгебр аналогом делимости служит понятие разбиения элемента на дизъюнктное множество (разбиения единицы) [43, гл.1.1, п.3, с. 111]:

$$x = \vee_i x_i = \text{join}(x_1, \dots, x_n, \dots).$$

С вероятностной точки зрения разбиение аналогично порождению полной группы событий для события  $x$ . В  $Z_p$  оно соответствует представлению шара объединением шаров меньшего радиуса:

$$p^n Z_p = \bigcup_{i=1}^p p^{n+1} Z_p = \bigcup_i \bigcup_j \dots \bigcup_k p^{k-i+1} Z_p = \dots$$

Разбиение есть аналог скейлинга, масштабной инвариантности, ему отвечает в точности одна подалгебра [43, с. 163–164]. То есть раз-

биение/скейлинг оставляет инвариантным свойство быть стоуновым пространством [43, с. 166], что очевидно в  $p$ -адическом контексте.

*Булева алгебра непрерывна, если она содержит двоичные строки. Одной из её реализаций является канторов дисконтинуум* [43, с. 289]. Двоичные строки, как обычно в анализе, устанавливают изоморфизм между канторовым множеством  $C$  и отрезком  $[0,1]$ . Всякая нормированная булева алгебра, содержащая систему двоичных строк, непрерывна [43, с. 411]. В нашей схеме мы имеем дело с той же числовой асимметрией, двойственностью формализации и двойственностью понятия меры. В итоге булева алгебра на  $R$ , совместимая с группой движений [43, с. 48–49], оказывается сопряжённой с булевой алгеброй, совместимой с делимостью. Эти два вида непрерывности слиты в утверждении о том, что всякая булева алгебра изоморфна некоторой структуре метрического пространства [43, с.367], примером которой является канторов дисконтинуум [43, с. 358]. То есть в понятии «нормированная булева алгебра» усматривается та же двойственность, составляющая пространство нашей схемы: *движения, аффинные преобразования,  $R$  – бинарное лексикографическое дерево, двоичные строки,  $Z_2$  и метрическое–ультраметрическое пространства.*

Двойственность Стоуна,  $p$ -адика, арифметика Пресбургера и соответствия Галуа согласовываются нормированными булевыми алгебрами в эмпирическую «логику адекватности» математического моделирования. Она заключается в сквозном подобии: аксиоматики – числовой системе, числовой системы – структуре модели, структуры модели – структуре объекта. Таковы, например, расчётные схемы технических и инженерных наук и имитационные сетевые модели сложных систем.

Отметим один момент, который выносится за рамки модели и связан с её спецификой – наличием делимости как степени свободы. При непрерывной делимости меняется физико-химический смысл меры множества, то есть меняются свойства вещества и/или его частиц [56]. *Масштабная инвариантность геометрии сопровождается масштабной детерминированностью свойств материи.* Это явление в практике приложений присутствует под видом многомасштабного или многоуровневого моделирования. Оно, по большому счёту, ведёт к проблеме математического описания периодической таблицы Менделеева.

*5. Проективная геометрия.* Мы дополним идею двумерной семантики модели некоторыми фактами из проективной геометрии. Собственно, сама идея проецирования объекта на плоскость, лежащая в основе проективной геометрии, может быть истолкована как один из способов выделения/высвечивания объекта, аналогичный языковой

номинации и потому она естественным образом укладывается в схему модели. Можно видеть аналогию

*выделение – проецирование – скейлинг – однородные координаты.*

Особенность этого материала в том, что проективная геометрия обычно излагается с помощью евклидовой, то есть с явным привлечением визуальных образов связанных геометрических объектов – прямых, окружностей, плоскостей и т.д. В нашей схеме эти связанные множества либо вторичны, либо являются формальными эквивалентами движения. Поэтому мы ограничимся теми фактами, которые укладываются в понятие нульмерного множества как предшествующего связным множествам. Для нульмерных множеств  $Z_2$  или  $Q_2$  понятия физических движений – сдвига, вращения, растяжения – не играют роли, поэтому из рассмотрения исключается понятие конгруэнции. (Понятие движения в геометрии не определяется, его свойства не перечислены в аксиомах, равно как и в теории множеств и арифметике [57, с. 12, 14; 58]).

Числовая асимметрия  $Q_2 = Z_2 \times R = Z_2 \times \text{inv } Z_2$  может рассматриваться как аналог, числовой изоморф двойственности *пучок–прямая* [57, с. 233–235], в которой вершина пучка 1 в  $Z_2$  играет роль проективного центра, а точки канторова совершенного множества – роль проективных координат [57, с. 273–275]. Введение проективных координат вполне аналогично порождению вещественного числа из 2-адического (интерпретирующей функцией, см. гл.2). Соответственно, связанная прямая заменяется сечением пучка, то есть канторовым множеством.

Порядок на  $Z_2$  и  $R$  обратный, так же как и в пучке [57, с. 264], что совпадает с теорией решёток. Сопряжение метрик архимедова–ультраметрика определяет инволюцию двух взаимнодополнительных отрезков проективной прямой  $Q_2$  с общими концами [57, с. 327]. Такая (гиперболическая) инволюция сопрягает разрывность (дискретность) со связностью (движением) и продолжает пару дивергенция – конвергенция на проективную геометрию.

Двойственный характер проективной геометрии проявляется в том, что предложения о системе точек прямой сопоставляются с предложениями об элементах пучка. В нашем случае это вещественные и  $p$ -адические числа соответственно. Поэтому каждая абстрактно сформулированная теорема имеет двойную соотнесённость [57, с. 344–345]. Поскольку в нашей интерпретации вместо связанных прямых присутствуют сечения пучка, то эта двойная соотнесённость *точки–прямые* становится сопряжённостью утверждений в схеме соответствий Галуа и аналогом принципа переноса Акса–Кочена–Ершова. Именно эта сопряжённость *разрывность–связность* согласовывает эти двойственности – Галуа, Пресбургера, проективную. В разных формах они выра-

жают факт двойного смысла, двойного соотнесения формулы, утверждения, теории.

Для нульмерных пространств верны ещё два факта, связанные с идеей проекции, но отсутствующие в стандартной проективной геометрии и составляющие такую же двойственную пару утверждений *о прямых и точках*.

Всякое компактное метрическое пространство есть непрерывный (при проекции) образ нульмерного пространства или канторова множества. В этом универсальность канторова множества. Поэтому проецированием из нульмерного пространства могут быть получены (порождены) любые подмножества (фигуры, линии, отрезки) действительных чисел [59].

Канторово множество гомеоморфно нульмерному пространству символической динамики, состоящему из строк символов. Каждая динамическая система имеет нульмерное расширение. Это значит, что её поведение может быть закодировано комбинаторикой строк символов. Поэтому каждая динамическая система есть проекция символической динамики на канторовом множестве [60, ch.3]. Итеративная система функций и, следовательно,  $Z_2$  может имитировать машину Тьюринга и поэтому порождать все строки символов, то есть формальные языки и вычисления. Геометрически это изображается проецированием света из источника на экран с подвижным детектором луча [15].

Проективная прямая  $Q_2$  своей аддитивно-мультипликативной структурой определяет плоскость  $R^2 \cong (|\bullet|_2, |\bullet|_\infty)$ . Мультипликативная и аддитивная прямые, будучи логически независимыми, формируют координатную «плоскость». Отличие этой «планиметрии» от привычной в том, что мультипликативная, интенсивная координата свёрнута в аддитивной, экстенсивной, то есть является степенью свободы делимости последней. Поэтому (глобальная) геометрия пространства аналогична расширенной комплексной плоскости – вспомогательная сфера оказывается «реально» существующей в 2-адике.

$$R^2 \cup Q_2 \cong R^2 \cup P^1(R) \cong P^2(R).$$

Это аналогично фундаментальной роли комплексных чисел в физике.

Если утверждения о словах отнести к утверждению о точках, а утверждения о фигурах – к утверждению о протяжённых объектах, то есть линиях, то приведённые примеры можно трактовать как различные факты, связанные проективной двойственностью [57, с. 344]. Как трактовать множество/скопление точек – как их набор или как клубок связанных линий/непрерывных функций – полностью зависит от человеческого восприятия. Примеры – изображения на мониторе компью-

тера, кинолента, цифровые видео- и аудио-техника. Иными словами,  $p$ -адический вариант проективной геометрии можно рассматривать как ультраметрический (про)образ её планиметрического, стандартного варианта.

Хорошо известно, что человеческое восприятие имеет пороговый характер: при интенсивности стимула ниже некоторого значения восприятие отсутствует. Собственно и определение Кантором связной прямой использует этот факт: набор точек связан, если эти точки можно соединить цепью звеньев длиной  $\varepsilon > 0$  для любого  $\varepsilon$ . То есть он связан «с разрешением» наблюдения  $\varepsilon$ . Однако при таком определении множество рациональных чисел неотличимо от связной прямой. В итоге связность неопределима, определима несвязность [61, 62]. Поэтому «фрактальная прямая»  $R^\#$ , которая получается сечением пучка, может восприниматься как связная за пределом порога восприятия для некоторого  $\varepsilon$ .

## Литература к главе 5

1. *Stone M.* The Theory of Representations for Boolean Algebras // Trans. AMS, 1936, v. 40, no.1, p. 37–111.
2. *Stone M.* The Representations of Boolean Algebras // Bull. AMS, v. 44, 1938, p. 807–816.
3. *Stone M.* Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology // Trans. AMS, v. 41, no.3, p. 375–481.
4. *Johnstone P.* Stone Spaces. CUP, 1982, ch. 6.
5. *Erne M.* General Stone Duality // Topology and its Applications 137 (2004), p. 125–158.
6. *Abramsky S.* Domain Theory in Logical Form // APAL 51, (1991), p. 1–77.
7. *Hartonas C., Dunn J.M.* Stone Duality for Lattices // Algebra Universalis, v. 37, no.3, p. 391–401.
8. *Вечтомов Е.М.* Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техники / Сер. Алгебра, топология, геометрия. Т.29. М.: ВИНТИ, 1991, с. 119–191.
9. *Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* Введение в булевозначный анализ. М., 2005.
10. *Успенский В.А.* Теорема Гёделя. М.: Наука, 1982.
11. *Паршин А.Н.* Размышления над теоремой Гёделя // ВФ, №6, 2000, с. 92–103.
12. *Hayashi S.* Self-Similar Sets as Tarski Fixed Points // Publ. RIMS Kyoto Univ. 21, 1985, p. 1059–1066.
13. *St.Dennis P., Grim P.* Fractal Images of Formal Systems // J. of Philosophical Logic, 26, 1997, p. 181–222.
14. *Soto-Andrade J., Varela F.* Self-Reference and Fixed Points. A Discussion and Extension of Lawere’s Theorem // Acta Appl. Math. 2, 1984, p. 1–19.

15. *Dube S.* Undecidable Problems in Fractal Geometry // Complex Systems, 7, 1993, p. 428–432.
16. *Cantini A.* Paradoxes, Self-Reference and Truth in XX Century. / In Dov M.Gabbay, J.Woods (eds.). Handbook of History of Logic, v. 6, Elsevier 2004, p. 1–144.
17. *Вейнгартнер П.* Фундаментальные проблемы теорий истины. М.: РОССПЭН, 2005.
18. *Agnes C., Rasetti M.* Undecidability and Chaos in Word Coded Symbolic Dynamics // Chaos, Solitons and Fractals, v. 5, no.2, 1995, p. 161–175.
19. *Mirimanoff D.* Les Antinomies de Russel et de Burali-Forti et le Probleme Fundamental de la Theorie des Ensembles // L'Ens. Math. 1917, v. 19, p. 37–52.
20. *Mirimanoff D.* Remarques sur La Theorie Des Ensembles et les Antinomies Cantoriennes—I // L'Ens. Math., v. 19, 1917, p. 209–217.
21. *Mirimanoff D.* Remarques sur La Theorie Des Ensembles et les Antinomies Cantoriennes – II // L'Ens. Math. 1920–1921, v. 21, c. 29–52.
22. *Abramsky S., Jung A.* Domain Theory / In S.Abramsky, D.Gabbay, T.S.E.Maibaum (eds.). Handbook for Logic in Computer Science, v. 3, Clarendon Pr., Oxford, 1994.
23. *Abramsky S.* Domain Theory in Logical Form // APAL, 51, 1991, p. 1–77.
24. *Davey B.A., Priestley H.A.* Introduction to Lattices and Order. CUP, 2002.
25. *Erne M.* Adjunctions and Galois Connections: Origins, History and Development / Denecke, M. Erne, S.L. Withmath Galois Connection and Applications. Kluwer A.P. 2004, p. 1–138.
26. *Erne M., Koslowski J., Melton A., Strecker G.* A Primer of Galois Connections / In S.Andima et. al. Papers on General Topology and Applications. Annals of N.Y. Academy of Sciences, 704, 1993, p. 103–125.
27. *Hartonas C., Dunn J.M.* Duality Theorems for Partial Order, Semilattices, Galois Connections and Lattices / Preprint, no. IULG-93-25, 1993.
28. *Dunn J.M., Hardegree G.M.* Algebraic Methods in Philosophical logic. Oxford U.P., 2001.
29. *H.J.A.M., Keshet R.* Inf-Semilattice Approach to Self-Dual Morphology // J.Math. Imaging and Vision, 17, 2002, p. 55–80.
30. *Hartonas C.* Order Duality, Negation and Lattice Representation / Wansing (ed.). Negation: A Notion in Focus. De Gruyter, 1996, p. 27–36.
31. *Macynaire A.* Twenty Years of  $p$ -Adic Model Theory // Logic Colloquium'84. J.B.Paris, A.J.Wilkie, G.M.Wilmers (eds.), Elsevier, NH, 1986.
32. *Кейслер Г., Чен Ч.Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.
33. *Подниекс К.* Вокруг теоремы Гёделя. Рига: Зинатне, 1992.
34. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики М.: Наука, 1979.
35. *Успенский В.А.* Семь размышлений на темы философии математики / Закономерности развития современной математики. М.: Наука, 1987, с. 106–155.
36. *Успенский В.А.* Что такое аксиоматический метод. М.–Ижевск: РХД, 2001.
37. *Рашевский П.К.* О догмате натурального ряда // УМН, т. XXVIII, 1973, вып. 4(172), с. 243–246.
38. *Гинзбург С.* Математическая теория контекстно-свободных языков. М.: Мир, 1970.

39. *Myhill J.* A System which Can define Its Own Truth // *Fund. Math.*, XXXVII, 1950, p. 190–192.
40. *Биркгоф Г.* Теория решёток. М.: Наука, 1984.
41. *Feferman S., Vaught R.I.* The First Order Properties of Products of Algebraic Systems // *Fund. Math.*, 47, 1959, p. 57–103.
42. *Kuncak V.* Modular Data Structures. PhD Thesis. MIT, 2007.
43. *Владимиров Д.А.* Теория булевых алгебр. СПб.: С.-Пб. ун-т, 2000.
44. *Яглом И.М.* Булева структура и её модели. М.: Сов. радио, 1980.
45. *Givant S., Halmos P.* Introduction to Boolean Algebras. Springer Science+Business Media, 2009.
46. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. М.: Сов. радио, 1990.
47. *Klir G.J.* Uncertainty and Information. Wiley, 2005.
48. *Pattee H.* Evolving Self-Reference: Matter, Symbols, and Semantic Closure. / In: L. Rocha (ed.). *Communication and Cognition-Artificial Intelligence*, 1995, v. 12, no.1–2, p. 9–27.
49. *Pattee H.* Physical and Functional Conditions for Symbols, Codes and Languages // *Biosemiotics*, 1, 2008, p. 147–168.
50. *Hoffmeyer J., Emmeche K.* Code-Duality and the Semiotics of Nature / M.Anderson, F.Merrell (eds.). *On Semiotic Modelling*. De Gruyter, 1991, p. 117–166.
51. *Pippenger NO.* Regular Languages and Stone Duality // *Theory of Comput., Syst.*, 30, 1997, p. 121–134.
52. *Паршин А.Н.* Размышления над теоремой Гёделя / *Путь. Математика и другие миры*. М.: Добросвет, 2002.
53. *Augenstein B.* Complexity, Universal Libraries, DNA Sequences // *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 10, no.6, 1999, p. 953–973.
54. *Комарова В.Я.* Учение Зенона Элейского: попытка реконструкции системы аргументов. Л.: ЛГУ, 1988.
55. *Mar G., St.Dennis P.* What the Liar Taught Achilles // *J. of Philosophical Logic*, 28, 1999, p. 29–46.
56. *Самускевич А.В.* Диалектика прерывности и непрерывности и иерархический принцип строения материи // *Научные труды по философии*. Минск, БГУ, 1958, №46, вып. 2, ч. 1, с. 101–156.
57. *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия. М.: Физматлит, 2003.
58. *Яновская С.А.* Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием «Апорий Зенона»? / *Проблемы логики*. М.: АН СССР, 1963.
59. *Falconer K.* Digital Sundials, Paradoxical Sets and Vitushkin Conjecture // *Math. Intelligencer*, 9, 1987, p. 24–27.
60. *Kurka P.* Topological and Symbolic Dynamics. Paris, SMF, 2003.
61. *Robins V., Meiss J.D., Bradley E.* Computing Connectedness: an exercise in computational topology // *Nonlinearity*, 11, 1998, p. 913–922.
62. *Robins V., Meiss J.D., Bradley E.* Computing Connectedness: Disconnectedness and Discreteness // *Physica D* 139, 2000, p. 276–300.



## Глава 6

### Степенные законы: измерения и восприятие

В этом разделе мы рассмотрим степенные законы (квазигиперболы, ранговые распределения, масштабная инвариантность, универсальность, критические показатели, скейлинг, правило: *хорошего много не бывает* и т.д.), которые обычно считаются маркерами подлежащей фрактальной структуры процессов, в контексте двойственности нашей схемы.

1. *Обзор.* Степенные законы характерны для всех природных систем, носят выраженный трансдисциплинарный характер. Их существование зафиксировано как в естественных процессах (законы Гутенберга-Рихтера, Херста, аллометрические закономерности в биологии, разнообразные парные распределения физических величин типа фликкер-шума и критических показателей в теории перколяции и фазовых переходах), так и в искусственных, рукотворных образованиях и системах (Интернет, размеры стран и городов, частота цитирования, распределение доходов, правило 80-20 и т.п., то есть законы Ципфа, Парето, Брэдфорда и т.п.) [1–5]. Теоретическая механика представлена законом всемирного тяготения – законом обратных квадратов, квантовая механика – соотношением неопределённости Гейзенберга [1].

«...за последние 80 лет исследования в разных науках показали, что распределения, похожие на гиперболы, наблюдаются на столь различных объектах, что искать им частное объяснение вряд ли стоит» [Чайковский Ю.В. О природе случайности. М., 2001].

Мы ограничимся простым видом этого универсального явления:

$$Y = k \cdot X^{\pm D},$$

в котором показатель степени  $D$  часто отождествляется с фрактальной размерностью, и в зависимости от физико-химической природы явле-

ния его называют химической, корреляционной и т.п. размерностью. Устойчивой единой интерпретации этот показатель не имеет. Его значения могут быть любого знака и любой абсолютной величины. Обычно это число не слишком велико и колеблется вблизи топологической размерности пространства, и поэтому чаще всего оно связывается с плотностью упаковки материи.

Первое, что бросается в глаза в связи со степенными законами — это то, что для их формулировки нет необходимости в экспериментальной или теоретической технике: они обнаруживаются либо простым наблюдением, либо измерением. Вторым необычным обстоятельством является их явная неаналитичность. Степенные законы связывают величины разной природы, разной физической размерности и топологии — дискретные и непрерывные, трёхмерные — с одно- и двумерными. Это, вообще говоря, препятствует установлению логических формальных связей как модели механизма явления, которому предшествует установление однородности материала.

В качестве порождающей схемы степенных законов часто упоминаются различные варианты мультипликативных процессов [6–9], процессов с множественными нарушениями гладкости и связности [5], коммуникационные системы и сети множества взаимодействующих элементов.

Всё многообразие степенных зависимостей распадается на четыре класса в соответствии с комбинациями величин *дискретная—непрерывная* [10, р. 109–116, 134].

- *частота—мощность*: фликкер-шум;
- *частотность—частота*: закон Ципфа для слов;
- *амплитуда—частота*: Закон Гутенберга-Рихтера, плотность особей на единицу площади в экологии;
- *объём—площадь, периметр—площадь*: облака, аллометрические закономерности в биологии, законы обратных квадратов и прочие аналитические зависимости в физике.

Последняя группа обычно не рассматривается в качестве фрактальных проблем, так как легко объясняется чисто гладкими соображениями: вес пропорционален кубу размера, площадь поверхности — квадрату, отсюда и вывод. Кроме того, известные физические детерминированные зависимости — закон обратных квадратов и многие другие, как считается, не требуют объяснений. Единственным исключением является позиция М.Шрёдера [1], который поставил закон всемирного тяготения и соотношение неопределённостей В.Гейзенберга в один ряд с фрактальными степенными законами.

В этом явлении необъяснимо устойчивым является систематическое расхождение наблюдаемых распределений от теоретических [11, 12].

В объяснении степенных законов выделяются два подхода. Первый, основанный на стандартной теоретико-вероятностной технике, преобладает в литературе [2, 5, 6, 10]. Его целью является дать как можно более точное описание наличного распределения и, соответственно, объяснить расхождения. Слабостью этой точки зрения является неполное соответствие природы явления основам теории вероятностей. Главным является то, что основное понятие коллектива и статистической однородности теряет смысл для открытых систем. Само понятие элементарного события неопределимо из-за нерасчленимости первичных данных [13, гл. 1], к тому же в них происходит постоянная трансформация поля элементарных событий. Поэтому события в таких системах не имеют вероятности в классическом смысле. Существуют и внутренние проблемы теории: неразрешимость задачи введения вероятностной меры [14, с. 80–82] и, как следствие, отсутствие моста между теорией и реальной статистикой событий [15], что делает единственным способом введения вероятностной меры имитацию [16]. В то же время вероятность не входит в уравнения движения как физическая величина (кроме уравнений Больцмана и Шрёдингера, куда она вводится «руками»). Поэтому вероятностные модели, вообще говоря, изолированы от системной динамики – эволюции, развития. Из неё исключаются кросс-временные, нелокальные процессы развития и трансформации структуры в их натурном, биологическом смысле. Это и было отмечено на заре математизации наук [17].

Второй подход использует системные идеи и направлен на возможно более полное описание природы этого явления специфически системными закономерностями. Наиболее содержательной точкой зрения здесь представляется помещение степенных законов в контекст идеи дополнительности, общего бинарного архетипа естественных наук [18]. Пары оппозиций *локально–глобальное* [19], *целое–часть, мерон–таксон* [13, гл. 4–6], *идиография–номотетика и разномасштабность динамики* [20, с. 184–209; 21] и *другие давно зафиксированы философами* [22] в качестве источников системной динамики – самоорганизации и самодвижения [23, 24], универсальное значение которых стало осознаваться и в математической физике [25–27].

2. *Модель*. Эти оппозиции являются формами проблемы Единое–Многое Платона. Гиперболическая связь величин есть форма оппозиции *большое–малое*, то есть числовой формы топологической пары локальное–глобальное этой проблемы. Как было недавно показано на анализе исторического материала, инвариантом всех досократовских оппозиций и парадоксов является наличие процесса делимости [28]. В связи с этой формой проблемы отметим одно физическое её реше-

ние: инвариантность степенной зависимости относительно инверсии. Его суть в том, что инверсия в области своего действия образует пары связанных чисел, имеющих равные права на существование. Таковы, например, универсальные физические константы, образующие две группы – очень больших и очень малых [29, Ch.9, p. 264–265].

В лингвистике теория вероятностей не имеет никаких оснований: слова не частицы, текст не ансамбль, так же как и, например, события в системе законов [30]. Известны наблюдения, связывающие качество эмпирических распределений слов со смысловой содержательностью текстов, для которых степенные зависимости выполнены гораздо лучше, чем для их бессвязных конгломератов [31, 32]. Если учесть то, что «смысл – это всегда двойной смысл» и слова в тексте существуют в большей степени постольку, поскольку существует целый текст, то есть как *часть целого*, а не как случайная выборка, то и тексты можно рассматривать в контексте дополненности.

В философии имени, связывающей язык и науку, над всем доминирует понятие *Сущности*, которая имеет иерархическое строение – дерево Порфирия. Сущность не нуждается для своего существования в какой-либо опоре, существует независимо сама по себе, движение по ней служит как различению вещей и предметов, так и их уподоблению [33, с. 12, 27, 34, 37]. Естественной моделью для неё представляется  $Z_2$ , которая проиллюстрирована А.Н.Паршиным [34]. Поэтому в первом приближении связь контекста и слова как целого и части можно рассматривать как рефлексию: контекст определяет слово и сам определяется им. Эта связь есть в точности связь двух областей самоподобного фрактала или двух шаров в  $Z_2$ , которая осуществляется инверсией, имеющей вид дивергенции в сторону от слова к контексту ( $div: 2^n Z_p \rightarrow 2^m Z_p$ ) и конвергенции от контекста к слову ( $conv: 2^m Z_p \rightarrow 2^n Z_p \quad n > m$ ). Инверсия входит в набор физических симметрий, определяемых теоремой Лиувилля, хотя является нематериальным движением, имеет вневременной характер и поэтому физическими моделями не может быть отражена. Тем самым Сущность принимает вид ультраметрического образа языка, совпадающего с тонким прообразом материального мира.

3. *Интерпретация.* Мы, следуя общей схеме модели, предпочтём толкование степенных законов в духе теории систем и в связи с нормированными булевыми алгебрами. Событийное пространство, которым оперирует стандартная вероятностная схема, есть также пространство булевой алгебры, одного из универсальных объектов математики. Поэтому её использование в модели диктуется природой явлений, в частности, иерархическим строением сложных объектов. Отношение

порядка в булевой алгебре может интерпретироваться как теоретико-множественное включение, причинно-следственная связь событий, логическое следование для высказываний [35, т. 1, с. 550]. Нормированные булевы алгебры дают основу для модели неопределённости, непредсказуемости. В теории возможностей отношение порядка в булевой алгебре имеет смысл, непосредственно связанный с измерениями: содержание данных, структура данных и отношение данных к действительности, соответственно. Это соответствие между измерительной областью анализа первичных данных и формальной алгебраической техникой принимается за отправную точку нашего толкования. Тем самым эти два раздела охватывают всё разнообразие процессов, которые порождают степенные зависимости.

Степенные зависимости возникают как сопоставление двух способов измерения одного и того же объекта — как *целого* и как *множества своих частей*. Это общая схема, которую можно усмотреть в аксиоме Архимеда. В этой аксиоме число  $M > 0$  задаётся двумя способами: непосредственным указанием/измерением её координаты на вещественной оси и посредством алгоритма измерения  $n \cdot \varepsilon \geq M$ ,  $\varepsilon > 0$ , который представляет собой сумму длин частей-отрезков целого отрезка  $M$ . Все измерения фрактальных фигур/множеств строятся путём организации этого процесса, лишь числовая прямая становится «числовой кривой». Нетрудно видеть, что в общем случае аксиома Архимеда имеет вид степенного закона  $n \cdot \varepsilon^\alpha \geq M$ . В таком виде она появляется в измерениях фрактальной размерности и меры разными способами.

В природных явлениях роль числа  $M$  может играть пространственный и/или временной интервал наблюдения материальных систем или ограниченная область фазового пространства их моделей, область единства/однородности смысла в языке/тексте, замкнутая подсистема социальной, экологической или иной большой системы. Общее во всех этих случаях — это *область имени ввиду*, связанная с целями исследования. В исследованиях по проблеме природы времени такие области соответствуют понятию момента *теперь*. Его границы могут простирались от поля зрения микроскопа до масштабов геологических эпох или периодов человеческой истории, в зависимости от целей исследования. Момент *теперь* различен для человека, работающего с микроскопом, писателя и историка [18, с. 291–292]. В нашей модели момент «*теперь*» является бинарным понятием: он сопрягает точку на вещественной оси с кластером/шаром вида  $p^n Z_p$ . Пример — с затвором фотоаппарата, который в моменте срабатывания (точке на вещественной оси) фиксирует вещественный образ/проекцию кластера, то есть дивергентный объект.

(Замечание. Автору нигде не встречался анализ *бессмысленных целых*, таких как, например, распределение размеров «элементов» городских свалок или мусора, покрывающего поверхность мирового океана. Хотя анализ бессмысленных текстов встречается).

Поэтому общим моментом здесь является явное или неявное присутствие делимости либо материального объекта, либо фазового пространства [36, 37]. Делению подвергаются две сущности: несущее множество системы и диапазон изменения одной из её числовых характеристик (см. объяснение ранговых распределений парой *разбиение—коразбиение* и принципом минимума симметрии в [13, гл. 6]). На фрактальных объектах эта двойная делимость присутствует в натуре. Идея заключается в её формализации при помощи  $p$ -адических чисел, что означает приведение задачи к проблеме Единое—Многое. Тому имеются и формальные основания.

4. *Формализация.* Во-первых, показатель степени в формулировке можно считать меньшим единицы (инвариантность относительно инверсии). Тогда подлежащее множество будет иметь фрактальную размерность меньше единицы, что означает его полную несвязность [38, р. 54]. Во-вторых, множество значений степенной функции можно рассматривать как группу нормирования  $p$ -адического поля чисел [39, р. 24–27, 288–292; 40, р. 118], то есть как мультипликативную прямую. Это соответствует общей идее нашей схемы о первичности нульмерных множеств по отношению к множествам вещественных чисел. И, в-третьих, связь множеств разной топологической размерности, характерная для степенных зависимостей (например, частота нульмерна, амплитуда одномерна, объём трёхмерен, поверхность двумерна, по теореме Нетто [41, р. 6, 94]) может быть осуществлена полностью разрывным отображением. В нашей модели естественным будет построение такого отображения с промежуточным использованием канторова множества, порождающего каждый из членов пары.

Во всех этих случаях имеет смысл введение в модель координаты делимости в виде  $p$ -адических чисел. Запишем пространство нашей модели в виде:

$$U = [R \leftarrow \{Q\} \rightarrow Z_2],$$

где перекрывающиеся пары скобок символизируют два вида пополнения рациональных чисел, которые выделены разноимёнными скобками как соответствующие моменту *теперь*. Они имеют двойное толкование: как измеряемые/наблюдаемые величины и слова регулярных языков.

$$x \in Q \quad x = \left| \xi \right|_2 \cdot \left| \xi \right|_\infty \quad \xi \in Z_2 \quad .$$

Классификация степенных распределений в этой схеме выглядит следующим образом.

$Q \rightarrow Q$  – замкнутые *атомные* физические системы и сети агентов. Это область вероятностных методов физики, которую мы не рассматриваем.

$Z_2 \rightarrow Z_2$  – область *анатомии*, открытых систем языка, биологии, психики.

$Z_2 \leftrightarrow Q, Z_2 \leftrightarrow R$  – связь между пространствами разной топологической размерности, на границе *атомизма* и *анатомии*, пространства координат и пространства импульсов. Оппозиции: *делимость–протяжённость, конвергенция–дивергенция*. По нашей схеме, это область действия принципа неопределённости в его общем смысле.

Во всех этих случаях, как показано ранее, мы не выходим за рамки нормированных булевых алгебр с учётом двойного смысла нормирования. Это значит, что объём в евклидовом пространстве *оцифровывается*, то есть дополняется его  $p$ -адическим двойником или ультраметрическим прообразом. То есть

$$V \subset R^3 \quad V = \{P = (x, y, z)\} \rightarrow V^* \subset Z_p \quad V^* = \{P^* = \xi \in Z_p\} .$$

Такое «удвоение координат» расширяет аппарат модели на весь спектр системных явлений. В этом случае точки  $P$  объёма  $V$  получают двойную координатизацию:

$$(x, y, z) = P \leftrightarrow invP = P^* = p^{D \cdot n}(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_k \dots).$$

Тогда гиперболическое соотношение между модулями числа, которое легко получается из древовидной декомпозиции кластера/объекта, объясняет источник степенных зависимостей. На  $n$ -м уровне иерархии слияния (+) или деления (-)

$$\left| V^* \right|_{\infty} \cdot \left| V^* \right|_p^{\pm n \cdot D} \approx C .$$

Архимедов модуль отнесём к целому, то есть к числу  $M$ , неархимедов – к величине его части,  $\varepsilon$  в аксиоме Архимеда. Число  $C$  – размер области момента теперь. В модели это функция длины строки.

**(Замечание.** Это число зависит от длины строки, на которой вычисляются модули. Оно связано с нахождением суммы цифр этой строки [42]. Для нас достаточно того, что эта сумма конечна и может быть оценена).

Степень  $D$  – фрактальная размерность, по-видимому, как-то должна отражать скорость или энергетику деления. Пара сомножителей в левой части вместе с парой *дискретное–непрерывное* определяет упомянутые четыре типа степенных законов.

В этой формуле правая часть, согласно теореме Островского, имеет смысл рационального числа. Положим, что движение системы описывается некоторой функцией

$$F(x) : R \rightarrow R, \quad F(x) = F(|x|_{\infty} \cdot |x|_p^{\pm n \cdot D}).$$

Разлагая её в ряд Тейлора, аналитически или технически углублением в детали при помощи скейлинга, разложения по малому параметру, как в теории критических явлений, придём к степенной форме. В этом разложении каждое слагаемое, по нашей конструкции, имеет смысл соотношения неопределённостей, один из множителей которого является неопределимой функцией. В этих условиях точного соответствия эксперимента и теории не может быть в принципе.

Эта схема одинакова для числовых объектов, частично упорядоченных структур — здесь срабатывают соответствия Галуа, а также для лингвистических объектов — здесь срабатывает семантика, асимметричный дуализм знака (слова, предложения) [43, с. 483], и функция  $F$  может иметь смысл текста — ультраметрического (про)образа момента *теперь*. Здесь архимедов *модуль-как-функция*, с одной стороны, выделяет объект в смысловом поле, с другой стороны, неархимедов *модуль-как-функция* различает его детали, варианты содержания. Иными словами, связь модулей в этом случае есть связь экстенционала и интенционала лингвистического знака.

Ультраметрический (про)образ является нульмерным, текстовым объектом, по нашей интерпретации. Текстовые и системные объекты возникают по единой схеме: *символ — слово — предложение — текст*. Она параллельна координате делимости материи: *кванты — элементарные частицы — атомы — молекулы — кластеры — мезотела — макрообъекты*. Ранговые распределения получаются из подсчёта: ранг слова длины  $N$  в алфавите из  $p$  символов равен сумме всех слов, длиной не превосходящих  $N$ .

$$r(x) = \frac{p^{N+1} - 1}{p - 1} \approx p^N = |x|_p^{-1}.$$

Это соотношение тем точнее, чем больше  $N$ , чем равномернее разворачивается древесная структура объекта, то есть чем разнообразнее его декомпозиция. Непредсказуемый характер зависимостей отражается неопределимым модулем, который является причиной трансцендентности хаоса и фракталов методам классической математики. Аналогичные и более развитые результаты имеются в теории фракталов (см. [44, 45]).

5. *Измерения*. Искажения степенных законов в нашей модели объясняются как течением времени, в частности, его эволюционной компонентой, которая соответствует неопределимому члену уравнения,



так и наличием движения — общей изменчивости пары модулей. Об этом подробнее.

В общей теории измерений также можно видеть двойственность природы величин. Она восходит к теоремам О.Гёльдера о двух способах представления измерений: экстенсивном (аддитивном) и интенсивном (мультипликативном). Эта теорема является предшественницей теоремы Островского. Именно, согласно теоремам Гёльдера (1901 г.), существует два способа формального представления измерений: аддитивная прямая действительных чисел  $\langle R, +, \geq, 0 \rangle$  и мультипликативная прямая действительных чисел  $\langle R, \times, \geq, 1 \rangle$  [46]. В то же время известно, что все физические переменные можно свести к измерению длины и времени [47].

Согласно этой бинарности измеряемые величины распадаются на два класса, которые в разных контекстах именуется по-разному: экстенсивными и интенсивными, ковариантными и контравариантными, продольными и поперечными [48, гл.2.3, 3.2]. Наличие канонически сопряжённых величин — пространства и времени, как результата действия фрактальной геометрии, аналогичного преобразованиям Фурье и Лапласа, по-видимому, впервые отмечено в [49, Ch.2].

Можно сопоставить два модуля этому делению измеряемых величин. Различие проходит по неравенству треугольника. Обычное неравенство соответствует аддитивным величинам, усиленное — субаддитивным. Из гиперболического характера их связи

$$|x|_{\infty} = \frac{const}{|x|_p}$$

следует, что  $\frac{d|x|_{\infty}}{d|x|_p} = -\frac{const}{|x|_p^2} \neq 0$  и  $\frac{d|x|_p}{d|x|_{\infty}} = -\frac{const}{|x|_{\infty}^2} \neq 0$ .

То есть эти две группы величин аналогичны паре пространств: координата —  $Z_2$ , импульсы —  $R$ , то есть являются взаимно-изменяющимися величинами. По нашей схеме, любая измеряемая величина имеет вид степенного закона:

$$\frac{a}{b} \in Q, \quad \frac{a}{b} = |x|_{\infty} \cdot |x|_p^D, \quad x \in Z_p,$$

то есть содержит неопределимую (непредсказуемую) компоненту — неархимедов модуль. Отсюда общая плохая определимость степенных зависимостей.

5. *Лежандрова дополнительность*. Эти соображения побуждают обратиться к преобразованию Лежандра, аналогичному двойственности координата—импульс, проективной двойственности, тангенциальным координатам в алгебраической геометрии и двойственным банаховым пространствам в анализе [50, с. 59; 51, р. 27–56], одному из основных инструментов термодинамики, связь фракталов с которой хорошо известна [52].

Покажем схематически, что эта пара функций метрик соответствует общему принципу двойственности между двумя базовыми пространствами и тем самым осуществляет преобразование Лежандра.

Разобьём фрактальный объект на квадраты так, как это принято при измерении фрактальной размерности при помощи техники квадродеревьев, то есть рассмотрим  $p$ -адическое представление данного объекта с некоторым приближением на фиксированном уровне иерархии лексикографического дерева. Тогда величины характерных размеров фрагментов равны:

$$l_i = |x_i|_p^D,$$

и характерный размер всего множества равен их сумме

$$|x_i|_\infty = \sum_{i=1}^N |x_i|_p^D = N \cdot |x_i|_p^D.$$

Рассмотрим функцию

$$F(n) = n \cdot |x|_p^D = |x|_\infty(n) \quad n = 1, \dots, N.$$

Для недифференцируемых функций преобразование Лежандра определяется как переход к переменной, минимизирующей функцию [53, р. 65–68].

$$L(s, n) = \min_n (s \cdot n - |x|_\infty(n)) \quad .$$

Откуда по построению:  $n = N$  и  $s = |x|_p^D$ .

Для дифференцируемых функций в термодинамическом пределе, то есть вблизи предела делимости  $|x|_\infty = \sum |x|_p^D \propto \int |x|_p^D$ .

Здесь  $|x|_p^D$  как доля целого имеет смысл дифференциала  $|x|_p^D \propto d(|x|_\infty)$ . Рассмотрим функцию  $F(t) = \int_0^t |x|_p^D d\xi = |x|_\infty(t)$ . Преобразование Лежандра заключается в минимизации функции  $L(s, t) = s \cdot t - F(t)$ , которая задаёт переход к новой переменной  $s$ . Дифференцируя, получаем:

$$\frac{dL}{dt} = s - |x|_p^D = 0,$$

то есть тот же результат.

Эта же техника покрытия целого множества копиями некоторого подмножества в виде порождения фракталов  $p$ -адическими числами по схеме итеративной системы функций (см. гл. 4) является общей для вычисления хаусдорфовой меры и меры Хаара, которая используется для локально компактных пространств, которыми являются  $p$ -адические множества. Поэтому степенные законы могут быть обобщены (уточнены) на этот случай.

6. *Законы обратных квадратов.* Ввиду общности толкования двух метрик как двух классов измеряемых величин можно усмотреть сходство степенных законов как связи двух метрик, даваемых теоремой Островского, с теорией потенциала, которая имеет версию для пространства строк [54, Ch.3.2.]. Очевидно, что степенную форму их зависимости можно рассматривать как простейшую гармоническую функцию

$$|x|_{\infty} \cdot |x|_p^D \approx C \leftrightarrow x \cdot y - C = 0 ,$$

откуда дифференцированием получаются уравнение Лапласа и два закона обратных квадратов, порождающих взаимное движение метрик/измеряемых величин (см. п. 5 — Измерения). Один из них, с архимедовым модулем в числителе, определён для плотных, конвергентных объектов, второй — для границ, то есть их нульмерных образов, дивергентных объектов, то есть полей. Эти силы действуют в разных подпространствах нашей схемы, но в одном евклидовом (физическом) объёме на всех масштабах. Произведение экстенсивной и интенсивной переменных определяет, как известно, термодинамические потенциалы.

Заметим, возвращаясь к вероятностной интерпретации и технике усреднения в гладких моделях сред, что исчезает пространство границ и поэтому все двойственности, с ним связанные. В частности, здесь напрашивается космологическая интерпретация известной пары физики гравитация—антигравитация.

7. *Соотношение неопределённостей* естественным образом следует из схемы модели: любая малая величина сопряжена с некоторой большой, координата — с импульсом. В каждой конкретной задаче нужно лишь найти имена таких пар, многие из которых уже известны. Например, теория элементарных частиц называется физикой высоких энергий. Большой спектр таких пар приведён в [55]: *строгость—реальность и строгость—смысл, синтаксис—семантика, эффективность алгоритмов—их сложность, случайность—индивидуальность, дифференцируемость функций—недифференцируемость, нехаотичность динамических систем—пренебрежимый размер их множества в соответствующем классе, локальная эффективность—глобальная эффек-*

*тивность, истинность—доказуемость, важные для приложений алгоритмы—эффективные алгоритмы.*

(Замечание. Последняя пара известна из опыта приложений как тезис: «решение прикладных задач не есть решение уравнений». Или предметный смысл задач не совпадает с их математическим смыслом).

Во всех случаях эти пары являются моментами общей оппозиции локальное (*точное, простое, доказуемое, эффективное, ...*) — глобальное (*разнообразное, дивергентное, интуитивное/невыразимое, сложное, ...*). В целом семиотическая интерпретация строки как элемента бинарного пространства нашей схемы предполагает это явление.

8. *Измерения и восприятие.* Остановимся на одном степенном законе — психофизическом законе Стивенса. Он определяет зависимость уровня восприятия человеком внешнего воздействия от уровня ощущения. Ощущение есть результат прямого непосредственного контакта с внешним миром. Восприятие является результатом действия психологических процессов, включающих контекст, субъективную оценку, систематизацию, интерпретацию сигналов сенсорных систем [56, с. 24]. В нашей схеме ощущение—восприятие есть одна из форм пары конвергенция—дивергенция и объект—контекст:

«Общий принцип восприятия ... восприятие сигналов зависит не только от непосредственной сенсорной информации, которые они несут в себе, но также от контекста, в котором они возникают» [56, с. 86].

О той же форме свидетельствуют нейрофизиологические исследования зрения. Два основных механизма зрения — классификация, абстракция, то есть выделение объекта, локальное видение и

«одновременно происходит отнюдь не вырожденное, но, напротив, полное описание предметов внешнего мира с их деталями и пространственными соотношениями, как между деталями внутри предметов, так и между самими предметами» [Глезер В.Д. Зрение и мышление. СПб.: Наука, 1993, гл. VII, с. 174].

Наконец, хорошо известная межполушарная асимметрия мозга *логика—интуиция* имеет тот же бинарный вид. Топологизируя эти бинарности: *логика — конвергентна, интуиция — дивергентна*, то есть выражая их геометрически, мы получаем, что за ними стоит известная нам бинарность фракталов.

(Замечание. В этом тождестве, по-видимому, заключено реальное значение фрактальной геометрии. Именно поэтому такой отклик она нашла в сре-

де представителей нефизических наук – они почувствовали свои предметы: фракталы расширяют понятие наблюдаемости).

Известно три психофизических закона ( $S$  – стимул,  $I$  – реакция) [56, с. 86]:

$$S = k \cdot I \quad \text{– закон Вебера;}$$

$$S = k \cdot \log I \quad \text{– закон Фехнера;}$$

$$S = k \cdot I^b \quad \text{– закон Стивенса.}$$

Степенной вид закона Стивенса позволяет рассмотреть их в рамках нашей схемы. Очевидным является точное совпадение зависимостей  $S - I$  со способами порождения (под)множеств действительных чисел ( $x \in Z_2$ ,  $r \in R$ ,  $n \in N$ ,  $\alpha > 0$ ):

$$\text{закон Вебера} \leftrightarrow r = \alpha \cdot n = \text{ord}_p x,$$

$$\text{закон Стивенса} \leftrightarrow r = \left| x \right|_p^{\alpha \cdot n} = e^{-\alpha \cdot n \cdot \ln p},$$

$$\text{закон Фехнера} \leftrightarrow r = \log \left| x \right|_p^{\alpha \cdot n}.$$

Обычно первый и третий объединяются в закон Вебера-Фехнера. Эти совпадения позволяют предположить, что пространство восприятия (и мышления) совпадает с бинарным, вещественно- $p$ -адическим пространством нашей модели.

(Замечание. По поводу неевклидова характера  $Z_2$  см. [57], а внутреннего пространства восприятия человека см. [58]).

В этом случае мы приходим к идее тождества внешнего и внутреннего миров человека, структуры объекта и структуры числовой системы – одного из главных условий адекватности модели:

Проблема представления: «Требуется охарактеризовать формальные свойства использованных эмпирических операций и соотношений и показать, что они изоморфны соответствующим образом выбранным отношениям и операциям над числами». Её переформулировка: «Требуется доказать, что любая эмпирическая система, рассматриваемая с целью измерения заданного свойства элементов области, изоморфна (или, возможно, гомоморфна) соответствующим образом выбранной числовой системе с отношениями...». Вторая проблема (единственности): «Требуется определить тип шкалы, в которой производятся измерения» [Суппес П., Зиннес Дж. Основы теории измерений/ Психология измерений. М.: Мир, 1967, с. 10–15].

Для наших целей отметим совпадение объективных функций измерений с субъективными функциями восприятия. Архимедов *модуль-функция* выделяет объекты, неархимедов модуль-функция различает детали (см. увеличивающий поток в гл. 4). Какими нейрофизиологическими механизмами обеспечиваются эти законы и как происходит переключение между ними, мы не берёмся судить. Отметим, что пара *локальное—глобальное* принимает вид противоречия между высокой чувствительностью к единичным сигналам и шириной спектра интенсивности сигналов раздражителей [59], которая, возможно, как-то связана со способностью мозга создавать оппонентные структуры, реализующие двойственность как преобразование Фурье [60].

Наблюдаемость поэтому становится наблюдаемой, то есть математическим объектом — одной из конечно-параметрических непрерывных групп [61, с. 42–44], составляющих проективную группу, известную в теории перспективы:

$$y = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}, \quad a \cdot d - b \cdot c \neq 0 .$$

Составляющими эту группу являются линейная аддитивная группа, соответствующая закону Вебера-Фехнера  $y' = y + a$ , и мультипликативная группа  $y' = e^{y+a}$ , а значит — аффинная группа  $y' = a \cdot y + b$ . По теореме Лиувилля, проективная группа содержит все четыре основных симметрии физики, которые несёт в себе также и итеративная система функций. Значит, функции «объективных» измерений порождены двумя способами «субъективного» восприятия всех чувств, которые согласованы с асимметрией мозга.

Поэтому *законы мироздания, которые мы, как нам кажется, знаем, таятся в глубине наших процессов восприятия* [62, с. 48; 63, с. 414–428].

Особое место в этой четвёрке занимает инверсия, которой нет места в физике, так как она является нематериальным движением. Заметим, что гиперболическое (степенное) соотношение двух модулей можно рассматривать и как преобразование инверсии. Напрашиваются следующие её истолкования. Первое: инверсия реализует пару *внутреннее—внешнее, субъективное—объективное*. Второе: упомянутое выше *большое—малое* — в степенных законах. Третье — *каждое в каждом*, самоподобие фракталов и рефлексивность  $Q_p$  и  $Z_p$  осуществляются инверсией. Из геометрии (но не из физики!) известно, что все движения евклидова пространства могут быть осуществлены при помощи последовательности инверсий. Мы, таким образом, подходим к роли инверсии/инволюции в процессах мышления/сознания и к проблемам связи этих феноменов с внешним миром. К этому вопросу подводит и А.Н.Паршин в своих рассмотрении дополнительности в физике, с од-

ной стороны в физиологии, психологии, моторике человека, с другой: «... какая же связь между этими явлениями, между пространствами в биологии и физике? Не есть ли это одно и то же? ... здесь же мы как будто получаем не просто похожее, а то же самое» [Паршин А.Н. Дополнительность и симметрия. В кн. Путь. Математика и иные миры. М.: Добросвет, 2002, с. 137–170, с. 150–165].

В математической физике практически не уделяется внимания теории измерений (проблема измерений в квантовой механике не об этом и потому – не в счёт). В отличие от физических наук теория измерений в системах с присутствием человека более сложна и включает в себя четыре шкалы измерений. Рассматриваемый подход оказывается согласованным с этой техникой. Опишем кратко возникающие соответствия [64; 65; 66, с. 576–585].

Мы имеем двумерное пространство  $(X, Y)$ , образованное аддитивной и мультипликативной структурами с осями  $X \propto |\xi|_{\infty}$  и  $Y \propto |\xi|_2$   $\xi \in Z_2$ , то есть двумя метриками. Их комбинации и определяют способы порождения действительных чисел, которые принимаются за способы измерения. Каждая из метрик может принимать непрерывные или дискретные значения. Тогда получаем четыре основные шкалы:

- Абсолютная шкала* –  $|x|_{\infty}$  дискретная величина;
- Шкала отношений* –  $|x|_{\infty}$  непрерывная величина;
- Интервальная шкала* –  $|x|_2$  непрерывная величина;
- Порядковая шкала* –  $|x|_2$  дискретная величина.

Кроме этих двух метрик, неявно в их определении присутствует индикатор различения вещественных и  $p$ -адических чисел, который мы обозначим так же, как и метрики  $|x|_0$ . Этот индикатор действует как инволюция, то есть переключает аддитивную структуру на мультипликативную и обратно. С его помощью получается два типа шкалы наименований (номинальных шкал).

Обратимся к булевым алгебрам. Из теории систем известна общая картина системной динамики. Периоды инерции, «когда ничего не происходит», возможен прогноз по типу механики и система неизменного состава движется в евклидовом пространстве  $R^3$ , чередуются с катастрофами, событиями, структурными преобразованиями. В этом случае система движется в  $Z_2$ . То, что было сказано об измерениях, справедливо и для пространственного и временного параметров, которые в топологии дискретное–непрерывное также образуют четвёрку.

**(Замечание.** Забегая вперёд, скажем, что физическая и системная точки зрения вообще разведены во времени. Будущее физики – это прошлое эволюции, и обратно: будущее эволюции есть прошлое физики. Здесь речь идёт о двойной

параметризации времени — физического времени *дления—протяжённости*, а также биологического времени *порядка—событийности*, в согласии с бинарной структурой пространства модели. По этому поводу см. [18, с. 283–289]).

В этом случае модули можно рассматривать как меры Хаара, и весь спектр движений отображается полной характеристикой булевых алгебр: всякая булева алгебра есть объединение непрерывной и дискретной булевых алгебр [67, с. 111]. В нашей схеме непрерывность имеет двойной смысл (см. гл. 5). Поэтому инертному периоду можно, например, поставить в соответствие булеву алгебру с вероятностной мерой, динамике развития — алгебру с мультипликативной мерой, динамике событий — дискретную алгебру. (Замечание. В литературе отмечается факт, что степенные законы не выполняются для случайных конгломератов текстов, но хорошо для текстов осмысленных. Вне поля зрения пока остаются тексты математической физики. С одной стороны, они, как отражение законов Природы, должны быть очень высокоорганизованными, с другой — тщательно поддерживаемая специализация является не лучшим средством установления смысловой связности. Кроме того, эти тексты состоят из двух частей: формального языка и естественного. Как их анализировать?! По аналогичному поводу см. [68]).

9. *Движения.* Из гиперболического вида степенных законов для метрик следует, что сопряжение  $R^\#$  с  $Z$ , перманентно производит движение:

$$\forall c \in Q \quad \exists \xi \in Q_2 : c = |\xi|_\infty \cdot |\xi|_2 \Rightarrow \frac{d|\xi|_\infty}{d|\xi|_2} = -\frac{c}{|\xi|_2^2} \neq 0 .$$

То же верно и для обратной производной:

$$\frac{d|\xi|_2}{d|\xi|_\infty} = -\frac{c}{|\xi|_\infty^2} \neq 0 .$$

Запишем символически выражение для скорости и, пользуясь принципом переноса, рассмотрим его над двумя числовыми системами:

$$\frac{d x}{d t} = v \quad x, t, v \in Q_2 = R^\# \times Z_2 .$$

Тогда левую и правую части — числитель, знаменатель и символ скорости — мы должны рассматривать в двух метриках и в двух подпространствах  $R^\#$  и  $Z_2$ . Возникает поэтому  $8 \times 8 = 64$  типа наблюдаемых движений, порождаемых ненаблюдаемой нульмерной реальностью. Запишем получающиеся уравнения в сжатом комбинаторном виде:

$$\left( \frac{|d x|_\infty}{|d t|_\infty} \vee \frac{|d x|_\infty}{|d t|_2} \vee \frac{|d x|_2}{|d t|_\infty} \vee \frac{|d x|_2}{|d t|_2} \right) = |v|_\infty \vee |v|_2 .$$



1. Очевидно, что произведение всех четырёх производных, которые обозначим  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , соответственно, отлично от нуля:

$$\left( \frac{|dx|_\infty}{|dt|_\infty} \times \frac{|dx|_\infty}{|dt|_2} \times \frac{|dx|_2}{|dt|_\infty} \times \frac{|dx|_2}{|dt|_2} \right) = \frac{c_x^2}{c_t^2} \neq 0.$$

Поэтому  $e_i \neq 0, i=1,2,3,4$ .

2. Эти производные возникают как производные функции инверсии в  $Q_2$ . Эти функции возникают вневременным образом как пути, соединяющие две произвольные точки:  $\forall x, t \in Q_2$ , существует путь, связывающий их по ветвям дерева. Иными словами, имеются сдвиги, переводящие  $x \leftrightarrow t$ . Это свойство аналогично топологической транзитивности хаотического аттрактора, которым и является  $Q_2$ . То же верно и для  $Z_2$ .

3. Производные связаны инволюциями:  $e_1 = inv e_4, e_2 = inv e_3$ . Интерпретация этих связей зависит от предмета рассмотрения.

4. Интерпретации этой четвёрки образуются комбинацией процессов конвергенции, дивергенции, перехода конвергенции в дивергенцию и обратно. В каждом отдельном случае их содержание также должно определяться соответствующим предметом.

5. Вся четвёрка движений существует как единое целое, они взаимно определяемы. Попытка отобразить движения в рациональных числах, например, следующая:

$$\begin{aligned} x, t \in Q_2 \quad \exists \xi, \tau \in Q_2 \quad x &= |\xi|_\infty \cdot |\xi|_2, \quad t = |\tau|_\infty \cdot |\tau|_2 \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{d|\xi|_\infty \cdot |\xi|_2 + |\xi|_\infty \cdot d|\xi|_2}{d|\tau|_\infty \cdot |\tau|_2 + |\tau|_\infty \cdot d|\tau|_2} = \frac{d|\xi|_\infty}{d|\tau|_\infty} \cdot \frac{|\xi|_2 + |\xi|_\infty \cdot \frac{d|\xi|_2}{d|\xi|_\infty}}{|\tau|_2 + |\tau|_\infty \cdot \frac{d|\tau|_2}{d|\tau|_\infty}} = \\ &= \frac{d|\xi|_\infty}{d|\tau|_\infty} \cdot \frac{|\xi|_2 + |\xi|_\infty \cdot \left( -\frac{c}{|\xi|_\infty^2} \right)}{|\tau|_2 + |\tau|_\infty \cdot \left( -\frac{c}{|\tau|_\infty^2} \right)} = \frac{d|\xi|_\infty}{d|\tau|_\infty} \cdot \frac{0}{0} \end{aligned}$$

что приводит к неопределённости. Аналогично, вынося в числителе и знаменателе другие дифференциалы, получим ту же неопределённость для остальных движений.

Таким образом, можно сказать, как это делается в технике фрактальной генерации изображений в информатике [69, Ch.2], нульмерное пространство является формирующей тканью наблюдаемой реальности.

6. В силу вневременного характера топологической транзитивности или инверсий в  $Q_2$  (см. п. 2 этого раздела) можно сказать, что четвёрка

производных отражает действие целого на выделенную область/часть/точку, то есть нисходящую причинность.

7. Четвёрка производных отлична от нуля в любой точке  $Z_2$ ; это значит, что все 2-адические строки по всем их длинам, то есть «в каждой цифре», находятся в постоянном движении/вибрациях.

8. Интерпретируя модули как функции человеческого восприятия, мы получаем картину связного движения во всём пространстве универсума, то есть всюду, куда обращён взор наблюдателя.

Тем самым получается, что системный характер степенных законов и, как следствие, их плохая формализуемость, получают формальное подтверждение.

## Литература к главе 6

1. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. М.—Ижевск: РХД, 2001.
2. Newman M.E.J. Power Laws, Pareto Distributions and Zipf's Law // arXiv: cond-mat. 0412004, 2006.
3. Stanley H.E. et. al. Scale Invariance and Universality: Organizing Principles in Complex Systems // Physica A 281, 2000, p. 60–68.
4. Stanley H.E. et. al. Scale Invariance and Universality in Animate and Inanimate Systems // Physica A 231, 1996, p. 20–48.
5. Sornette D. Probability distributions in Complex Systems//arXiv 0707.2194v1 [phys. data-an], 2007.
6. Mitzenmacher M. A Brief History of Generative Models of Power Laws and Lognormal Distributions // Internet Mathematics, 2003, v. 1, no.2, p. 226–251.
7. Трубников Б.А. Закон Ципфа // ДАН СССР. 1991, т. 321, №2, с. 270–275.
8. Трубников Б.А. Закон распределения конкурентов // Природа. 1993, №1, с. 3–13.
9. West B.G. The Origin of Universal Scaling Laws in Biology// Physica. A 263, 1999, p. 104–113.
10. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. Freeman, 1982.
11. Goldstein M.L., Morris S.A., Yen G.G. Problems with Fitting to the Power-Law Distribution//arXiv:cond-mat 0402322 2004.
12. Clauset A., Shalizi C.K., Newman M.E.J. Power Law Distribution in Empirical Data // arXiv: 0706:1062 [physics.data-an], 2007.
13. Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели. М.: Радио и связь, 1982.
14. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
15. Хинчин А.Я. Метод произвольных функций и борьба против идеализма в теории вероятностей / Философские вопросы современной физики. М.: АН СССР, 1952, с. 522–538.
16. Pruessner G. Probability Densities in Complex Systems, Measuring / In Meyers R.A. (ed.) Encyclopedia of Complexity and Systems Science. Springer, 2009.

17. Антер М. Кибернетика и развитие. М.: Мир, 1972.
18. Арманд А.Д. Два в одном. Закон дополнительности. М.: ЛКИ, 2008.
19. Александров В.В. Развивающиеся системы. Степенные законы // Информационные процессы и технологии №1 (1), 2007.
20. Чайковский Ю.В. О природе случайности. М., 2001.
21. Chowdhury D., Stauffer D., Kumvar A. Power of Power Laws: Lessons from Unification of Small and Large Time Scales for Evolution // arXiv: cond-mat 0207352, 2000.
22. Лойфман И.Я., Стадник В.П. Единство природы и круговорот материи. Свердловск: 1988.
23. Петрушенко Л.А. Самодвижение материи в свете кибернетики. М.: Наука, 1971.
24. Pattee H. Dynamic and Symbolic Modes of Complex Systems // Int. J. of General Systems. 1977, v. 3, p. 259–266.
25. Heller M., Lambert D. Local and Global Properties of the World // Foundations of Science. 2, 1997, p. 137–176.
26. Bell J.L. Oppositions and Paradoxes in Mathematics and Philosophy // Axiomates, v. 15, no.2, p. 165–180.
27. Bell J.L. Whole and Part in Mathematics // Axiomates. 2004, v. 14, p. 285–294.
28. Verelst K. Zeno's Paradoxes. A Cardinal Problem // arXiv: math/0604639v1 [math. HO], 2006.
29. Frieden B. Science from Fisher Information. CUP, 2004.
30. Post D.G., Eisen M.R. How Long is the Coastline of the Law? // J. of Legal Studies. 2000, v. XXIX, p. 545–584.
31. Орлов Ю.К. Невидимая гармония / Число и мысль, вып. 3, М., Знание, 1980, с. 91.
32. Ferrer-i-Cancho, R., Elvevag, B. Random texts do not exhibit the real Zipf's law-like rank distribution // PLoS ONE. 2010 5 (3), e9411.
33. Степанов Ю.С. В трёхмерном пространстве языка. М.: Либроком, 2010.
34. Паршин А.Н. Идеальные числа Платона // С сайта bfrz.ru.
35. Математическая энциклопедия. М., 1977.
36. Nicolis J.S., Tsuda I. On Parallel Between Zipf's Law and 1/f Processes in Chaotic Systems Possessing Coexisting Attractors // Progress of Theoretical Physics. 1989, v. 82, no.2, p. 254–274.
37. Nicolis G., Nicolis C., Nicolis J.S. Chaotic Dynamics, Markov Partitions, and Zipf's Law // J / of Statistical Physics. 1989, v. 54, N°s. 3/4, p. 915–924.
38. Falconer K.J. Geometry of Fractal Sets. CUP, 1895.
39. Schikhoff W.H. Ultrametric Calculus. CUP, 1984.
40. Robert A. A Course in  $p$ -Adic Analysis. Springer, 2000.
41. Sagan H. Space-Filling Curves. Springer, 1994.
42. Besikovitch A.S. On the Sum of Digits of Real Numbers, Represented in the Dyadic Systems. In Edgar G.A. Classics on Fractals. Westview. 2004, p. 145–159.
43. Ярцева В.Н. Языкознание. Большой энциклопедический словарь. М.: Большая рос. энциклопедия, 1998.

44. *Lavenda B.* Fractals, Clusters, and Order-Statistics: A New Relation Between Probability and Entropy // *Int. J. Theor. Phys.* 1996, v. 35, no.9, p. 1993–2011.
45. *Lavenda B.* The analogy between coding theory and multifractals // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1998, 31, p. 5651–5660.
46. *Narens L.* Abstract Measurement Theory. Cambridge Mass, 1985.
47. *Brown B.* A New Treatment of Analysis of Dimensions // *Proc. Phys. Soc.* 1941, v. 53, p. 418–453.
48. *Петров А.Е.* Тензорная методология в теории систем. М.: Сов. радио, 1985.
49. *Le Mehaute A.* Fractal Geometries. CRC Press, 1991.
50. *Арнольд А.* Математические методы классической механики. М.: Наука. 1989.
51. *Gao D.Y.* Duality principles in nonconvex systems. Kluwer AP, 1999 (см. по этому поводу также: *S. Artstein-Avidan, V.Milman.* The Concept of Duality in Convex Analysis, and the Characterization of the Legendre Transform // *Annals of Math.* 2009, 169, p. 661–674; *Artstein-Avidan S., Milman V.* A Characterization of the Concept of Duality // *Electronic Research Announcements in Mathematical Sciences.* 2007, AIMS 14, p. 48–65.
52. *Tel T.* Fractals, Multifractals, Thermodynamics // *Z. Naturforsch.* 1988, 48A 1154.
53. *Beck C., Schlogl F.* Thermodynamics of Chaotic Systems. CUP, 1995.
54. *Edgar G.A.* Integral, Probability and Fractal Measure. Springer, 1998.
55. *Marcus S.* Imprecision, Between Variety and Uniformity: The Conjugate Pairs // *Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities,* 1998, v. 62, p. 59–72.
56. *Шиффман Х.* Ощущение и восприятие. СПб.: Питер, 2003.
57. *Паршин А.Н.* Размышления над теоремой Гёделя / Путь. Математика и другие миры. М.: Добросвет, 2002, с. 82–84.
58. *Раушенбах Б.В.* Системы перспективы в изобразительном искусстве. М.: Наука, 1986.
59. *Copelli M., Roque A.C., Oliveira R.F., Kinouch O.* Physics of Psychophysics: Stevens and Weber-Fechner Laws are Transform Functions of Exitable Media // *arXiv: cond-mat.* 0112395, 2004.
60. *Глезер В.Д.* Зрение и мышление. СПб., 1993.
61. *Биркгоф Г.* Математика и психология. М.: Сов. радио, 1977.
62. *Бейтсон Г.* Разум и природа. Неизбежное единство. М.: Комкнига, 2007.
63. *Хант Г.* О природе сознания М.: АСТ, 2004.
64. *Мешалкин Л.Д.* Психологические измерения. М.: Мир, 1967.
65. *Робертс Ф.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. М.: Наука, 1986.
66. *Волкова В.Н., Козлов В.Н. (ред.).* Системный анализ и принятие решений. М.: Высшая Школа, 2004.
67. *Владимиров Д.А.* Теория булевых алгебр. СПб.: С.-Петербургский ун-т, 2000.
68. *Montemuro M.A.* Beyond Zipf's Law in Quantitative Linguistics // *arXiv: cond-mat.* 0104066, 2001, v. 2.
69. *Barnsley M.F.* Superfractals. CUP, 2006.

## Глава 7

### Двойственность в основах

Как показывает практика приложений, основы теории — это то, что действует постоянно, наиболее весомая её компонента, которая, подобно фундаменту здания, «несёт» её выразительные способности. Так же как и фундамент, основы теории не всегда видны, чаще всего не включаются в курсы и, как правило, не воспринимаются всерьёз так называемыми работающими математиками. В этой главе мы систематизируем наши рассуждения о двойственности фракталов для перечня утверждений об обстановке на границе восприятия и формализации, то есть в аксиоматике. Здесь двойственность известна под видом «результатов о независимости» — как набор результатов о существовании пар аксиом, совместимых с теорией множеств  $ZF$ , одна из которых является отрицанием другой. Мы рассмотрим её с точки зрения числовой асимметрии нашей схемы.

«Использование теоретико-множественных гипотез в теории... не есть лишь удобный приём доказательства, но глубоко связано с существом этой теории» [*Владимиров Д.А.* Теория булевых алгебр. СПб.: 2000, из введения].

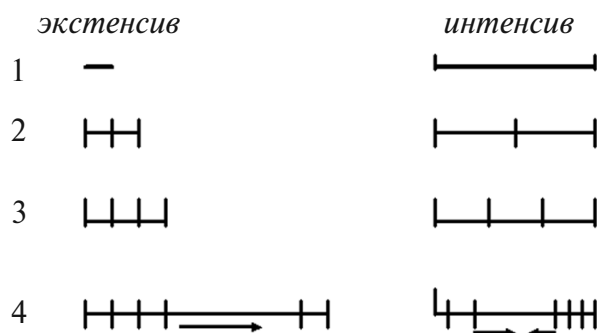
1. *Натуральный ряд* есть один из видов множества. Он жёстко связан со многими процессами в математике — логикой, приближениями и пределами, измерениями и подсчётом величин, методом исчерпания вообще. Само же понятие натурального числа остаётся неопределимым. Как заметил однажды Б.Рассел, натуральный ряд есть не что иное, как последовательность актов человеческого восприятия. Но восприятие человека имеет двойственный характер: восприятие протяжённых тел и восприятие границ, различий. Поэтому мы имеем основания для включения его в теорию.

Рассмотрим мысленный эксперимент, поясняющий мысль Расса. По команде экспериментатора «1, 2, 3, ...  $n$ ,  $n+1$ , ...» синхронно производятся два процесса. Один человек укладывает кирпичи в стену, другой крошит молотком единственный кирпич. Оба следуют счёту, но физические результаты процессов прямо противоположны. В первом случае растёт связный объект, площадь стены, во втором – связность исчезает, растёт плотность границ/различий. Первый процесс конвергентен, второй – дивергентен. Поэтому без указания вида процесса по одной только цепочке символов ряда невозможно предсказать или, что то же, определить его результат.

Таким образом, мы имеем два натуральных ряда, два способа генерации чисел – экстенсивный и интенсивный, соответствующие оппозиции *протяжённость–делимость*, слитые в одной последовательности символов. Каждый из них служит условием осуществления другого. Экстенсивный ряд неисчерпаем интенсивным способом – его длина недостижима, так же как и интенсивный ряд, при экстенсивном счёте которого неуловима его единица. В экстенсивном ряде есть минимальный элемент, но нет максимального, в интенсивном – нет минимального, но есть максимальный. Первый способ атомистичен, второй – *ан*-атомистичен. Любая единица атомизма, линейная мера, бесконечно велика по сравнению с единицей *анатомии*. Полагать единственность натурального ряда, как это принято, – значит полагать существование изоморфизма между этими двумя рядами. Их взаимная неопределимость означает отсутствие такого способа и влечёт возникновение логических парадоксов (см. аргументы Д.Мириманоффа).

Как следствие, приходим к неопределимости единицы и натурального числа вообще. Выражение  $x = 1$  одновременно может означать и отрезок длиной 1, и точку на числовой оси, разделяющую два отрезка. Поэтому *умножение на 2* означает как растяжение длины в 2 раза, так и деление отрезка пополам, например, на бинарном дереве.

Первый ряд требует постоянного «притока материала», второй обходится наличными ресурсами [1]:



Интерпретация очевидна. Экстенсив соответствует стандартному натуральному ряду, аддитивной прямой, то есть  $R$ , интенсив – мультипликативным рядом и прямой, то есть  $Z_p$ .

2. *Бесконечности.* В двойном представлении рациональных чисел – в виде произведения двух метрик  $x = \left| \xi \right|_{\infty} \cdot \left| \xi \right|_p$ ,  $\xi \in Z_p$  и в виде дробей  $x = m/n$  – можно видеть, что проблема бесконечности связана как с «числителем», так и со «знаменателем». Соответственно, получаются два вида бесконечности, определяющие два способа пополнения рациональных чисел – фундированная и нефундированная. Обе они присутствуют в рассуждениях о рациональных числах. Представление их в виде правильных дробей, пар символов, неявно предполагает определимость единицы. Представление в виде последовательности цифр [2, с. 341–342], например, десятичной или двоичной систем, не предполагает этого. Первый способ допускает доказательство их счётности, во втором счётность не может быть установлена.

Рассмотрим в обоснование этого «несчётность» как логическое отрицание «счётности», то есть *несчётное – это то, что неопределимо счётными методами.* Это есть аналог формулы Платона: *умопостигаемое – это то, что не убывает при уменьшении и не возрастает при прибавлении.* Тогда очевидно, что диагональный метод, доказательства несчётности, как, впрочем, и любого формального рассуждения, тождественный для действительных и  $p$ -адических чисел [3, р. 2], неспособен выразить несчётность. Точнее, каждому диагональному числу  $d = d_1 d_2 \dots d_n$  можно поставить в соответствие, как минимум, два рациональных числа:  $q_1 = (d_1 d_2 \dots d_n)$  и  $q_2 = d_1 d_2 \dots d_n 0,0,\dots,0,\dots$ . Поэтому этот метод не выводит за пределы рациональных чисел. Очевидно, что счётные процессы, то есть с определимой единицей, проходят в подпространстве, логически ортогональном интенсивности. Интенсивная бесконечность не затрагивается экстенсивными методами. Это параллель с конформной инвариантностью нульмерных пространств. Содержание и смысл книги, теории, мыслей человека не меняется от того, где он находится – в поезде, падающем лифте, самолёте и т.д., и на каком носителе и какого размера записана книга. Точно так же любая часть  $Z_p$  или  $Q_p$  содержит копию всего пространства, то есть мощность этих множеств не меняется счётными операциями. Это так называемое свойство неделимости ультраметрических пространств [4].

Интенсивная бесконечность, таким образом, несчётна и актуальна, экстенсивная – счётна и потенциальна. Интенсивная бесконечность имеет формальное выражение – любую нелинейную, то есть автореферентную, формулу «антиномичного» вида:  $X = F(X)$ , – то есть определима. Экстенсивная обходится так называемыми маскирующими

точками и оборотами типа ... и так далее, за которыми скрыта необходимость в наличии ресурса.

3. *Число*. Рассмотрим общую формулу числа [5, с. 30–33; 6, р. 43]. По нашей схеме первичными полагаются  $p$ -адические числа и нульмерные множества. Поэтому

$$Q_p^* \cong Z \times Z_p \times Z / (p-1)Z, \quad p \neq 2$$

$$Q_p^* \cong Z \times Z_2 \times Z / 2Z, \quad p = 2$$

Каждый элемент  $x \in Q_p^*$  имеет вид  $x = p^n \cdot \xi$ , где  $n \in Z$ ,  $\xi \in Z_p$ . Последний сомножитель в формулах есть циклическая группа порядка  $p$ , записываемая в виде  $Z / (p-1)Z \cong F_p^*$ , то есть дискретное множество из  $(p-1)$  элементов.

Согласно нашей интерпретации,  $Q_p^*$  имеет двумерную семантику, которая определяется связной аддитивной прямой  $Z$ , то есть  $R$ , сложенной из отрезков, а также полностью несвязной, разрывной мультипликативной прямой  $Z_p$  с синтаксисом, который задаётся алфавитом  $F_p^*$ , набором  $(p-1)$  символов. Тем самым в структуре числа видны три составляющие – две по-разному непрерывные и дискретная.

4. *Троичность в математике*. Такую же структуру имеют и другие математические объекты. В них  $Z_p$  или  $Z_2$  появляются разными своими гранями.

В теории функций общий вид функции есть объединение непрерывной, сингулярной и функции скачков соответственно. Здесь  $Z_p$  выступает под видом канторова множества на прямой – сингулярной функции.

В теории булевых алгебр та же структура: непрерывные, непрерывные, конечные. Здесь  $Z_2$  имеет вид двоичных строк, которые определяют два типа непрерывности.

В геометрии – евклидова, неевклидова, дискретная структуры. Известны факты, имеющие вид процесса исчерпания и показывающие неориентируемость  $Z_2$ :

$$-1 = (p-1) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} p^i \quad \mapsto \quad -1 = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i.$$

В этой формуле бесконечность является «конечной», то есть достижимой в силу принятия актуально бесконечной делимости. То есть метод исчерпания позволяет переходить с одной стороны нуля [7, р. 258] на другую – в  $Z_2$  отрицательные величины расположены на той же стороне  $p$ -адической поверхности. Вопрос, который мы оставляем в стороне: что за геометрия соответствует сторонам нуля, если их больше двух?



5. *Независимость как дополненность.* В математике наблюдается следующая ситуация. С основным набором аксиом совместимы отрицания некоторых из них. То есть если в списке аксиом  $ZF$  заменить одну из них своим отрицанием, то полученная система также непротиворечива [8, 9]. Опишем ситуацию подробнее.

В определении *величины числа* вещественные и  $p$ -адические числа различимы только неравенством треугольника. И по определению величины невозможно сказать, о каких числах идёт речь. Точнее, начало определения

$$x \neq 0 \Leftrightarrow |x|_{\bullet} \neq 0$$

не позволяет определить, как решить  $x \in R \vee x \in Z_p$  и какое из неравенств треугольника будет выбрано в последней части, о какой метрике — архимедовой или ультраметрике, идёт речь. На вещественной прямой метрики неотличимы, так же как и мера Лебега от меры Хаара. В нашей схеме это различие в способе восприятия, или, по А.Ф.Лосеву, в способах смыслополагания.

В *геометрии* отрицание постулата о параллельности образует пару евклидова геометрия—неевклидова геометрия Лобачевского. Свойства непрерывности выражаются двумя аксиомами — Кантора и Архимеда. Аксиома Кантора о вложенных отрезках, которая представляет собой ветвь итеративной системы функций — последовательных сжатий/выделений, и аксиома Архимеда являются взаимодополнительными в смысле двух натуральных рядов (см. выше) и независимы от остальных аксиом геометрии [Ефимов Н.В. Высшая геометрия. М.: Наука, 2003, с. 211–222].

Аксиома выбора  $AC$  и её отрицание  $\neg AC$  совместимы с остальной системой аксиом теории множеств. То же в отношении континуум-гипотезы  $CH$  и её отрицания  $\neg CH$  (результаты К.Гёделя и П.Кёэна).

Аксиомы классической логики  $CL$  отличаются от аксиом интуиционистской  $IL$  удалением лишь закона исключённого третьего  $LEM$  (*law of excluded middle* — англ.). Соответственно, алгебры Гейтинга отличаются от булевых заменой закона исключённого третьего его отрицанием.

Пополним этот список следующими фактами. Множества Кантора визуально неотличимы от множеств Мириманоффа.

Сжимающие процессы — вывода, приближений, пределы, пополнения метрических пространств — можно рассматривать как в архимедовой, так и в неархимедовой метрике. Поэтому их смысл и результаты удваиваются. В этом случае процесс *Modus Ponens* сопряжён с *Modus Tollens* и, вообще говоря, дедуктивная логика — с индуктивной.

6. *Аксиома фундирования.* В теории множеств аксиома фундирования  $FA$  является важнейшей, допускающей символическую механику (*mathematical machinery* — англ.) в создании формальных выражений.

Она составляет содержание материнского для математики понятия — определимости, то есть связывает синтаксис и семантику математических формулировок, контролируя адекватность синтаксиса аксиом, утверждений и теорий их семантике (в этом смысл теоремы Бета об определимости и интерполяционной леммы Крейга). Эта аксиома является представителем атомизма. Синтаксис как набор символов, нанесённых на бумагу, всегда атомистичен, то есть фундирован. Предметная область — не всегда, а в нашей схеме — никогда. Поэтому гильбертовская идея сведения математики к операциям над символами неполна (хотя стремление к её выполнению привело к созданию формальных языков программирования и, значит, нефундированному универсуму теоретической информатики). На этой аксиоме лежит неявно присутствующий постулат эффективности всех формальных операций: счёта, арифметических, подстановки, установления изоморфизмов, равенств и тождеств отношений, определимости множеств и функций, то есть формального приписывания символов переменным (см. [10]).

С  $ZF$  совместимо и её отрицание — аксиома антифундирования  $AFA = \neg FA$  [11, с. 117]. Но при этом конечные объекты заменяются бесконечными, и теряется возможность эффективного выполнения операций. Например, установление равенства двух  $p$ -адических чисел или подстановка формального ряда в ряд не может быть выполнена никаким компьютером. Поэтому при удалении  $FA$  из системы остаются лишь аксиомы выделения и множества-степени, которые являются существенно лингвистическими. Они взаимнонеопределимы, являются условиями осуществления друг друга [11, с. 58–59]. Образование множества-степени имеет дивергентный характер, аксиома выделения — конвергентный. Их пара есть аналог семантики союза ИЛИ в естественном языке.

Отдельно следует сказать о нарушении аксиомы объёмности или экстенциональности и операции (знаке) равенства. В математике множества считаются равными, если они содержат одни и те же элементы. Равные элементы/объекты можно подставлять в высказывания, выводы, утверждения без нарушения истинности. Аксиома объёмности, по сути, даёт определение знака равенства и ограничивает допустимые варианты его использования. Экстенциональные утверждения зависят лишь от объёма входящих в них понятий, но не от их содержания [11, с. 48]. Высказывания же, меняющие значения для равных объектов, называются интенциональными. Использование равенства блокирует применение интенциональных утверждений в математике и запрещает использование объектов с различными свойствами. В процессе всех операций, выкладок, подстановок объекта требуется абсолютная неизменность его и его свойств. Делимость материи в рамках теории фракталов есть интен-

сиональная координата, так как при скейлинге и масштабной инвариантности геометрии необходимо возникает масштабная детерминированность свойств материи. Проблема с этой аксиомой не раз отмечалась в литературе, где математическая механика сравнивалась с движением твёрдых шаров на бильярдном столе. Явным образом это проявляется в физике, где рассматривается иерархическое строение материи и в полный рост встаёт проблема многомасштабного, многоуровневого моделирования при выводе свойств целостного образования.

7. *Негативные аксиомы.* Классические результаты о независимости установлены вне прямой связи с  $FA$ , однако они симптоматичны. Тем более что они не сопровождаются никакими указаниями на то, в каких случаях и при каких условиях должна быть принята или отвергнута одна из пар аксиом. Здесь центральным оказывается семантика отрицания. В логике отрицание означает безусловную ложность, пустоту истинности соответствующего утверждения, в лингвистике отрицание имеет вполне позитивное содержание:  $не-A = B$ , смысл которого аналогичен его пониманию в нашей модели (соответствия Галуа, арифметика Пресбургера, проективная геометрия и т.д.). В последние годы, заметим, понятие отрицания привлекает пристальное внимание (*H. Wansing (ed.) Negation. A Notion in Focus. W. de Gruyter, 1996; D.M. Gabbay, H. Wansing (eds.) What is Negation? Springer-Science+Business-Media, 1999*).

Покажем, что ряд «негативных» аксиом укладывается в подпространство  $Z_2$ . Идея заключается том, что процесс делимости, физически противоположный протяжённости, дополняет связанные с ней формулировки противоположными по смыслу. Это было показано в [12]: типичность явления независимости аксиом посредством введения различия арифметического образа проблемы — гёделевых номеров, и самих проблем в их формально-языковом выражении. Неразрешимость как независимость возникает как противоречие между двумя наименованиями одной и той же проблемы. В результате этой работы  $Z_2$  входит через префикс-топологию, совпадающую с топологией ультраметрики.

Известны связи между законом исключённого третьего, аксиомой фундирования и аксиомой выбора:  $FA \Rightarrow LEM, AC \Rightarrow LEM$  [13]. Нефундированные множества в теории систематически не рассматриваются. Мы обойдёмся результатом о неразрешимости фрактальных множеств, который в неявном виде, через итеративную систему функций, относится и к  $p$ -адическим числам. В качестве «экспериментального» подкрепления сошлёмся на общую теорию нефундированных множеств, которая основана на операциях над бесконечными строками (*streams* — англ.) и где равенство двух строк заменено частичным равенством, ограниченным отношением подобия (*bisimulation* — англ.) [14].

В отсутствие  $FA$  конечные объекты заменяются бесконечными строками, и поэтому исчезает эффективность операций арифметики и логики. Каждый конечный объект, ограниченное множество в  $R$  дополняется своим ультраметрическим (про)образом в  $Z_2$ . Соответственно, множества истинности выражений, формул, утверждений и т.д. дополняются своими  $p$ -адическими двойниками. Пространства  $Z_p$  неделимы: каждое подмножество содержит копию всего  $Z_p$ . Аксиома выбора  $AC$ , аксиома фундирования  $FA$ , закон исключённого третьего  $LEM$  имеют в  $Z_p$  в качестве общей основы языковую номинацию – выделение атома, элемента (см. интерпретацию  $p$ -адических чисел Л.А.Калужнина). Различаются они контекстом.  $FA$  формирует универсум рассуждений конечными различимыми объектами,  $AC$  есть специальное использование возможностей  $FA$ , предполагающей наличие эффективной выбирающей функции, выделяющей в выделенных же множествах необходимый набор атомов. Закон исключённого третьего  $LEM$  есть использование специального вида выбирающей функции – последовательных сжатий  $MP$  – для фиксирования атома. Как следует из сопоставления двух натуральных рядов, экстенсивный ряд требует  $AC$ , она «встроена» в его понятие. Интенсивный ряд не требует  $AC$ , так же как и рекурсивная теоретическая информатика.

В нашем пространстве каждому атому соответствует шар  $x \mapsto p^n Z_p$ , который, по определению, несвязен, то есть нефундирован. Следовательно, «работа» аксиомы выбора, вообще говоря, невозможна. Как и в теории пределов, эффективный выбор  $p$ -адического числа, строки символов, означал бы решение Суперпроблемы – осуществления бесконечного числа операций в конечное время. Как множество истинности предиката, в теории выбор содержит и его отрицание. То есть  $LEM$  становится неразрешимым утверждением.

Поэтому в нашей ситуации кажется ясной семантическая эквивалентность  $FA \Leftrightarrow LEM, FA \Leftrightarrow AC$ . Она имеет дотеоретический характер, и, конечно, в рамках выбранной формальной системы все эти три процесса формально различны.

Рассмотрим континуум – гипотезу  $CH$ . Общая формула числа содержит все три типа мощностей, поэтому, как заметил Улам, с введением  $p$ -адических чисел  $CH$  теряет свою остроту. В нашей схеме  $R \models CH$ . Множества  $Z_p$  также имеют мощность континуума. Однако можно видеть более тонкие различия, которые возникают в случае с  $AFA$ . С одной стороны, все  $Z_p$  гомеоморфны друг другу и  $C$ . С другой стороны,  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p < q \text{ } card(p^n Z_p) < card(q^n Z_q)$  как количество частей деления на каждом уровне, и поэтому можно ввести шкалу плотностей континуумов по базам  $p$  и  $q$ . Если принять во внимание, что

$\exists D > 0: p^D = q$ , то эта шкала узнаётся как шкала фрактальной размерности, невычислимость которой известна [15]. Фрактальная размерность позволяет организовать шкалу плотностей очевидным образом (формальности см. в [6, p. 10–11]):

$$0 < D < \infty \leftrightarrow Z \subseteq Z_{p^D} \subseteq Z_{p^\infty} \equiv R.$$

Поскольку счётная мощность в нашей схеме есть конечная мощность, то в  $CH$  она исчезает. Если представить  $CH$  как проблему пропасти между дискретным и непрерывным и отнести  $R$  к непрерывно-связному (как это обычно делается), а  $Z_p$  – к дискретному, то  $Z_p \models \neg CH$ .

В такой интерпретации вопрос непосредственно связан с природой простых чисел. Известны попытки их трактовки с физических и биологических позиций, однако общее понимание их природы отсутствует.

8. *Онтологическая асимметрия.* Поэтому в общей формуле числа (см. выше) по нашей схеме  $Z$  и множества Кантора соответствуют экстенсивному ряду, счётной (потенциальной) бесконечности, аксиоме фундирования, (линейной) аксиоме Архимеда –  $aA$ , аксиоме выбора,  $MP$ , континуум-гипотезе, евклидовой геометрии, закону исключённого третьего. Интенсивный ряд  $Z_2$  и множества Мириманоффа продолжают рядом «отрицательных» аксиом – несчётной (актуальной) бесконечности,  $AFA$ , (нелинейной) аксиомой Архимеда:  $naA = \neg aA$ ,  $\neg AC$ ,  $\neg CH$ ,  $\neg LEM$ ,  $MT$ , а также неевклидовой (проективной) геометрии. За семантику отрицания здесь принимается, как указано выше, двумерная семантика дополнительности.

Любая формула логики первого порядка (без автореферентности) в равной степени может быть отнесена как к позитивным, так и к «негативным» утверждениям, то есть иметь как счётную, так и несчётную модель. Это составляет содержание известного парадокса относительности теоретико-множественных понятий Левенгейма-Сколема и онтологической относительности У.Куайна [16]. Формальная теория не в состоянии различить  $Z$  и  $Z_2$ , группу «позитивных» и «негативных» аксиом.

Точнее, как это следует из рассуждений Дж.Майхилла [17], парадокс возникает из-за того, что любое (синтаксическое) построение в рамках теории множеств может создать модель не более чем счётной мощности, поэтому несчётность  $R$  есть не более, чем интуиция, и формально доказана быть не может. Если иметь в виду обычное смешение вещественных и  $p$ -адических чисел в одном представлении строкой цифр, то введение в модель  $Z_p$  вместо гипотетического  $R$  делает утверждение теоремы Левенгейма-Сколема очевидным:

$$Z \leftarrow 010011101101 \rightarrow Z_2.$$

Онтологическая относительность в этом случае понимается как онтологическая асимметрия или дополнительность подпространств бинарного пространства модели. Эту асимметрию можно усмотреть и в самой математике, если её разделить на математическую физику и теоретическую информатику, которые объединяет компьютер. В нашей интерпретации утверждение теоремы Левенгейма–Сколема читается как вариант утверждения о числовой асимметрии, об аддитивно-мультипликативной структуре универсума.

Если сопоставить эту интерпретацию теоремы Левенгейма–Сколема с двойственностями Стоуна, Галуа, Пресбургера и принципом переноса Акса–Кочена–Ершова, то можно видеть, как меняется содержание утверждений, которые остаются истинными при смене числового поля:

«Истина есть интуиция-дискурсия. Истина есть интуиция, которая доказуема. ... Истина есть антиномия и не может не быть таковою» [Флоренский П.А. Столп и утверждение истины. М.: АСТ, 2003, с. 61–62].

Так же как число, организовано и человеческое восприятие. Наблюдаемость имеет вид двумерного видения:

$$\| * \| = | * |_{\infty} \times | * |_p \times | * |_0 ,$$

где

$| * |_0$  — смыслополагание, выбор  $R$  или  $Z_p$ ;  
 $| * |_{\infty}$  — охватывание, схватывание объекта в его протяжённости;  
 $| * |_p$  — восприятие различий, границ.

Другими словами, пространство, образованное аддитивной и мультипликативной «координатами», организуется двухполушарным человеческим восприятием. Эта тема имеет длинную историю в философии науки. Упомянем лишь *точную фантазию* Гёте [18, с. 193], вполне созвучную мысли Флоренского.

Тем самым логической основой модели является формализация дополнительности, которую для краткости можно изобразить так:

$$\text{Con} (ZF) = ZF \wedge \neg ZF,$$

то есть в виде известного парадокса *Лжеца*, который в явном или неявном виде входит во все теоремы о невозможности, проблемы неразрешимости и т.п. (см. выше). Эта дополнительность имеет следующий вид:

- формальным аналогом пары «*протяженность—делимость*» является пара *вещественные  $R$  —  $p$ -адические  $Z_2$*  числа;
- числа  $R$  и  $Z_2$  определяются на одном и том же множестве строк;
- они взаимно неопределимы и неотделимы друг от друга;
- также связаны теоремой Островского архимедова и неархимедова метрики;

- все функции, предикаты, например — аксиомы, от этих метрик также логически ортогональны — теория  $ZF$  дополняется своим нефундированным двойником;
- всякая теория, формула, предикат, представленные двоичной строкой, имеют двойную референцию, определяются над  $R$  и  $Z_2$ , то есть обладают двойным смыслом;
- двойственность Стоуна сопрягает атомизм с анатомией, физику с информатикой, материю и язык;
- эта двойственность включает в модель теорию решёток — соответствия Галуа, двойную семантику отрицания (ортоотрицание);
- она же включает в теорию арифметику Пресбургера и становится полной и непротиворечивой формальной системой, в которой истина совпадает с доказуемостью;
- как следствие, результаты о невозможности, неопределимости получают позитивное содержание в качестве результатов о дополнении;
- экстенциональная координата теорий расширяется интенциональной.

Недавно идея сопряжённых вариантов теории множеств — экстенционального и интенционального — была представлена А.В.Родиным [19].

С теоремой Левенгейма-Сколема, которая в нашей схеме переходит из разряда парадоксов в разряд позитивных результатов, связано большое число вопросов, которые традиционно относятся к *теории систем* — об отношении формального и неформального, внутреннего и внешнего, об области референции языковых конструкций [20]. В нашем толковании ряд негативных аксиом характеризует координату делимости в двумерной семантике фракталов и/или иерархию в теории систем и, значит, имеет вполне определённый естественнонаучный смысл. В целом независимость в аксиомах в нашей схеме есть проявление всё той же пары *конвергенция—дивергенция*.

Семантика отрицания нашей схемы такова. Существуют две связанные, но взаимно неопределимые функции отрицания, что разводит формальное противоречие по разным подпространствам, явное определение которых делает решение очевидным [21]. Это явление известно также как типичность паранепротиворечивости [22].

В итоге получается формальная система *без отрицания*, то есть в ней отрицание становится одним из видов движения или логическим оператором. В таких системах исчезает тупиковость антиномий и истина оказывается выразимой [23], то есть, в отличие от второй теоремы Гёделя, доказуемость совпадает с истинностью.

Тем самым системность формально перестаёт быть «зависимой переменной» от атомизма и обретает свою степень/пространство свободы.

9. *Семантика числа 2.* Дополнительность, или бинарность, нашей схемы является её стержнем. Отсюда напрашивается вывод: считать смыслом числа 2 пару *вещественные – p-адические числа* и её корреляты. В частности,  $2 = (|*|_{\infty}, |*|_p)$  при любом  $p \geq 2$ . Поэтому мы пользовались ранее и будем пользоваться впредь символом  $Z_2$  как синонимом всех  $Z_p$ .

В этом случае числовая асимметрия определена на множестве «бинарных строк», цифрами которых служат две функции измерения/восприятия и которые являются общими для алфавитных и числовых систем.

Таким образом, получается двухэлементная булева алгебра и (компьютерный) вариант принципа переноса – утверждение, что уравнение истинно в любой ВА тогда и только тогда, когда оно истинно в двухэлементной ВА [24, Ch.2.19].

Можно также видеть аналогию между нашей трактовкой двойки и противопоставлением «чёт–нечёт», известном со времён пифагорейцев [25].

10. *С точки зрения формальных систем,* систему, в которой каждая аксиома сопряжена со своим отрицанием, можно рассматривать как пример *неаксиоматизируемой формальной системы*. Если вспомнить пару *координаты–импульсы*, где импульсы, то есть движение, имеют смысл отрицания точной координатизации, и наоборот, то получившаяся бинарность означает введение движения общего вида в основы. Это может быть отражено четвёркой производных по комбинации метрик/функций восприятия следующим образом:

$$\forall \xi, \eta \in Z_2 \quad \frac{d(|\xi|_2, |\xi|_{\infty})}{d(|\eta|_2, |\eta|_{\infty})} \neq 0.$$

11. *С философской точки зрения,* двойственность основ означает скрытое существование противоречий в математике, разносторонне проанализированное И.Н.Буровой [26]. Внешним признаком этой двойственности является наличие различных, то есть противоречивых геометрий, логик, множеств, числовых систем.

## Литература к главе 7

1. Bindel E. Die geistigen Grundlagen der Zahlen. Frankfurt / Mein. 1983, S. 23. Приведено по: Свасьян К.А. Судьбы математики в истории науки Нового времени // Вопросы философии. 1989, №12; Свасьян К.А. Становление европейской науки. М.: Эвидентис, 2002, с. 374–375.



2. *Успенский В.А.* Лекции о вычислимых функциях. М.: ГИФМЛ, 1963.
3. *Robert A.* A Course in  $p$ -Adic Analysis. Springer, 2000.
4. *Delhomme C., Laflamme C., Pouzet M., Sauer N.* Indivisible Ultrametric Spaces // arXiv; math,0702466v1 [math.MG], 2007.
5. *Серр Ж.П.* Курс арифметики. М.: Мир, 1972.
6. *Robert A.* A Course in  $p$ -Adic Analysis. Springer, 2000.
7. *Schikhoff W.H.* Ultrametric Calculus. An Introduction to  $p$ -Adic Analysis. CUP, 1984.
8. *Bell J.L.* The Axiom of Choice // Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2008.
9. *Jech. T.* Set Theory // Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2002.
10. *Фон Нейман Дж.* Общая и логическая теория автоматов / Приложение к книге Тьюринга А. Может ли машина мыслить. М.: Физматгиз, 1960.
11. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.
12. *Calude C., Jurgensen H., Zimand M.* Is Independence an exception? // Applied Mathematics and Computation. 1994, v. 66, iss. 1, p. 63–76.
13. *Grayson R.J.* Heyting Valued Models for Intuitionistic Set Theory. In Fourman M.P., Mulvey C.J., Scott D. Applications of Sheaves. Springer Lect. Notes Math. 1979, v. 753, p. 402–414.
14. *Barwise J., Moss L.* Vicious Circles. CSLI Publ. 1996.
15. *Ker-I, Ko.* On the computability of fractal dimensions and Hausdorff measure // APAL. 1998, 93, 195–216.
16. *Quine W.V.* Ontological Relativity. In Ontological Relativity and Other Essays. Columbia Press, N.Y., London. 1969, p. 26–68.
17. *Myhill J.* On the Ontological Significance of Lowenheim-Skolem Theorem. / In Symposium. Academic Freedom, Logic and Religion. 1953, p. 57–70.
18. *Свасьян К.А.* Философское мировоззрение Гёте. М.: Эвидентис, 2001.
19. *Родин А.В.* Идея внутренней геометрии / Барабашев А.Г. Математика и опыт. М.: МГУ, 2003, с. 502–532; обсуждение – с. 532–543.
20. *Putnam H.* Models and Reality // J. Symb. Logic. 1980, v. 41, no.3, p. 464–482.
21. *Yanofski N.S.* A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points // The Bull.Symb.Logic. 2003, v. 9, no.3, p. 362–386.
22. *Restall G.* Paraconsistency Everywhere // Notre Dame J. of formal logic. 2002, 43, p. 147–156.
23. *Myhill J.* A System, which can define its own truth // Fund. Math. XXXVII, 1950, p. 190–192.
24. *Kopperfeld S.* General Theory of Boolean Algebras. In Monk J.D., Bonnet R. Handbook of Boolean Algebras. North Holland. 1989, v. 1.
25. *Иванов Вяч.Вс.* Чёт и нечет. Асимметрия мозга и знаковых систем. М.: Сов. радио, 1978.
26. *Бурова И.Н.* Парадоксы теории множеств и диалектика. М.: Наука, 1976.

## Приложение к главе 7.

### Геометрия числовой асимметрии

В работе Д.В.Чистякова [1, теорема 4] было построено произведение  $R \times Z_2$  при помощи автоморфных функций, геометрия которого показана на рис.1.

Мы проделаем аналогичное построение, пользуясь теорией решёток, и сведениями из монографии [2].

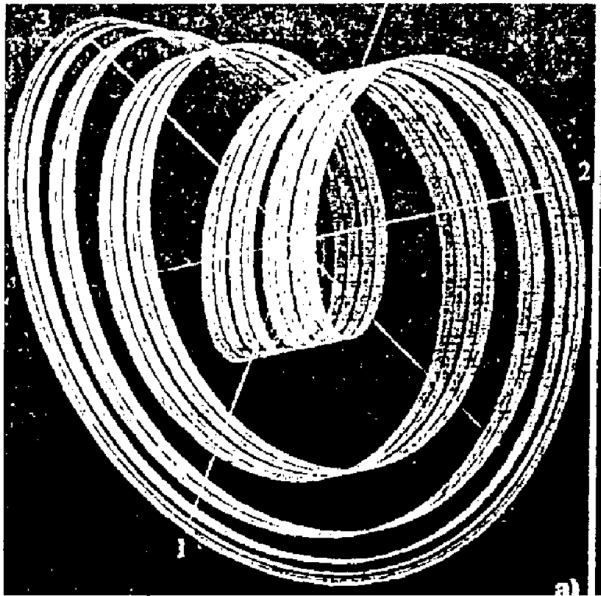


Рис.1. Вложение 2-адических чисел в евклидово пространство (из [1])

Как известно,  $p$ -адические числа получаются из вещественных обращением порядка на отрезке  $[0, 1]$ . Известен изоморфизм  $R \supset [0, 1] \cong C \cong Z_2$ , который устанавливается при помощи двоичных строк ( $p$ -ичных или  $p$ -адических в общем случае числовой базы). Связное  $R$  не является синтаксическим, то есть математическим, объектом. Вместо него всюду действует  $R^\# = invZ_2$ . Тогда изоморфизм есть чисто символическая конструкция, отношение между структурами символов. Отсюда сразу ясно,

что связность  $R$  является внематематическим свойством.

С точки зрения теории решёток,  $R^\#$  и  $Z_2$  представляют собой взаимно-дуальные полурешётки. В  $R^\#$  определены *meet* – операции конъюнкции, в  $Z_2$  – *join*, дизъюнкции.

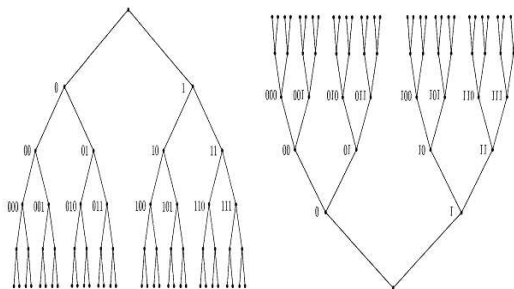


Рис. 2. Полурешётки  $Z_2$  и  $R^\#$

Вертикальная их сумма [2, p 29] образуется совмещением *top*-элемента  $Z_2$  (слева), то есть 1, с *bottom*-элементом  $R^\#$  (справа), то есть 0.

На рациональном отрезке  $[0, 1]$  это означает совмещение единицы с нулём, то есть преобразование отрезка в окружность. Рацио-

нальные числа есть полная решётка. Операцию *meet* они наследуют с  $R^\#$ , операцию *join* – с  $Z_2$ .

Этот факт известен как возможность представления рациональных чисел в виде подмножества вещественных и  $p$ -адических чисел (см. курсы по  $p$ -адической математике). Иными словами, строка цифр, представляющих рациональное число, определена одновременно над двумя числовыми системами, и поэтому на ней определены также одновременно две метрики – архимедова и неархимедова (теорема Островского). В более общем случае каждое метрическое пространство допускает ультраметризацию [3, Th.7], то есть также имеет одновременно два облика – вещественный и ультраметрический.

Декартово произведение решёток строится следующим образом [2, p. 18]. Каждая вершина одной решётки заменяется на копию второй, и одноимённые точки соединяются линиями. В нашем случае двух числовых систем надо совместить в одной точке два противоположных порядка. В качестве иллюстрации вспомним устройство «бабочки Лоренца»:

Как видно из рис.4, аттрактор состоит из двух симметричных относительно вертикальной оси «линейчатых» колец, в которых движение происходит в противоположном направлении. Сложив эти кольца в одно, получим аналог требуемого свойства: в каждой точке движение происходит в двух противоположных направлениях. Внутреннее кольцо можно сопоставить с рациональным отрезком, преобразованным в окружность (см. выше). Отсюда ясно, что для построения решёточного произведения  $R \times Z_2$  нужно симметризовать их полурешётки с помощью инволюции.

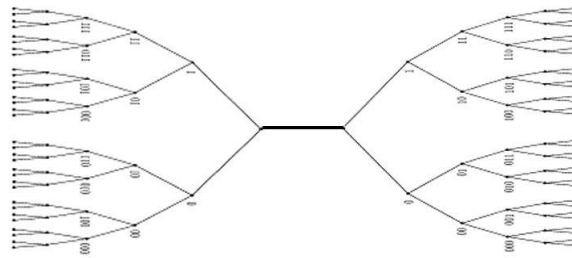


Рис. 3. Вертикальная сумма полурешёток (повёрнуто). Показан отрезок, соединяющий  $top=1$  в  $Z_2$  и  $bottom=0$  в  $R^\#$  элементы. Этот отрезок сопоставляется с рациональным отрезком  $[0, 1]$

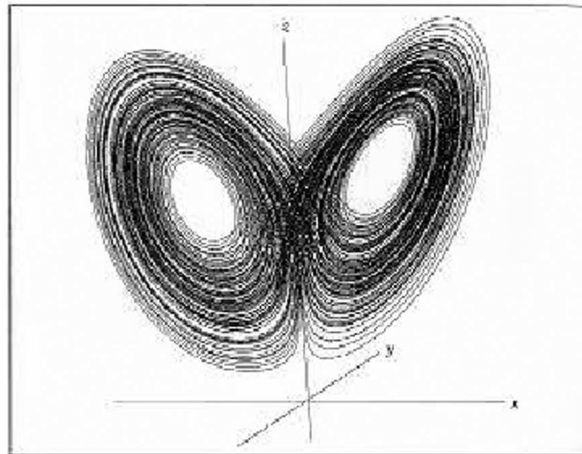


Рис. 4. Бабочка Лоренца

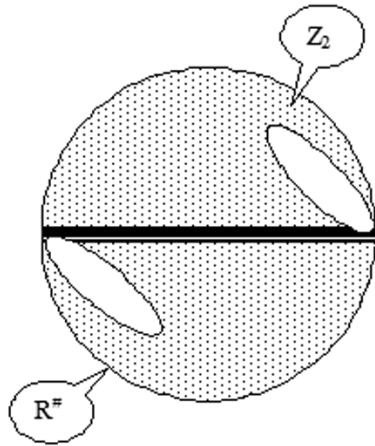


Рис. 5. Полурешётки  $R^\#$  и  $Z_2$  на отрезке  $[0, 1]$

Сначала поместим полурешётки на отрезок  $[0, 1]$ . На рис.5 вершина  $Z_2$  совмещена с 1, а его дерево изображено изогнутым, входящим в отрезок. Правая внутренняя петля символизирует изгиб. То же сделаем с обратной полурешёткой  $R^\#$ , поместив её вершину в 0. Точно так же левая внутренняя петля изображает изгиб. Эти петли-изгибы имеют чисто графическое вспомогательное значение и не имеют отношения к числам.

Совместим далее 0 с 1, отобразив отрезок на окружность. В этом

случае получим две симметричные окружности рациональных чисел: одну в  $Z_2 - Q(Z_2)$ , вторую – в  $R^\# - Q(R^\#)$ .

На рис. 5, 6 деревья полурешёток изображены для простоты сплошными потоками. Стрелками показан порядок.

Таким образом, мы получили числовой аналог «бабочки Лоренца». Отразив нижнюю часть вверх относительно горизонтальной прямой, получим решёточный аналог рис. 1. Следует учесть упрощающий характер нашего построения – линейчатые фигуры  $R$  и  $Z_2$  мы заменили сплошными, как бы осреднив их.

Такой двухлепестковый вид имеет не только бабочка Лоренца, но и аттракторы Рёсслера и Смейла-Вильямса.

Они имеют вид расщеплённой ленты Мёбиуса, аттрактора, который

возникает в задачах нелинейной динамики [4, р. 52, 124–125, 144, 325]. Один из них приведен ниже. Очевидно сходство этого аттрактора с числовым на рис.1.

Такой вид аттракторов и числовой асимметрии вызывает в памяти интерпретацию мнимых чисел П.А.Флоренским [5]. Двумерная семантика фазовых пространств в физическом пространстве может рассматриваться, если сложить «крылья бабочек» как движение в противоположных направлениях с

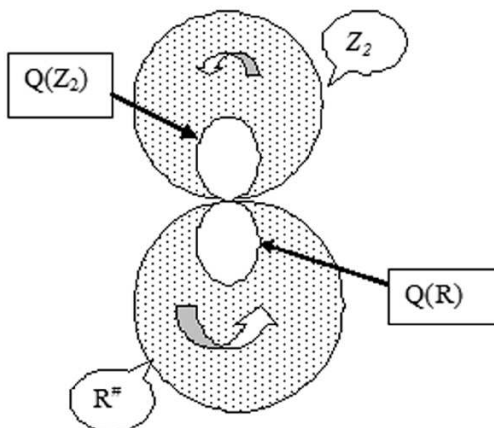


Рис. 6. Полурешётки на окружности  $[0, 1]$

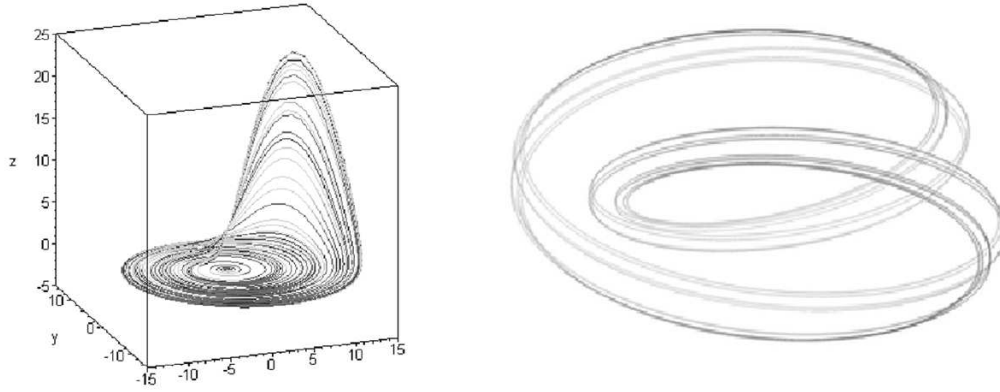


Рис. 6. Аттракторы Рёслера и Смейла-Вильямса

разных сторон плоскости. Тогда обращение порядка в полурешётках аналогично введению плоскости мнимых чисел. Это также подтверждается взаимной неопределимостью вещественных и  $p$ -адических чисел. Тогда и их метрики образуют изоморф расширенной комплексной плоскости.

Теория решёток придаёт дополнительные свойства числовой асимметрии. Именно она является полной дистрибутивной решёткой. Операция *meet* совпадает с НОД пары рациональных чисел в  $R^\#$ , обратная по порядку операция *join* — с НОК пары чисел-как-полиномов в  $Z_2$  [2, р. 37].

Далее можно в духе теории возможностей определить меру возможности множества  $A$ , используя тождество аксиом этой теории со свойствами ультраметрики [6, с. 17–19]:

$$\Pi(A) = \sup \left\{ \pi(\xi_i) = |\xi_i|_2^D ; \xi_i \in A \subset Z_2 \right\}.$$

Тогда

$$\Pi(A \vee B) \geq \max(\Pi(A) \Pi(B)) = |join(A, B)|_2^D,$$

$$\Pi(A \wedge B) \leq \min(\Pi(A) \Pi(B)) = |meet(A, B)|_2^D.$$

В первом неравенстве узнаётся ультраметрика сложения. во втором — умножения  $p$ -адических чисел. Поскольку в общем случае в нашей схеме отрицание имеет такую же возможность, как и позитивное утверждение, то для введения невозможного события следует, по-видимому, ограничиться самим множеством  $A$ , то есть определить позицию наблюдателя. В этом случае невозможное событие будет дополнительным к возможному, как лакунарность фрактальной размерности в те-

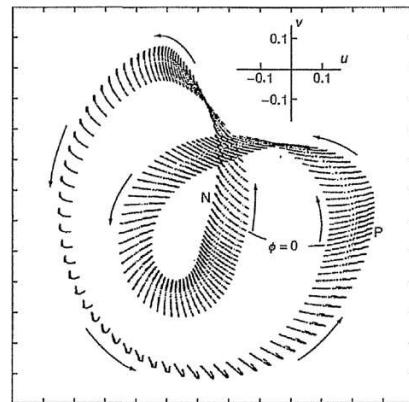


Figure 16.7 The chaotic attractor  $C^2$  viewed in a sheared Van der Pol plane as a folding Möbius strip:  $\beta = 0.1, \omega = 0.85, F = 0.109$

рии фракталов, или разность между топологической и фрактальной размерностью. Но для нефизических вопросов такой подход сталкивается с невозможностью определения числовых величин размерностей.

Выходом из этой ситуации может оказаться использование вместо оппозиции *возможность–невозможность* пары *возможность–действительность* с использованием гиперболического отношения метрик и последующим сведением меры возможности к ультраметрике как мере *действительности*.

Необычность ситуации в том, что в одномерной логике классической математики *всё действительно*, нет движения, то есть ни прошлого, ни будущего [7], и, соответственно, нет указанной оппозиции. А значит, нет альтернатив, выбора, модальностей, семантики, сознания, то есть человека вообще [8]. Поэтому говорят, что чем дальше продвигается наука вперёд, тем больше мы узнаём о своём прошлом, но ничего о будущем. В этом заключается оппозиция *бытие закона – небытие человека*. Введя время в модель, можно перейти от опытного знания к интеллигибельному: *бытие человека – небытие закона* или *конец науки – начало познания* [9].

Исследование оппозиции *возможное – действительное* в математике требует формализации движения, введения его в аксиомы. И, вообще говоря, введения чувственного опыта в логику. Если наше толкование апорий Зенона (см. след. главу) не останется изолированным и будет иметь выход в теорию систем, то тогда эта оппозиция может быть наполнена эмпирическим содержанием.

## Литература

1. Чистяков Д.В. Фрактальная геометрия образов непрерывных вложений  $p$ -адических чисел и соленоидов в евклидовы пространства // ТМФ, т. 109, №3, с. 323–337.
2. Davey B.A., Priestley H.A. Introduction to Lattices and Order. Cambridge U.P., 2002.
3. Lemin A. On Ultrametrization of General Metric Spaces // Proc. of AMS, 2004, v. 131, no.3, p. 979–989.
4. Thompson J.M.T., Stewart H.B. Nonlinear Dynamics and Chaos. J.Wiley&Sons, 2002.
5. Флоренский П.А. Мнимости в геометрии. М.: УРСС, 2004.
6. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. М.: Радио и связь, 1990.
7. Левин Г.Д. Возможность и действительность / НФЭ, 2010, т. 1, М., с. 422–423.
8. Герасимова И.А. Возможных миров семантика / НФЭ, 2010, т. 1, М, с.423–424.
9. Селиванова В.И. Принцип антропности как начальная метафизика современного естествознания / Человек. Грани философской рефлексии. М.: МГУ, 1996.

*P.S.* Здесь и далее сокращение НФЭ – Новая философская энциклопедия.

## Глава 8

### Апории Зенона

В этой главе в качестве приложения мы рассмотрим толкование апорий Зенона с единой точки зрения [1]. Анализ В.Я.Комаровой, которым мы будем пользоваться как наиболее полным [2], показывает наличие общей основы всех сохранившихся апорий. Литература, посвящённая этой проблеме, слишком обширна даже для поверхностного анализа и, кроме того, рассеяна по произведениям разного жанра, в том числе и художественным. Поэтому мы ограничимся лишь источниками недавнего времени, содержащими подробную библиографию, такими как периодически обновляемые статьи в известных интернет-энциклопедиях — Internet Encyclopedia of Philosophy, Stanford Encyclopedia of Philosophy, Wikipedia.

*Введение.* Апории Зенона, бытие Парменида и философия элейской школы вообще впервые поставили вопрос о том, как можно мыслить бытие в понятиях. Они явились первым кризисом оснований науки [3], который затем был заново воспроизведён в XX веке опытом прямолинейной математизации наук — мышления о естественных науках в математических понятиях, то есть их редукции к математике. Опыт показал, что термины математики плохо согласуются с понятиями основного корпуса естественных наук, которые строятся на доверии *к чувственному опыту*. Положения элеатов поэтому сквозь века вновь напомнили о себе уже не как об узкологических, но общих проблемах математики. Апории Зенона, таким образом, есть тест на адекватность математики природе, внешнему миру.

«Чувственное, как правило, связывается с изменчивым в нашем мире, постоянное, умопостигаемое — с неизменным. Удовлетворительного описания логического перехода от чувственного к рациональному, от конкретной вещи к абстракции до настоящего времени не существует» [4, с. 169–170].

Эти апории являются сугубо физико-математической проблемой, которая обычно формулируется как проблема выражения движения и бесконечности средствами логики [3, с. 53, 232; 5, с. 271]. Формальные синтаксические правила математики не предполагают предварительного знакомства с содержанием и способом образования понятий, превращённых в атомарные переменные теорий и моделей, а способ преподавания математики скрывает этот пробел. Исключение составляет механика деформируемого твёрдого тела – (неделимые) материальные точки и вектора.

История этих парадоксов демонстрирует их тесную связь с современными им математическими теориями. Каждое время находило в них свой способ решения [6]. Апории Зенона в эпоху кибернетической эры интенсивно обсуждались и рассматривались как свидетельство диалектической природы системной реальности, как мостики между различными дисциплинами в междисциплинарных исследованиях [7–9]. Однако постоянно отодвигающееся в бесконечность постижение «непостижимой эффективности» математики постепенно снизило интерес к этой теме, который, однако, не угас полностью. Он постоянно возникает при углублении в более-менее сложную проблему или при столкновении с новой проблемой, не имеющей физико-математического шаблона.

Опыт теории систем и кибернетики XX века можно поэтому считать опытом решения апорий. В частности, так же как и в теории систем, формальное математическое решение апорий сильно проигрывает в осмысленности и убедительности философско-методологическим толкованиям и объяснениям с позиций здравого смысла.

Мы рассмотрим числовую асимметрию нашей схемы в качестве единой формальной основы всех апорий Зенона. То есть мы попытаемся словесные формулировки парадоксов с её помощью отобразить числовыми соотношениями.

1. *О решениях апорий.* В обсуждении этих парадоксов общим местом является присутствие оппозиции *протяжённость (связность)–делимость (дискретность)* в их формулировках [10, с. 474–514; 3, с. 58–62, 117–131, 163–166, 232–239]. Под делимостью имеется ввиду делимость пространства, времени, материи [11]. Ею же истолковываются и многочисленные неформальные решения. Приведём лишь два из них:

«Движущееся движется, не производя счёта» (*Аристотель*).

«Метод измерения, а не Ахиллес, не может догнать черепаху» (*А. Уотс*).

Здесь делимость присутствует под видом «счёта» и «метода измерения». Более развитая точка зрения основана на паре/диалектике *делимость–непрерывность*:



«...если мы хотим избежать абсурда, который, разумеется, будет для Зенона в такой же степени, как и для всякого человека, руководствующего простым здравым смыслом, и если мы хотим применить гипотезу о делимости на части, то нужно применять её одновременно и к времени, и к пространству; а значит, и время, и пространство должны иметь одинаковую структуру. ... эта общая структура должна быть непрерывной и бесконечно делимой. ... Движение, существование которого вытекает уже из повседневного опыта, может существовать лишь в случае, если для пространства и времени имеет место одна и та же структура бесконечной непрерывной делимости» [Костабель П. Несколько старых парадоксов/ Время и современная физика. М.: Мир, 1970, с. 96, 98].

Делимость [12, 13] трансформирует стандартное физико-математическое понимание апорий в проблемы Платона *Единое—Многое* и *Большое—Малое* [14], то есть переводит их в проблему *часть—целое* теории систем.

Вывод Платона: объект описывается двумя противоположными способами — как целостный и как множественный, связанными отношением дополнительности [3, с. 117–128], то есть отрицанием. Этот вывод приобрёл в литературе статус неформального решения апорий. Оно заключается в дополнении формальной механики атомизма формализацией *ан-атомии* природы, то есть в необходимости формализации делимости явлений, в интенциональной степени свободы логики. Атомизм и анатомия отрицают друг друга как *дискретное* и *непрерывное*, как *экстенциональное* и *интенциональное*. Но в этом случае отрицание наполняется нетривиальным содержанием и становится одним из естественных процессов. В математике оно является терминальной операцией. Лишь в теореме Гёделя о неполноте оно имеет свой гёделев номер, то есть входит в структуру теоремы и поэтому несёт её основную смысловую нагрузку. Во всех остальных моделях оно полностью отсутствует.

Формально решение Платона в нашей схеме имеет вид:

$$R \supset V \leftarrow \text{целое} \rightarrow V^* \subset Z_2, \quad V = \text{inv}.$$

«Целое», с одной стороны — связный объём в евклидовом пространстве, *стрелка влево*; с другой — ансамбль точек, пыль в  $Z_2$ , *стрелка вправо*. Левая и правая части связаны инволюцией. Подобные бинарные схемы будут часто появляться в наших рассуждениях. Эти два представления связаны отрицанием. Отрицание/инволюция становится расщеплённым, как в соответствиях Галуа:

$$V = \neg V^*, \quad V^* = \sim V,$$

$\neg : Z_2 \rightarrow R$  переводит дивергенцию (деление) в конвергенцию;  $\sim : R \rightarrow Z_2$  делит, то есть действует противоположным образом. Это простой вид соответствий Галуа в теории сетей и порядка.

То есть неформальные решения имеют вид так называемого асимметричного дуализма лингвистического знака в естественном языке: слово определено над двумя числовыми системами. Одна его сторона, вещественные числа, соединяет, вторая,  $p$ -адические — разделяет. Слово как бы является синтезом противоположных числовых систем.

Эта степень свободы — интенциональность — отсутствует в так называемом Стандартном Решении [15], использующем средства математического анализа в виде сходящегося ряда. Парадоксы Зенона признаются имеющими тесную связь с современной физикой [3, 5, 16, 17]. Однако различные формальные варианты их решения — нестандартный анализ [18], паранепротиворечивая логика в её форме, близкой нашей схеме «числовой асимметрии» [19], — остаются предметно-замкнутыми, не выводят решение апорий в физику и тем более не позволяют усмотреть связь с науками, составляющими базис теории систем. Популярное, но и изолированное от других апорий толкование апорий в физике о движении в виде квантового эффекта Зенона, заключающееся в том, что частые измерения тормозят переходы между состояниями квантовой системы [20], не является вполне отвечающим природе аргументов — без формализмов, понятий пространства, времени, координат, пределов, функций, средствами одного языка и мышления, «прямо из головы». В этом плане более отвечающей духу апорий является идея тождества противоположностей [17] и существования «чего-то, недвижущегося и непокоящегося» как общей основы для покоя и движения [21].

Отдельно отметим демонстрацию фрактальной топологии множества истинности логики апорий [12, 13, 22], которая возвращает нас к идее позитивного смысла неразрешимости фрактальных множеств, то есть к идее двойственности истины формальных систем. Эта двойственность постепенно выходит наружу [66, 67]. Логика также пришла к выводу о необходимости расширения логической семантики для решения парадоксов [68, с. 132]. В физике ширится признание неразрешимости различных теорий, описывающих сложные системы [69, 70].

Включив делимость, можно расширить содержание апорий следующими примерами:

- *Краски, цвета, формы и образы* предметов окружающего мира при делении исчезают, превращаясь в элементарные частицы, не обладающие качествами. Фракталы как предел деления есть общая бескачественная субстанция всех наук. Цвет и электромагнитные волны — разные вещи.

- *Нарушение симметрии* в материаловедении. Свойства материалов не выводятся из свойств атомов и молекул. Ещё хуже дело обстоит в биологии.

• *Мелодия – ноты.* Музыкальный синтаксис не звучит, мелодия не складывается из отдельных нот.

• *Эволюция (развёртывание качеств)–материя (их свёртывание).* Все науки имеют два полюса: (макро)эволюционный и (микро)материальный. На первом – разнообразие форм и качеств, на втором – одна из форм материи. Верхний полюс не сводится к нижнему и не выводится из его свойств. В этом специфика системной реальности.

• *Человеческие качества – материальный носитель.* Процессы восприятия не сводятся к электрическим импульсам по нервной ткани.

• *Синестезия.* Перекрёстные влияния качеств, цветной звук (сюда, возможно, должны быть привлечены ещё и тропы Энесидема [Гайденко П.П. Античная философия. Энциклопедический словарь. М.: Прогресс-Традиция, 2008, с. 803–805].

• *Фатализм и случайность будущего.* Системное, биологическое, геологическое, экономическое будущее не выводится из настоящего.

Отдельно выделим языковой исток парадокса о движении. Движение в языке передаётся глагольными формами. Глаголы формально неотличимы от остальных частей речи и, конечно, полностью отсутствуют в математике. Представление о движении должно предшествовать усвоению правил синтаксиса языка [23, с. 12–15, 17–18.]. По той же причине, если это представление отсутствует, то формально его выразить невозможно, по учебникам движению невозможно научиться. (**Замечание.** Профессиональное математическое образование состоит из стадий: физ.-мат. школа, кружок, олимпиады – физ.-мат. интернат – физ.-мат. факультет университета – аспирантура. Все они проходят без отрыва головы от книг, в процессе комбинаций букв. Чувство движения, остающееся как воспоминание о раннем детстве, почти трансцендентно такому времяпрепровождению).

Поэтому проблема апорий Зенона математикой лишь консервируется, и для приложений даже такие наиболее развитые теории, как дифференциальные уравнения и динамические системы, представляются малосодержательными.

«Чтобы продвинуться вперёд вместе с движущейся реальностью, нужно было бы переместиться в неё... Поместитесь в изменчивость – вы разом схватите и самую изменчивость, и последовательные состояния, в которые она могла бы, остановившись, превратиться в каждый момент» [24, с. 294].

Бергсон, по сути, формулирует отправную точку прикладной математики как береговой линии наук – *включение исследователя в объект:*

«...поместитесь на границу дисциплин, и вы поймёте проблемы приложений и необходимость предварительного развития чувства движения. То есть для адекватности математики нужна развитая психосенсорная картина её мира: очень большой объём понятий нефизических наук отображает невидимую реальность — связи, организация, историчность, цели, полезность и т.п. Биологические организмы также не могут быть детектированы какими-либо физическими приборами. Сейчас математика ограничена психомоторной частью. Как следствие мы получили ни с чем не сравнимое сингулярное развитие техники, особенно систем вооружений».

2. *Неформальных решений* апорий известно множество. Большинство решений касается апорий о движении, остальные привлекают гораздо меньшее внимание. Мы отметим лишь те решения, которые близки нашей схеме.

2.1. Приведём сначала диагноз Д.Гильберта и П.Бернаиса в отношении стандартного решения и прогноз возможного (*курсив. — Ф.М.*):

« ... при более пристальном рассмотрении ситуации мы убеждаемся, что всюду, где бы мы ни надеялись встретить бесконечные многообразия (*подобные натуральному ряду. — Ф.М.*) — в области ли чувственных ощущений или в физической действительности, о прямом их обнаружении не может быть и речи, что, скорее напротив, убеждение в существовании какого-либо многообразия подобного рода основывается на мысленной экстраполяции, обоснование которой нуждается в специальном рассмотрении; во всяком случае в той же мере, что и само представление о натуральном ряде как некоторой единой совокупности. Типичным примером, иллюстрирующим эту мысль, является бесконечность, лежащая в основе известного парадокса Зенона (*авторы имеют в виду «Ахиллеса и черепаху».* — *Ф.М.*). Обычно этот парадокс пытаются обойти рассуждением о том, что сумма бесконечного числа этих временных интервалов всё-таки сходится и, таким образом, даёт конечный промежуток времени. Однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенный парадоксальный момент, заключающийся в том, что некая бесконечная последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершение которой мы не можем себе даже представить (не только фактически, но хотя бы в принципе), на самом деле всё-таки должна завершиться (*т.е. завершённые предельные переходы есть вариант Суперпроблемы.* — *Ф.М.*). В действительности существует гораздо более радикальное решение этого парадокса. Ведь на самом деле мы вовсе не обязаны считать, что математические пространственно-временные представления о движе-

нии являются физически осмысленными также и в случае произвольно малых пространственных и временных интервалов. ... Подобно тому, как при неограниченном пространственном дроблении вода перестаёт быть водой, при неограниченном дроблении движения также возникает нечто такое, что едва может быть охарактеризовано как движение (см. *мотивы p-адической физики*. — Ф.М.). Если мы встанем на такую точку зрения, то этот парадокс исчезнет» [25, с. 39–41].

2.2. Д.Мириманофф, по-видимому, был первым, кто сформулировал основания математики апорий: *противоречия возникают тогда, когда в определения вводятся несовместимые условия*. Такими являются непредикативные определения — то, что сегодня называется нелинейными зависимостями и самоприменимыми утверждениями, когда свойства целого множества ставятся в зависимость от свойств элементов, которые в свою очередь зависят от свойств всего множества. Такими условиями служат слова *все* и *существует* — с одной стороны, и *неделимость элементов* — с другой [26, 27]. Аналогичны недавние рассуждения В.И.Шалака, усмотревшего несовместимость посылок чувственного и логического выводов [71, с. 189].

2.3. С.А.Яновская пришла к выводу, что

«теории движения не могут быть конечно-аксиоматизируемыми и аксиоматические способы построения теории здесь не по существу» [28].

Такие теории, как говорилось выше, являются представителями физического атомизма, то есть диагнозы Яновской и Мириманоффа совпадают.

2.4. Э.В.Бет так объясняет двойственность континуума:

«Примитивная атомистическая теория континуума опровергнута парадоксами Зенона. ... Существует поразительное сходство между парадоксами континуума и парадоксами универсалий. Линия не может рассматриваться ни как состоящая из точек, ни как существующая отдельно от них; сходным образом абсолютная сущность не может рассматриваться ни как состоящая из отдельных сущностей, которые ей соответствуют, ни как существующая отдельно от них. Мы можем выразить сходство двух групп парадоксов короче, сказав, что оба парадокса — непрерывности и универсалий — являются парадоксами отличия и неотделимости» [29, р. 15].

Им же отмечено присутствие логической самоприменимости в аргументах Зенона, которые имеют вид диагональных рассуждений Кантора:

«Зенон начинает с противоположного утверждения, строит аналитическое выражение для точек, последовательно проходимых Ахиллесом, и вводит новую точку посредством этого выражения, для которой это условие не выполняется и которая, тем не менее, достигается Ахиллесом» [27, р. 492 и далее].

(Таким условием является прохождение половинных частей отрезков, которые и проходятся бегом Ахиллеса и не проходятся как дискретные численные значения условий. — *Ф.М.*).

2.5. Ю.И.Манин даёт физическую интерпретацию:

«Фазовое пространство изолированной физической системы состоит из двух подпространств — координат и векторов скоростей или траекторий движения. Следует различать их в анализе состояний системы. Поэтому покой Стрелы в каждый момент времени есть проекция на пространство координат пространства пар {координата, вектор скорости}» [30, с. 169].

Заметим, что первое подпространство нульмерно, второе есть (под) множество действительных чисел (см. по этому поводу [31]).

2.6. Аналогичен предыдущему аргумент Д.Скотта, известный как неразличимость операций и операндов в теоретической информатике: одна и та же строка может представлять как аргумент, то есть синтаксис, так и функцию, то есть процесс (см. двойственность Стоуна) [32]. И парадокс самоприменимости разрешается допущением использования одной и той же строки в этих двух разных смыслах.

2.7. В явном виде бинарную структуру антиномий формулирует А.Н.Паршин:

« ... антиномия — это противоречащие друг другу высказывания об одном и том же, но делаемые в разных дополнительных ситуациях. Короче, можно сказать, что антиномия = дополнительности» [33].

2.8. В природе времени также усматривается двойственность — *время—дление* и *время—порядок*, находящиеся в отношении дополнительности и связанные обратно пропорциональной степенной зависимостью [34, с. 283—291], то есть как амплитуда и частота фликкер-шума или архимедова и неархимедова метрики.

«Создавая часы и размечая циферблат, человек творит двуликого Януса. Разбивка круга на равные отрезки отражает время—дление, а их оциф-

ровка задаёт время—порядок. Представление о двойственной природе времени даёт ключ к разрешению парадоксов, известных как апории Зенона Элейского. ... Суть проблемы заключается в том, что реальное движение, так же как и время, подчиняется закону двоичности, складывается из инертной компоненты (Инь) — пространства, и активной компоненты (Ян) — времени. Время—дление позволяет определить скорость  $v = s/t$ . Но автор незаметно для наблюдателя переходит к другому времени, порядку. Достигается это посредством сдвигания индекса (*точки на графике степенной зависимости. — Ф.М.*) в бесконечность вправо, где вместе с длением исчезает само время, без которого понятие движения тоже теряет смысл. Ту же природу — подмену одного времени другим, дополнительным — имеет парадокс Ахиллеса и черепахи. Бегун догонит черепаху только в том случае, если его время будет содержать не только порядок событий, но и их длительность» [34, с. 292] (см. аналогичные рассуждения в [35, с. 49–50]).

2.9. *Вторая семантическая координата* — координата делимости, логики апорий, которая усматривается во всех вышеприведённых решениях, зафиксирована В.Я.Комаровой. Именно включение её в рассуждения позволяет развести противоречивые утверждения и формализовать решения проблемы *Единое—Многое* Платона и апорий Зенона:

«... неперменная последовательность деления (или соединения) совпадает в аргументах Зенона с неперменной последовательностью проводимого доказательства — это самый существенный момент в составленных Зеноном условиях» [2, с. 8].

Эта логика — с двойной семантикой — выглядит как рассуждение от обратного, где рассуждение «от существования» и «от познания» сменяют друг друга в бытии Парменида [2, гл. 6]. Она переключает топологии и действует как соответствия Галуа. Тем самым проблема апорий Зенона становится содержательно-логической, в них логика и причинность слиты воедино [9].

В приведённых цитатах, и явно у Комаровой, можно усмотреть действие принципа переноса, когда булева алгебра рассуждений как причинная последовательность меняет свою координату с аффинных движений на делимость, синтаксис, оставаясь формально неизменной.

2.10. В заключение приведём критерий Б.Рассела, которому должно удовлетворять формальное решение апорий:

« ... чтобы решение выглядело удовлетворительным, необходимо три условия. Первое из них и абсолютно обязательное: противоречия

должны исчезнуть. Второе – весьма желательное, хотя логически не непременно: решение должно оставить в неприкосновенности как можно больше математики. Третье, трудно формулируемое: решение должно, видимо, апеллировать к так называемому “логическому здравому смыслу”, то есть оказаться в конце концов таким, каким его и ожидали увидеть» [36, с. 11–27].

В нашей схеме это значит, что должна существовать формальная система, в которой истина имеет двойной – логико-математический и чувственно-предметный – смысл или конкретику, общие формальной логике, философии и естественным наукам, где эксперимент дополнен наблюдением, то есть исповедующим доверие к внешнему миру (читаем – к его «фрактальной геометрии»). Это практически в точности повторяет критерий содержательности кандидата на роль формальной теории систем: *такая теория, будучи математической, должна быть согласована также и с базовыми положениями философии и естественных наук.* Фракталы, в силу своей универсальности, являются, по-видимому, единственным кандидатом на эту роль. Во всяком случае, теоремы Гёльдера и Островского об исключительности двух способов измерения, дополненные нашим выводом о совпадении функций измерения с функциями восприятия (см. гл. Степенные законы), по-видимому, закрывают вопрос.

В заключение заметим, что наши эмпирические рассуждения математики фракталов – с одной стороны, и разнообразных, но неформальных способов толкования апорий, которые к тому же оказались связанными, – с другой, позволяют сделать вывод о необходимости двумерной логики естественных наук (см. цитату из [2] и другие выше).

3. *Пространство Парменида.* Принципы Зеноновых апорий совпадают с принципами Парменида [2, с. 101], то есть явления, о которых повествуют эти парадоксы, протекают в пространстве, описанном Парменидом. Поэтому интерпретацию апорий мы начнём с формализации этого пространства.

Под бытием Парменид понимает *всё существующее* (т.е. образованное сразу двумя парадоксообразующими словами!). Такое бытие оказывается состоящим из двух частей, противостоящих друг другу: мыслимое, познаваемое истинным образом, и существующее, познаваемое чувственным восприятием. Оно бесконечно, цельно, однородно и невозмутимо, «для него нет ни прошедшего, ни будущего, ибо во всей своей полноте живёт в настоящем» [3, с. 51–53]:

- неподвижное и непокоящееся;
- протяжённое и непротяжённое;
- единое, неразделимое и множественное, раздробленное;



- вечное и временное;
- материальное и идеальное.

[2, с. 4–5, 101–103; 5, с. 245, 249–250, 253, 258–259, 268–271].

Природу вещей, объектов внешнего чувственного мира Парменид объясняет смешением противоположных начал бытия – *света* и *тьмы*, которые взяты отвлечённо и в чистом виде исключают друг друга [5, с. 266–270].

Рассмотрим  $Q_2$  как формальный аналог бытия Парменида. В восприятии его можно усмотреть два способа: архимедов, чувственное зрение и неархимедов, «умное» зрение, дополняющих друг друга. Поэтому восприятие  $Q_2$  двойственно, то как физически ненаблюдаемое, но умопостигаемое, нульмерное образование, то как бинарное пространство  $Q_2 = R \times Z_2$ , где первое слагаемое – протяжённость – относится к материальному, постигаемому чувственным зрением, второе – границы – относится к идеальному.

Известно, что все алгебраические автоморфизмы  $Q_2$  сводятся к тождественному  $Aut Q_2 = id Q_2 = Q_2$  [37, р. 53–54]. Это формальный аналог неподвижности и невозмутимости, вечности. Нульмерность  $Q_2$  – аналог непротяжённости. Проекция  $Q_2$  в видимый мир, в виде аддитивно-мультипликативной плоскости, где фрактальность типична, – аналог раздробленности, множественности, протяжённости, изменчивости. В этой плоскости изменчивость/движение возникает как отличие от нуля взаимных производных функций измерения/восприятия двух метрик, которое следует из степенной зависимости (см. гл. «Степенные законы»).

Нульмерное  $Q_2$  содержит все слова, траектории и формы, существующие одновременно и не изменяющиеся в вечности. Это аналог так называемой блок-Вселенной.

Таким образом, парадоксообразующее *всё существующее* оправдывается существованием  $Q_2$ , которое состоит из физически наблюдаемой и ненаблюдаемой частей. Запишем его в виде с использованием варианта теоремы Островского

$$Q_2 = [R \supset \{Q\} \subset Z_2] \quad Q = \{x : x = |\xi|_2 \cdot |\xi|_\infty, \quad \xi \in Z_2\}.$$

Из этой записи видно, что всё воспринимаемое/измеряемое/опознаваемое моделируется рациональными числами  $Q$ , которые порождаются совместным действием противостоящих половин пространства, двух дополнительных начал – двух метрик, несводимых друг к другу. Здесь пересекающиеся пары квадратных и фигурных скобок символизируют двойную природу рациональных чисел, два возможных вида их пополнения.

Важно иметь в виду, что в  $Q_2 = R \times Z_2$ ,  $R$  и  $Z_2$  различны как математические множества: их произведение/сумма – прямые, но субстанцио-

нально тождественны, состоят из одного и того же «материала», то есть они гиперболически ортогональны.

Основная оппозиция *протяжённость против делимости* оказывается неотъемлемой от существования. За существующее Зенон принимает величину, имеющую протяжённость, и то, что по своей природе делимо [2, с. 104–105]. Тем самым в понятие существования включаются как  $Q$ , так и  $Z_2$ . Связность  $R$  остаётся вне текста апорий и вводится в аргументы так же, как и в математике — апелляцией к чувственному опыту; Зенон принимал факт движения как данный (см. аргумент Дж. Майхилла в связи с теоремой Левенгейма—Сколема). Иными словами, *бег Ахиллеса* и стандартное определение связного множества в математике — «если можно разделить множество на два непересекающихся подмножества, то оно несвязно, если нельзя, то связно» — в равной степени используют физическое, чувственное зрение.

Из-за того, что делимость и наблюдаемость в математике не формализованы, так же как и их связь с естественным языком, не выделены в отдельную степень свободы явлений — причинность и логика, носителями которых они являются, сливаются с привычным ходом рассуждений, и  $Z_2$  исчезает в содержании слов *существующее* и *всё* в подпространстве апорий. Тогда в аксиоматизируемой системе появляется петля самоприменимости, за которой скрыта оппозиция *протяжённость—делимость*.

Скрыта и пара *возможное—действительное*, которая также постоянно присутствует в толковании парадоксов как эквивалент пары *протяжённость—делимость* (решение Аристотеля). Тогда в рассуждениях «от обратного», где за исходный пункт берётся *существующее*, появляется противоречие в характере величин — *и протяжённое, и делимое, и большое, и малое, и увеличивается, и уменьшается*, которое аналогично соотношению аддитивной меры Хаара, то есть меры Лебега, и мультипликативной меры Хаара. На числовой прямой эти меры неотличимы. В фазовом пространстве системы (см. толкование Ю.И. Манина) подпространство координат сливается с подпространством импульсов (траекторий, скоростей).

Рассмотрим проблему Парменида—Гераклита, то есть оппозицию: *Всё вечно и неизменно—Всё течёт, всё изменяется*. Исходя из противоположных посылок, Гераклит из  $R$ , а Парменид из  $Z_2$  поставили вопрос о выражении в понятиях единства покоя и движения, сохранения и изменения. [2, с. 119; 5, с. 269–270]. В нашей схеме эта пара выглядит как неизменность, то есть конформная инвариантность нульмерного  $Q_2$ , которое соответствует языку, логике, являясь физически ненаблюдаемым и выражение наблюдаемого движения в (фрактальном) видимом мире (см. гл.7):

$$\forall \xi, \eta \in Z_2 \quad \frac{d(|\xi|_2, |\xi|_\infty)}{d(|\eta|_2, |\eta|_\infty)} \neq 0 .$$

Хотя здесь можно видеть и тождество их позиций, если  $Q_2$  интерпретировать как *логос*, который непреходящ, то есть вечен, и у Гераклита [5, с. 193, гл. 7]. Но это требует углубления в понятия языка и мышления, которое мы откладываем.

Они сходятся в мысли, что чувственный мир образуется в результате борьбы двух начал [5, с. 200, 270]. Здесь прямая аналогия с двумя способами пополнения рациональных чисел или их двойной природой.

4. *Формальное толкование апорий*. Перейдём к формальной интерпретации собственно апорий. Предуготовленность формальной интерпретации апорий заключается в существовании нульмерного, локально-компактного, полностью несвязного числового пространства  $Q_2$  — аналога проблемы Единое—Многое, в котором возможно введение двух метрик величин, связанных обратно пропорциональной зависимостью. Координата делимости в  $Q_2$  возникает как дополнение к евклидовым координатам, и вместе с метриками она делает логику апорий двумерной. Нульмерность  $Q_2$  — существование объекта, не имеющего физических признаков, то есть не распознаваемым чувственным зрением, — вводит в анализ второй режим восприятия — умопостигаемое зрение.

Общая схема такова. Физическое пространство расширяется до бинарного присоединением ультраметрического/нульмерного/стоунова пространства  $Z_2$  — (про)образа евклидова  $R$  и становится семантически (логически) двумерным. В нём основная пара *протяжённость—делимость* моделируется числовой асимметрией, а отрицание — соответствиями Галуа. Паре величин *большое—малое* соответствует пара аддитивной и мультипликативной метрик Хаара. Наблюдаемые/измеряемые величины, то есть рациональные числа, моделируются теоремой Островского, то есть каждый параметр процесса, в том числе и время, есть функция двух переменных, соответствующих осям аддитивно-мультипликативной плоскости. Две метрики величин связаны степенной зависимостью. Переключение логических осей, то есть числовых систем, топологий, соответствующее действию операторов инволюции или ортоотрицания, производится различением топологий формулировок аргументов каждой апории в отдельности, то есть соотношением условий процесса с парой *протяжённость—делимость*. Набор синонимов, соответствующих ей нами рассмотрен как эквивалент пары *конвергенция—дивергенция* (гл.1).

4.1. *Медимн (мешок зерна)*. Эта апория не привлекает такого внимания, как апории о движении. Тем не менее, введение делимости в её описание позволяет рассмотреть её с системных позиций и тоже как аргумент о движении.

«Спрашивается, будет ли шум от падения одного зерна или, для большей убедительности, от одной десятитысячной его части? Ответ, разумеется, отрицательный. А если, спрашивается, упадёт мешок (у Зенона — медуна) пшеницы, будет слышен шум от его падения? Безусловно, будет. Но ведь имеется пропорциональное соотношение между мешком зерна и отдельным зерном или даже десятитысячной его частью, а значит, то же отношение (целого и части) должно быть и между звуками, получаемыми от них: либо есть шум в обоих случаях, хотя бы и разной интенсивности, либо в обоих нет» [2, с. 122].

«Как объяснить то, что сумма десяти тысяч нулей ни в каком случае не равняется нулю, а наоборот — весьма доступной восприятию величиной?» [38, с. 203].

Решение апории описано Т.Гомперцем, и заключается оно в необходимости признания человеческого восприятия и, соответственно, наблюдаемости сложным явлением, имеющим пороговый характер. Если не отделять свойств восприятия от объективной природы вещей — апория непреодолима. Преодолеть её можно, лишь отделив в описании сложное явление восприятия от свойств явлений [38, с. 203–205].

Бытие Парменида проявляется в форме — «существует (по логике), но не слышно (не видно, не опознаётся, не измеримо)».

«Взаимодействие между субъектом и объектом имеет две реалии: непосредственное акаузальное взаимодействие, воспринимаемое органами чувств, и корреляции между акаузальными взаимодействиями, фиксируемые мозгом. Понятийная база может в принципе опираться либо на акаузальное проявление взаимодействий между субъектом и объектом, либо на корреляции между акаузальными проявлениями. Традиционно считается, что в основе понятий лежит чувственное восприятие. Но тогда между фактами и законами возникает логическая несовместимость. Создать мост между чувственным и рациональным ... будет возможным, если найдётся однозначная связь между научными понятиями, абстракцией, с одной стороны, и законами природы — с другой» [4, с. 82–83].

Рассмотрим этот эксперимент в следующем виде (обратном пределе): «Будет ли слышен звук от падающего мешка, если его зёрна падают одновременно на расстоянии 100 м, 500 м, ... , 1000 м друг от друга? То же — падение в одно место с интервалом в 10 с, 30 с, ... , 1 мин? Очевидно — нет. Поэтому ясно, что в апории идёт речь о движении по координате делимости (мешка, массы), и исходный текст различает наблюдаемость в обратном и прямом пределах соответственно, которые свя-

заны соответствиями Галуа. Поэтому допустима модификация апории, если вместо мешка с зерном поставить любой физический процесс с нарастающей интенсивностью, вместо уха человека — прибор. Например, напрашивается температура — один, два, ... атома не греют, тогда почему греют атомы в количестве, равном числу Авогадро? Эта апория об универсальной паре *энергия—энтропия*.

Закодируем мешок пшена двоичными строками, так же как кодируются интервалы деления отрезка в канторовом совершенном множестве или техникой quadro-октодеревьев из теории итеративной системы функций. Тем самым введём координату делимости в виде 2-адических чисел  $Z_2$  и получим стоунов (про)образ мешка с пшеном. Для большей «гладкости» процесса будем пользоваться плотным нормированием 2-адических чисел, то есть показатель степени в ультраметрике положим рациональными числами:

$$|\xi|_2 = 2^{-\alpha \cdot x} \quad x \in Q, \xi \in Z_2.$$

Самое простое решение в следующем: всё существующее (см. выше), то что опознаётся для измерения, выражается рациональными числами, то есть строками конечной длины. Это окно, момент теперь,  $Q_2 = [R \supset \{Q\} \subset Z_2]$   $Q = \{x : x = |\xi|_2 \cdot |\xi|_\infty, \xi \in Z_2\}$  — оно формируется двумя метриками-функциями восприятия (см. «Степенные законы») и задаёт порог восприятия:

$$Q = \{x = \text{inv } \xi : c_\xi^1 \cdot 2^{-a} \geq |\xi|_\infty |\xi|_2 \geq c_\xi^2 \cdot 2^{-b}\}.$$

Нарастание звука (физических свойств) представим как нарастание меры (площади, объёма) множеств рациональных чисел в прямом пределе. Этот процесс параметризуем событийным временем  $\tau$ , то есть временем-порядком (см. решение А.Д.Арманда выше):

$$\tau = 2^{-M} (a_0 + a_1 \cdot 2 + \dots + a_k \cdot 2^k + \dots) \quad |\tau|_2 \rightarrow \infty.$$

Это случайный процесс, известный как сдвиг Бернулли. Становление материальной реальности отражается формированием/агрегированием (под)множеств рациональных чисел. Физически это объекты с ограниченным диапазоном скейлинга, то есть усечённые фракталы, которые обнаруживаются взамен точных [39–41].

В момент  $\tau = \tau_0$ ,  $|\tau_0| \geq 2^{-b}$  появляется звук. Тогда ситуацию в апории — равномерное нарастание силы звука  $S$  — можно символически представить линейным уравнением:

$$S = \alpha \cdot \tau_0 + \tau,$$

где  $\tau_0$  — порог проводимости/слышимости звука конкретного человека, который можно определить, например, по аудиограмме. Тогда

$$|S|_2 = \max \{ |a|_2 \cdot |\tau|_2, |\tau|_0 \}.$$

Этот процесс имеет критический характер, то есть

$$|S|_2 = \begin{cases} 0, & |\tau|_2 < |\tau_0|_2 \\ |a|_2 \cdot |\tau|_2, & |\tau|_2 \geq |\tau_0|_2 \end{cases}.$$

Положив  $|\tau|_2 = 2^{\pm\alpha x} = (2^x)^{\pm\alpha}$ , получим психофизический степенной закон Стивенса на мультипликативной прямой (конечно, речь идёт о качественном совпадении).

Очевидным образом апория может быть обобщена на все процессы измерения, которые начинаются только с момента опознания явления и у каждого из которых существует своя пороговая постоянная. В частности, особенно остро пороговость восприятия должна проявляться в измерении экстремальных, очень малых и очень больших величин. К таким относятся физические постоянные, которые определяются не математически, подобно  $\pi$  и  $e$ , а в лабораторных условиях, где пороговость восприятия является физическим фактором. В более широком плане можно видеть в атории схему становления, то есть оформления существования, биологической материи — когда биохимия и биофизика, то есть материя в виде элементарных частиц, становится организмом. Бесконечная делимость в этом вопросе, как было замечено, ведёт к первому дню Творения, когда Бог отделил небо от земли [42, р. 97].

4.2. *Место места.* Эта апория обычно представляется наиболее далёкой от физики. Приведём её развернутую формулировку в варианте Комаровой:

« ... Из этих текстов видно, что существующее есть нечто, которое определено в своей сущности тем, что занимает определённое место. А занимать место может лишь то, что имеет телесное протяжение, то есть ни свойство, ни понятие, которые не имеют протяжения, а лишь то, что существует самостоятельно, — вещь (тело). Поэтому телесному существованию противопоставляется место как бестелесное и несуществующее. Доказывается это от обратного. Допустим, место существует. Поскольку существующее непременно занимает место, то и само место, будучи существующим, должно занимать место, равное себе, и так должно продолжаться бесконечно. Получается бесконечное занятие места — одного и того же, или бесконечное нахождение одного и того же в месте места места места и т.д. бесконечно, что абсурдно. Значит, место бестелесно (ведь не может телесное находиться в телесном той же природы, а то опять в телесном этой же природы), и, значит, оно не существует. ... Ясно, что здесь имеется противопоставление первого места тому месту, внешнему для него, в котором оно находится, а этого последующего — следующему, а того — своему последующему

и т.д. А это возможно лишь при понимании места как пространственно протяжённого, вмещающего в себя пространственно протяжённое ... В аргументе Зенона речь идёт о существовании места по аналогии с существованием бытия. Телесному существованию, телесной протяжённости противопоставляется бестелесное существование и бестелесная протяжённость. Место противостоит телу, оно отлично от него и вместе с тем неотрывно от тела, ибо существует как данное место, только пока в нём находится занимающее его тело, и целиком поэтому определяется его величиной. ... Движущееся тело постоянно меняет своё место, переходит из одного занимаемого им положения в другое, незанятое. Так что же такое незанятое место, место само по себе? ... если место не занято, но всё же оно существует, как его можно постичь, даже просто обозначить? Таким образом, что такое место и существует ли оно — вопрос остаётся открытым» [2, с. 124–126].

Решение Аристотеля — «Место это то, что объёмлет тело и существует отдельно от него» [2, с. 127] — практически в точности повторено Э.В.Бетом в толковании числовой прямой (см. выше эту гл.). Это парадокс *имманентности—трансцендентности*, который имеет множество вариантов и вплотную подводит к числовой асимметрии нашей схемы.

Таким образом, протяжённому телу, занимающему объём  $V \subset R^3$  в евклидовом пространстве, ставится в соответствие его нульмерный (то есть бестелесный) ультраметрический (про)образ, состоящий из границ его частей, получающийся при бесконечной делимости протяжённости  $V$ :

$$R^3 \supset V \leftarrow \text{тело} \rightarrow V^* = (a_0 a_1 \dots a_k) \circ 2^{k+1} \quad Z_2 \subset Z_2$$

Напомним, что кластер в правой части может быть любой видимой формы, не переставая быть шаром в  $Z_2$ .

Поэтому множество евклидовых координат тела сопряжено с множеством  $p$ -адических ( $2$ -адических) его координат как вещественные и  $p$ -адические числа, как метрическое и ультраметрическое пространства. То есть место в евклидовом пространстве имеет своё место в нульмерном. Аддитивная мера Хаара (мера Лебега) протяжённости неотличима от мультипликативной меры Хаара: телесное протяжение совпадает с бестелесным — длина пустоты между дорожными столбами равна длине куска асфальта между ними.

В силу нульмерности и рефлексивных свойств  $Z_2$  бестелесное место присутствует в любой точке  $Z_2$  (самоподобие фракталов):

$$\forall m > n \quad p^m Z_2 \subset p^n Z_2,$$

и, следовательно, в  $R^3$  как его проекции. Итерация *место места места места* ... получается из голографической формулы и не представляет

собой ничего необычного. Рассмотрим, например, кусок вещества в его различных свойствах — теплоёмкости, электропроводности, упругости, а также значимости для различных видов деятельности — метании, как элемента декора, и т.д. Все его свойства сосуществуют в нём при переходе к его ультраметрическому (про)образу, то есть в пространство информатики. И поэтому его место как проводника электричества совпадает с его местом как проводника тепла, и его местом как ... и т.д. Более сложные объекты характеризуются очевидностью многообразия таких *мест* в пространстве свойств.

При движениях тела (группа Мёбиуса) меняется евклидово место, но бестелесное место остаётся неизменным. Например, нульмерное пространство можно имитировать пустым воздушным шариком. Его объём не меняется в сложенном виде или при надувании воздушного шарика. Место такого шарика в полёте везде.

Моноид  $\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_k$  в правой части «формулы» сопряжения мест определяет уникальность тела, и поэтому такое пространство есть аналог биологического пространства Аристотеля — каждая точка в нём уникальна [43, с. 24]. Известно, что все числа по любой базе, в том числе и по базе 2, то есть строки 0–1, являются нормальными, то есть включают в себя бесконечное число раз любой конечный блок символов алфавита. Поэтому строка моноида присутствует в любой точке  $Z_2$  и, как следствие, в  $R^3$ . Таким образом, в этой апории, в отличие от физического образа тела, его *место*, то есть нульмерный образ, нелокален, присутствует во всём евклидовом пространстве.

Рассмотрим примерный круг вопросов этой апории. Нульмерных пространств много не бывает, все они гомеоморфны канторову совершенно-му множеству, поэтому по смыслу интерпретации  $Z_2$  — общая субстанция существующих, но невидимых сущностей (полей и языка, чисел и слов).

В пространстве компьютера сосуществуют числовые операции и текстовые редакторы. Тогда проблема физического существования принимает вид парадоксальности глагола *существует* в языке [44, с. 205–209]. Эта апория — противоречие между пресуппозицией существования и предикативными свойствами глагола. И материально-идеальное бытие Парменида соответствует основной функции языка как материализации мышления и идеализации внешнего мира.

Второй пример — теле/радиосвязь, телевидение и гипертекст компьютерных систем. Точно так же, как выше,  $Z_2$  — электромагнитное поле. В одном и том же месте экрана телевизора или монитора присутствуют места для самых различных (нульмерных, виртуальных) протяжённых объектов, и один и тот же гипертекст появляется на экранах сколь угодно отдалённых компьютеров.



Третий пример. Собеседники, разговаривающие по мобильной связи, могут перемещаться как угодно в  $R$ , но при этом остаются неподвижными в  $Z_2$  в силу постоянства моноидов  $\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_k$  — координат собеседников в адресном пространстве (пространстве Аристотеля).

В функциональном анализе парадоксальной является следующая ситуация. Квантовые явления наблюдаются в лабораторных условиях, то есть в  $R^3$ , но описываются в бесконечномерном гильбертовом пространстве  $H$ , которое таким образом оказывается собственным подмножеством 3-мерного  $H \subset R^3$ . Выход из этого парадокса возможен, если  $H \subset Z_2$ . Такое включение получается, если закодировать вектора базиса  $H$  двоичными строками из  $Z_2$ , то есть интерпретировать квантовые явления как материальные в проективном пределе (то есть при бесконечной делимости), а  $H$  — как ультраметрический (про)образ соответствующей лабораторной обстановки. В этом случае голограмма формально связывает квантовые явления с различными материальными.

В этом случае получаем парадоксальный треугольник Пенроуза: физические процессы включены в математические, которые, в свою очередь, есть часть процессов мышления/сознания, которое, опять же в свою очередь, протекает в части физического пространства [45].

Иными словами, апория утверждает, что невозможно *тело внутри тела*, но возможно *ультраметрический (про)образ внутри ультраметрического (про)образа*, то есть  $Z_2$  внутри  $Z_2$ . Здесь точка выхода к одному из центральных свойств движения систем — синтезу. Физические материальные тела можно собрать в агрегат, но невозможно синтезировать, зато можно — их  $Z_2$ -образы. «Вещи мешают друг другу, идеи — нет» (Лейбниц).

*Место места* — квинтэссенция формального общего определения системы как объекта, допускающего различные, несводимые друг к другу математические описания [46, 47]:  $Z_2 \cong Z_2^1 \times Z_2^2 \times \dots \times Z_2^N$ , где верхние индексы пробегают множество математических языков-формализаций.

4.3. *Множество*. Всеобщность канторовского понятия множества, как показал Д.Мириманофф [25], входит в противоречие с интуицией и восприятием способов его образования. Во-первых, помимо *собирания* возможно образование множества *выделением*. И, во-вторых, понятие множества и понятие индивидуума (элемента) могут оказаться несовместимыми. Индивид (*неделимый* — лат.) Мириманофф понимал как атом, неделимая сущность. У Зенона апория возникает как противоречивость понятия неделимой единицы и слова *всё*.

Г.Вейль отмечал, что в математике используется на равных правах два способа образования множества: собиранием и описанием

общего свойства [48, с. 96, 106–108]. В аксиоматике выделению единиц соответствует аксиома фундирования и аксиома выделения  $FA$ , собиранию – аксиома множества-степени  $EXP$ . Аксиома фундирования является протоаксомой, ответственной за сам факт существования аксиоматического метода и возможность построения и развития формальных систем с атомарными переменными и функциями.

Эти две аксиомы связаны непредикативной, то есть неопределимой, связью. Выделение элемента предполагает некоторую их совокупность, которая в свою очередь состоит из индивидуумов [49, с. 58]. Здесь налицо пара конвергенция (выделение)–дивергенция (образование множества–степени). В виде Платона:

$$FA(e) \leftarrow \text{множество} \rightarrow EXP(e).$$

Поэтому противоречивость понятия множества в дополнительности выделения единиц и образования целого. Это в точности соответствует двум формам мышления – анализу и синтезу [50], и двум основным режимам зрения – выделению объекта с одновременным восприятием его частей [51, 52, с. 302]. Очевидно, что при образовании множеств выделением канторовы множества переходят в множества Мириманоффа, тела – в границы, потенциальная бесконечность – в актуальную. Эта двойственность обычно не различается в математической практике.

В итоге приходим к определению А.Ф.Лосева: «Множество есть понятие *единораздельной целостности* [53, с. 6]. Понятие единораздельной целостности, хорошее определение *Единого–Многого* Платона, в нашей схеме имеет точное формальное соответствие: (локально-)компактное (т.е. *опознаваемое чувственным зрением*), полностью несвязное (т.е. *разделённое!*) множество (т.е. *целое!*), то есть  $Z_p$  (или  $Q_p$ ).

Апория в изложении Комаровой:

«Что такое множество? С позиции привычных представлений, подкреплённых чувственным восприятием, это какая-то совокупность – вещей, свойств, частей, элементов и т.д. С позиций тогдашних философских учений, это многое, противопоставленное целому. Если подойти строго логически, по-парменидовски, то множество есть совокупность таких своих частей, каждая из которых сама не является множеством, то есть совокупность неделимых частей, а точнее, единиц. Именно так понимает множество Зенон: оно есть совокупность единиц, которые, в отличие от множества, неделимы. Определение вполне логичное, причём включающее в себя два предыдущих, значит исчерпывающее» [2, с. 129].

Парадоксальность, самопротиворечивость понятия множества в том, что,

«определяя различные совокупности в качестве многого, мы прилагаем к ним понятие “множество”, которое есть для всех одно и то же ..., то есть обозначаем совокупность как одно единое, объемлющее все единицы ... Выходит, что множество есть одно, которое есть многое (т.е. *парадокс Рассела, Лжеца. — Ф.М.*) ... если мы продолжим рассуждения Зенона аналогичным образом, множество и единицы оказываются в отношении природы сходными и различными, тождественными и нетождественными. Так единица, будучи той же природы, что и множество, тождественна с ним, но, обладая собственной природой, отличной от него, с ним нетождественна» [2, с. 130–131].

В качестве интерпретации рассмотрим двойной смысл образования множества – способами Кантора и Мириманоффа. Первый даёт  $R$ , второй –  $Z_2$  (ограничимся  $p=2$ ). Образование канторова совершенного множества  $C$  (вы)делением начальной единицы есть построение множества способом Мириманоффа, который, будучи продолжен в бесконечность, порождает нульмерное множество  $C \cong Z_2$ . Так оказывается, что множество «имеет и не имеет величины» [2, с. 132]. Заметим, что путь преобразования величины в канторову пыль – бесконечная делимость – не формализован, слит с обычной длиной и потому не учитывается в рассуждениях (см. определение координаты делимости Комаровой выше). На место неделимой единицы подставляется неделимая точка, не имеющая признаков существования – телесности. Формально повторяется решение апории (см. диаграмму выше).

Нульмерные множества все гомеоморфны друг другу и  $C$ , то есть подобны по неархимедову модулю и различны по архимедову: «Часть и тождественна целому, и отлична от него» (Энесидем). В  $Z_2$  подмножество тождественно (изоморфно) целому, то есть  $p^N Z_2 \cong Z_2$  и отлично от него в архимедовой метрике, в проекции на  $R$   $\left| \text{inv}(p^N Z_2) \right|_\infty < \left| \text{inv} Z_2 \right|_\infty$ . Соответственно, перестановка логики образования множества меняет местами непрерывность, так как они сопряжены в обеих метриках – вещественных и  $p$ -адических чисел.

С парадоксальностью понятия величины связаны космологические антиномии И.Канта [54]. Подставив в предыдущие рассуждения вместо мира –  $Q_2$  и величин – сопряжённые метрики чисел (см. гл. «Степенные законы»), получим:

1. «Мирограничен (в  $R$ ) и неограничен (в  $Z_2$ )» [54, с. 341–346]. Существует момент времени  $t=0$ , и он же равен бесконечности (последовательности

событий). Существует точка  $x = 0$  в пространстве, и она же есть окрестность бесконечно большого размера. В итоге: «Мир и имеет начало и границы во времени и пространстве, и не имеет их». Решение – гиперболическая связь метрик двух числовых систем:  $t = 0 \Leftrightarrow \tau = const \cdot t^{-1} = \infty$  и т.п.

2. Всякая субстанция и состоит из простых частей, и в мире нет ничего простого [54, с. 347–352]. Это утверждение о двойственно-числовом характере каждой (рационально воспринимаемой) вещи:

$[R \text{ протяжённая} \leftarrow \{ \text{ВЕЩЬ} \} \rightarrow \text{бесконечно делимая } Z_2]$ .

3. «Причинность по законам природы есть не единственная причинность, из которой можно вывести все явления мира. Для объяснения явлений необходимо ещё допустить свободную причинность» [54, с. 353–358]. Эта антиномия о двух логических осях молели и апорий Зенона. Соответственно, процессы  $|\bullet|_{\infty} \rightarrow 0 \vee \infty$  и  $|\bullet|_p \rightarrow 0 \vee \infty$  определяют два направления течения времени, то есть две причинности, которые действуют противоположным образом. Вторая, неархимедова, причинность неопределима над  $R$  и  $Z_2$  и подходит на роль кандидата свободной.

В более широком плане разнообразие причинностей порождается группой Мёбиуса, определённой над  $Q_2 = R \times Z_2$ . В символическом уравнении движения  $dy/dx = a$  величины производных как предельных переходов можно вычислить четырьмя способами; помноженные на два способа определения правой части, они дают восемь видов движений для каждого из подпространств числовой асимметрии. Из них одно – с тремя архимедовыми метриками – является определяемым, все остальные содержат неархимедов модуль и поэтому в той или иной мере являются свободными.

4.4. *Единое*. Перейдём к рассмотрению Зеноном природы Единого. Наиболее характерное его свойство – неделимость. Сопряжённость метрик даёт ответ на вопрос, имеют ли величину множество и его единицы; в одной из двух метрик оно имеет величину, в другой – нульмерно.

Апория заключается в противопоставлении результатов синтаксически идентичных процессов:

«... если каждая из единиц множества, являясь тождественной с собой и единой, не имеет величины, то и сущее, составленное из них, не имеет величины» [2, с. 133].

Здесь мы находимся в  $Z_2$ , которое как (нульмерное) множество не имеет протяжённости/телесности/величины, и логика есть процесс деления. Второе положение апории (о наличии у множества величины):

«... если же оно [множество] и существует, то каждая из его отдельных частей должна иметь какую-либо величину, толщину, расстояние

от любой другой части. И к лежащей перед ней будет применимо то же самое. А именно: и она будет обладать величиной, и перед ней будут лежать другие части. Итак, то самое, что было сказано, можно повторить до бесконечности. ... Вводя понятие единиц множества и бесконечное деление разделяющего их расстояния, Зенон разъяснил “бесконечное по величине” и одновременно открыл одно из основных противоречий... если сущее – множество, то оно должно быть и малым, и большим, настолько большим, чтобы быть бесконечным» [2, с. 134].

Здесь придётся обратиться к апории *Медимн*. В последней формулировке молчаливо предполагается распознаваемость множества и/или его единиц и/или расстояний между ними. Этого не может быть в нульмерных множествах (рассеянные мешки мешками не считаются). Поэтому во второй части апории речь идёт именно о протяжённых/телесных множествах. Поэтому здесь формулировка помещает нас в  $R$ , и логика есть процесс сложения протяжённых величин.

Парадоксальность единицы состоит в её двумерной семантике – синтаксически неделимость протяжённости неотличима от неделимости точки.

«Постановка вопроса о бесконечной делимости имеет у него философский смысл, поэтому в его рассуждениях отсутствует завершённое множество». ...Под завершённым множеством у Зенона понимается множество, полученное остановкой процесса деления (то есть фундированное. – Ф.М.). В то время как у Зенона бесконечность величины отражает бесконечность производимого процесса деления. Телесное всегда оказывается делимым. неделимые части неизбежно предполагаются не имеющими величины. Ведь только тогда завершится деление» [2, с. 134–136].

Формально здесь та же диаграмма Платона в отношении к единице:  
 $R \subset 1 \leftarrow \text{целое/единица} \rightarrow \bullet (\text{точка}) \in Z_2 = \neg 1$ .

В этих апориях поставлена проблема существования актуальной бесконечности [5, с. 277], с которой часто связывают существование закона её образования, без маскирующих точек типа «... и так далее» [55, с. 39].

В нашей схеме любую нелинейность вида аксиомы антифундирования  $AFA - X = A \cdot X$  или  $X = F(X)$  – можно рассматривать как закон образования бесконечности по делению; – как только существуют подобные нелинейности, так сразу существует бесконечная последовательность скобок:  $X = F(((... ((... (X) = F(... (... (...))) ...))$ . В нашей модели таким образом актуальной полагается бесконечность по делению в

идее нефундированных множеств. Поэтому бесконечное число протяжённых частей может существовать только потенциально.

В таком виде наша схема согласуется с теорией нормальных чисел. В нормальных числах все блоки цифр одной длины появляются с равной вероятностью (здесь требуется актуальность бесконечности) [56, Ch.8.11, p. 103]. Для сложных систем (забегая вперёд) это имеет вполне определённое содержание, связанное с их универсальностью, трансдисциплинарностью, «заражённостью» парадоксами [57].

4.5. *Апории о движении.* Предварительно сделаем одно замечание. Как следует из апории *Медимн*, человеческое восприятие (и это известно из экспериментальной психологии) обладает пороговым свойством. То есть числа, получаемые измерением/восприятием, являются рациональными (см. теорему Островского) и изображаются конечной строкой нулей и единиц:

$$r = a_0 a_1 \dots a_n \in Q .$$

И состояния наблюдений *видно, но не слышно, не видно, но существует* предполагают различие порогов восприятия/ способов измерения для каждого из чувств. Интенсивность каждой величины связывается со своей числовой прямой. Поэтому возникает проблема восприятия связности, если её элементы имеют пороговый, дискретный характер.

Рассмотрим следующее рассуждение. Для каждого из человеческих чувств  $s \in \{\text{зрение, слух, осязание, ...}\}$  существует порог  $s_0 = \min_k |s_k|_\infty$ . По определению связности, данному Кантором, множество  $M$   $\varepsilon$ -связно, если  $\{\forall m_i, m_j \in M \exists \varepsilon > 0 \ m_i \in U_\varepsilon(m_j)\}$ . Множество связно, если оно связно для любого  $\varepsilon > 0$  [58, 59]. В этом случае константы  $s_0$  выполняют функцию констант связности  $\varepsilon$ , которые превращают  $Q$  в  $R$ , имитируя процесс пополнения. Этот вариант *логически построенных* действительных чисел  $R^\#$ :  $R^\# = prZ_2$  будем отличать от  $R$  – *чувственного образа* движущейся точки, «живого понятия» [72, гл.8]. В символическом пространстве  $Z_2$  описанным путём можно получить  $R^\#$ , оцифрованную прямую, но не  $R$  – движение, *не производящее счёта*. «Прямая»  $R^\#$  образуется мультипликативной мерой Хаара – неархимедовой метрикой, то есть это в точности фрактал, полученный проекцией из  $Z_2$  [37, Ch.1]. С прямой  $R$  чистое движение, по неразличимости её с  $R^\#$  – проекции  $Z_2$ , переносится на  $R^\#$  аддитивная мера Хаара – мера Лебега. (**Замечание.** Смещение понятий происходит от того, что фрактальная наука начиналась и во многом остаётся наукой об алгоритмическом построении изображений на (евклидовой) плоскости экране монитора, где разница между этими числовыми прямыми несущественна. К тому же образы никогда не считались допустимыми аргументами в математике).

Эти рассуждения к тому, что обе прямые  $R^\#$  и  $R$  присутствуют в апориях о движении. В них Зенон строит аргументы как противоречие чув-

ственно воспринимаемого движения и логики рассуждения, или как противоречие между  $R^\#$  и  $R$ , то есть противоречие между логической связностью, порождённой  $Z_2$  и выдаваемой за движение, и самим движением, происходящим в пространстве, ортогональном  $Z_2$ . Поэтому

«для Зенона принципиально важны оба элемента в структуре апории: и реальность движения как характеристики чувственного бытия, и строгое соблюдение логического хода рассуждения как характерная черта доказательного мышления» [Комарова, с. 138].

#### 4.5.1. Дихотомия.

«Основное условия задано положением: движущееся должно достичь середины (проходимого) пути прежде, чем дойти до конца, или, более кратко, пройти половину пути раньше, чем весь путь. Рассуждение состоит в повторении этого условия последовательно раз за разом: прежде чем пройти половину, движущееся тело должно было бы пройти половину этой половины, то есть  $1/4$ , а до этого — половину данной половины, то есть  $1/8$  и т.д. Вследствие нескончаемой возможности утверждать «прежде чем ...» и заданной непрерывности пути, деление будет продолжаться бесконечно, и, значит, движение, согласно условию, не может начаться. Следовательно, движение невозможно» [Комарова, с. 141].

Эта апория связана с апорией Множество. В них Зеноном одинаково используется бесконечная делимость протяжённых/телесных величин, которая формирует вторую семантическую ось логики как существования, так и движения [2, с 151, 155]. Наконец, что, возможно, наиболее близко проблемам приложений математики: в *Дихотомии* доказывается невозможность движения при условии его прерывности, то есть, говоря топологическим языком, на полностью несвязном множестве, то есть на  $Z_p$  (или  $Q_p$ ). Это, в свою очередь, означает, что формализм Гильберта, породивший, кстати, формальные языки, неспособен отобразить движение (см. замечание С.Яновской). Поэтому  $R$ , то есть привычная связная числовая ось, есть несимвольный, то есть нематематический, объект. Можно сказать, что связные прямые/кривые есть функции без аргументов. К ним неприменимо «читающее» определение как совокупности пар  $f(x) = (x, y)$ .

Рассмотрим апорию формально. Из теоремы Островского (в версии нашей схемы) и по принципу переноса путь равен  $S = v \cdot t$ . Рассмотренный над двумя числовыми системами

$$S = |v \cdot t|_2 \cdot |v \cdot t|_\infty = |S|_\infty \cdot |S|_2 .$$

Свободное (*не производящее счёта* – по Аристотелю) движение имеет вид:

$$|S|_{\infty} = |N_a \cdot 1|_{\infty}.$$

Движение по условию *Дихотомии*:

$$|S|_2 = |2^{N_u} \cdot 1|_2.$$

«Покоординатное» сложение движений  $S = |N_a \cdot 1|_{\infty} \times |2^{N_u} \cdot 1|_2$  есть движение по двум взаимно неопределимым осям  $R$  и  $R^{\#}$ . Здесь  $N_a$  – последовательность сложений длин, течение времени-длениа;  $N_u$  – последовательность делений, время–порядок. Причём эти числа связаны гиперболической степенной зависимостью:  $N_a \cdot N_u^{-D} \propto const$ .

Поэтому картина движения следующая (см. толкование А.Д.Арманда):

$$N_u \rightarrow \infty \Leftrightarrow S \rightarrow 0;$$

$$N_a \rightarrow \infty \Leftrightarrow S \rightarrow \infty$$

Первая строка и означает невозможность начать движения (если всё время считать). Известна современная версия апории – «анализ губит человеческую активность». Эта апория также и о неумелом (или зловредном) руководителе, который, поставив перед подчинённым задачу, начинает заваливать его посторонними, но «необходимыми» задачами, а к сроку исполнения вопрошает о результате.

4.5.2. *Ахиллес и черепаха*. Эта, наиболее известная, апория заключается в доказательстве того, что более быстрое никогда не догонит более медленное. По Аристотелю:

«Ибо прежде, чем преследующее явилось [туда, откуда отправилось преследуемое], преследуемое уже неизбежно выступило оттуда; а поэтому оказывается, что более медленное всегда должно находиться впереди. Есть у него [Зенона] такой аргумент, в котором надо делить дихотомически, отличается же [он] тем, что в этом [втором] проходимость величину не надо делить на две равные части» [Комарова, с. 158, 160].

Анализ Комаровой вскрывает вторую логическую координату (см. цитату выше):

«Исходным пунктом в его рассуждении является тот момент, когда Ахиллес начинает преследование черепахи, движущейся впереди него. ... Сперва он должен достичь того места, где находилась черепаха в момент его старта (это специально оговоренное условие и самый существенный момент всего доказательства). Когда он достигнет его, черепаха окажется впереди него, ибо успеет за это время продвинуть-



ся дальше, и он должен будет бежать к новой цели. И опять прибежав туда, он не застанет её, ибо за то время, что он потратил на бег, она продвинулась на какое-то расстояние, пусть даже самое незначительное, но и его надо преодолеть и затратить на это время, и так бесконечно. Величина проходимого пути и затрачиваемого времени будет уменьшаться, но не сможет исчезнуть, поэтому самое быстрое никогда не догонит самое медленное. *Это абсурдно, но логически (!) при соблюдении заданных условий неизбежно*» [Комарова, с. 159–160].

Ошибочность принятого на сегодняшний день Стандартного решения апории [1] в виде сходящегося ряда длин отрезков, выражаемых действительными числами, показана анализом Д.Гильберта и П.Бернаиса (см. цитату выше). Однако здесь дело не только в актуализации бесконечности сумм ряда, но и в том, как задаются/определяются вещественные числа.

«По Фреге, они задаются как совокупность всех мыслимых одноместных предикатов, существование которой предполагается. Этот метод оказывается несостоятельным ввиду обнаруженных Расселом и Цермело знаменитых логических и теоретико-множественных парадоксов» [Гильберт, Бернаис – там же].

Иными словами, Стандартное решение возвращает нас к апории *Множество* и парадоксу *Лжеца*. Поскольку связность неопределима, любое определение действительных чисел формальным определением, последовательностями Коши или естественно-языковой номинацией (таковы условия, задающие бег Ахиллеса) способно породить  $R^\#$ , но не  $R$  (см. выше). То есть при соблюдении условий апории Ахиллес «бежит» по  $R^\#$ , а черепаха движется по  $R$ . Парадоксальность в том, что при однонаправленном времени порядки на этих геометрически неразличимых числовых осях противоположны. Длины отрезков Ахиллеса даются мультипликативной мерой Хаара, черепахи – аддитивной.

В качестве предиката, упоминаемого Гильбертом и Бернаисом, выступает условие: *когда он достигнет того места, где была черепаха, черепаха окажется впереди него ....* Это условие-предикат и делит/оцифровывает путь Ахиллеса, и он движется прерывно, в то время как черепаха продолжает чертить связную траекторию. Именно на этой связной траектории образуются отрезки преследования Ахиллеса, порождаемые  $p$ -адическими числами как предикатами (см. интерпретацию  $p$ -адических чисел Л.А.Калужнина). В этом отличие *Ахиллеса и черепахи* от Дихотомии.

«Двигаются они не одинаково, а различно. Черепаха движется непрерывно к какой-то своей цели; Ахиллес же движется прерывно: в каждой части к новой цели. А это сразу предполагает их несоизмеримость» [2, с. 166].

Несоизмеримость, как известно из истории несоизмеримых отрезков, означает ортогональность. В данном случае — это гиперболическая ортогональность, выражаемая в нашей схеме гиперболическим соотношением метрик вещественных и  $p$ -адических чисел.

Формально, путь черепахи, составленный из пропорционально уменьшающихся отрезков, в обозначениях нашей схемы имеет вид [2, с. 165–167, где  $p = 10$ ]:

$$S_T = p^{-n} + p^{-(n+1)} + \dots + p^{-k} \in R.$$

Он становится временным условием для движения Ахиллеса  $t_k = \text{inv } S_T$ :

$$t_k = p^k + p^{k-1} + \dots + p^n \in Z_p$$

Тогда путь Ахиллеса по формуле, аналогичной Дихотомии, примет вид:

$$S_A = \left| N \cdot 1 \right|_{\infty} \times \left| t_k \cdot 1 \right|_p \propto p^{-k} \rightarrow 0 \in R,$$

где  $N$  — число шагов до первой формулировки условия. В этом случае начальный отрезок уменьшается в геометрической прогрессии. Длины отрезков преследования Ахиллеса имеют двойную причину образования *протяжённость—делимость* при любом — пространственном или временном, толковании длин, то есть разный принцип формирования [2, с. 167–168, 171–172]. То же относится к длинам-скоростям [2, с. 173–175].

Изложенный способ толкования парадокса можно пояснить, если запрограммировать апорию — тогда её исчезновение станет очевидным. В этом случае потребуются две подпрограммы: одна — вычисляющая движение черепахи, вторая — как задающая результат первой, начало следующего этапа бега Ахиллеса. Соответственно, придётся передавать управление с подпрограммы «черепаха» в подпрограмму «Ахиллес», то есть переключать времена. На это потребуется пусть малое, но отличное от нуля время, когда Ахиллес будет вынужден стоять. Это и есть скрытое в апории событийное время и двумерная логика, высвеченная анализом Комаровой. Конечно, здесь ничего не меняет замена подпрограммы «черепаха» с цифровой на аналоговую. Это уже из области следящих систем, автоматизированного и автоматического управления (и не только автоматического!). Точно также исчезнет парадокс, если разметить половинками путь Ахиллеса, но дать ему возможность двигаться свободно, без программной задержки, по отдельной программе.

Как замечено [73, предложение 3, с. 282], в теории множеств справедлив изоморфизм  $Z_2 \cong C \cong [0, 1]$  между 2-адическими числами, кан-

торовым совершенным множеством  $C$  и отрезком числовой прямой. Но при переходе к мерам возникает парадокс:  $\mu(Z_2) = \mu(C) = 0$ , в то время как  $\mu([0, 1]) = 1$ . Это значит, что достоверное и невозможное события эквивалентны. Так же и в апории: если Ахиллес догонит черепаху, то есть пройдёт весь путь, то он, по логике апории, не сможет даже начать движения [2, с. 169].

Ещё одна версия этого парадокса: введение действительных чисел последовательностями Коши. Последовательности Коши, уложенные в диадическое, например, дерево, имеют нулевую меру, а их пределы, то есть вещественные числа, — полную.

Круг вопросов, затрагиваемых апорией, очень широк. В целом это следствия неполноты формализации, логическая и числовая одномерность. Таким, например, является прогнозирование динамики систем, в частности социально-экономических, методами теории дифференциальных уравнений в евклидовом пространстве. Такой прогноз всегда есть влияние на социум и экономическую среду. Попытка учесть этот эффект приводит к корректировке прогноза и т.д. до бесконечности [74]. Опыт такого моделирования, как известно, отрицателен: надёжное прогнозирование динамики сложных объектов не состоялось [75, с. 83].

4.5.3. *Стрела*. Содержание апории Стрела существует в двух формах. Первая есть вариация *Дихотомии* в применении ко времени, временной числовой оси:

«Время полёта стрелы можно представить в виде множества мгновений, в виде мельчайших неделимых далее моментов: во время полёта стрела каждое мгновение находится в каком-то определённом месте, и это означает, что в каждое мгновение она находится в покое» [2, с. 189–190; 5, с. 281].

Стандартное решение использует понятие мгновенной скорости в точке траектории. Оно, по сути, не объясняет, но лишь кодирует движение и не затрагивает существа аргумента [5, с.282]. Интерпретация первого варианта аналогична *Дихотомии* и её формальное истолкование сводится к той же формуле.

В связи со второй формой апории рассмотрим толкование парадоксального временного понятия момента *теперь*, который непосредственно связан с движением, отличая прошлое от настоящего и будущего, на котором основана эта форма апории. Объяснение Комаровой:

«... очевидно, что время всегда существует в неразрывной связи с бытием, ибо оно всегда заполнено. ... В более общей постановке фор-

ма времени всегда существует как настоящее время, но настоящему предшествует прошлое, его сменит будущее. А это значит, что время есть длительность. Вот эта длительность есть характерная черта для времени: есть длительность — есть и время, нет длительности — нет и времени. ... Время имеет величину и, значит, подобно всякой другой величине, должно быть делимо. Ведь если бы оно было неделимо, то представляло бы сплошную длительность и его нельзя было бы фиксировать в моменте как настоящее. Но бытие как раз и существует в *настоящем*, и время действительно лишь для этого бытия. Зенон находит для него поразительно точный и наглядный термин *теперь*.

... Таким образом, получается два значения *теперь*. Одно выражает настоящее время, то есть действительно существующее время вместе с его длительностью, другое — тот неделимый момент, в котором фиксируется положение движущегося тела в настоящем, его действительное положение. Оба обозначения верны, но в отношении своей величины противоречат друг другу. А величина, то есть длительность, выражает их сущность, следовательно, противоречат они друг другу по своей природе. В первом своём значении *теперь* имеет величину, а во втором — не имеет. Будучи неделимым моментом, оно не может иметь никакой длительности, на то оно и неделимо. Будучи таким неделимым, оно вообще не является временем, не существует как время. Но в таком случае и всё время не имеет длительности, ибо оно есть совокупность этих *теперь*, и всё время как таковое не существует» [2, с. 111–112 и далее].

«Силлогизм получается у Зенона без деления времени на многие *теперь*. Суть в том, как понимаются эти *теперь*. Время, в отличие от пространственной протяжённости, нельзя представить совокупностью *теперь* (не просто неделимых, а именно *теперь*), невозможна одновременность их существования. Её [апории *Стрела*] условия составлены так, что в доказательстве нет места для посылки о времени, складывающемся из неделимых. Напротив, в нём подчёркнуто, что движущееся тело всегда пребывает в *теперь*» [2, с. 181].

Во всех вариантах изложения апории неизменными оказываются посылки:

« ... время полёта стрелы, составленное из неделимых мгновений (теперь), “всё всегда занимает равное себе место” и “движущееся тело находится в неделимом моменте”» [2, с. 189].

В нашей схеме величина длительности имеет две формы — длительность пустоты и длительность связности. Первая есть расстояние меж-

ду двумя точками пустого промежутка (*возможность* длительности), вторая — длина связного, заполненного отрезка (*действительность* длительности). Первое — событийное время, *время—порядок* между двумя различными событиями, второе — физическое *время—длительность*. Первое есть результат дивергентных процессов, процессов деления, второе — конвергентного, слитного движения. Очевидно, существует прямое соответствие между понятием времени теперь и пространственным *здесь* — то, что наблюдается *теперь*, находится *здесь*, в поле зрения наблюдателя [34, с. 288]. Мгновенное срабатывание затвора фотоаппарата в момент *теперь* фиксирует дивергентную картину фотоотпечатка — образ *здесь*. Это *здесь* как настоящее может иметь различный размер — от миллионов лет для палеонтолога, тысяч лет для историка, суток для синоптика, долей секунд для спортсмена легкоатлета [34, с. 289–291]. Таким образом, момент *теперь* имеет также два взаимно дополнительных представления — как точка на оси времени и как фотоснимок/картина/образ, наблюдаемого в этот момент. Эти различия в величине *теперь* лежат в явлении эгоцентрических слов языка, когда говорящий, то есть наблюдатель, может поместить себя в любую точку обозреваемого пространства-времени [76, с. 224].

В этой апории момент *теперь* есть более сложная оцифровка временной траектории полёта стрелы. Здесь полезно ввести понятие наблюдателя и пару *возможное—действительное*, что сделано ещё Аристотелем, различающую движение и делимость. Длительность времени здесь, то есть на фотоснимке/образе *теперь* есть *физическое время, длительность в возможности*, момент срабатывания затвора в руках наблюдателя — точка *теперь* в действительности. На самом деле для любого живого существа *теперь* имеет конечную, но разную длительность [34, с. 291].

Применим к объяснению апории ту же схему, что в Ахиллесе и черепахе, определив путь летящей стрелы над двумя числовыми системами. Путь Стрелы имеет вид:

$$S = v \cdot t = \left| v_A \cdot t \right|_{\infty} \times \left| v_U \cdot \tau \right|_p ,$$

здесь  $v_A$ ,  $t$  и  $v_U$ ,  $\tau$  — скорости и времена по двум логическим осям протяжения  $R$  и деления  $R^\#$ . В момент *теперь* второй множитель постоянен, он равен полю зрения *здесь*, площади фотоотпечатка — области имени в виду. Для наблюдателя это внутренность телесного угла, вершина которого помещается в глазу наблюдателя, а основание упирается в плоскость полёта стрелы [60, с. 302, и по всей книге]. Очевидно, что различные телесные углы, определяющие поля зрения, не могут существовать одновременно и, чередуясь, имитируют чередование прошлого, настоящего и будущего. Здесь мы подходим к вопросу о

том, «что замечать время — значит замечать сознание, и наоборот» [61, с. 384], то есть связи наблюдателя и объекта, который далеко выходит за рамки простой механики апории. Отметим лишь очевидную параллель природы сознания и структуры аргумента Зенона: *время, как момент — время, как поток*. «Время переживается как ощущение длительности и как психологический момент» [61, с. 385–388].

Рассмотрим момент *теперь*, который из теоремы Островского получается в виде:

$$t = {}^{\infty} \{ \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n \}_p ,$$

$$\forall t \in Q \quad \exists \xi \in Z_p \quad T = \left| \xi \right|_{\infty} \cdot \left| \xi \right|_p = t \cdot \tau .$$

В этой записи верхний индекс  $\infty$  и нижний  $p$  символизируют образование архимедовой и неархимедовой величин из строки  $\xi$ . Так, в памяти компьютера из одной строки можно получить и число, и код/команду/слово. Причём, как обычно,  $t \cdot \tau = const = T$ . Константа в правой части задаёт размер образа *здесь*, который характеризуется длиной строки  $\xi$ .

Вывод очевиден:  $t \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , то есть *действительное* движение стрелы останавливается, когда оно переходит в *возможность*, а *действительным* становится делимость времени. Череду делений — это тоже время, только событийное. Вновь в вещественных числах слиты два порядка времени —  $R^{\#}$  и  $R$ .

С позиции апории *Место места* возможное движение стрелы: всё евклидово пространство, точнее, всё *здесь* становится действительным, когда делимость переходит в возможность. Поэтому в  $Z_p$  присутствуют прообразы всех трёх модусов времени — прошлого, настоящего, будущего. Здесь раскрывается ещё одно значение момента *теперь*. Как следует из  $t \cdot \tau = const = T$  и представления *теперь* в виде  $t = {}^{\infty} \{ \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n \}_p$  при  $t \rightarrow \infty \quad \tau \rightarrow 0$ . То есть физическое будущее есть биологическое, системное (*ан-атомическое*) прошлое, и наоборот. В первом случае строка для  $t$  имеет вид сжимающего направления динамики, то есть это путь к детерминизму. Во втором — это сдвиг Бернулли, движение растягивающее и полностью случайное [43, гл.10]. Биологическое будущее ветвится событиями, физическое возможно при их полном отсутствии — это абсолютное пустое пространство-время Ньютона, область теоретической механики, где у события допускаются лишь незначительные флуктуации.

Круг вопросов *Стрелы* тот же, что и в *Ахиллесе и черепахе*. Но явное присутствие момента *теперь* и присутствие наблюдателя добавляет сюда вопрос о проектировании/создании систем, в котором механика уже не играет определяющей роли.

Отдельно вернёмся к проблеме прогноза системных явлений. Пусть некоторая функция  $X = F(\alpha, t)$  даёт прогноз  $X^* = F(\alpha, t_0 + \Delta t)$  при достаточно большом  $\Delta t$ , которое по практике моделирования есть физическое *время—длительность*. Как это следует из рассмотрения и *Ахиллеса и черепахи*, и *Дихотомии*, и *Стрелы*, это означает, что в интервале  $[t, t + \Delta t]$  в этом случае отсутствуют всякие изменения/события в динамике и весь этот интервал есть неделимый момент *теперь*, когда с системой ничего специфически системного не происходит, то есть движение происходит в пустом пространстве, что, конечно, нетипично для реальных сложных объектов. Поэтому чаще всего возможным оказывается короткий прогноз, когда движение системы не прерывается событиями и она движется как материальное тело. Системное будущее в этом случае отсутствует.

4.5.4. *Стадий*. Это самая очевидная и в то же время самая сложная из всех апорий Зенона. Форма *Стадия* и его облачение утеряны безвозвратно [2, с. 197], и, соответственно, эта апория имеет различные формулировки [62]. Мы примем её в форме Комаровой, что включает в себя [2, с. 191–227] аргументы о *множестве, движении, месте места и образе бесконечности, как вечно уходящего вглубь бытия деления пополам* [2, с. 196] – всего спектра проблем *Единое—Многое*.

Стадий не привлекает к себе того внимания, как другие апории о движении, в силу «объяснимости» относительным движением и даже как зародышевая форма релятивистского понимания времени [63]. Эти решение воспроизводятся в стандартном решении [15].

Анализ Комаровой позволяет увидеть все детали Стадия и логическую связь всех апорий. После реконструкции Комаровой исходная формулировка:

«Два ряда равных величин, движущихся с равной скоростью навстречу друг другу, начинают движение с двух концов беговой дорожки величиной в стадий и, прежде чем достичь другого, противоположного для себя края, должны одновременно пройти её середину, миновав при этом как друг друга, так и равную с ними, но неподвижную величину, расположенную в середине. В таком случае получается, что одна и та же величина, движущаяся с одинаковой скоростью, проходит мимо движущегося и мимо покоящегося за одно время, ибо движущееся тело занимает в неделимый момент одно [и только одно] место, независимо от того, движется или покоится то тело, мимо которого происходит движение» [2, с. 208].

«... и в Стадии, если учесть прежние рассуждения, апорийность получена вследствие того, что первоначально введено движение величин,

состоящих из единиц, а затем рассмотрение доведено до движения самих неделимых единиц, движущихся в конечное неделимое время. ... благодаря чему весь ряд [тел] выступает не только как сумма отдельных минимальных величин, но и как одна единая величина [2, с. 194–195].

Здесь, очевидно, двойное представление тела (множества) как физического объема/величины, и как его нульмерного, ультраметрического, то есть цифрового, прообраза, возникающего при представлении его границами своих частей.

«Покоится тело или движется – величина его одна и та же. Это для Зенона аксиома не только в данном аргументе, но и во всех без исключения» [2, с. 215].

В итоге получается парадоксальный результат: длина временного промежутка совпадает с его удвоенным  $t = 2 \cdot t$  [2, с. 193]. Этот результат имеет вид аксиомы антифундирования, то есть уравнение имеет решение в  $Z_2$ :  $\tau = 0 + 2(0 + 2(0 + \dots(0 + \dots))) \dots$ . Именно из-за этого парадоксального соотношения времени в толковании парадокса несущественно, являются ли движущиеся тела сплошными или составными [62].

Тем самым в рассмотрении скрыты (не проговорены) нульмерные варианты движущихся тел. Нульмерные тела (получаемые *уходящим вглубь делением пополам*) Зеноном не рассматриваются, они неявно возникают в его рассуждениях как контраргументы основной логике (так же, кстати, как и в современной математике). Поскольку нульмерные множества гомеоморфны, то есть сохраняют изоморфизм при движении/растяжении, то

$$l_A(Z_2) \cong l_B(Z_2) \cong \dots \cong l_I(Z_2) \text{ при } l_A \neq l_B \neq \dots \neq l_I.$$

Это следствие общего результата экспоненциальной полноты  $S$  [64, Ch.IV]:

$$S \cong Z_2 \Rightarrow Z_2 \cong \exp(Z_2) \cong \exp(\exp Z_2) \cong \dots$$

Согласно нашей схеме,  $R$  с аддитивной мерой (длиной) Хаара (то есть длиной Лебега) и  $Z_2$  с мультипликативной мерой Хаара, с обратной пропорциональной зависимостью между ними, соотносятся как *действительное* и *возможное*. Поместив наблюдателя на одно из тел, то есть связав с ним архимедову, аддитивную длину этого тела, мы получим сокращение неархимедовых длин *нульмерных прообразов* действительных тел в неделимый момент времени, точно так же вводя телесные углы зрения Гибсона, как в *Стреле*. В *действительности* наблюдатель



на неподвижном теле наблюдает *в возможности* сокращение длин нульмерных движущихся тел. Аддитивной мере Хаара (*в действительности*) здесь соответствует мультипликативная мера Хаара (*в возможности*), которые связаны обратно пропорциональной зависимостью.

При помощи современной видеотехники можно, поместив видеокамеру на одно из движущихся тел, отделить *действительное* (массу тела) от *возможного* — нульмерного образа того же тела. Телевидение проводит этот опыт ежедневно и многократно. Поместим видеокамеру и наблюдателя в движущуюся координатную систему и выведем изображение в неё же — систему координат наблюдателя. Наблюдатель при помощи этой техники может видеть себя в координатной системе, движущейся с большой скоростью. Что здесь будет сокращаться?

Формально, длина тела, как и длина траектории стрелы, аналогично *Ахиллесу и черепахе*, равна:

$$S = |v \cdot t|_{\infty} \times |2^{k \cdot N} \cdot \tau|_2.$$

Обозначения здесь те же:  $t$  — время—дление,  $\tau$  — время порядок, получающееся из парадоксального соотношения (см. выше),  $v$  и  $2^{kN}$  — скорости физического и событийного движения. В неделимый момент *теперь* второй множитель постоянен — *Стрела* летит без препятствий, без счёта. Включение  $\tau$  приводит к изменениям длин.

*Место места* возникает в апории как понятие непрерывного перехода между местами [2, с. 202, 206]. Вновь, как и в *Стреле* и *Месте места*, в неделимый момент времени ничто не нарушает движения тел, и весь неделимый момент времени оказывается местом непрерывного перехода, то есть характеризуется осью  $R$ , но не  $R^{\#}$ . В таком переходе нет никакой границы [2, с. 203] (то есть оцифровки. — *Ф.М.*). Говоря словами Зенона, «соседние *места* не имеют между собой никакого расстояния» [2, с. 203].

4.5.5. *Бесконечная делимость*. Мы уже упоминали, что в аргументах Зенона нульмерные множества явно не присутствуют, но рассматривается процесс бесконечной делимости тел. С этим связан парадокс *бесконечной делимости* [11]. Что останется в результате этого процесса? Не длина, так как она делима, не точки, так как из точек нельзя сложить тела. Тогда что? С этого процесса, собственно, начиналась наша схема числовой асимметрии. Инвариантом бесконечной делимости являются  $p$ -адические числа  $Z_p$  в интерпретации С.Улама. Они же — нульмерные множества, из которых проекцией получаются тела, то есть подмножества  $R$ , любой формы [77].

Более полный анализ этого явления уводит в одну из линий философии, в частности в восточную философию, — о первичности пустоты в её соотношении с современными представлениями о физическом вакууме, к выводу Дж.А.Уилера «*It from Bit*».

*Заключение.* Апории Зенона можно свести в диаграмму соответствий между «словесными формулировками условий» и их числовыми эквивалентами. Общая ситуация заключается в том, что в рассуждениях объект участвует своими двумя видами, как *Единое* и как *Многое*, которые связаны двумя видами процессов – *соединением* и *делением*, которые и составляют логику апорий (см. рис.) и имеют различную формулировку в них:

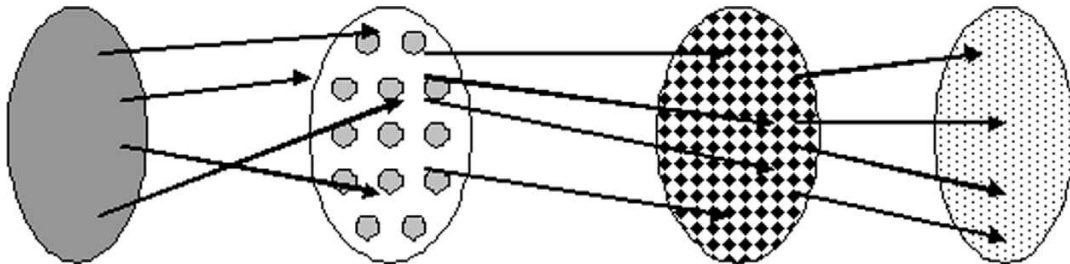


Рис.1. Единое  $R$  – Многое - ...-  $R^\#$ . – Неделимое  $Z_2$

На диаграмме ниже – *Единое* Платона, то есть *величина (протяжённость)* Зенона, представлено вершинами  $R^\#$ , «целое (связное, делимое)», «единица (делимая)». *Многое* и *единица (неделимая точка)* – вершиной  $Z_2$ , показанной «почти нульмерно». Вершина в центре символизирует расщеплённое отрицание – взаимную отрицаемость/дополнительность процессов конвергенции (соединения – сплошные стрелки) и дивергенции (бесконечного деления – пунктирные стрелки). Так целое – жирная линия, – подвергнутое отрицанию, распадается на единицы – жирный пунктир. И обратно – пунктир в конвергенции сливается в сплошную линию. Соотношения между  $Z_2$  и  $R^\#$  – те же.

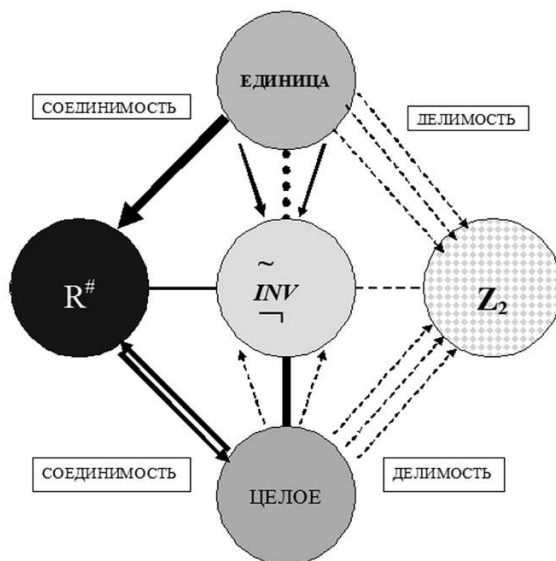


Рис.2. Апорийная диаграмма Платона–Зенона

Связная числовая ось  $R$  – свободный бег *Ахиллеса* и *черепахи*, полёт *Стрелы* в неделимом *теперь*, то есть данные чувств не входят в логику. Они находятся вне диаграммы – «на трибунах стадиона» – из-за действия инволюционного антиизоморфизма (т.е. *зеркальной*

*наоборотности* — термин Т.П.Григорьевой), и только наблюдают за происходящим.

Вместо процессов деления и соединения вполне можно представлять два режима наблюдения: абстрактное выделение целого и углубление в детали (см. степенные законы).

*Замечание о наблюдателе.* Апории Зенона возникли «прямо из головы», то есть сформулированы нашим восприятием и сознанием. Поэтому очевидно, что они должны быть также связаны с природой сознания и языка. Этому будут посвящены отдельные главы. Здесь мы приведём факты из обзорной книги по природе сознания Г.Ханта:

«... мне неизвестны никакие обоснованные доводы, которые бы показывали, что выражения человеческой природы в каком-то смысле ошибочны по сравнению с представлениями физических наук. На самом деле последние сейчас сражаются с относительностью, дополнительностью и индетерминизмом, которые всегда были присущи всякому выразительному самоописанию [61, с. 372].

... Дэвид Бом (Bohm, 1980) высказал предположение, что организационные принципы современной физики — относительность пространства/времени, дополнительность, индетерминизм и, мы можем прибавить, нелинейная динамика отражают всё большее приближение наших математических построений к фундаментальной организации самого восприятия». [61, с. 378].

В ней много места и с разных точек зрения уделено объяснению и описанию взаимоопределяемости пространства, времени и наблюдателя (*чувствующего существа*) в в пространстве экологического строя восприятия Дж.Гибсона — альтернативы пустому пространству-времени физики. Экологический строй Гибсона есть не что иное, как фрактальная геометрия природы, заполненной движущимися формами, их границами, частями, границами частей и т.п. Приведём положения, непосредственно связанные с оппозицией *протяженность—делимость* или её вариантом *непрерывное—дискретное*.

«Сам Гибсон (1975) полагал, что время не может быть нигде, кроме текучего строя претерпеваемых событий. С точки зрения его переинтерпретации Канта, пространство, время, причинность и самость следовало бы понимать как соопределяемые и неразделимые аспекты единого, целостного экологического строя. Коль скоро мы говорим о спонтанном движении существа через его объемлющий строй, мы имеем пространство, строящееся целиком из свойств последователь-

ного асимметричного потока, который также самоопределяет положение этого существа в его строе и создаёт поле последовательностей «если, ...то» появления и удаления поверхности. Как только мы делаем последовательность-движение константой, аналогичной скорости света у Эйнштейна, все остальные протоформы оказываются относительными к специфике этого потока» [61, с. 382].

Феномен наблюдения возможен при согласовании потока времени и сознания [61, с. 384]:

«Замечать время – значит замечать сознание, и наоборот. Мы увидим, что это справедливо и для их потоков, и для их пульсаций. [61, с. 385]. ... Джемс говорил, что сознание течёт, причём в каждом течении существует множество капель, а в каждой капле – тоже течение. Неудивительно, что это вполне согласуется с двоякой направленностью когнитивно-психологических исследований восприятия времени – как ощущения длительности и психологического момента» [61, с. 385].

Восприятие непрерывности нашими чувствами ( $\varepsilon$  – непрерывность Канта) объясняется движением «перемещающегося окна» или «перемещающегося момента» [61, с. 385], которые представляют собой синтез или интеграцию пульсаций – моментов сознания. За единицу синтеза предложен промежуток в 100 мс, который совпадает с периодом альфа-ритма человеческого мозга:

«Момент длительностью в 100 мс не является частью обыденного осознания, но он тем не менее проявляется в презентативном микрогенезе, вызываемом тахистоскопом или стробоскопом (гл. 2), и интроспективной сенсбилизации в различных измененных состояниях сознания, в особенности тех, что достигаются под действием психоделических препаратов и при медитации. В более обычных условиях эти моменты сами объединяются в более длительные периоды ощущаемой непрерывности – во многом так же, как Джемс описывал метафорой последовательное включение друг в друга капель и потоков в своём заключительном обсуждении сознания» [61, с. 386].

Как видно, такое понимание единства времени и восприятия достаточно полно моделирует момент теперь в апориях Зенона. Его структура оказывается согласованной с числовой асимметрией модели. Поток и пульсация в структуре сознания есть две стороны строки символов. Одна – как дискретных моментов, другая – как последовательность

аффинных движений (фотографирование с большой выдержкой). И эта двойственность составляет содержание момента *теперь*. Стрела находится в *теперь* от пуска до падения.

В заключение приведём мнение Дж. фон Неймана:

«Фундаментальное для всего естественнонаучного мировоззрения требование ... согласно которому должно быть возможно так описать внефизический процесс субъективного восприятия, как если бы он имел место в физическом мире» [65, с. 6].

Как работает человеческое восприятие в апориях (и не только здесь), чередуя делимость и протяжённость, можно приблизительно представить двумерно-семантическими рисунками-словами. Каждое из них можно читать, как обычно, слева направо и с лупой, например, увеличив масштаб. Тогда *черепаха* превратится в *Ахиллеса*, *синтаксис* — в *семантику* и т.д.



## Литература к главе 8

1. *Анисов А.М.* Апории Зенона и проблема движения / Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М.: ИФРАН, 2000, вып. 14. А.С.Карпенко (отв. ред.).
2. *Комарова В.Я.* Учение Зенона Элейского. Попытка реконструкции системы аргументов. Л.: ЛГУ, 1988.
3. *Гайденко П.П.* История греческой философии в её связи с наукой. М.: PerSe, 2000.
4. *Прокофьева Л.П., Вилесов Ю.Ф., Грошенко Н.А.* Парадоксы измерений и мечта Эйнштейна. М.: РХТУ им. Д.И.Менделеева, 2003.
5. *Кессиди Ф.Х.* От мифа к логосу. СПб.: Алетейя, 2003.
6. *Salmon W.* Zeno's Paradoxes. 1970.
7. *Свидерский В.И.* Противоречивость движения и его проявления. Л.: ЛГУ, 1959.
8. *Драгун Б.А.* В чём противоречивость механического движения // *Философские науки.* 1964, №1, с. 110–117.
9. *Батищев Г.С.* К вопросу об условиях познания диалектического противоречия // *Философские науки.* 1964, №6, с. 167–173.
10. *Маковецкий А.* (пер.). Досократики. Мн.: Харвест, 1999.
11. *Huggett N.* Zeno's Paradoxes // *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* <http://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/>. 2004.
12. *Verelst K.* Zeno's Paradoxes. A Cardinal Problem // *arXiv:math/0604639v1 [math.HO]*, 2006.
13. *Verelst K.* On what Ontology Is and not-Is // *arXiv:0805.3359v1 [math.HO]*, 2008.
14. *Alba Papa-Grimaldi.* Why Mathematical Solutions of Zeno's Paradoxes Miss the Point: Zeno's One and Many Relation and Parmenides Prohibition // *The Review of Metaphysics.* 1996, 50, p. 299–314.
15. *Dowden B.* Zeno's Paradoxes // *The Internet Encyclopedia of Philosophy.* 2010.
16. *Silagadze Z.K.* Zeno Meets Modern Science // *arXiv:physics 0505042*, 2005, v. 1.
17. *Verelst K., Coecke B.* Early Greek Thought and Perspectives for the Interpretations of Quantum Mechanics: Preliminaries to Ontological Interpretations // *arXiv: 0611064v1 [physics.hist-ph]*, 2006.
18. *McLaughlin.* Resolving Zeno's Paradoxes // *Sci.Am.* 1994, v. 271, p. 84–89.
19. *Priest G.* Dialetheism // *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* 2008.
20. *Facchi P., Pascario S.* Quantum Zeno Dynamics: Mathematical and Physical Aspects // *arXiv:0903.3297*, 2009, v. 1, [math-ph].
21. *Цехмистро И.З.* Апории Зенона глазами XX века // *Вопросы философии*, 1966, №3.
22. *Mar G., St.Dennis P.* What the Liar Taught Achilles // *J. of Philosophical logic.* 1999, 28, p. 29–46.
23. *Трубецкой Е.* Смысл жизни. М.: Фолио, 2000.
24. *Бергсон А.* Творческая эволюция. М.: Терра, 2001.
25. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Т. 1. М.: Наука, 1979.

26. *Mirimanoff D.* Remarques sur La Theorie Des Ensembles Et Les Antinomies Cantoriennes – I // L'Ens. Math. 1917, v. 19, p. 209–217.
27. *Mirimanoff D.* Remarques sur La Theorie Des Ensembles Et Les Antinomies Cantoriennes – II // L'Ens. Math. 1919, v. 21, p. 29–52.
28. *Яновская С.А.* Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием «Апорий Зенона»? / Проблемы логики. М.: АН СССР, 1963, с. 134.
29. *Beth E.W.* Foundations of Mathematics. Harper & Row, 1966.
30. *Манин Ю.И.* Математика и физика / Математика как метафора. М.: МЦНМО, 2008.
31. *Власов А.А.* Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966, гл. 1.
32. *Scott D.* Data Types as Lattices // SIAM J. Comput. 1976, v. 5, no.3, p. 522–587.
33. *Паршин А.Н.* Дополнительность и симметрия // Вопросы философии. 2001, №4, с. 84–104.
34. *Арманд А.Д.* Два в одном. Закон дополнительности. М.: ЛКИ, 2008.
35. *Свасьян К.А.* Проблема символа в современной философии. 2-е изд. М.: Академический проект, 2010.
36. *Рассел Б.* Моё философское развитие / Аналитическая философия XX века. М., 1993.
37. *Robert A.* A Course in  $p$ -Adic Analysis. Springer, 2000.
38. *Гомперц Т.* Греческие мыслители. Мн.: Харвест, 1999.
39. *Mandelbrot B.* Is Nature Fractal ? // Science. 1998, 279, p. 783–784.
40. *Malcai O., Lidar D.A., Avnir D.* Is Nature Fractal? Response // Science. 1998, 279, p. 785–786.
41. *Malcai O., Lidar D.A., Avnir D.* Fractality in Nature. Response // Science. 1998, 279, p. 1615–1616.
42. *Mazur J.* The Motion Paradox. Dutton, 2007.
43. *Пригожин И.Р.* От существующего к возникающему. М.: Комкнига, 2006.
44. *Арутюнова Н.Д.* Предложение и его смысл. М.: ЛКИ, 2007.
45. *Пенроуз Р.* Новый ум короля. М.: УРСС, 2003.
46. *Моисеев Н.Н.* Логика динамических систем и развитие природы и общества // Вопросы философии. 1999, №4, с. 3–10.
47. *Рябинин И.А.* Надёжность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Политехника, 2000, с. 12.
48. *Вейль Г.* Математическое мышление. М.: Наука, 1989. См. по этому поводу также: Богомолов С.А. Актуальная бесконечность (Зенон Элейский, И.Ньютон, Г.Кантор). Л.-М.: ОНТИ, ГТТИ, 1934.
49. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.
50. *Брагина Н.Н., Доброхотова Т.А.* Функциональные асимметрии человека. М.: Медицина, 1988.
51. *Глезер В.Д.* Зрение и мышление. СПб., 1993.
52. *Гибсон Дж.* Экологический подход к зрительному восприятию. М.: Прогресс, 1988.
53. *Лосев А.Ф.* Введение в теорию языковых моделей. М.: Эдиториал УРСС, 2004.

54. Кант И. Критика чистого разума. М.: ЭКСМО, 2006.
55. Биркгоф Г.М. Математика и психология. М.: Сов. радио, 1977.
56. Niven I. Irrational Numbers. MAA, 1956.
57. Augenstein B.W. Complexity, Universal Libraries, DNA Sequences // Chaos, Solitons and Fractals. 1999, v. 10, no.6, p. 953–973.
58. Robins V., Meiss J.D., Bradley E. Computing Connectedness: Disconnectedness and Discreteness // Physica. 2000, D 139, p. 276–300.
59. Robins V., Meiss J.D., Bradley E. Computing Connectedness: an exercise in computational topology // Nonlinearity. 1998, 11, p. 913–922.
60. Гибсон Дж. Экологический подход к зрительному восприятию. М.: Прогресс, 1988.
61. Хант Г. О природе сознания. М.: АСТ, 2004.
62. Davey K. Aristotle, Zeno, and the Stadium Paradox // History of Philosophy Quarterly. 2007, v. 24, no.2, p. 127–146.
63. Leinfellner W. Die Entstehung der Theorie S. 44; приведено по Гайденко П.П. [3, с. 62]; Богомолов С.А. Актуальная бесконечность (Зенон Элейский, Исаак Ньютон, Георг Кантор). М. – Л., 1934.
64. Todorovic S. Topics in Topology. Springer, 1997.
65. Гастев Ю.А. Гомоморфизмы и модели. М.: Наука, 1975.
66. Шеенсон И.С. Единство диалектической и формальной логик. Элеат Зенон против и за Эйнштейна. М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
67. Герасимова И.А. Единство множественного. М.: Канон+, 2010.
68. Антипенко Л.Г. Флоренский о логическом и символическом аспектах научно-философского знания. Киев, 2012.
69. Svozil K. Undecidability Everywhere. WSPC, 1995.
70. Augenstein B. Complexity, Universal Libraries, DNA Sequences // Chaos, Solitons and Fractals. V. 10, no.6, p. 953–973.
71. Шалак В.И. Против апорий / Противоположности и парадоксы. М.: Канон+, 2008.
72. Захаров В.Д. От философии физики к идее Бога. М.: ЛКИ, 2012.
73. Чайковский Ю.В. О природе случайности. М.: 2004.
74. Aubert K. Spurious Mathematical Modelling // The Math. Intelligencer. 1984, v. 6, no.3, p. 54–60.
75. Тутубалин В.Н., Барабашева Ю.М., Григорян А.А., Девяткова В.Н., Угер Е.Г. Математическое моделирование в экологии. Историко-методологический анализ. М.: Языки русской культуры, 1999.
76. Степанов Ю.С. В трёхмерном пространстве языка. М.: Либроком, 2010.
77. Falconer K. Digital Sundials, Paradoxical Sets and Vitushkin Conjecture // Math. Intelligencer. 1987, 9, p. 24–27.



# **ЧАСТЬ 2**



## Глава 9

### Опыт сведения понятий в естествознании

В этой части мы попытаемся согласовать понятия, которые составляют содержание числовой асимметрии с понятиями других, в основном нефизических наук. Их отличие от физики в том, что в них равными правами пользуются расчётные методы — логика, и методы наблюдения — образы. Эти науки исповедуют доверие к чувственному опыту, отсутствие которого лежит в основе апорий Зенона о движении.

Физико-математический лексикон и язык «деловой прозы» математики как подмножество естественного языка оказался явно недостаточным для усвоения и понимания естественных явлений. Поэтому необходим выход за его пределы, необходима связь понятий, создание такого их набора, который одинаково работал бы как в предметной области, так и в математике. В этом смысл нашего толкования апорий Зенона как теста на адекватность математики внешнему миру. Расширение арсенала математического моделирования даёт возможность по-новому подойти к математическому пониманию естественных процессов, отразив формально присущий им бинарный архетип, посредством выявления его аналога в формальных структурах. Тем самым становится возможной реализация «двойной углублённости», двумерной семантики математики в приложениях, о которой много говорилось ранее [1, 2] и по сей день [3].

Несмотря на то что модель числовой асимметрии имеет математическую природу, её основная идея заключается в числовой дополнительности и двойственности истины; она чужда современной математической физике, исповедующей веру в однозначность и единственность решения и постоянно избегающей противоречий и разнообразия, то есть диалога с другими науками. И, напротив, идея дополнительности, бинарного архетипа, является естественной в нефизических науках. Она, однако, не эксплицирована явно главным образом потому, что все науки в XX веке пытались следовать нормам физико-математической науки [4].

Одним из кардинальных требований теории систем была и остаётся согласованность кандидата на эту роль с базовыми положениями наук. Это положение часто заслоняется идеей единства знания, которое сегодня является синонимом теории систем, и остаётся в тени многочисленных авторских теорий.

В этой части речь не идёт о сколько-нибудь последовательном построении моделей нефизических наук — это дело отдельных исследований, и только в том случае, если наш подход обнаружит перспективные возможности в какой-либо из них. То, что имеется в виду, — это возможны ли *формализация связи наук* и их взаимодействия, анализ последствий событий и технических решений, построение и анализ моделей, например, эколого-экономических техногенных систем, которые имеют различные, несводимые определения/описания, то есть междисциплинарных объектов. Как показывает практика, чем больше математика углубляется в территорию какой-либо дисциплины, тем меньше в модели остаётся собственно математического — ей приходится «бросаться краеугольными камнями». Поэтому рассчитывать на полную математизацию естественных наук не имеет смысла.

То есть мы остаёмся на береговой линии взаимодействия математики с языком, биологией, наукой о мышлении и сознании, с некоторыми темами физики, где двойственность проступает явно. Отдельной темой будет «уверенность в невидимом», то есть религия и высшая реальность вообще. Представляется, что в таком расширенном виде математика не входит в противоречие с религиозным мировоззрением. Особенно явно проступают аналогии с Востоком.

*Проблемы изложения.* Существуют скрытые проблемы научного изложения такой теории единства наук, помимо собственно объёма, которые осложняют изложение.

Первая проблема порождена «затянувшейся» новизной: об общем и нефизическом синтезе говорят давно, но общепризнанного формального воплощения он не имеет и не входит в классификацию научных дисциплин (как, впрочем, и вся прикладная математика). Научная дифференциация обуславливает различные точки зрения, связанные со спецификой предмета, и поэтому «теория целостности» является полицентричной, где периферия и центр, аксиома и теорема являются относительными понятиями.

Вторая проблема в том, что синтез как природное явление предполагает различие направлений целостности и специализации в каждой из наук, то есть введение в них новых акцентов [5, с. 16–17], которые могут не совпадать с устоявшимися положениями.

Сегодня черты синтеза можно усмотреть в конвергенции восточного и западного мировоззрений как двух полюсов единого научного мировоззрения. Восточный мистицизм даёт одну, образную, правополушарную его часть — сеть Индры. Западная наука сгенерировала вторую, левополушарную, фрактальную геометрию природы. В итоге получилось, что во фрактальном самоподобном, сетевом мире каждая его часть есть кристалл, отражающий всю Вселенную. Эти две смысловые координаты и усматриваются во всех науках как проявление числовой асимметрии.

Эту картину можно усмотреть также и в (гипер)текстах по фрактальной геометрии, где многочисленные иллюстрации сопровождаются столь же развитой теорией [6, 7]. Такие *формализованные образы* природы сочетают в себе наглядность и абстрагирование, пространство и время, объяснение и понимание, дают возможность видеть целое при недостатке информации [8]. Этот формат, однако, требует от читателя навыка переходов между *западным* и *восточным* состояниями [9], умения видеть и думать сразу обоими полушариями мозга, быть одновременно *физиком* и *лириком*, то есть находиться в состоянии, которое не поддерживается ни практикой наук, ни системой образования.

Фрактальная геометрия является во многом *математикой естественных форм и образов, естественноприродной геометрией* (Н.Н.Якимова), *одухотворёнными формами* (Ю.С.Степанов), *фондом мировой аналогии* (Ш.Бодлер). Природа фракталов говорит не только языком треугольников, точек, линий, но и образами, ассоциациями, метафорами. Она в равной мере отвечает как сциентистской установке И.Канта как о мере научности, так и пифагорейскому по смыслу выводу Новалиса: «Математика — жизнь Богов» [10, с. 362],

Сопряжение образов с логикой, прямо или косвенно, является содержанием многочисленных публикаций учёных разных специальностей, в том числе и представителей физико-математической науки, обобщающих факты, историю мысли, основанные на значительно более широком «экспериментальном материале», нежели физика, включающем пространственно-временные масштабы антропологической, культурной, геологической и социальной эволюции. Помимо широко известных работ Ф.Капры «Дао Физики» (1994), «Паутина жизни» (2003), «Скрытые связи» (2004), укажем несколько [11–16].

Новизна этой тенденции отчётливо чувствуется на фоне «повторения ходов» — шквале переизданий физико-математической литературы, который является симптомом кризиса физико-математической парадигмы [17].

Поэтому сам линейный, *без-образный*, способ выражения, особенно характерный для математики, является, пожалуй, основным препятствием для описания фрактальных образов и моделей.

«Термин “логичность” ввёл в употребление Демокрит для обозначения правильности, связности, последовательности и доказательности речи. ... Многие исследователи считают началом научно-технической революции изобретение звукового линейного письма, благодаря чему резко возросли возможности для развития абстрактного логико-вербального мышления. По-видимому, имеются многочисленные способы упорядочивания информации, характерные для логико-временных и пространственно-образных когнитивных стратегий. Таким образом, сама логика, мыслимая как искусство создания порядка и правильности в мышлении, эволюционировала вместе с когнитивной системой человека». [Герасимова И.А. Образы порядка в творческом мышлении / Логический анализ языка. Космос и хаос. Концептуальные поля порядка и беспорядка. Отв. ред. Арутюнова Н.Д. М.: Индрик, 2003, с. 210–220].

Адекватным выражением описания целостности как согласованности частей системы является восточная модель изложения посредством *чжанов* — единиц текста, которые соединяются между собой не линейно, как в языке, а представляют собой грани целого, присутствуя друг в друге [18, с. 421]. Этот способ, в противоположность линейному, левополушарному, можно назвать дивергентным, правополушарным.

Естественный язык является общим для всех наук — математическая физика является его редуктом. В более широком плане, для образования вообще, язык является одним из звеньев цепочки взаимозависимых феноменов — мышления, естественной и социальной природы, биологических и культурных факторов, человеческого опыта [12, с. 12]. Поэтому *чувство языка* необходимо математическому естествознанию. Оно создаёт *запас подобия модели оригиналу*, перспективу для развития адекватности формального аппарата, пространство семантических приближений. Язык — это та субстанция и территория, где встречаются понятия математики и естествознания. Нетрудно видеть, что естественный язык неустраним, и в абстрактных разделах физики и математики он сопровождает все формулировки гипотез, объяснений, создание конструкций и т.п. (идея вторичного перевода с естественного языка в семиотике). Низведение естественного языка до непрофилирующей дисциплины при поступлении на технические и физико-математические специальности эквивалентно сужению восприятия и схематизации мышления, духовной обеднённости [26]. Причём не только в общекультурном, но и профессиональном плане.

*Топологизация понятий.* Там, где встречаются фрактальные структуры различных наук, имеющие общую модель в виде числовой асимметрии,

становится возможным появление новых метафор, помимо материальных точек и векторов математической физики, которые будут работать на связь логики и чувства. Именно здесь расположены проблема *Единое—Многое* Платона, пространство Парменида и апории Зенона.

Приём, которым мы будем пользоваться, имеет смысл *топологизации*, или *геометризации*, понятий. Его цель — вскрыть, узреть в референтах терминов и понятий универсальную пару процессов конвергенции и дивергенции, которую затем можно формализовать как числовую асимметрию. То есть мы будем рассматривать «действие» понятия на (фрактальную) материальную среду, то есть среду, способную к делению, диспергированию, различая способы порождения её форм/геометрии/подмножеств  $R^{\#}$  различной природы.

Видимо, общим примером можно взять: *Единое* в проблеме Платона — конвергентно, гомогенизирует, *Многое* — дивергентно, различает части. Их диалектика и разнообразие проявлений в культурных практиках исследованы в книге И.А.Герасимовой [12]. В первой главе мы рассмотрели некоторое (под)множество таких пар.

Посмотрим в качестве примера, как это выглядит в  $p$ -адических числах. Рассмотренные «сбоку»  $p$ -адические числа представляют собой деревья. Аффинные преобразования — перелёты птиц с ветки на ветку либо встречное движение ветвей под действием ветра — дают масштабно-инвариантную (деревopodobную) решётку. Символическая динамика — движение вдоль ветвей — алгоритмы. Дерево в этом случае имеет смысл «дерева» логического вывода. Взгляд на крону сверху — канторово совершенное множество. Тени от кроны на земле — проекции  $Z_p$  в  $R^{\#}$  — подмножества действительных чисел различной формы структуры. Движение от корня к кроне — дивергентный процесс, обратное движение — конвергентный.

Дивергентными являются образы, букеты, живописные ландшафты природы, мозаики, контексты, геологические и биологические объекты со сложной гетерогенной внутренней структурой, сети, воображение (вхождение в образ, «транспарантное единство», как говорил Г.Д.Гачев). Биологический принцип единства в разнообразии — той же геометрической природы: эволюция дивергентна, инволюция конвергентна.

В технической сфере любое мало-мальски сложное производство (ожидаемые в кибернетическую эпоху безлюдные технологии, полностью сводимые к алгоритму, не оправдались) гетерогенно, информационно несжимаемо, то есть является дивергентным объектом. Таковы же все чисто технические системы, создание которых немислимо без образов/проектов — чертежей и принципиальных схем. Природа и геометрия таких объектов-сетей подробно описана Ф.Капрой. В ки-

бернетике они представлены семантическими сетями разного назначения – например, тензорным анализом Г.Крона. [27].

Пара *конвергентное–дивергентное* может иметь вид пары локальное–глобальное. Локальное – определённое, детерминированное, вычислимое. Глобальное – неопределимое, невычислимое. Первое определяется в точке, значение второго зависит от всей области рассмотрения. Наиболее рельефный пример из математики – теорема Гёделя о неполноте: из *локальной* доказуемости теорем не следует *глобальная* непротиворечивость всей системы.

Другой, пожалуй самый ранний, в образовании пример: функция, заданная формулой, может быть продифференцирована в точке (т.е. локально), но найти её первообразную (на всей прямой, т.е. глобально) удаётся далеко не всегда. Для этого разработан аппарат разностных схем решения дифференциальных уравнений. Обобщение этого примера – это задача мероопределения, то есть превращение геометрического объекта в физический введением на нём точечных распределений зарядов, плотностей, концентраций и т.п.; она неразрешима в общем случае [19, с. 80–81]. Поэтому теория вероятностей – наиболее рискованный раздел математики в приложениях, с большой финансовой ответственностью для систем в реальном масштабе времени.

Локален – физический эксперимент, глобально – наблюдение, мониторинг.

Поэтому наши последующие рассуждения носят логико-топологический характер. Этот этап выяснения, «что из чего состоит» и «как составные части связаны друг с другом», является необходимым этапом при построении модели всякой новой, не имеющей шаблона задачи.

*Предварительно суммируем.* Наши предыдущие рассуждения привели к системе  $ZF \wedge \neg ZF$ , универсум которой есть бытие Парменида:  $Q_2 \cong Q_2(ZF) \cup Q_2(\neg ZF)$ . В одной его части выполняются аксиомы теории Цермело–Френкеля, во второй – выполняются их отрицания.  $Q_2$  представляет самодвойственную числовую систему, объединяющую вещественные и  $p$ -адические числа (мы ограничиваемся  $Q_2$  или  $Z_2$ ):

$$R \leftarrow Q_2 \rightarrow Z_2 \quad R = \text{inv } Z_2 .$$

Инволюция есть операция отражения относительно «десятичной» точки, то есть строки символов, имеющей положительную и отрицательную части степеней основания. Она играет роль расщеплённого отрицания, переключающего базовые процессы и их формальные аналогии – числовые системы.

Геометрия – глобально проективная, локально евклидова:  
 $P^2(R) = R^2 \cup P^1(R) \Leftrightarrow R^2 \cup Z_2 = Q_2$  так как  $R^2 \cong R$  – кривая Пеано.



Очевидна связь этой геометрии с расширенной комплексной плоскостью, где для полноты картины приходится плоскость дополнять сферой. Здесь роль сферы играет замкнутая проективная прямая  $Q_2$ , а роль плоскости  $R^2 = (X, Y)$  — две прямые  $(|\bullet|_\infty, |\bullet|_2)$

Логика — сочетание закона исключённого третьего с его отрицанием:

$$R = \text{inv } Z_2 = \neg Z_2, Q_2 = Z_2 \wedge \neg Z_2, \text{inv } Q_2 = \neg Z_2 \vee Z_2 = Q_2$$

Любое утверждение логики первого порядка  $P$  определено над двумя числовыми системами:

$$R \leftarrow P \rightarrow Z_2.$$

Универсальные базовые процессы времени и пространства — *конвергенция—дивергенция, сжатие—расширение, энтропия—неэнтропия* — являются неотделимыми друг от друга, взаимнопорождающими и взаимнодополнительными. Эти соотношения служат прототипом степенных законов:

$$|x|_\infty = C \cdot |x|_2^{-D}.$$

Данные аксиомы объясняют существование бинарного архетипа естественных наук, наличие (имманентность) движения и отсутствие парадоксов в них. Кроме того, совпадение функций объективных измерений — модулей вещественных и  $p$ -адических чисел с функциями человеческого восприятия — включает наблюдателя в мир явлений.

Переход к нульмерным множествам  $Q_2$  включает универсальные свойства объектов, в частности, универсальную вычислимость, единый способ порождения материальных предметов и слов.

*Нульмерная физика.* Отдельно следует сказать о *нульмерной физике*, изложение которой появилось недавно. Авторы книг [20] обосновывают ключевую роль физического вакуума как эфира — интегрирующей среды, общей всем материальным процессам и наукам. С нашей точки зрения, эта среда — эфир, вакуум — математически есть нульмерное множество, фрактал, которое имеет числовое содержание. В отношении совпадения многих физических характеристик микромира можно вспомнить работы Г.Б.Аракеляна [21, 22], в которых числовые константы микромира выведены из четырёх чисел: 2,  $e$ ,  $i$ ,  $\pi$ . Можно показать, что эти четыре числа, не являющиеся результатами измерений и поэтому не имеющие погрешностей, тесно связаны с числовой асимметрией. Двойке соответствует бинарная структура естественных наук, и числовой асимметрии в частности;  $e$  — неархимедова метрика, через которую функцией логарифм определяется архимедова;  $i$  — (мнимая единица) действует как инволюция между  $Z_2$  и  $R^\#$ . Поскольку при умножении на  $e^{n \cdot i}$  отрезки переходят в окружности,

то естественным образом возникает число  $\pi$ . В основе этих величин Аракелян выделяет две взаимнообратные функции  $\alpha$  и  $\psi$ :

$$\begin{aligned}\psi(x + y) &= \psi(x) \cdot \psi(y), & \alpha(x \cdot y) &= \alpha(x) + \alpha(y), \\ \psi(\alpha(x)) &= \alpha(\psi(x)) = x & \forall x.\end{aligned}$$

В терминах теории решёток:  $\psi = meet$ ,  $\alpha = join$ , то есть это логико-числовые эквиваленты двух основных решёточных операций — аналогов пары *конвергенция–дивергенция*. Динамика этой пары — волна де Бройля, в терминологии Голубевых [20], может рассматриваться как аналог чередующихся состояний квантовых частиц, при которых частицы переходят в свою дифракционную картину, пространство — в своё обратное (в терминах кристаллографии). Чередование, или инверсия состояний связывается с четырьмя основными физическими взаимодействиями численным образом. Например, слабые гравитационные взаимодействия переходят в сильные межъядерные, то есть большие архимедовы величины сопряжены с малыми неархимедовыми. Обе работы выполнены в области «между явлением и уравнением», так же как и наша интерпретация. Поэтому представляется перспективным более детальное исследование связи между этими работами и моделью числовой асимметрии.

Все нижеследующее — «в первом» или даже «в очень первом» приближении, как говорят иногда математики. Имея в виду опыт математизации наук, который сложился в труднопроходимые «джунгли» вариантов и оттенков понятий, теорий, подходов и аксиоматики, мы не будем входить в критику и сравнения с математическими теориями тех наук, к которым будем примеряться, если это не представится необходимым.

Ушедший век так и не постигнутой «непостижимой эффективности математики» привёл к тому, что вряд ли в какой-либо из наук, испытавшей на себе математическую санацию, остался термин, за которым бы не стояла огромная литература, посвящённая семантическим нюансам его математизации. То же относится и к самой математике. Иными словами, литература огромна, вариации терминов и теорем создают проклятие размерности для всякого более или менее подробного анализа. Отдельно отметим, что то, что должно было бы перейти в разряд математических моделей естествознания, осталось в критической философско-методологической литературе. Такими фактами являются, например, апории Зенона, вопросы философской логики — логики связи формальных методов с внешним миром, круг вопросов диалектики, которая сейчас постепенно входит в физико-математические работы без, однако, явного её упоминания. Этот пласт заслуживает отдельного многостороннего исследования.

Речь пойдёт об основах моделирования, которые, как известно, не менялись. Массовое внедрение компьютеров повысило, конечно, культуру и объёмы вычислений, но пока не затронуло основы. Пока потому, что теоретическая информатика развивается взрывоподобно и давно вышла за рамки вспомогательной дисциплины.

Кроме того, есть ещё одно, редко встречающееся, соображение, и то не в математической литературе. Модели таких феноменов как жизнь, язык, сознание обязательно рефлексивны и не могут быть построены с позиций так называемого *третьего лица* – экспериментатора, то есть стандартным аппаратом математики. Нам всё, в том числе и математика, дано через эти феномены. Модель сознания и языка должна иметь способность не только к самоописанию, но и к созданию создавшей её модели. *Моделируемое и моделирующее должны быть описаны на одном языке.*

В этом плане в теоретической информатике известны *квайны* – программы без входов, печатающие свой собственный текст. Но они не носят характера методологии особого вида программирования или моделирования. Более основателен пример абстрактной системы самовоспроизведения, построенный Дж.Майхиллом. Его модель выдаёт результат на ленте машины Тьюринга, содержащий описание исходной системы-автомата. Это может служить хоть и отдалённым, но всё же узнаваемым примером роли ДНК в биологических системах.

#### *Математическое дополнение*

1. *Канторово совершенное множество.* В качестве общего элемента последующих рассуждений рассмотрим построение канторова множества. Из привычной его искусственной конструкции – последовательного выбрасывания средних третей связного отрезка – неясно почему при счётном числе таких действий должно получаться несчётное несвязное множество точек. И почему обязательно выбрасываются именно трети. При другой величине удаляемых отрезков может получиться множество ненулевой меры. Фракталы выглядят в этом случае действительно как патологические искусственные образования.

В нашей конвергентно-дивергентной схеме, деление осуществляется дивергенцией, силами отталкивания. Поэтому образование канторова множества происходит естественным путём. И каждый объём, поверхность, линия имеют свой ультраметрический, нульмерный образ. Поэтому и исходный связный отрезок имеет своего нульмерного двойника. Также и получающиеся последовательным делением отрезки с длинами  $l_n = 3^{-D \cdot n}$  имеют свои ультраметрические нульмерные прообразы, то есть являются копиями исходного канторова множества. Иными словами, мы получаем схемы:

$$R \supset C_R \leftarrow C \rightarrow C^\# \cong Z_2, \quad l_{n,R} \leftarrow l_n \rightarrow l_n^\# .$$

Такая же схема верна и для символов, которыми обычно помечаются атомарные переменные, частицы, ячейки фазовых пространств, то же верно для слов, предложений и т.п.:

$$a_{\bullet} \leftarrow a \rightarrow a^{\#}.$$

Следовательно, каждый символ представляет собой сложное образование: можно видеть сквозь него, становятся возможными подстановки и вариации символа. Математические переменные переходят в разряд символов в их философском значении: «Символ есть больше того, что он изображает» (П.А.Флоренский). Поэтому  $a \sim 2^{-n} \cdot Z_2$  с возможным последующим разворачиванием в рефлексивную схему. Связные линии и атомарные символы образуются человеческим архимедовым, абстрагирующим восприятием, их нульмерные прообразы — неархимедовым, детализирующим [23]. Иными словами, процесс образования канторова множества имеет смысл рассматривать не на связной прямой  $R$ , а на рациональных числах  $Q$ . Тогда все отрезки деления сами будут являться канторовыми множествами.

В терминологии философии в нашей схеме природа символа есть частный случай оппозиции Платона *Единое—Многое*. Более развитое его понимание [24] и его проблематика [25] должны проявляться в конкретных науках: языке, биологии, сознании, культуре, религии.

2. *Арифметические операции*. Для выполнения арифметических операций, очевидно, и как это следует из практики программирования, требуется внешнее управление — пространственно-временная синхронизация. Соответственно, для теории с достаточно длинной последовательностью арифметических операций необходима сложная синхронизация, внешняя по отношению к самой теории, то есть программа. Встаёт вопрос о её референте в моделях таких областей, как язык, сознание/мышление и биология, то есть там, где физический эксперимент неадекватен. И вообще — где существуют законы природы, устанавливаемые физикой, и как они действуют? Приведём следующее рассуждение.

Пусть  $Th$  — формальная теория, уравнение, записанные в привычной математической нотации. У нас нет сомнений в верности  $Th$ , которая многократно подтверждена экспериментально. Согласно ГЛГ-аргументу,  $Th$  является теорией механики деформируемого твёрдого тела в  $R^3$ . В нашей схеме основным является нульмерное пространство  $p$ -адических чисел  $Z_p$ , в котором не существует однозначно фиксированных линейных размеров ни пространства, ни времени и, следовательно, нет пространства для арифметических операций. Запишем/закодировем  $Th$  в 2-адической (двоичной) записи в виде конечной строки нулей и единиц:

$$S(Th) = \sigma = \{0,1\}^* = 1001011110\dots0101.$$

Как известно, все  $p$ -адические числа по любой базе, как и вещественные, являются нормальными, то есть содержат строку конечной длины  $\sigma = 1001011110\dots0101$  бесконечное число раз. Поскольку  $\forall N > 1 \quad \sigma \in 2^N \cdot Z_2$ , то ей соответствует инверсная последовательность аффинных движений  $f_\sigma = f_{\sigma_1} \cdot f_{\sigma_2} \dots f_{\sigma_n}$ , где  $|\sigma|$  — длина строки (см. гл. 2 «Фракталы»). Эта последовательность движений и реализует символический объект — теорию *Th*. Что аналогично булевой двойственности «спецификация — вычислительный процесс» (см. гл. 5).

Теперь вопрос о «левой части», результате. В силу рефлексивности  $Z_2 \quad \forall M > 1 \quad Z_2 \cong Z_2^M$  результат помещается/присутствует в «параллельном  $Z_2$ », то есть в самом исходном  $Z_2$ .

Таким образом, арифметика, «математическая механика» (*mathematical machinery* — англ.) законов природы уже скомпонована/предуготовлена в нульмерном  $Z_2$  и присутствует в *возможности* в любой «физически бесконечно малой» области евклидова пространства:  $V = inv(2^N \cdot Z_2) \quad diam(V) \propto 2^{-N}$  (см. апорию *Место места*).

Переходя к изложению соответствий, повторим ещё раз: всё дальнейшее — всего лишь *этюды* в избранных науках. Выбор наук диктовался их первостепенной значимостью для системной идеи. Цель наших этюдов — уяснить, есть ли основания для дальнейшей работы по построению общей теории систем и синтезу наук.

## Литература к главе 9

1. Акчурина И.А., Веденов М.Ф., Сачков Ю.В. Методологические проблемы математического моделирования в естествознании // Вопросы философии. 1966, № 4, с. 64–75.
2. Грекова И. Методологические особенности прикладной математики на современном этапе её развития // Вопросы философии. 1976, № 6, с. 104–114.
3. Ruelle D. Where can one hope to profitably apply ideas of chaos // Physics Today. July, 1994, p. 24–30.
4. Шрейдер Ю.А. Сложные системы и космологические принципы / Противоположности и парадоксы. М.: Канон+, 2008, с. 287–317.
5. Хант Г. О природе сознания. М.: АСТ, 2004.
6. Barnsley M.F. Superfractals. CUP, 2006.
7. Mumford D., Series C., Wright D. Indra's Pearls. CUP, 2002.
8. Фарман И.П. Образ / Касавин И.Т. (гл. ред.). Энциклопедия эпистемологии и философии науки. М.: Канон+, 2009, с. 642.
9. Смаллиан Р. Молчаливое Дао. М.: Канон+, 2012.
10. Свасьян К.А. Становление европейской науки. М.: Evidentis, 2002.
11. Госвами А. Самосознающая Вселенная. М.: 2008.

12. *Герасимова И.А.* Единство множественного. М.: Альфа-М, 2010.
13. *Григорьева Т.П.* Дао и Логос (встреча культур). М.: Наука, 1992.
14. *Дель Ре Дж.* Космический танец. М.: Христианская Россия, 2006.
15. *Паршин А.Н.* Путь. Математика и другие миры. М.: Добросвет, 2002.
16. *Jakson W.J.* Heaven's Fractal Net. Indiana U.P., 2004.
17. *Новиков С.П.* Вторая половина XX века и её итог: кризис физико-математического сообщества в России и на Западе / М.: ИМИ, 2-я сер., вып. 7(42), 2002, с. 334–356.
18. *Григорьева Т.П.* Китай, Россия и Всечеловек. М.: Новый Акрополь, 2011.
19. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1784.
20. *Голубев С.Н., Голубев С.С.* Взгляд на физический микромир с позиции биолога. Владивосток: Дальнаука, 2009; *Голубев С.Н.* Квазикристаллическая структура вакуума. М.: Либроком, 2013.
21. *Аракелян Г.Б.* Фундаментальные безразмерные величины. Ереван: Изд. АН, 1981.
22. *Аракелян Г.Б.* Числа и величины современной физики. Ереван, 1989.
23. *Глезер В.Д.* Зрение и мышление. СПб., 1993
24. *Доброхотов А.Л.* Символ / НФЭ, т.3, с. 532–534.
25. *Свасьян К.А.* Проблема символа в современной философии. М.: Академический проект, Альма Матер, 2010.
26. *Новиков С.П.* Математическое образование в России: есть ли перспективы? // ВИЕТ. 1997, №1, с. 97–106.
27. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей. М.: Сов. радио, 1978.

## Глава 10

### Естественный язык

*Введение.* В поиске связей с естественным языком (ЕЯ), с его основными положениями мы, имея в виду цель исследования, ограничимся его естественнонаучными корреляциями, оставляя в стороне науку о правописании. Вопрос, с которым сталкивается математика при моделировании языка, заключается в следующем — где находится язык? Является ли он естественным, природным явлением? С тем, что язык находится в голове человека, то есть не является объективным явлением, математическая физика не спорит. Но если во внешнем мире — то где, если он ненаблюдаем? В нашей схеме пространством языка является нульмерное пространство границ и его числовой аналог —  $Q_2$ .

Спецификой лингвистики являются объяснения и определения элементов и конструкций языка своими, языковыми же средствами. Математически это эквивалентно операциям над нульмерными множествами и систематическому использованию инверсий. Эта техника практически не развита, и поэтому чрезмерно развитые соответствующие аналогии будут выглядеть малообоснованными, слишком рискованными и как минимум проблематичными. Здесь, кроме того, возникает часто упускаемая из виду проблема, заключающаяся в том, что математические модели таких феноменов, как язык и сознание, должны быть способными генерировать сами себя. Простым не объяснить сложное — язык нужно учить прежде, чем математику, а мышление развивается прежде, чем его дедуктивный вариант. Носителям языка несвойственны длинные и абстрактные механизмы мышления и порождения языка — в этом смысл постулата простоты Г.Гийома [1, с. 51].

Однако существует набор согласованных результатов, имеющих своей эмпирией фрактальную геометрию природы, при помощи которых можно увидеть перспективу согласования математики с ЕЯ. Один такой результат есть теорема Успенского–Райса [2, с. 398]. Она сформулирова-

на для формальных, то есть более простых языков, и звучит следующим образом: любое нетривиальное свойство рекурсивно-перечислимого языка неразрешимо. То есть любое описание свойства (групп слов, способов классификаций, правил образования и т.п.) внутри какого-либо языка неразрешимо, неотделимо однозначно от всех его других свойств. В ЕЯ, как более сложном и богатом, трудно ожидать решения проблемы установления таких границ. Практически эта ситуация воплощается в многообразии переходных форм, вариаций правил и исключений из них. Та же ситуация возникает при попытке строгой, например, логической (компьютерной), формализации: любая нетривиальная задача на фракталах неразрешима [3]. Недавно установлена связь между неразрешимыми проблемами, теорией чисел, сложностью, биологией и ЕЯ, расширяющая аналогии между языком, математикой и биологией [4].

Подобные факты позволили Р. Пенроузу назвать фракталы началом нерекурсивной, то есть несчитающей математики. Как выглядит такая математика, пока неизвестно. Может оказаться, что, например, для модели языка нужно не *чувство числа*, а *чувство слова*, например, чему математики не обучены и что лежит вне её, причём обязательно включает в себя психологию, мышление и сознание человека. И, наконец, цель работы – вовсе не математизация лингвистики:

«...лингвистика не есть математика, а математика не есть лингвистика. Смещение этих областей может привести к новым бедствиям науки. ... Будем помнить, что математика приложима к любой научной дисциплине, но это не значит, что каждая дисциплина есть отрасль математики» [Лосев А.Ф. Введение в общую теорию языковых моделей. М.: Эдиториал УРСС, 2004, с. 11–12].

На заре кибернетики о возможности и полезности вербальных моделей говорил Н.Н.Моисеев, что и наблюдается в моделировании сложных систем. То есть ЕЯ, как показала практика, находится в мире систем, а не в механико-математическом.

1. *Делимость* в ЕЯ представлена прежде всего *языковой номинацией* – созданием значимых языковых единиц во всём многообразии их связей, аналогично формальному созданию  $p$ -адических чисел Калужниным (см. гл. 3). Кроме того, многочисленные дифференциации, сегментации и другие виды избирательности также относятся к этому явлению. Делимость в ЕЯ и сознании называется *интенциональностью*. Вся система единиц языка распадается на две сферы: предметную, денотатную, экстенциональную, и сигнификативную, связанную с понятиями, смыслами, то есть интенциональную [17, с. 438].



*Топология.* По-видимому, первым, кто явно описал топологию ЕЯ как дисконтинуума был В.В.Налимов. Его рассуждения аналогичны интерпретации  $p$ -адических чисел Л.А.Калужниным (гл. 3) (см. также сходные рассуждения у А.Ф.Лосева [7, с. 8] и Ю.С.Степанова [8, с. 218]):

«Приходится признать следующее: мы никогда не сможем утверждать, что нельзя придумать фразу, которая как-нибудь иначе, чем это было ранее, раскрывала бы смысл слова. Именно в этом и только в этом смысле можно говорить о континуальности мышления, если исходить из анализа семантики языка. Смысловое поле слов безгранично делимо. Представление об атомах смысла, столь необходимое для построения логической семантики, — не более чем некоторая иллюзия. ... Всё многообразие смыслового содержания ... выявляется только через потенциальную возможность построения безграничного числа новых фраз. ... Но перед нами нет этого заранее приготовленного набора новых фраз. Континуальное смысловое содержание, стоящее за дискретными символами языка, оказывается принципиально неизмеримым». [Налимов В.В. Непрерывность против дискретности в языке и мышлении. Тбилиси: Мецниереба, 1978, с. 8–9].

Здесь описаны дисконтинуумы, которые являются тем, что сегодня называется фракталами, или хаотическими аттракторами.  $Z_2$  и нульмерное  $Q_2$  — числовые дисконтинуумы. Таким образом, в основных чертах ЕЯ узнаётся числовая асимметрия. (**Замечание.** Неизмеримость смыслового содержания, стоящая за дискретными, то есть атомными символами языка, есть общая проблема не только моделирования мышления, но и всех нефизических областей. В последнее время с этой проблемой столкнулись квантовые вычисления. Главный вопрос этой очередной экстраполяции физики заключается в том, что то, что реализуется на бумаге последовательностью символов, выглядит крайне гипотетичным для реализации в «материи» см. [Новиков С.П. Вторая половина XX века и её итог: Кризис физико-математического сообщества в России и на Западе// ИМИ. 2-я сер., вып. 7(42), М., 2002, с. 334–356]).

2. Язык имеет *двойной модус существования*: как модель — система связей знаков, и как реальная манифестация этих связей [5, с. 7–9]. Знаки ЕЯ имеют двукратную соотнесённость — с языковой и внеязыковой действительностью [5, с. 28; 6, с. 94, 143]. Так же, как и строки нашей числовой асимметрии определены (соотнесены) над идеальным  $Z_2$  и материальным  $R$  [5, с. 3].

3. *Основное назначение ЕЯ* — служить средством материализации мышления и быть средством идеализации, репрезентации действительности [5, с. 19]. Эти две функции реализует инволюция — инволюционный

антиизоморфизм на языке математики, или «зеркальная наоборотность» (термин Т.П. Григорьевой). Возможно, её определение, данное нами ранее слишком просто, и есть смысл поискать его вариации. Но в принципе она моделирует этот механизм ЕЯ – обращение планов [6, с. 144–145].

«В принципе все формы языковой фиксации какого-либо факта или явления могут квалифицироваться как явление номинации. К языковым формам номинации могут быть поэтому отнесены слова, словосочетания и предложения. Номинация через слово и словосочетание – лексическая, номинация через предложение – пропозитивная, номинация через текст – дискурсивная» [5, с. 121].

Следовательно, двойная соотнесённость может в принципе сопутствовать всем этим видам. Это аналог принципа переноса: «Утверждение логики первого порядка: истинное в  $R$ , истинно и в  $Z_2$ ». Здесь, конечно, следует сделать оговорку о самоприменимости, типичной для ЕЯ и запрещённой в  $R$ . В  $Z_2$  самоприменимость (рефлексивность) возможна, и мы будем специальным образом ею пользоваться (в рассуждениях о голограмме).

Рефлексивная схема имеет вид, одинаковый для  $Q_2$  и  $Z_2$ :

$$Z_2 \cong Z_2^N \cong Z_2 \times Z_2 \times \dots \times Z_2, \text{ где } N \text{ – произвольно,} \quad (*)$$

то есть  $Z_2$  изоморфно счётному произведению своих копий. Специфика ЕЯ возникает, если каждому из сомножителей придать свой смысл – одной из подсистем языка. Тогда эта схема становится подобием голограммы. На каждом  $Z_2$  действует конвергентно-дивергентная схема, её аналогом в ЕЯ может служить пара процессов: *интеграция–дифференциация, уподобления–расуподобления* и др., специфичные для каждой его области.

4. *Язык – alter ego мира.* Сравнение с языком удобно проиллюстрировать аналогией энциклопедического словаря с общей для наук объективной фрактально-хаотической действительностью. Фракталы – это замороженный хаос, хаотический аттрактор имеет фрактальную топологию и 2-адическую числовую структуру. Именно они проявляют свойства, присутствующие в словарях. Аналогия состоит в следующем.

Прежде всего любой словарь упорядочен лексикографическим образом, то есть так же, как и  $p$ -адические числа. Далее, даже многотомный словарь, то есть состоящий из физически разделённых частей, всегда считается единым, как бы далеко друг от друга в физическом пространстве ни находились отдельные его части. Точный аналог это-

го единства — неделимость  $p$ -адических ( $2$ -адических) пространств и самоподобие фракталов. Каждая часть их содержит копию целого. Множественность копий, тираж, словари не есть множественность его целого. Существует только одно  $2$ -адическое пространство/словарь  $Z_2$ , все остальные  $Z_p$  есть, в первом приближении, его масштабированные копии/ издания разного размера.

В первом приближении словарь состоит из слов-статей и перекрёстных ссылок. Словарные статьи есть *alter ego*, языковые, тонкие, нульмерные аналоги материальных целостностей — кластеров; перекрёстные ссылки суть траектории динамической системы смыслообразования. Отправляясь от одного слова, следуя перекрёстным ссылкам, можно найти и периодические орбиты (*предельные циклы*), когда первое и последнее слова совпадают, и *аперриодические*, которым не видно конца и которые часто выводят за пределы словаря в иную область, в иной, например, специальный, научный словарь. Две разные словарные статьи могут вполне оказаться на одной траектории смысла (*топологическая транзитивность*). Углубление в самую словарную статью, в варианты содержания слова, то есть изменение оттенка его смысла, может привести к совершенно иной траектории ссылок. Это аналог основной метафоры теории хаоса — *взмаха крыльев бабочки, меняющей погоду и вызывающей ураганы*, — пример чувствительности к начальным условиям в теории хаоса и фракталов. Этот набор свойств словаря в точности соответствует *топологическому определению хаоса*.

Поэтому ЕЯ в *семантической парадигме* [9, гл. 1] есть сама природа, включая человека, но в нульмерной, то есть фрактальной, топологии. Здесь нужно объяснить связь мышления с нашей схемой, но об этом позже, пока ограничимся иллюстрацией. В этом роль ЕЯ — *органа восприятия реальности*, обеспечивающего коммуникативную функцию.

Такие метафоры давно известны — современные «мир как Текст» (Деррида), «мир как Словарь или Энциклопедия» (Эко), «мир как Книга или Библиотека» (Борхес), средневековые «природа как господня книга», «небеса как текст, читаемый астрологом» [10, с. 66]. Существует и встречная метафора, появившаяся на заре вхождения  $p$ -адических чисел в активную науку: любое такое число (беско-

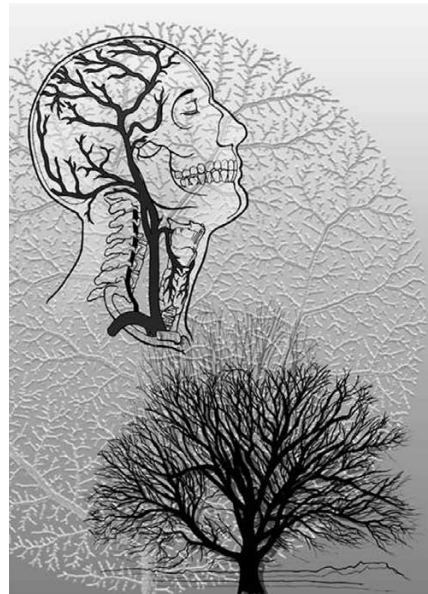


Рис. 1 из: Diane Danegas  
The Tree of Life // Reflections.  
Vol.2, №7, p. 6-7.

нечная строка символов) содержит все библиотеки мира. Аналогичны современные воззрения физика Л.В.Лескова [11]. Неслучайно опыт моделирования привёл математика С.Маркуса к выводу: «Язык и слово повсюду» [12]. В статье [4] природа представлена как Универсальная библиотека, включающая все тексты (в том числе и физико-математические), как правильные, так и с любыми возможными искажениями, пропусками, ошибками, проведены параллели с теорией чисел. В этой библиотеке, представляющей множество строк символов в заданном алфавите, легко узнаются 2-адические числа.

Рефлексивность  $Z_2$ , то есть его изоморфизм произведению любого счётного числа, например, для 2 и 3 своих копий, известна как кривая Пеано, кривая, заполняющая (физическое!) пространство, то есть всё  $R^3$ , что делает язык как *alter ego* природы точным представлением  $R^3 \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ .

Явление *эффекта бабочки*, то есть *частичной предсказуемости* логических и причинных, детерминирующих связей, делает числовую систему  $Z_2$  формальным аналогом языка.

«Любое наблюдаемое человеком явление природы может быть описано как элемент языка, если оно обладает частичной предсказуемостью. Полная предсказуемость образует мир физической причинности. Но если так, то в объективном мире должно существовать множество явлений, которые, с точки зрения человека, обладают основными свойствами языка. С мерой предсказуемости связано свойство быть языком. Предсказуемость зависит от положения наблюдателя» [6, с. 128].

При полной случайности и тотальном, лапласовском, детерминизме исчезает *смысл* символической системы и естественных явлений. Явления, обладающие свойствами языка, типичны для фракталов, поэтому фрактальная Природа есть носитель *смыслов*.

Содержание словаря и любого текста не зависит от того, читаем ли мы его в поезде, самолёте, на крутящейся карусели. Оно является *конформно инвариантным*, физические движения не влияют на смысл. Движение по словарю осуществляется не столько механическим перелистыванием страниц, сколько *инверсией*. Инверсия не является движением материальных тел и «оживает», то есть может быть включена в спектр движений теории, только в нематериальных, нульмерных пространствах, таких как  $p$ -адика. Инверсия есть единственное движение, которое порождает самоподобие фракталов и реализует принцип *каждое в каждом*, связывая между собой все точки универсума. В словаре инверсия соединяет сколь угодно далеко разделённые слова. Физи-

ческое расстояние здесь всегда присутствует, но не является определяющим — слова, разделённые томами, которые могут находиться на разных континентах, самолётах, поездах или быть сколь угодно близко расположенными на современных электронных носителях, одинаково быстро связываются инверсией.

Неформально говоря, все слова словаря-Мира находятся на ветвях Мирового Древа, по которым они и оказываются вневременным образом связанными. В формальных конструкциях ветви представлены дугами [13].

Фрактально-хаотическая модель языка, с одной стороны, уже способна к порождению частных моделей, с другой — остаётся инвариантной при любом формальном преобразовании, то есть порождает саму себя.

5. *Часть и целое*. Приняв за исходное пространство самодвойственное  $Q_2$ , то есть «сразу став на почву языка» (Ф. де Соссюр), мы естественным образом оказываемся в пространстве Единое—Многое Платона, или *целое и часть* современной науки. Природа и человек в языке также образуют пару *целое—часть*. Поэтому, с одной стороны, возникает знакомый системный паттерн *слово—предложение — текст—дискурс* [14, с. 301—306]. С другой стороны, получает подтверждение вывод Б.А.Успенского о наличии глубинной топологической асимметрии в языке, воспроизводящей асимметрию множеств Кантора (аддитивные, составные) и Мириманоффа (комплексивные, целостные). Эта грамматическая асимметрия также имеет форму оппозиции *часть—целое*, в которой действия отрицания совпадают с соответствиями Галуа [15, с. 46, 57, 81].

Следовательно, следует предвидеть антиномичный характер языка на формальном уровне и его проявления на разных уровнях [1]. Так же как и во фракталах, в языке выделяются две оси: экстенциональная и интенциональная, или синтагматика и парадигматика.

6. *Поле*. ЕЯ, с точки зрения физики, — парадоксальное явление. Он существует, будучи физически ненаблюдаемым. Единственной субстанцией, общей для всех наук, является поле [16]. В языке существуют различные понятия поля: морфосемантическое, семантическое, грамматическое, лексическое, парадигматическое, ассоциативное и др., фиксирующие отношения родства [17, с. 380]. Общности и бескачественности, то есть много- и разно-качественности поля, ставим в соответствие нульмерное поле 2-адических чисел  $Z_2$ . Многообразию полей в одном языке отвечает рефлексивная схема, если все поля трактовать через Сущность (см. ниже).

Тогда подтверждается замечание семиотики о том, что язык, вещественные и  $p$ -адические числа имеют общую алфавитную основу [18,

с. 364]. Точнее,  $Z_2$  в нашей интерпретации делает этот изоморфизм очевидным и для  $R$  и  $R^\#$ .

7. *Философия имени*. Поэтому  $Z_2$  в *философии имени* можно сопоставить с Сущностью (усия – ουσια) – первоосновой языка, которая существует сама по себе, не требуя никакой опоры, не будучи никогда подлежащим, и имеющая иерархическую основу [9, с. 12, 13, 27]. Три аспекта бытия Сущности – «как таковая, сама по себе», «в языке как грамматическое подлежащее», «в мысли как субъект простого асерторического суждения» [9, с. 32] – оказываются взаимосвязанными. Категория Сущности имеет иерархический вид «дерева Порфирия». Все категории выражаются через Сущность:

«... это не только схема родо-видового подчинения (и не только схема строгой дихотомии деления объёма понятий, как она иногда рассматривается в логике), а система логико-лингвистической иерархии, обладающей целой совокупностью языковых и логических свойств. ... Движение по иерархии Сущности является одновременно и логическим, то есть происходит в понятии, и онтологическим, то есть отвлекаемые ступени не перестают существовать онтологически, вне познающего рассудка, как присущие объективной действительности» [9, с. 35, 37].

Иными словами, Сущность есть срединное бытие между воображаемым и вещным мирами. Нетрудно узнать в ней образы  $S$ -канторова совершенного множества и его числового изоморфа  $Z_2$ . Поэтому Сущность есть языковой эквивалент двойственности Стоуна, её воплощение в ЕЯ. Двойственность Стоуна утверждает изоморфизм булевой алгебры, одного из самых универсальных объектов математики, и материи с фрактальной, то есть  $Z_2$ -структурой. Поэтому язык есть сам себе модель, имеющая точную интерпретацию во внешнем мире.

Первичность Сущности отвечает первичности 2-адических чисел в нашей схеме. Её действие имеет точные соответствия в модели: все (под)множества  $R^\#$ , то есть предметы внешнего мира [19], и все слова [3] могут быть получены проекцией из неё. Это следствия универсальности канторова совершенного множества и множества двоичных строк (компьютерная метафора). Причём между числами, материей и словами нет непроходимой границы/пропасти.

Иерархия создаёт абстрактный (ненаблюдаемый) и наблюдаемый уровни, различая языковые сущности как классы (целостности) и как множества (элементы). Класс как целостность можно представить именованным кластером  $Z_2$ , включив префикс: Класс =  $100111 \circ 2^7 Z_2$ . Продолжение анализа представляет класс как множество.

Класс  $= 100111 \circ (1 \circ 2^8 Z_2 \cup 0 \circ 2^8 Z_2)$  (здесь  $\circ$  — конкатенация). В первом случае префикс служит общим признаком класса сущностей, во втором — класс сущностей представлен набором. Здесь взаимодействуют множества Мириманоффа и Кантора. Аналогично обстоит дело с уровнями языка — фонемным, морфемным, уровнем слов, словосочетаний, предложений [8, с. 215–217]. Для более полного представления следует, видимо, вновь использовать рефлексивные свойства  $Z_2$ , развернув его в «голограмму уровней». Сказанное следует понимать как упрощение, не учитывающее сочетаемость, присутствие человека и т.д., то есть как математическую компоненту сложного явления.

С помощью модели Сущности рассмотрим некоторые дальнейшие соответствия.

8. *Речь и язык.* Речь является воплощением языка в физическом мире, то есть в  $R$ , и обладает свойствами, характерными для физических процессов, — материальна, линейна, динамична — протекает в физическом времени. Кроме того, речь субъективна, связана с личностью говорящего. Речь и язык относятся друг к другу как явление и сущность, частное и общее. Язык творит речь и сам творится ею (Ф. де Соссюр) [17, с. 414]. В изменениях речи заложена эволюция языка. Формально и схематически, без учёта человека, речь представляет собой инволюцию символического элемента пространства языка, основу связи вещественных и  $p$ -адических (диадических) чисел:  $R = inv Z_2$ ,  $\xi \in Z_2 \mapsto x = inv \xi \in R$ . Здесь символы строки  $\xi$  переходят в аффинные движения элементов строки  $x \in R$ . Вариации этой строки, вносимые говорящим, обратной инволюцией в символическое пространство становятся «случайностями, носящими конструктивный характер» (по И. Пригожину), то есть творят язык.

9. *Постулаты лингвистики.* [8, с. 256 и далее]. Первый постулат о тождествах–различиях есть форма асимметричного дуализма лингвистического знака: знак не только разделяет, но и объединяет языковые сущности [20, с. 87; 1, с. 157]. Это движение по дереву Сущности  $Z_2$  (в его голографической форме) и двойная числовая определённость строки символов.

Второй постулат о *синтагматике–парадигматике* соответствует двум осям языка и двум осям числовой асимметрии. Парадигматика — отношения иерархии, а общность по вертикали естественным образом моделируется вложениями шаров:  $\dots 2^N Z_2 \subset 2^{N-1} Z_2 \subset \dots \subset 2^k Z_2 \subset \dots$

Синтагматика — общность сущностей в пределах одного уровня — представляется разбиением уровня-шара:  $2^N Z_2 = \bigcup 2^{N+M} Z_2$ , где числа  $N$  — номер уровня, а  $M$  — число сущностей, произвольны.

Здесь уместно упомянуть о двойственности союза ИЛИ [21]. Этот союз может иметь смысл исключаящего ИЛИ — как в парадигматике,

и смысл конъюнкции — как в синтагматике. Тем самым эти две оси языка оказываются в отношении формальной дополнительности. Так же как и в числовой сфере, эти оси оказываются нестрого (т.н. гиперболически) ортогональными (см. [8, с. 259]). В общем ось членности в парадигматике оказывается связанной с линейной осью синтагматики как условия движения в апориях *Дихотомия* и *Ахиллес и черепаха*.

9.1. *Синхрония и диахрония*. Синхрония определяет одновременные отношения между элементами языка, диахрония — процесс развития языка, с его изменениями во времени. Диахрония включает в себя развитие через речь — смену денотатов — и развитие через последовательные стадии синхронии — углубление сигнификатов. Поэтому она двумерна, включает в себя как событийное время символического пространства, так и физическое время речи, то есть синхронию. Эти временные явления также не являются полностью ортогональными [8, с. 261; 17, с. 136]. Синхрония — аналог момента *теперь*, который может простираться в прошлое происхождения языка, захватывая его наблюдаемое положение. Тогда диахрония есть диахрония синхроний.

Положение человека в таком случае в системной теории называется метапозицией — быть одновременно «над» и «в» ситуации, что, по-видимому, аналогично дейксису в лингвистике. Для сравнения: дейксис в физико-математической науке регламентирован эффективностью, завершённой измерительных процедур, то есть лабораторными масштабами пространства-времени. Диахроническая ось полностью отсутствует, хотя в некоторых экспериментах с фазовыми превращениями можно увидеть её подобие.

9.2. *Постулат о произвольности—непроизвольности знака* [8, с. 264] оказывается очевидным в силу двумерного характера времени в числовой асимметрии. Рассмотрим семантический треугольник, который запишем в схеме модели:

$$\text{денотат} \in R^{\#} \leftarrow \text{слово} \rightarrow \text{сигнификат} \in Z_2, \quad R^{\#} = \text{inv } Z_2.$$

Включим (двумерное!) время [8, с. 14]. Течение физического времени в  $R$  изменяет фонетическую оболочку слова и денотат при неизменном сигнификате. Это явление *синонимии* — сходство по значению. Предел вариации — метафора.

Течение событийного времени в  $Z_2$  при неизменном денотате порождает омонимию — значительные, предельные расхождения по сигнификату одного слова. Вариации при обогащении значения порождают *термин*.

В семантическом треугольнике действие влево — конвергентное, вправо — дивергентное. Все его члены расположены в физическом пространстве  $R$ . Денотату соответствует *часть*, сигнификату — *целое*.



Инволюция, то есть ультраметризация или дематериализация треугольника, помещает его в  $Z_2$ . Фонетически изображённое слово переходит в мыслимое. Тогда денотат в качестве вещи и сигнификат в качестве класса родственных вещей переходят в свои лингвистические прообразы и оказываются в нульмерном пространстве, где всё со всем связано. Денотат становится целым (имеющим составные части, то есть фракталом), сигнификат – частью.

Например, инволюция, дематериализация значения *лошадь* позволяет формировать её различные виды как визуальные, так и биологические (как на экране компьютера). Часть в  $R$  становится целым в  $Z_2$ . Дематериализация сигнификата *лошадь* приводит к общей идее *лошадности* (пример Платона). Целое переходит в *многое*. В этом случае к образу физического значения и сигнификата треугольника открыты пути их формирования и связи с другими как с внутри-, так и с внеязыковыми сущностями. Тем самым дематериализация семантического треугольника может открыть путь к пониманию *смысла* слов.

Тот же результат получится, если образование слова объяснять двумя причинами: нисходящей, различающей части значения, и восходящей, соединяющей их в целое. Так же как и образование всякой вещи и даже рациональных чисел. Формально это достигается конкуренцией двух метрик вещественных и  $p$ -адических чисел. Если учесть, что они совпадают с двумя способами наблюдения человека (см. гл. 6), то, как и везде в языке, неразрывно связанными оказываются Язык, Человек и Мир.

10. *Синтаксическая парадигма*. Известны сложности с определением семантики предложения [22, с. 36], пропозициональной функции и предиката.

«... имеется ли естественная внеязыковая, онтологическая причина к тому, чтобы одни какие-то явления объективного мира в любом естественном языке назывались как вещи, то есть именами, а какие-то другие явления всегда – как глаголы, признаки, предикаты, то есть не именовались бы, а “выражались” иным способом. Проблема именования предстаёт сегодня в конечном счёте как проблема различения “вещей” и “отношений”» [9, с. 20].

Подойти к их объяснению можно при помощи двойственности Стоуна. Одна её сторона, булева алгебра, имеет в качестве своих основных операций  $\wedge$ , конъюнкцию, пересечение (*meet* – англ.),  $\vee$ , дизъюнкцию, объединение (*join* – англ.) и  $\neg$ , отрицание (*negation* – англ.), которые в точности совпадают с операциями ЕЯ. Другая – фрактальный мир, в котором объекты создаются теми же процессами конвергенции

и дивергенции, а отрицание имеет вид соответствий Галуа. Булева алгебра привлекалась для моделирования семантики, но в физической картине мира и без упоминания о человеке [23].

В качестве своих интерпретаций булева алгебра имеет «отношения между событиями» (что ведёт к варианту теории вероятностей, пока не развитому), алгебры высказываний (булевские функции), релейно-контактные схемы и причинно-следственные цепочки [24, с. 106, 131, 172], порождение формул и прочих комбинаций символов по формальным правилам знаковочетаний. Все четыре интерпретации изоморфны между собой, их воплощение – системы нейронов головного мозга и пространство памяти компьютеров [25, с. 27]. Одна из популярных моделей булевой алгебры – сетевая [26, Ch.4] – также изоморфна образу мира как масштабно-инвариантной сети [27]. Тем самым выполнено условие теоремы Бета об определмости: «семантическая (т.е. предметная) определмость эквивалентна синтаксической (в математическом формальном смысле) или модель должна быть подобна оригиналу, что известно из практики моделирования сложных систем» [28].

Выпишем для ясности схему *вариантов инварианта* в сокращённом виде, интерпретировав её в связи с языком (см. литературу гл. 4):

$$C \cong \exp(C) \cong 2^C \cong Z_2 \cong [IFS = \{0,1\}^N] \cong [Z_2 \rightarrow Z_2] \cong C(\text{inv } Z_2) \cong C_{\text{Stone}} . \quad (**)$$

Здесь знаки эквивалентности (изоморфизма) означают по порядку слева направо:

$C$  и  $\exp(C)$  – фрактальная модель мира и его частей. Любая часть языка изоморфна всему языку.

$2^C$  – набор функций истинности булевой алгебры, заданных характеристическими функциями своих подмножеств. Последовательность элементов этих подмножеств такой булевой алгебры есть слово или высказывание. Последовательность характеристических функций этих подмножеств задаёт граф – структуру, модель или остов предложения. Если в высказывании на каких-либо местах стоят характеристические функции, то это  $n$ -местный предикат [9, с. 130–132]. Поэтому предложение, составленное из характеристических функций, является пропозициональной функцией и может выражать факт, свершение события, быть истинным или ложным при подстановке конкретных значений термов.

$Z_2$  – собственно, булева алгебра (сочетаний символов), которая есть к тому же топологическая алгебра числа со свойствами материи. «Сущность есть непосредственное единство материи и формы, Сущность = материя + форма» [9, с. 29]. В качестве формы здесь выступает фрактальный, тонкий прообраз материи.

Такое строение материи (нульмерное, дисконтинуальное, фрактальное) совпадает с формальными языками теоретической информатики, является доменом в теоретической информатике (итеративная система функций — *IFS* — является центральной техникой порождения фракталов). Это символическое пространство, область действия символической динамики. Текстовые редакторы экспериментально доказывают это предложение.

$[Z_2 \rightarrow Z_2]$ . Как решётка она совпадает с пространством непрерывных функций над собой. Как известно, каждый нульмерный компакт однозначно характеризуется пространством непрерывных функций над собой. То есть Сущность имеет свой второй образ — функциональный. В этой булевой алгебре также находятся все характеристические функции.

$C(invZ_2)$ . Во внешнем мире поле функций определяет поле градиентов движений — это тот внеязыковой образ, который может быть поставлен в соответствие предикату.

Сопоставим изоморфы  $Z_2$ ,  $[Z_2 \rightarrow Z_2]$ ,  $C(Z_2, Z_2)$ . Это значит, что слова формально не отличаются от глаголов, и, значит, можно ввести глагольную форму некоторых слов — отражение движения во внешнем мире.

*Денотат предложения* можно теперь представить следующим образом. Левополушарное, написанное, то есть в  $R$ , оно выражает факт свершения события и может оцениваться на предмет истинности. Правополушарный  $Z_2$ -прообраз может быть мысленно представляемой сценой, эпизодом, потоком зрительных образов, в котором действуют прообразы возможных кандидатов на места в характеристических функциях. Этот образ всегда истинен, поскольку всегда конкретен [29, с. 29–33]. Конечно, он неединственен — свой у каждого субъекта, в отличие от семантического треугольника. Собственно, это явление возникает при прочтении разными людьми одной книги или пересказа фильма, случая из жизни.

Фрактальное распределение материи как эквивалентное, по формулировке М.Стоуна, булевой алгебре носит название стоунового пространства. Стоуново пространство символических объектов есть обратная сторона канторова множества как фрактальной модели материи. Поэтому (\*\*\*) есть развёрнутая по граням Сущности двойственность Стоуна, которая является аналогом двукратной соотнесённости ЕЯ.

11. В прагматической парадигме языка обнаруживаются следующие соответствия. Субъект имеет в нашей схеме два образа — телесный в  $R$  и тонкий в  $Z_2$ . Соотнесение всего языка с тонким образом субъекта означает помещение его в центр языка, что в точности соответствует элементарному факту теории  $p$ -адических чисел: «*Всякая точка есть центр шара, то есть  $p^N Z_p$ , при любом  $p$* ». В булевой алгебре есть приём релятивизации к выбранному элементу  $x$ , который делает из него

единицу подалгебры исходной алгебры. Существование гомоморфизмов между всей алгеброй, то есть языком и подалгеброй или языком субъекта, сохраняющее все структурные свойства алгебры, ставит их языки во взаимнооднозначное соответствие. Такие субъектные релятивизации образуют полную решётку [30, Ch.11, 12].

Вопрос о соотношении «Я – Ты» имеет смысл рассматривать в  $Z_2$ . Причём если «Я» имеет двойной модус существования, то в процессе речи «Ты» существует только в  $Z_2$ . Оппозиция здесь в точности «зеркальная наоборотность»: субстанция «Я» субстанционально зеркальна субстанции «Ты», которое составляет с «Я» оппозицию *внешнее–внутреннее* [9, с. 227–228].

Акт говорения – поток «звуков-стрел» – вместе с физической координатой говорящего есть момент *теперь* в апории *Стрела*, он длится (*не прерываясь!* – Ф.М.) так долго, как длится сама речь [9, с. 225]. Отсюда рассуждениями, аналогичными тем, что в апории *Место места*, получаем утвердительный ответ на вопрос о месте говорящего – оно везде в языке:

«...Не получается ... , что место, “где я сейчас говорю”, будет иногда “место в мыслях”, иногда “место, совпадающее с моей автомашиной”, иногда “место в окружении тех людей, где находимся мы – я и мой ребёнок”, и т.д.» [9, с. 225].

Речь в *Речь* есть инволюция мысли в  $Z_2$ : «То, что в мысли содержится симультанно, то в речи развёртывается сукцессивно» (Л.В.Выготский). Симультанность – синоним дивергентности, одновременного звучания, сукцессивность – последовательность конвергенции.

12. *Физический смысл* языка объясняется тезисом К.Пайка: «Язык есть частица, волна и поле» [31]. Каждый фрагмент языка – слово, абзац, глава – является тонким, волновым аналогом (см. гл. «Физика») материального образования в  $Z_2$ . Любой физический предмет, например – частица, имеет свой тонкий ультраметрический (про)образ, то есть одновременно является и волной. Тогда весь текст можно считать полем. Но поскольку язык нульмерен, то есть не действует на пробный предмет, помещённый в его поле, то он – реальность ниже порога Планка и, скорее всего, его следует мыслить как вакуум. То есть язык есть реальность – имманентная и трансцендентная, то есть параллельная материальному миру, в котором существуют аналоги физических явлений [32, с. 448].

Язык можно представить как голограмму – подстановку (\*\*\*) в (\*), вмещающую все остальные дисциплины следующим образом. Каждую науку можно закодировать строками нулей и единиц, то есть поместить её, условно говоря, в компьютер, который способен воспроизвести как

расчётные методы, так и наглядный материал – карты, атласы, фотографии, которые есть законное средство естественных наук. Движение по такому тонкому образу направляется двумя причинами и порождает *сворачивание–разворачивание* смысла понятий, то есть *включение–исключение* соответствующих явлений и объектов из рамок дискуссии/изложения. Тогда голограмма примет вид:

$$Z_2^{\text{ЯЗЫК}} \cong (Z_2^{\text{ФИЗИКА}} \cong Z_2^{\text{БИО}} \cong Z_2^{\text{СОЗНАНИЕ}} \cong Z_2^{\text{ГЕО}}) \cong Z_2^{\text{???}}$$

В ней каждой науке, а в науке – явлению, ставится в соответствие её ультраметрический прообраз –  $Z_2$ . Голограмма – открытая система, и в ней есть незанятые множители, которым соответствует явление эмерджентности  $Z_2^{\text{???}}$  – порождения новых свойств. Эмерджентность, как порождение нового смысла, является чисто языковым явлением. Хорошо известны многочисленные драмы и трагедии во всех науках, сопровождающие её возникновение. Каждый множитель антиномичен:  $Z_2^{***}(|\xi|_\infty) = Z_2^{***} = Z_2^{***}(|\xi|_2^D)$ . Левая часть – момент *теперь*, точка присутствия. Любой член из правой части может стать зависимой переменной и быть перенесён в левую часть, а язык – в правую. Тем самым определяющая роль языка становится очевидной.

Можно видеть сходство нашей аргументации с теорией Мейнонга о двух видах существования, составляющих квазибытие. не имеющее своей противоположности ( $Q_2 = \neg Q_2 \Leftrightarrow \neg(R \times \text{inv } R) = Z_2 \times R$ ). В нём вынесенное за пределы (физического. – *Ф.М.*) мира существования объекта первично по отношению к его реальному (физическому. – *Ф.М.*) существованию [33, с. 208–209]. Это соответствует первичности  $Z_2$  в нашей схеме.

13. *Схематически о грамматике.* Изложенное выше имело под собой бинарное лексикографическое дерево в его самом простом варианте  $Z_2$ , или канторова совершенного множества  $C$ . Его недостатком является наличие бесконечного числа пробелов в его строении или поле. Канторово множество является единственным нульмерным экспоненциально полным множеством без изолированных точек. В пробелы  $C$  можно вставить копии  $C$  и получить таким образом новое, более богатое  $C^0$ . Аналогично с  $Z_2$ : каждый этаж иерархии заполняется копиями всего  $Z_2$ . То есть каждая вершина иерархии Сущности представляется копией  $Z_2$ . В этом случае неархимедову метрику следует считать плотной. Тогда слово, стоящее в данной вершине Сущности с целочисленным номером, приобретает варианты – продолжения в этой копии, которые можно сопоставить изменяемости и сочетаемости слов в предложении, что изучается грамматикой и синтаксисом. Это, в принципе, можно сделать, используя рефлексивную схему  $Z_2$  на каждом уровне Сущности. Формально рефлексивная схема соответствует произведению решёток:

в этом случае в каждую вершину  $Z_2$  помещаются его копии, и одноимённые вершины получившейся решётки соединяются рёбрами [34, р. 18].

Формально данную схему можно представить как действие свободной группы с двумя образующими: конвергенцией, помещающей копии  $Z_2$  в данное место, и дивергенцией, извлекающей фрагмент копии в общий строй языка. Картину подобной групповой динамики см. в [35, Ch.4–6; имеется русский перевод под названием «Ожерелье Индры»].

Вопрос о том, сколько раз нужно повторять эту операцию в данной вершине, относится, по-видимому, к вопросам развития языка.

14. *Происхождение языка.* Сущность, по-видимому, можно рассматривать как Праязык в рамках теории о божественном происхождении языка – врождённой языковой человеческой способности. В античной языковедческой традиции, связывающей вещь, слово и мысль в явления по аналогии [36], Сущность как подлежащее, очевидно, может выполнять эти функции связи. Праязык в своём смысловом содержании отражает/включает универсальные характеристики известных языков бывших и настоящих, географически инвариантных, независимых от конкретного социума. Существует иерархия праязыков по времени их разделения на диалекты, которые, в свою очередь, порождают некоторую семью языков. «Эта схема последовательного дихотомического деления праязыков осложняется процессами взаимопроникновения, смешения и креолизации» [37]. В этой характеристике нетрудно узнать изоморф числовой асимметрии в виде: *Праязык = Сущность ( $Z_2$ ) × Взаимопроникновение ( $R^\#$ )*.

Эта версия Праязыка сегодня представлена работой Е.В.Терёшиной [38]. Автор полагает, что возникновение языка порождено созерцанием человеком природных и внутренних оппозиций типа *сгущение–разрежение* и топологически им синонимичных типа *мрак–свет, рождение–смерть* и т.д. В таком варианте – божественного, то есть неаксиоматизируемого, понимания природы языка – Праязык оказывается посредником между человеком и миром, то есть одним из органов человеческого восприятия, и все вышеперечисленные функции ЕЯ имманентны ему и существуют одновременно с человеком, поскольку оппозиции Терёшиной являются одновременно и оппозициями восприятия (и измерения).

## Литература к главе 9

1. Гийом Г. Принципы теоретической лингвистики. М.: Прогресс Культура, 1992.
2. Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. М., –СПб. –Киев, 2002.

3. *Dube S.* Undecidable Problems in Fractal Geometry // Complex Systems. 1993, 7, p. 423–444.
4. *Augenstein B.* Complexity, Universal Libraries, DNA Sequences // Chaos, Solitons & Fractals, 1999, v. 10, no.4, p. 953–973.
5. *Языковая номинация.* Общие вопросы. Кн. 1, М.: Наука, 1977.
6. *Степанов Ю.С.* Язык и метод. М.: ЯРК, 1998.
7. *Лосев А.Ф.* Введение в общую теорию языковых моделей. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
8. *Степанов Ю.С.* Основы общего языкознания. М.: Просвещение, 1975.
9. *Степанов Ю.С.* В трёхмерном пространстве языка. М.: Либроком, 2010.
10. *Мечковская Н.Б.* Семиотика. Язык. Природа. Культура. М.: ACADEMIA, 2004.
11. *Лесков Л.В.* Семантическая Вселенная // Вестник МГУ, сер.7. Философия, 1994, №4, с. 12–36.
12. *Marcus S.* Words and Languages Everywhere. 2007.
13. *Nadler S.* Hyperspaces of Sets. Marcel Dekker, 1978.
14. *Якобсон Р.О.* Часть и целое в языке / Избранные работы. М.: Прогресс, 1988.
15. *Успенский Б.А.* Часть и целое в русской грамматике. М.: ЯСК, 2004.
16. *Torrance T.F.* Transformation and Convergence in the Frame of Knowledge. Belfast, 1984. Приведено по: Дель Ре Дж. Космический танец. М., 2006, с. 118.
17. *Ярцева В.Н.* Языкознание. Большой энциклопедический словарь. М.: Большая рос. энц., 1998.
18. *Степанов Ю.С.* Константы. Словарь русской культуры. М., 1997.
19. *Falconer K.* Digital Sundials. Paradoxical Sets and Vitushkin Conjecture // Math. Intelligencer. 1987, 9, p. 24–27.
20. *Карцевский С.О.* Об асимметричном дуализме лингвистического знака / Звегинцев В.А. История языкознания XIX–XX веков в очерках и извлечениях. Ч. II. М., 1965.
21. *Падучева Е.В.* Опыт логического исследования союза ИЛИ // Философские науки. 1984, №6, с. 145–149.
22. *Арутюнова Н.Д.* Предложение и его смысл. М.: ЛКИ, 2007.
23. *Keenan E.L., Faltz L.M.* Boolean Valued Semantics for Natural Languages. D.Reidel, 1985.
24. *Яглом И.М.* Булева структура и её модели. М.: Радио и связь, 1980.
25. *Гастев Ю.К.* Гомоморфизмы и модели. М.: Наука, 1975.
26. *Davey B.A., Priestley H.A.* Lattices and Order. Cambridge U.P., 2002.
27. *Caldarelli G.* Scale-Free Networks. OUP, 2007.
28. *Холл П.* Вычислительные структуры. М.: Мир, 1978.
29. *Иванов Вяч.Вс.* Чёт и нечет. Асимметрия мозга и знаковых систем. М.: Сов. радио, 1978.
30. *Givant S., Halmos P.* Introduction to Boolean Algebras. Springer, 2009.

31. *Pike K.* Language as Particle, Wave and Field // Texas Quaterly 2:2, 1959.
32. *Зинченко В.П.* Семиосфера / Мещеряков Б.Г., Зинченко В.П. Большой психологический словарь. М., 2002.
33. *Арутюнова Н.Д.* Предложение и его смысл. М.: ЛКИ, 2007.
34. *Davey B.A., Priestley H.A.* Introduction to Lattices and Order. Cambridge U.P., 2002
35. *Mamford D., Series C., Wright D.* Indra's Perls. CUP, 2002.
36. *Бокадорова Н.Ю.* Античная языковедческая традиция / Ярцева В.Н. Языкознание. Большой энциклопедический словарь. М.: Большая росс. энц., 1998, с. 34–35.
37. *Иванов Вяч.Вс.* Праязык / Ярцева В.Н. Языкознание. Большой энциклопедический словарь. М., Большая Росс. энц., 1998, с. 991–992.
38. *Терёшина Е.В.* Праязык. ЯСК, 2008.



## Глава 11

### Биология

*Введение.* Связность, активность, наличие разнообразных движений, в том числе нефизического становления/рождения, разнообразие/неповторимость, неизмеримость своей сущности – все грани неопределимости делают жизнь потусторонним по отношению к математике феноменом. Лишь наблюдаемость зрением чувственным и зрением умным [1, с. 163], разумом отражающим и разумом проникающим [2] и, соответственно, два ряда чисел – экстенсивный и интенсивный, являются общим для биологии и математики. Наблюдаемость чувственным зрением отражает обычные множества, материальные объекты и экстенсивный натуральный ряд. Тонкие нульмерные множества, типа канторова совершенного, интенсивный ряд и многое из биологических явлений – уровни сознания, чувствования, эволюция – ненаблюдаемы и постижимы лишь проникающим разумом. Что наблюдается в нашей схеме, так это два базовых процесса:

«В живых системах протекают два антагонистических процесса, которые лежат в основе обмена веществ: построение термолабильной структуры и распад термолабильной структуры при температуре жизни. ... Создать машину, единственная функция которой состояла бы в построении собственной структуры из материала термолабильного при температуре деятельности этой же машины, является, по-видимому, невозможным». [Тринчер К.С. Биология и информация. М.: Наука, 1965, с. 79, 90].

Это, по-видимому, и есть исходная точка соприкосновения математики и биологии. Сделаем, однако, оговорку. В биологических процессах огромную роль играет биохимия. Это – по сути вся теория абиогенеза и физико-химической природы жизненных явлений. И пока не

будет создана математическая модель таблицы Менделеева, не поняты в её контексте/системе исключительные роли углеводородных соединений и воды, исследование свойств которой началось лишь в последние 10–20 лет [3, 4], любое моделирование неизбежно остаётся очень неполным. (**Замечание.** Парадоксально то, что вода необходима не только жизни, но и её антиподу — техническому прогрессу. В то же время исследование биологических явлений физико-химическими методами не привело к пониманию феномена жизни [5]. Поэтому нижеследующие рассуждения имеют чисто геометрический характер; мы ограничимся лишь тем, что, по принципу двойственности для решёток, физические законы, верные над  $R$ , верны и над  $Z_2$ ).

Вполне может оказаться точным прогноз Дж. фон Неймана о том, что *единственной моделью нейрона является сам нейрон*, и это — для всей исследовательской программы моделирования в биологии. Для систем подобной сложности единственным способом смоделировать/предсказать движение/эволюцию есть имитация или их собственная эволюция. Здесь скрыта так называемая алгоритмическая  $P$ - $NP$ -проблема — редукции распределённой системы в алгоритм [6]. Эта проблема не решена, но исследователи склоняются к мысли, что она и не может быть решена: противоположное чреватو потерей творческой способности человека [7].

Иначе говоря, биология/жизнь является носителем своих законов, «чёрных ящиков» здесь не существует, и привычные алфавитные модели — язык, математика, компьютеры — не исчерпывают её существа, и для понимания требуется пересмотр многих очевидных, но не обязательных положений [8].

«Теперь стало очевидным, что на путях математизации биологических наук речь должна идти не о каком-то приживлении или подсадке математики к биологии извне (именно такие попытки делались и, несомненно, ещё будут делаться и впредь), а о выращивании новых, биологических глав математики изнутри, из самого существа тех вопросов, которые ставятся перед нами науками о жизнедеятельности» [Бернштейн Н.А. На путях к биологии активности // Вопросы философии. 1965, №10, с. 78].

Очевидным примером такой «неалфавитной» ситуации в обычной жизни являются спорт, особенно спортивные игры, и танцы, где игроки и танцоры в движении «думают» телом, а не рассчитывают свои движения головой.

«Мы вынуждены признать, что собственно биологические закономерности природы представляют законы природы, дополнитель-

ные к тем, которые пригодны для объяснения свойств неодушевлённых тел» [*Н. Бор*, доклад «Биология и атомная физика», 1937].

Главная идея главы — систематическое использование дополнительной к материальной, ненаблюдаемой части числовой асимметрии — пространства  $Z_2$ , которое порождает множественную дополнительнуюность явлений. Определения понятию *система*, основным источником которой была именно биология, не дано по сей день. Но существует линия его интерпретации в виде: системы — это объект, который может быть формализован различными несводимыми математическими языками. Эта трактовка систем (в виде множественной дополнительнойности) существует достаточно давно, но из-за своей «антиматематичности» никогда не появлялась на переднем плане [9–14].

Множественной дополнительнойности соответствует рефлексивное свойство  $p$ -адических чисел, в частности, для  $Z_2$ :  $Z_2 \cong Z_2 \times Z_2 \times \dots \times Z_2$ , где число сомножителей может быть любым счётным. Каждому из них может быть сопоставлен один процесс, одна физика, химия или информация. Эта схема образует голограмму живого и ответственна за его неопределимость или определимость множественную. Опишем очевидные соответствия, учитывая оговорку по поводу биохимии. Начнём со степенных законов, которые позволяют ввести в модель числовую асимметрию.

Формула для рациональных чисел, то есть наблюдаемых объектов биологии (см. гл. «Апории Зенона»), ограничена углеводородными соединениями:

$$Q_2 = [R \leftarrow \{Q\} \rightarrow Z_2], \quad Q = \left\{ x : x = \left| \xi \right|_2 \cdot \left| \xi \right|_\infty, \quad \xi \in Z_2, \quad x \in \{C - H\} \right\},$$

здесь через  $\{C - H\}$  обозначены углеводородные соединения.

1. Степенные законы. Степенные законы в биологии появились как закон распределения *видов в роде vs. число родов* Уиллиса—Юла [15, с. 350]. Фрактальная теория зафиксировала большое число степенных законов в разных разделах биологии и на всех уровнях размеров организмов [16–30]. Отметим главу 14 книги [31, р. 484–499], которая посвящена разбору осмысленности использования понятия математических фракталов — точного самоподобия, вычисления фрактальной размерности, заполняющих пространство кривых в биологических задачах.

Жизнь покрывает 27 порядков масштабов величин: от молекул и генетического кода до крупных организмов. То же относится к временным характеристикам — временам жизни, скоростям роста и метаболизма. Размеры организмов, их масс покрывают 21 порядок величин. В то же время отношение массы Земли к массе Галактики составляет 18 порядков, что сравнимо с массой электрона по отношению к массе кошки [30]:

«Самоподобный степенной скейлинг означает существование идеализированных биологических систем, которые представляют “нулевой уровень”, базу или точку отсчёта для понимания вариаций реальных биологических систем. Реальные организмы можно рассматривать как вариации или возмущения этих идеальных норм под действием стохастических факторов, условий среды или эволюционной истории. ... Охват сравнений, включающих различные таксономические и функциональные группы по многим масштабам величин масс, обнаруживает универсальную характеристику свойств живого, ведёт к гранулированному (coarse-grained) описанию, что мотивирует развитие общей теории» [30].

Этот вывод авторов аналогичен высказанной ранее мысли А.А.Любищева о существовании в биологии идеальной системы, подобной таблице Менделеева, которая могла бы «работать» аналогичным прогнозирующим образом. (См. о возможных аналогах таблицы Менделеева для планет, звёзд, а также галактик в работе: *Якимова Н.Н. Фрактальная Вселенная и золотое отношение*. М.: ЛИБРОКОМ, 2008).

2. *Анатомия vs. атомизм*. Главным отличием биологии от физики является наличие смысла в делимости, членимости её объектов. Тем самым мы имеем двумерную семантику *протяжённость—делимость* или *экстенциональность—интенциональность* пространства живого. Связи между ними даются парой *возможность—действительность*. То есть вводим в анализ числовую асимметрию и двойную причинность: *снизу вверх* и *сверху вниз*. По отношению к математике *ан-атомия* означает переход к математической теории распределённых систем.

«Отличие живого от машины в том, что живое центробежно, машина центростремительна» [*Икскюль Я.*, (по [32, с. 48])].

Ограничивающая роль *NP*-трудных задач в математическом исследовании биологии в том, что все биологические объекты являются распределёнными системами, с неограниченной в принципе делимостью, то есть с огромным числом составных частей и масштабов, которые создают для алгоритмов вычисления так называемое «проклятие размерности», то есть нередуцируемость системы за приемлемое время к какой-либо замкнутой математической модели. По опыту кибернетики XX века, такие системы сводились к сетям — Петри, семантическим и т.п. Распределённые системы математически неопределимы: в узлах сетей возникает либо противоречие, либо неединственность смысла. Ю.В.Чайковский назвал пространство живого *диасетью* — иерархиче-

ской сетью разнообразия [32, с. 339–351], которая является аналогом словаря (см. гл. ЕЯ). (Замечание. Чтобы понять разницу, приведём пример. Кот, действуя всеми своими органами и чувствами, может по деревьям, крышам сараев, заборам и т.п. забраться на крышу дома. Формализовать это его движение мы не в состоянии. Но можно, измерив его массу и взяв его за хвост, рассчитать траекторию броска на то же место на крыше, то есть редуцировав его к материальной точке. Конечные результаты совпадают. Но первый пример есть биологическая самоорганизация распределённой системы, второй – типичный случай математического моделирования, и не только в биологии. Нас, естественно, будет интересовать первый вариант).

В целом на всех уровнях живого легко узнаётся проблема *Единое–Многое* Платона и поэтому динамика биологических объектов определяется парами оппозиций/антиномий, специфичных для каждого уровня.

Так же как и ранее, мы не будем входить в подробности величин и знаков переменных в степенных законах, хотя в каждом отдельном случае эта разница может играть решающую роль. Отметим только, что атомизм есть синоним аксиоматического метода современной математики. Тогда *ан-атомия* означает неаксиоматизируемость. О неаксиоматизируемых системах мало что известно [33, с. 379–385]. ЕЯ, например, не имеет аксиоматического начала. А все теории физики – аксиоматизируемые.

3. *Геометрия*. Тем самым мы в качестве первичного геометрического принципа имеем право ввести  $Z_2$  как одну из координат биологической Вселенной. Поэтому геометрией биологического космоса нам будет служить  $Q_2$ , понимаемое двояко: как нульмерное пространство, которое является проективной (замкнутой) прямой, и как  $Q_2 = R \times Z_2$ , порождающее действительный мир  $(X, Y) \propto (|\bullet|_\infty, |\bullet|_2^D)$ , в котором и наблюдаются объекты и процессы биологии (объёмная модель эволюции И.А.Бесковой [34]). Два способа восприятия/наблюдения, соответствующие двум числовым метрикам, позволяют смотреть на мир таким образом.

Компьютерный образ этого пространства [35, теорема 4] представлен на рис.1. Это известный образ Вселенной – циклическое пространство-время [36], – который присутствует в

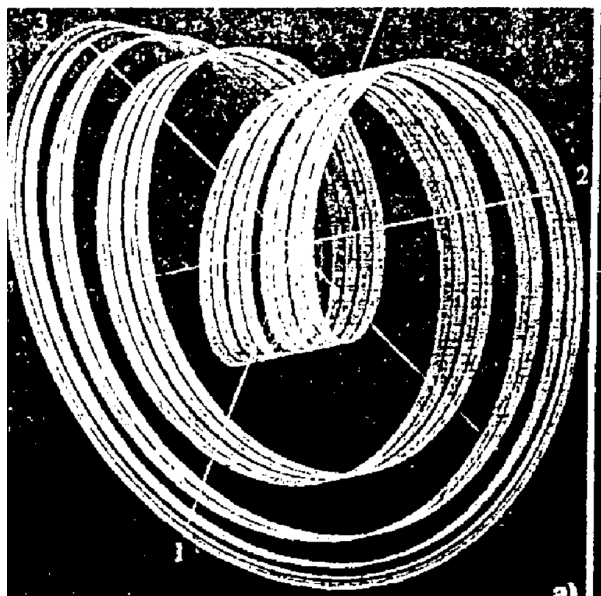


Рис. 1. Геометрия биологической Вселенной

мифах народов всей планеты. В современной физике образ фрактальной Вселенной хорошо известен, хотя и находится на периферии космологии [37]. Очевидно, интерпретировав его в нашей схеме, получим рис. 1.

Кроме того, в современной космологии известно решение К.Гёделя уравнений Эйнштейна, которое даёт образ циклической Вселенной, что сегодня отстаивает Р.Пенроуз [38]. В то же время Вселенная, давшая жизнь человеку, должна быть способной объяснять саму себя, а значит, с необходимостью оказывается циклической ввиду (нефизической) петли самоприменимости.

Известно, что в такой Вселенной появляются многочисленные патологии и сингулярности, физический смысл которых неясен до сих пор [39; 40, Ch.3, 4]. Но также неизвестно, имеют ли эти физические странности биологическое содержание. Во всяком случае имеет смысл вопрос: «Если геометрия Вселенной не циклическая, то как могли люди, прожившие в живой природе многие века и тысячелетия, не замечать этого? Неизбежным было бы рассогласование координации, навыков, коммуникаций как между людьми, так и в отношениях с живой природой. Пространства ведь слишком разные!».

Циклы в природе имеют не геометрический смысл траекторий замкнутых временных линий, а представляют собой циклы преобразований материи: цикл взаимопревращения энергии, пищевые цепи, цикл Кребса и т.п.

«Мировой круговорот есть, в сущности, круговорот форм движения материи. ... основным противоречием биологического круговорота является противоречие между процессами *синтеза* и *деструкции* живого вещества. ... Наиболее общее представление о круговороте в космическом движении выясняется в рамках противоположностей концентрации

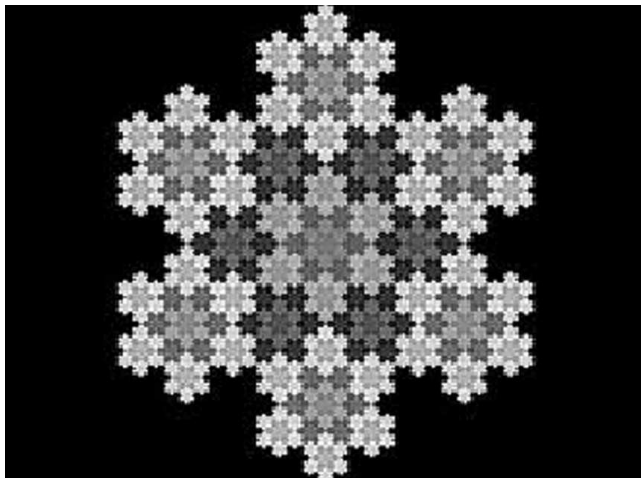


Рис. 2. Круговороты

и рассеяния (курсив — *Ф.М.*) ... Диалектика природы такова, что каждый круговорот, в свою очередь, соткан из других, то есть развёртывается как “круг кругов”. ... В целом создаётся картина всеобщей связи и взаимодействия, где в диалектике отдельного отражено глобальное целое, а целое есть мировой круговорот

– статистическая сотканная сеть разномасштабных круговоротов в природе» (Лойфман Е.Я., Стадник В.П. Единство природы и круговорот материи. Свердловск, 1988, с. 68, 71, 81, 85, 133, 136, 149).

Заметим, что фрактальные аттракторы всегда пространственно ограничены и поэтому гомеоморфны циклам. Масштабно-инвариантные сети также имеют двойное представление: как пересечение линий-хорд и как пересечение окружностей, образующих вершины, связанные дугами. Приведённая цитата описывает фрактальную геометрию в циклическом представлении.

Её общий вид можно проиллюстрировать рис. 2. Здесь «мировой круговорот» представлен «снежинками Коха», состоящими из своих копий, которые в свою очередь состоят из более мелких копий, и т.д. В этом заключено отличие от рис. 1. Главное в рис. 2 – наличие экстенсивно-интенсивной пары координат или натуральных рядов. То же относится и к  $p$ -адическим числам: на рис. 3 приведён 7-адический круг  $Z_7$  [41]. Произведение  $R \times Z_7$  даст геометрию рис. 1, для  $p = 7$  вместо  $p = 2$ . И обратно: цикл рис. 1 состоит из циклов рис.3 при  $p = 2$ . Ничего не изменится, если вместо  $Z_7$  мы подставим треугольник или ковер Серпинского, или какой-либо из известных фракталов любой формы.

Такая геометрия, где каждый организм сосуществует в окружении других и состоит из процессов *синтеза* и *деструкции*, более соответствует биологии, нежели пространству математической физики.

4. *Живая vs. Косная материя*. Различие между живой и косной материей, согласно Г.Спенсеру:

«Эволюция есть интеграция материи и сопутствующее ей рассеяние движения (у Ю.В.Чайковского «рассеяние энергии». – Ф.М.), причём материя переходит от состояния бесвязной неопределённой однородности к состоянию связной определённой однородности, а сохранённое движение претерпевает связные изменения» (по [32, с. 17]).

Из этого общего определения можно видеть, что живая материя создаётся и существует в  $Z_2$ , наблюдаемое

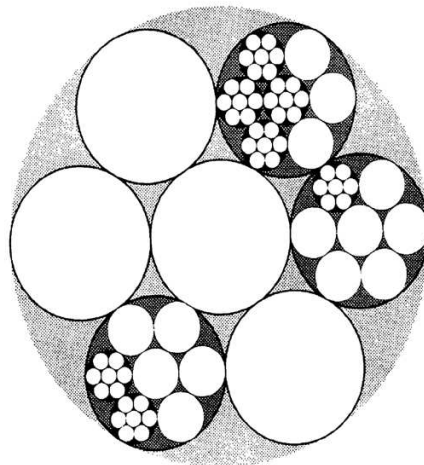


Рис. 3. Круговороты в  $Z_7$

живое есть проекция из нульмерного пространства в физическое. Его масса/размеры отражаются мультипликативной мерой Хаара, а не аддитивной Лебега. Вся эволюция происходит в ненаблюдаемом  $Z_2$ , мы видим лишь последние акты [34, с. 51, 54 – «Объёмная модель эволюции»]. В этой схеме живые существа имеют только один источник – вершину дерева (лексикографического)  $Z_2$ .

Соответственно, случайность, занимающая большой объём в рассуждениях о природе живого, – это не классическая теория вероятностей, а её комбинация с теорией возможностей.

Приняв  $Z_2$  как пространство живого, мы приходим к идее Л.Э.Брауэра свободно становящихся последовательностей, образующих интуиционистский континуум – оппозицию классическому связанному  $R$ . В нашей схеме это  $R^\#$ . В связанном континууме последовательности  $\{0,1\}$  существуют все и сразу, в интуиционистском – каждая цифра чисел континуума является актом свободного становления (выбора). Точно так же образуются фрактальные аттракторы при помощи итеративной системы функций и, значит, посредством  $p$ -адических чисел. Разницу фиксирует высказывание Г.Вейля:

«Выражение “существует” прикрепляет нас к бытию и закону, выражение “каждый” помещает нас в поток становления и свободы. ... Именно так нужно понимать мысль Брауэра, что нет никаких оснований верить в закон исключённого третьего» [Вейль Г. О философии математики. М.: Комкнига, 2005, с. 76–80, 102, 104].

Оппозиции *косная–живая* материи соответствует известная в математике пара: формализм Гильберта–интуиционизм Брауэра, то есть «или механика классической математики, или свобода интуиционизма». Ранее мы показали, что на фрактальных множествах логика есть логика интуиционизма. Для биологии  $Z_2$  – это пространство свободы, независимость от законов физики. Что подтверждается выводом масштабного исследования С.И.Сухоноса [68, с. 136–138]: «Живые системы имеют внутреннюю структуру с предельно заполненными иерархическими уровнями». Иначе говоря, материала  $Z_2$ , то есть границ, в них больше, чем где бы то ни было в косных объектах.

5. *Энтелехия Аристотеля–Дриша* [42]. Сравним нашу схему с описанием энтелехии, данной Г.Дришем. Ниже, после цитаты в ссылках, указаны только страницы этой книги. Толкование автора выделено курсивом.

1. «Энтелехия интенсивно многообразна как понятие, как фактор природы целостна и нераздельна» [с. 255].



Голографическая формула вариантов инварианта  $Z_2$ , данная ранее, может рассматриваться как семантическое многообразие этой интенсивной координаты. Ультраметрические пространства неделимы, каждая копия  $Z_2$ , даже отделённая заметным расстоянием от остального, содержит всё пространство. Поэтому объект/организм может располагаться в любом месте физического пространства (см. «Место места» в гл. «Апории Зенона»).

2. «Энтелехия, не будучи многообразием в пространстве и времени, создаёт таковое, подобно тому как акт художественного творчества, сам по себе непространственный, выливается в создание пространственного характера» (см. также [34]).

Здесь точное соответствие порождения пространства-времени  $R$  проекцией из нульмерного:  $Q_2 \Rightarrow R$ . Кроме того, в этом случае  $Q_2$  есть кривая, заполняющая пространство [с. 255].

3. «... как относится понятие энтелехии, как элементарного фактора природы, к остальным понятиям натурфилософии, созданным неорганическими науками [с. 256]».

Она проявляется как усечённые фракталы в косной материи, в ЕЯ она совпадает с Сущностью. В понятиях других естественных наук отсутствует систематизация понятий, подобно ЕЯ. Они часто создавались «по случаю», для решения конкретных задач (в этом проявляется усиливающаяся дифференциация науки). В таком глобальном смысле энтелехия предстаёт как в п.1 — «варианты инварианта», включающей разноприродные понятия. Рефлексивные свойства  $Z_2$  обеспечивают параллельность миров разных наук.

4. «... проявления энтелехии в пространстве относятся к категории причинности. Но есть ли сама энтелехия лишь специальный вид причинности? [с. 257]».

В нашей схеме на  $Z_2$  действует нефизическая причинность сверху—вниз наряду с физической — снизу—вверх. Первая причинность известна как нисходящая (*downward causation* — англ.), свободная у Канта, психическая у Тейяра де Шардена, целевая в общенаучном контексте. Эти две причины в нашей схеме имеют вид неархимедовой и архимедовой метрик соответственно. Поэтому энтелехия есть внефизическая причинность, имеющая свою количественную «переменную»  $|\bullet|_2^{-D} \approx k \cdot |\bullet|_\infty$ . Эти причины логически ортогональны, независимы. Одно из проявлений этой причинности — спонтанность, или эмерджентность. Сегодня этот круг вопросов — двух причин — всё более привлекает внимание [43, 44]. Идея причинности подробнее рассмотрена ниже как порождённое  $Z_2$ -пространство движений/энергий  $Z_4$ .

5. «Как возможно привести понятие энтелехии в гармонию с априорным принципом сохранения энергии?» [с. 258].

По принципу переноса, принципу двойственности в решётках этот принцип верен и для  $Z_2$ . Феноменологически энергия рассеивается при  $|\bullet|_2^D \rightarrow 0$ , то есть ветвями  $Z_2$ , и конденсируется в обратном направлении в неизменном количестве (см. «Медимн» в гл. «Апории Зенона»). Тем самым устанавливается соответствие со вторым законом термодинамики — он есть часть/ветвь энтелехии.

6. «Энергия есть количественное, то есть экстенсивное понятие; энтелехия, напротив, лишена количественного характера» [с. 258–259].

Энтелехия есть нульмерный прообраз энергии. Неформально, энтелехия как интенциональная координата есть геометрия дерева  $Z_2$ . Внутри организма энтелехия порождает «неограниченную микрогетерогенность» (то есть иррегулярность фракталов, которая следует из степенных законов — см. выше) [45, с. 26], которая является условием совершения внутренней работы [с. 258]. Энтелехия создаёт не материальные энергетические, а геометрические интенсивности, создающие условия для первых. Обобщая, энтелехия создаёт условия процессов физико-химии. На поверхностях рис. 1 и рис. 2 невозможно стационарное состояние, это геометрия нестационарности на любом масштабе.

7. «... так как любой акт энтелехии мыслим как компенсация какого-либо предшествующего её проявления, то не может быть начала её действия» [с. 259].

Здесь возможны варианты. Числовая асимметрия (см. рис. 1) имеет циклический характер, и тогда утверждение Дриша, очевидно, верно. Второй вариант:  $Z_2$  имманентен (но и трансцендентен) органической материи. Поэтому в любой её части уже присутствует его копия.

8. «...эквипотенциальность клеток означает, что в каждой из них возможно одинаковое число определённых реакций. Но осуществляется лишь некоторая небольшая часть этих возможностей, и в этом частичном претворении возможности в действительность, ... и заключается фундаментальная функция энтелехии» [с. 260].

Иными словами,  $Z_2$  качественно различает области физического пространства. Это значит, что энтелехия есть пространство Аристотеля, это функциональное, а не только геометрическое пространство [46, с. 24] (см. голограмму  $Z_2$ ). Всякий объект может быть представлен как  $K = a_0 a_1 \dots d \circ 2^{N+1} Z_2$ . Префикс  $a_0 a_1 \dots a_n$  различает видимо одинаковые объекты:  $K_1 = a_0 a_1 \dots b \circ 2^{N+1} Z_2$ . Последние его буквы, обозначенные  $b$  и  $d$ , символизируют различие областей пространства. И как функция может играть разную роль (здесь значок “ $\circ$ ” — конкатенация).

9. «... субстанция есть чисто экстенсивное понятие, энтелехия же, наоборот, — отрицание экстенсивности, чистая интенсивность» [с. 262].

Это отправная оппозиция нашей схемы.

10. «Энтелехия сохраняется в целости при делении её материально-го субстрата на части» [с. 263].

По этому поводу см. п. 1 выше.

11. «Энтелехия может быть только мыслима ... для энтелехии не существует никакого образного представления ... энтелехия принадлежит к априорной системе природных факторов» [с. 263, 264].

*Ненаблюдаемые  $p$ -адические числа имеют, однако, образ в виде дерева так же, как и на рис. 1, 3. Их существование по отношению к материи характеризуется парой – имманентно и трансцендентно. Видеть их можно только проникающим разумом, умным зрением (см. выше).*

12. «Так называемая индивидуальность органического тела вовсе не совпадает без дальнейшего с более глубоким понятием энтелехиальной индивидуальности» [с. 263].

*Одно из объяснений см. в п. 8. Второе заключается в рефлексивной способности  $Q_2$  и  $Z_2$ :  $Q_2 \cong Q_2 \times Q_2 \times \dots \times Q_2$ . Первое можно назвать внутриорганизменной индивидуальностью, второе – межтаксонной (роды, виды). Префикс как пространственная координата различает надорганизменные образования.*

13. «Но гораздо более глубоким ... мы должны признать добытое эмпирическим путём и вложенное в нашу энтелехию представление о нераздельно, хотя и наряду со своими частями, существующем “целом” [с. 269].

*В нульмерном прообразе организма, в отличие от материальных объектов, действует инверсия, которая названа Б.Мандельбротом в его книге хаотическим отображением, так как соединяет каждую его часть с каждой, создавая таким образом поле связей частей и органов, включая граничные поверхности. Согласно п. 7, это поле индивидуально для каждого организма. Это же поле вне организма отделяет его от материальной среды и служит узнаванию–различению родственных особей. Можно сказать, что внутри организма его органы связаны по ветвям индивидуального  $Z_2$ , когда префикс един. Вне организма в инверсионной связи неизбежно появляется составной префикс, различающий таксоны. Инверсное поле позволяет организму чувствовать границы своего тела.*

«Виды взаимосвязи и взаимовлияния частей в едином целом являются тем фактором, который отличает живые системы от систем неорганического мира. Кроме внутренних связей в это единство включаются связи внешние, связи с другими системами как органического, так и неорганического мира. ... Целостность организма проявляется, в частности, в том, что всякое новое местное воздействие на часть системы даёт о себе знать более или менее во всей системе» [47, с. 164–165].

Пока неясно отношение этого поля к межклеточным полям А.Г.Гурвича [48]. Насколько известно автору, для них пока не было найдено специфического представления, за исключением физического – слабого ультрафиолетового излучения [49] (приведено по [32, с. 13, 144–145]). Очевидная разница в том, что инверсионные поля действуют в нульмерном прообразе организма, то есть  $Z_2$  в поле Гурвича – в физическом пространстве  $R$ . Возможно, они дополняют друг друга как прообраз и наблюдаемая часть его инволюции.

14. «Вопрос о более обширном и даже универсальном проявлении телеологии может, несомненно, быть поставлен и рассматриваем вполне объективно [с 273].

*Это вопрос о фрактальной Вселенной и её представлении числовой асимметрией (см. рис. 1). Напрашивается следующее объяснение. Внутренняя петля соответствует нашей планете, которая излучает вовне энтропию (нормали к её линейчатой поверхности дивергентны). Внешняя петля излучает неэнтропию, сжимающие потоки, рождающие объекты во внутренней петле. Её нормали конвергентны. В первом случае действует второй закон термодинамики – увеличения энтропии, – который компенсируется действием большой петли. Точка самопересечения в нашей модели существует всегда. Но всегда ли она будет располагаться на Земле? Таких точек – плотное множество в числовой асимметрии.*

6. Следствия. Наше толкование энтелехии имеет следующие следствия. Простое её выражение посредством  $Z_2$  мы продолжим так же, как в рассуждениях о ЕЯ, пополнив каждый этаж/вершину копией всего  $Z_2$ . Геометрия, становясь более детализированной, остаётся циклической, сохраняются и ан-атомия, и всё сказанное об энтелехии. Такая конструкция делает энтелехию полем, которое мы также обозначим  $Z_2$ . Поскольку  $Z_2$  не имеет характерных линейных размеров и 1 – единица натурального ряда – неопределима, то есть не имеет референта в природе, то такая операция аналогична расщеплению вершин  $Z_2$  в древесный вид и рассмотрению их как структурированных. Тем самым допускаются вариации единицы. Согласно двойственности Стоуна,  $Z_2$  объединяет в себе высказывания, то есть определения свойств и причинную связь событий.

6.1. *Объект/орган/организм* в энтелехиальном пространстве имеет вид:

$$K = a_0 a_1 \dots a_n \circ 2^{n+1} (R \times Z_2) . \quad (***)$$

Первая его часть – строка  $S = a_0 a_1 \dots a_n$ , связывающая его с вершиной дерева согласно двойственности Стоуна, – интерпретируется как высказывание, то есть свойство нульмерного прообраза  $B = 2^{n+1}(R \times Z_2)$ . Согласно свойству нульмерных множеств,  $B$  может проецировать-

ся в физическое пространство в объект любой формы [50]. Таким образом, за наблюдаемым живым объектом всегда закреплена качественная координата свойств.

6.2. *Изменчивость.* Поэтому приведённая выше конструкция является пополнением исходного  $Z_2$  флуктуациями, то есть изменчивостью как свойств, так и событий. Тогда диадическое число запишется со случайным возмущением (флексией):

$$\xi = a_0 \dots a_k \circ 2^M (a_j \dots a_s),$$

где  $M \gg k$ . Или, в более общем виде, в любом месте свойств:

$$\xi = a_0 \dots a_i \dots a_k \mapsto \xi = a_0 \dots (2^M (a_j \dots a_s)) \dots a_k. \quad (1)$$

В каждой точке инверсного поля  $\xi \in Z_2$  можно вычислить его действие через метрики  $|\bullet|_\infty$  и  $|\bullet|_2$ . Степенные законы позволяют рассмотреть соответствие, даваемое инверсией  $\xi \leftrightarrow \eta$ , где  $\eta \in Z_2$  – произвольно, как функцию, где аргумент и значение формально неразличимы. Очевидно, существует четвёрка производных (см. гл. 6):

$$e_1 = \frac{|d\xi|_\infty}{|d\eta|_\infty} \quad e_2 = \frac{|d\xi|_\infty}{|d\eta|_2} \quad e_3 = \frac{|d\xi|_2}{|d\eta|_\infty} \quad e_4 = \frac{|d\xi|_2}{|d\eta|_2}, \quad (2)$$

имеющих одинаковый характер независимо от  $\xi, \eta \in Z_2$  и  $e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot e_4 = c_\xi^2 / c_\eta^2 \neq 0$ .

Причём эти производные можно вычислять для внутриорганизменного пространства, для внешней среды и на границе организм-среда, что в зависимости от расположения их аргументов отражает непрерывные изменения. Архимедова метрика отражает изменение физических параметров, неархимедова – геометрических, связанных с деревом  $Z_2$ , и воспроизводит разрывные, дискретные изменения (непрерывные, однако, в  $Z_2$ ). Как было показано, четвёрка (2) отображает действие целого на части, то есть является кандидатом на роль нисходящей причинности, которая организует целеполагание.

Внутри организма первая производная есть чисто физическое движение; вторую можно интерпретировать как рост/убыль биомассы, порождённую внутренним процессом; третью – как внутреннюю вариацию функции или участка ткани с течением внутреннего времени (деление, дифференцировка); четвёртую – как внутреннее событие во внутреннем времени (новообразование).

Аналогично во внешнем мире. Первая – движение популяции, вторая – её рост/сокращение численности, порождённую внутривидовыми процессами, третья – дифференцировка на подвиды, четвёртая – новообразование/вымирание популяций.

На границе организм-среда те же движения, порождаемые внешними факторами: электромагнитными полями, концентрациями химических веществ, событиями разной природы и т.п. Соответственно, эта простая интерпретация принимает более реальный вид в рефлексивной схеме для энтелехии  $Z_2$ .

Физике доступна только первая из них, через которую она старается выразить всю динамику живого. В производных 2–4 присутствует неопределимая неархимедова норма, а значит, действие энтелехии физически неопределимо. В итоге измерения/наблюдения в физике и биологии кардинально различны [51].

Тем самым энтелехию можно мыслить синонимом энергии, отличной от физической, — так же, как она появлялась у Аристотеля [52, с. 444].

6.3. *Гены.* Эти производные определяют четырёхбуквенный алфавит движений, независимый от физико-химической природы и порождаемый только энтелехией в каждой точке живой ткани. Нетрудно видеть мультипликативную комплементарность, то есть  $e_1 \cdot e_4 = const_1$  и  $e_2 \cdot e_3 = const_2$ . Таким образом, энтелехия производит четвёрку движений, связанных инволюцией/инверсией, и изоморфную в статике четырёхбуквенному алфавиту. Формально статическое пространство  $Z_2$  порождает динамику в  $Z_4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ . Кроме того этот алфавит имеет геометрический смысл: дифференцировка, рост, (ново)образование, то есть движение геометрии прослеживается явно. Можно видеть в нём составляющие как онтогенеза, так и филогенеза. Поэтому можно попробовать смоделировать морфогенез в идеологии  $L$ -систем Линдемайера, хорошо известных во фрактальной литературе. В нашей схеме эта техника должна рассматриваться в двух пространствах числовой асимметрии.

Развернём  $Z_4$  в рефлексивную схему:  $Z_4 \equiv Z_4 \times Z_4 \times \dots \times Z_4$ . Тогда в каждом сомножителе станет действовать та же четвёрка генов  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , имеющих бескачественный характер. Каждому сомножителю можно поставить в соответствие признак, качество, способность организма. Тогда становится понятным явление плеiotропии генов и полимерии признаков [67].

Будучи движениями в  $Z_2$ , имеющими геометрическую интерпретацию и вещественную (из рефлексивной формулы), так понимаемая четвёрка генов приближается к понятию *программы построения организма* — общего места биологии. Напрашивается её понимание как ультраметризации материального генетического кода — оснащения его движениями.

Отсюда *формально* понятным становится механизм приспособления/развития. Его можно представить следующим образом. Каждый организм есть рефлексивная схема с потенциально бесконечным числом сомножителей, в которой актуализировано лишь их конечное чис-

ло. В число сомножителей включаются и свойства/требования среды. Новое свойство означает актуализацию одного сомножителя в рефлексивной формуле, движимого четвёркой генов.

6.4. *Зигота, клетка.* Рассмотрим далее очень маленькое подмножество  $z = a_0 \dots a_k \circ 2^N \cdot (R^\# \times Z_2)$  при достаточно большом  $N$ . Приведённые выше движения, порождаемые энтелехией, позволяют увидеть в  $z$  аналог зиготы, а копии  $R^\#$  и  $Z_2$  (в представлении  $R^\#$  и  $Z_2$  взаимно обратными полурешётками) – мыслить аналогами гамет с хромосомами  $Y$  и  $X$  соответственно. Возможно, здесь и сказывается исключительная роль углеводородных соединений, могущих образовывать сети произвольной длины, что, по сути, является воплощением числовой асимметрии. Тогда  $Y$ -хромосома аналогична конъюнктивному значению союза ИЛИ в ЕЯ,  $X$ -хромосома – объединительному его смыслу (см. гл. ЕЯ). Иными словами, на первичном уровне органики заложена двойная причинность, две оси живого.

6.5. *Клетка как сложная система* упрощённо представляется в виде:

$$c = s \circ \bigcup_i 2^{N+i} (R^\# \times Z_2). \quad (3)$$

Здесь  $s$  – префикс, качественная координата в пространстве Аристотеля. Сохраняя самоподобие, такое образование способно изменять свой вид при попадании в различные условия, то есть при изменении префикса  $s \mapsto s \circ \sigma$

$$c = s \circ \sigma \circ \bigcup_i 2^{N+i} (R^\# \times Z_2), \quad (3^*)$$

то есть становиться клетками разного функционального назначения, с различными свойствами. Взаимодействие клетки/организма со средой есть процесс измерения, который всегда локален, направлен на избранный компонент, тем самым актуализируя его.

Генетика давно привлекает математиков именно наличием определенности генетического кода. Развилась даже новая, биологически ориентированная, вычислительная парадигма [53]. Однако, как оказалось, все альтернативные подходы к вычислимости оказались эквивалентными классической и тезису Чёрча–Тьюринга. В последние годы было проделано много исследований также в рамках  $p$ -адической математики в приложении к генетике [54–56; 57, Ch.16, 17]. Вопрос о природе алфавита, который сейчас дискутируется, насколько известно автору, не ставился, четвёрка аминокислот генетического кода и их действия/движения принимаются как данные.

6.6. *Феномен трёх четвертей.* Исходя из нашего построения, живая материя формируется в  $Z_2$ . При измерении одна из букв алфавита  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  используется как независимая переменная. А её внутренняя

динамика характеризуется остальными тремя буквами, как можно предположить, это 3-и из 4-х, что является причиной превалирования степени 3/4 в биологических степенных законах [30].

6.7. *Наследственность.* Каждый биологический объект любого размера и вида имеет свою координацию в пространстве качеств  $Z_2$ , которая отражается префиксами, Если сделать «замену переменных», то есть алфавита:

$$\{0, 1\} \rightarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4\},$$

$$a_1 a_2 \dots a_i = (e_\alpha e_\beta \dots e_\nu)_i, \quad (4)$$

а значит, перейти в пространство генов, то префиксы  $s$  предстанут в виде набора генов и, таким образом, при дифференцировке/слиянии объект/организм получит полный их набор в уникальной комбинации (4). В пространстве (4) возможны изменения, аналогичные (1), которые могут, в принципе, возникать в любой точке строки генов [58] (приведено по [15, гл. 11, с. 342]).

Таким образом, мы приходим к выводу В.А.Кордюма [59] о взаимном обмене генетической информацией всего живого и едином его генофонде [15, гл. 11, с. 340].

6.8. *Два царства.* Двойка префиксов  $1 \rightarrow |*|_\infty$  и  $0 \rightarrow |*|_2$  является константой, ей можно поставить в соответствие деление органического мира на эукариоты и прокариоты.

6.9. *Хиральность.* Любая наблюдаемая геометрическая фигура, например, молекула, сформированная в  $Z_2$  при инволюции в  $R$ , очевидно, переходит в свой зеркально-симметричный образ (рис. 4).

6.10. *Дуализм знака – билингва биологии.* Для развития живая система должна иметь возможность самоописания. Это значит, что по мысли Дж. фон Неймана, развитой далее Г.Патти, она должна быть способной действовать в двух режимах: аналоговом, динамическом,

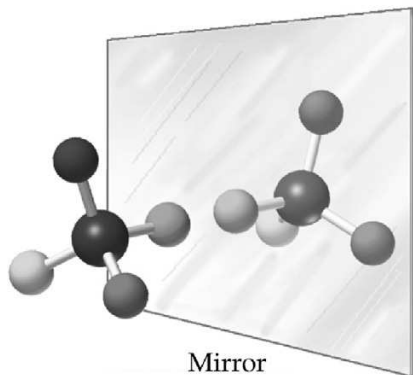


Рис. 4. Феномен хиральности

в соответствии с законами физико-химии – и лингвистическом, цифровом, дискретном, свободном от них [60, 61]. Это положение послужило основой для развития биосемиотики, которая трактует организмы, органы, клетки, гены как знаковые, то есть языковые, системы. Биосемиотика тем самым трактует пространство живого расширенно, аналогично нашей модели в оппозиции *символ–материя*. В биологии



она соответствует паре *генотип–фенотип*, в компьютерах аппаратное–программное обеспечение, в философии *сознание–тело* [60]. Аналоговому режиму соответствует  $R$ , цифровому –  $Z_2$ . Гены понимаются как знаки – аналогично формулам (2) [62, 63].

С биологией уже неразрывно связано понятие информации – коды, программы, трансляция и т.п. Однако в явном виде понятие *программы развития* эмбриона, или *действия* ДНК, не предъявлено. Содержание его остаётся латентным. Наша трактовка энтелихии представляет его возможный вариант. В качестве подтверждения сошлёмся на результат Дж.Майхилла [64], который показал возможность существования программы, «которая указывала на бесконечное число направлений развития потомства на одной бесконечно длинной хромосомной ленте» (т.е. на процесс усложнения организмов. – *Ф.М.*). Хотя этот результат носит характер «теоремы существования», однако он ясно показывает роль формальных языков теоретической информатики в биологических проблемах. Формальные языки и их вариант – итерированная система функций, то есть  $Z_2$  – явились первыми генераторами реалистичных биоморфных фракталов [21].

6.11. *Эволюция*. Из общего представления организма (\*\*\*) при замене переменных (4) можно видеть двойственность в организации генома. Мономорфной, конститутивной, облигатной части генома соответствует префикс, а полиморфной, факультативной – вторая часть в (\*\*\*) [15, с. 388–389, 389–402]. Первая часть консервативна и меняется дискретно, сальтационно. Она является видоспецифической, и её изменения влекут появление новых видов. Отсюда следует теория прерывистой эволюции. Вторая часть лабильна, открыта, соответствует мелким мутациям. Отсюда – ограниченная правота градуализма.

Двойная причинность в нашей модели выглядит так: восходящей соответствует  $|\bullet|_2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow |\bullet|_\infty \rightarrow \infty$ . Нисходящая причинность:  $|\bullet|_2 \rightarrow \infty \Leftrightarrow |\bullet|_\infty \rightarrow 0$ . Более полно – это четвёрка производных  $Z_4$ . Нисходящая причинность есть причинность управления целого своими частями, ввод информации. Связь между ними осуществляется движениями/состояниями нульмерного прообраза целого в  $Z_2$ . Так, связь между генотипом и фенотипом опосредуется процессами индивидуального развития организма [15, с. 396].

В более общем случае это экосистемы и их изменения – катастрофы, космические события. В итоге получается экосистемная теория эволюции [15, гл.18] с глобальным временным циклом: биологическое прошлое есть физическое будущее, а физическое прошлое – биологическое будущее.

Остаётся вопрос о роли самого  $Z_2$  как пространства живого, объемлющего эти явления. Заметим, что биология, как и физика, оперирует наблюдаемыми сущностями и не объясняет феномена движения/изменения. Мутации происходят, клетки делятся — первичный посыл науки. Но откуда берутся само *движение* и его различные виды — остаётся за рамками анализа. Введя  $Z_2$  и  $Z_4$ , можно посредством комбинации двух видов причинности (2) объяснить феномен движения/изменчивости. Поскольку  $Z_2$  как энтелехия имманентен и трансцендентен материи, так же как делимость — протяжённости, как границы тел, процессов, явлений — самим телам, процессам и явлениям, то здесь остаётся признать правоту креационизма в виде: «*Ненаблюдаемая реальность, то есть  $Z_2$ , создаёт наблюдаемую (фрактальную) материю  $R^\#$* ».

7. *Гипотеза о механизме макроэволюции.* Механизм образования видов, в отличие от мутаций, непосредственно не наблюдаем (в физическом пространстве) [15, с. 115], но он, очевидно, имеет место в картине мира биологии. Остаётся предположить, что он происходит в нульмерном пространстве. В биологии это представление о двух планах бытия [15, с. 196–197, 208–211], решающей роли энтелехии Аристотеля–Дриша [15, с. 193, 206], не имеющее, однако, формального выражения.

Качественные изменения в  $Q_2$ , так же как и в  $Z_2$ , моделируются изменением префикса в формуле организма (\*\*\*) . Формально это движение в биологическое будущее:  $|T|_2 = \tau \rightarrow \infty$ . Для префикса/вида  $s = a_0 a_1 \dots a_n$  это есть сдвиг Бернулли:  $s \rightarrow s' = a_{-1} a_0 a_1 \dots a_n$ , где  $a_{-1}$  — новое слово/качество. Сдвиг Бернулли происходит в двух направлениях: растягивающем — в биологическое будущее, сжимающем — в физическое будущее.

В первом случае это вероятно-редкие, малочисленные события. Во втором — вероятно-частые, многочисленные события. Нетрудно показать, что вероятности этих групп событий составляют пару, связанную обратной экспоненциальной зависимостью, то есть они не отделены друг от друга, а связаны инверсией. В нелинейной науке этим растягивающим сдвигам соответствуют скачки Леви — аномальная диффузия.

Длина такого скачка, в отличие от нормальной диффузии,

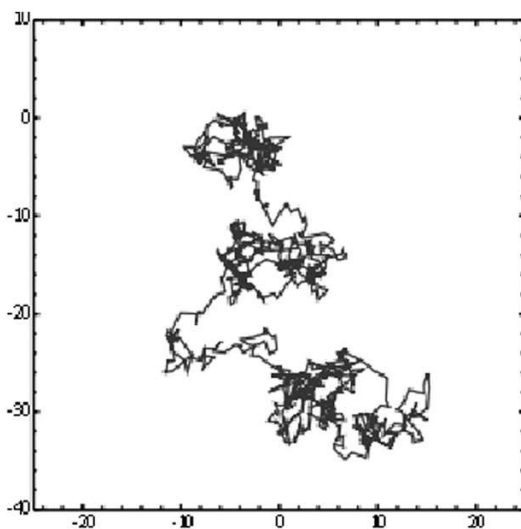


Рис. 5. Аномальная диффузия (с сайта en.wikipedia.org)

может быть очень значительной, и новое положение изображающей точки может далеко отстоять от кластера, «откуда она родом». Но вопрос, где находятся частицы в полёте во время скачка Леви, не освещён, так же как и где происходит сальтация, приводящая к новому виду/качеству [15, с. 131].

В нульмерном пространстве действует инверсия, не наблюдаемая в физическом. Представление об этом движении также присутствует в теории эволюции и интерпретируется как постоянная избретательность Природы [15, с. 222]. Её действие иллюстрирует рисунок из [69, Fig.2.6., p. 56] (рис. 6). Если окружность принять за границу кластера/вида в  $Z_2$ , то заметно изменение морфологии одного организма от небольшого до неузнаваемого, уродливого. Инверсия действует на всех масштабах, соединяя макро- и микро-биологические объекты, то есть как организмы, так и их органы, ткани, клетки, гены. Трансформация органов может, очевидно, приводить к феномену «многообещающих уродов» [15, с. 224–225, 228]. Обратная инверсия схематически объясняет явление конвергентной эволюции – сходство признаков особей, принадлежащих далеко отстоящим друг от друга видам. Взятые в единстве два вида эволюции образуют пульсирующую, или «дышащую» эволюцию [70, p. 153–154].

Таким образом, инверсия, *непрерывно* происходящая в 2-адическом пространстве, имея *наблюдаемый* скачкообразный характер, соединяя два полюса эволюции [15, с. 116–121], создавая изоляцию новообразований/видов [15, с. 125] и связывая старое с новым [15, с. 140], по видимому, может служить кандидатом на роль существенной компоненты макроэволюции. Из последнего рисунка видно, что инверсия должна рассматриваться как поток, составное движение, включающее в себя инверсии всех деталей анатомии организма и его положения в экологической нише (этому соответствуют разные ракурсы одного и того же организма на рисунке).

8. *Триада жизни*. Итог поиска сущности живого в настоящее время сведён в формулу: «Триада жизни – вещество, энергия, информация. ... Жизнь – единство субстратного, энергетического и информационного потоков в открытой системе живого» [5, с. 293]. Первому и третьему члену триады соответствуют  $R^\#$  и  $Z_2$ , второму – движение, то есть энергия, имманентное миру живого, формулы (2). Энтелехия  $Z_2$ , понимае-



Рис. 6. Инверсия в эволюции

мая поэтому как *жизненная сила*, «управляет процессами, которые она не производит, а физические аспекты производят явления, которыми они не управляют» ([Бернар К., цит. по [5, с. 303]).

Можно видеть аналогию между триадой жизни и *триадой языка*: «звуковая, лексико-фразеологическая и формальная системы» [65, с. 113]. Здесь пояснения требует только средний член. Лексико-фразеологическая система — система всех словоизменений, обеспечивающих сочетаемость слов в фразе/предложении, аналог биологической изменчивости, движения и, следовательно, энергии.

Это аналогично известной загадке человеческого движения, человеческого «Я». Человек встаёт, говорит, ходит и т.п. тогда, когда требует его Я. Но Я не является физической сущностью, силой, однако производит движения, речь [66].

*Заключение.* Мы провели соответствия для простого  $Z_2$ , за исключением раздела об изменчивости, в целях экономии, чтобы не загромождать изложение. Включив в интерпретацию голографическую схему *варианты инварианта* (см. гл. 4, п. 21) и рефлексивные свойства  $Z_2$ , можно получить объёмную картину.

## Литература к главе 11

1. Гайденко П.П. История греческой философии в её связи с наукой. М.: PerSe, 2000.
2. Герасимова И.А. Природа живого и чувственный опыт // Вопросы философии. 1997, №8.
3. Панкратов А.В. Телеологическое понимание физико-химии воды // Философские исследования. 1998, №4, с. 218–229.
4. Габуда С.П. Связанная вода. Факты и гипотезы. Наука СО, 1982; Тринчер К.С. Биология и информация. М.: Наука, 1964, с. 121 — внутриклеточная вода, составляющая 80% массы живой материи, находится в ненаблюдаемом в неживой природе квазикристаллическом термолабильном состоянии, а наличие термически неустойчивого состояния структуры живой материи противоречит второму закону термодинамики.
5. Серебровская К. Сущность жизни. История поиска. М., 1994.
6. Wolfram S. Undecidability and Intractability in Physics // Phys. Rev. Lett. V. 54, №8, p. 735–738.
7. Aaronson S. NP-complete problems and Physical Reality // arXiv:quant-ph/0502072v2. 21Feb. 2005.
8. Шрейдер Ю.А. Сложные системы и космологические принципы / Противоположности и парадоксы (отв. ред. Герасимова И.А.). М.: Канон+ 2008, с. 287–317 (первая публикация 1976 г.).

9. *Rosen R.* Hierarchical organization of automata theoretic models of biological systems / Whyte L.L., Wilson A.G., Wilson D. Hierarchical structures. 1969, p. 159–198, N.Y., Elsevier.
10. *Pattee H.H.* Hierarchy Theory. The Challenge of Complex Systems. Brazilier, 1973.
11. *Rosen R.* Complexity and System Description / Systems, Approaches, Applications. Harnet W.H. (ed.) D. Reidel, 1977.
12. *Мусеев Н.Н.* Логика динамических систем и развитие природы и общества // Вопросы философии 1999, № 4, с. 3–10.
13. *Рябинин И.А.* Надёжность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Политехника, 2000.
14. *Абрамова Н.Т.* Несловесное мышление. М.: ИФ РАН, 2012, с. 162–163.
15. *Назаров В.И.* Эволюция не по Дарвину. М.: Комкнига, 2005.
16. *Weibel E.R.* Fractal Geometry – a Design Principle for Living Organisms // Amer. J. Physiology 261(2), L361–L369, pt.1.
17. *Weibel E.R.* Physiology – the Pitfalls of Power Laws // Nature. 2002, 417 (6885), p. 131–132.
18. *Burlando B.* The Fractal Dimension of Taxonomic Systems // J.Theor. Biology. 1990, 146, p. 99–114.
19. *Burlando B.* Fractal Dimension of Evolution // J.Theor. Biology. 1993, 163, p. 161–172.
20. *Трубников Б.* Закон распределения конкурентов // Природа. 1993, №11, с. 3–13.
21. *Smith A.R.* Plants, Fractals, and Formal Languages // Computer Graphics. 1984, 18, p. 1–10.
22. *West B.J.* Chaos and Fractals in Human Physiology // Sci. Am. 1990, 262, 40–49.
23. *Grene M.* Hierarchies in Biology // Am. Sci. 1987, 75, p. 504–510.
24. *Brown J.H., Gupta V.K., Bai-Lian Li, Milne B.T., Restrepo C., West G.B.* The Fractal Nature of Nature; Power Laws, Ecological Complexity and Biodiversity // Phil.Trans. R. Soc. London B. 2002, 357, p. 619–626.
25. *West G.B.* The Origin of Universal Scaling Laws in Biology // Physica, A 263, 104–113.
26. *Nottalle L., Chaline J., Grou P.* On the Fractal Structure of Evolutionary Trees / Fractals in Biology and Medicine. V. III, (Ed. G.Losa, T.Nonnenmacher, E.Weibel). 2000, p. 247–258.
27. *West B.J.* Life’s Universal Scaling Laws // Physics Today. Sept. 2004, p. 36.
28. *West B.G., Brown J.H., Enquist B.J.* The Fourth Dimension of Life: Geometry and Allometric Scaling in Organisms // Science. 1999, v. 284, p. 1677–1679.
29. *Gisiger T.* Scale Invariance in Biology: coincidence or footprint of a universal mechanism? // Biol. Rev. 2001, 76, p. 161–209.
30. *West G.B., Brown J.H.* The Origin of Allometric Scaling Laws in Biology from genomes to Ecosystems; towards a quantitative unifying theory of biological structure and organization // J. of Experimental Biology. 2005, 208, p. 1575–1592.
31. *Murray J.D.* Mathematical Biology I. An Introduction. Springer, 2001.
32. *Чайковский Ю.В.* Активный связный мир. М.: КМК, 2008.

33. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.
34. Бескова И.А. Эволюция и сознание. М.: ИФ РАН, 2001.
35. Чистяков Д.В. Фрактальная геометрия образов непрерывных вложений  $p$ -адических чисел и соленоидов в евклидовы пространства // ТМФ. Т. 109, №3, с. 323–337.
36. Элиаде М. Миф о вечном возвращении. М.: Ладомир, 2000; см. также обзор: Пантин В.И. Цикличности теория / НФЭ, т.4, с. 335–336 – эта идея имеет древний и многоаспектный характер.
37. Baryshev Y., Teerikorpi P. Discovery of Cosmic Fractals. WSPC, 2002.
38. Penrose R. Cycles of Time. 2010.
39. Heller M. Algebraic Self-Duality as the Ultimate Explanation // Foundations of Physics. 2004, №9, p. 369–385.
40. Heller M. Ultimate Explanations of the Universe. Springer, 2010.
41. Schikhoff W.H. Ultrametric Calculus. CUP, 1984.
42. Дриш Г. Витализм. Его история и система. М., 1915.
43. Причинность и телеономизм в современной естественнонаучной парадигме / (отв. ред. Е.А.Мамчур, Ю.В.Сачков) М.: Наука, 2002.
44. Казютинский В.В., Мамчур Е.А., Сачков Ю.В. и др. Спонтанность и детерминизм. ИФ РАН, М.: Наука, 2006.
45. Тринчер К.С. Биология и информация. М.: Наука, 1965.
46. Пригожин И.Р. От существующего к возникающему. М.: Комлнига, 2006.
47. Депенчук Н.П. Симметрия и асимметрия в живой природе. Изд. Ан УССР, 1963.
48. Гурвич А.Г. Принципы аналитической биологии и теории клеточных полей. М.: Наука, 1991.
49. Воейков В.Л. Научные основы новой биологической парадигмы. От эффекта Кирлиан к биоэлектрографии. СПб. 1998.
50. Falconer K. Digital Sundials, Paradoxical Sets and Vitushkin Conjecture // Math. Intelligencer. 1987, 9, p. 24–27.
51. Pattee H.H. The Problem of Observables in Models of Biological Organization / Evolution, Order, and Complexity Eds. (Khalil E.L., Boulding K.E.) London Routledge, 1996.
52. Длугач Т.Б. Энтелехия / Новая философская энциклопедия. М., 2010.
53. Raun G., Rosenberg G., Salomaa A. DNA Computing. Springer, 1998.
54. Khrennikov A.Yu., Kozyrev S.V. Genetic Code on the Dyadic Plane // arXiv:q-bio/0701007v3 [q-bio. QM] 2 Nov. 2007.
55. Khrennikov A. Yu., Kozyrev S.V.  $p$ -Adic Numbers in Bioinformatics // arXiv:0903.0137v3 [q-bio.GN0 4 Apr. 2009.
56. Dragovic B  $p$ -Adic Structure of the Genetic Code//arXiv:1202.2353v1 [q-bio.OT] 10 Feb. 2012.
57. Anashin V., Khrennikov A. Applied Algebraic Dynamics. De Gruyter, 2009.
58. Хесин Р.Б. Непостоянство генома. М.: Наука, 1984.

59. Кордюм В.А. Эволюция и биосфера. Киев: Наукова думка, 1984.
60. Pattee H.H. Evolving Self-Reference, Matter, Symbols, and Semantic Closure / Communication and Cognition – Artificial Intelligence. V. 12, no.2, p. 9–27, Special Issue Self-Reference in Biological and Cognitive Systems. L.Rocha (ed.).
61. Pattee H.H. Physical and Functional Conditions for Symbols, Codes, and Languages // Biosemiotics. 2000, 1, p. 147–168.
62. Hoffmeyer J., Emeche K. Code-Duality and Semiotics of Nature / Anderson M., Merrell F. (eds.). On Semiotic Modelling. M. De Gruyter. 1991, p. 117–166.
63. Заренков Н.А. Семиотическая теория биологической жизни. М.: Комкнига, 2007.
64. Майхилл Дж. Абстрактная теория самовоспроизведения / Общая теория систем. М.: Мир, 1966, с. 121–140.
65. Ярцева В.Н. Языкознание. Большой энциклопедический словарь. М., 1998.
66. Мейс Л.Ф.К. Загадка человеческого движения. М.: КМК Scientific Press, 1996.
67. Медников Б.М. Геном как целое / Уровни организации биологических систем. М.: Наука, 1980, с. 96–103.
68. Сухонос С.И. Теория эволюции иерархических систем. Кн. 1. Структурные уровни природы. М.: Дельфис, 2013.
69. Mamford D., Series C., Wright D. Indra's Pearls. CUP, 2002.
70. Witcher O. Projective Geometry. Creative Polarities of Space and Time. Rudolf Steiner Press, 1986, 2013.





## Глава 12

### Сознание и мышление

*Введение.* Если ЕЯ и биология имеют «материальную» часть – строки букв, тела и органы живых существ, – которая побуждает применить к ним методы математической физики и формальных систем с некоторой степенью правдоподобия, то мышление и сознание не дают такой возможности: «Всё, что мы знаем, – это сознание, всё, что осознаём – знание» [1, с. 583]. Это свойство – всё дано нам через сознание, кроме него самого – названо А.В.Ивановым *парадоксом ускользающей предметности*, который является оборотной стороной парадоксальности логических свойств познания феномена сознания [2, с. 13, 19].

«Причина того, что наше осязающее, воспринимающее и мыслящее эго нигде не встречается в нашей научной картине мира, легко формулируется семью словами: потому что оно само является картиной мира. Оно идентично целому и поэтому не может содержаться в нём как его часть» [Шрёдингер Э. Разум и материя. РХД, М.–Ижевск, 2000, с. 51].

Это значит, что математические и семантические модели и теории сознания, являясь конечным результатом мыслительного процесса, сами нуждаются в адекватной объяснимости их порождения сознанием/мышлением/языком, то есть «теория всего» должна объяснять саму себя [35, с. 7]. Недавно этот факт был отмечен физикой [3].

С.Прист [4, гл. 8] следующим образом характеризует антитетику сознания и физики:

<b>Ментальное</b>	<b>Физическое</b>	<b>Ментальное</b>	<b>Физическое</b>
темпоральное	пространственно-временное	личное	общедоступное
некорректируемое единственное	корректируемое многое	внутреннее свободное	внешнее детерминированное

<b>Ментальное</b>	<b>Физическое</b>	<b>Ментальное</b>	<b>Физическое</b>
активное	пассивное	я	другое
духовное	плотское	неделимое	делимое
непротяжённное	протяжённное	бесформенное	обладающее формой
невидимое	видимое	интенциональное	неинтенциональное
субъективное	объективное		

Эта сводка демонстрирует наличие «объяснительного пробела» (*explanation gap* – англ.) между математической физикой и миром человека, на который указывал ещё Э.Шрёдингер в 1959 г. [5, с. 7].

Сознание признаётся парадоксальной реальностью, его основные антиномии – производными от основных пар: *материальное–идеальное, внешнее–внутреннее, Я–не-Я, сознаваемое–бессознательное, локальное–глобальное* [2, с. 22–36; 6, с. 27].

Многочисленные теории и обсуждения, составляющие историю и состояние вопроса о природе сознания [2, 4, 7, 8], слишком разнородны по предметной направленности и средствам выражения и осложнены исторически обусловленной плохой адаптированности «научного подмножества» ЕЯ к миру сознания [2, с. 13, 19]. Поэтому мы не будем останавливаться на их сравнении и анализе. Очевидным и общим для всех из них, кроме физического прямолинейного редукционизма, является множественная бинарность феномена сознания.

1. *Двухаспектная теория.* В связи с этим остановимся лишь на двухаспектной теории: «... ментальное и физическое – два свойства некоторой, лежащей в основе вещей реальности, которая, по сути, не является ни ментальной, ни физической». В изложении Спинозы:

«Если мы мыслим мир как протяжённный, то нам следует назвать его “Природой”. Если же мы мыслим его как обладающий сознанием, то нам следует назвать его “Богом”. “Бог” и “Природа” – два альтернативных термина, обозначающих одну и ту же субстанцию, которая одновременно обладает ментальными и физическими характеристиками. ... мир как система в целом – единая субстанция, включает в себя своё собственное объяснение. ... отдельное человеческое существо может быть представлено как одновременно ментальное и физическое, и потому его можно мыслить как душу и тело» [4, гл. 6].

О том же мысль Вл.Соловьёва:

«Ни чистого вещества, состоящего в одном протяжении, ни чистого духа, состоящего в одном мышлении, на самом деле не существует... Вся

наша действительность и мы сами, и тот мир, в котором мы живём, одинаково далеки и от чистой мысли, и от чистого механизма. Весь действительный мир состоит в постоянном взаимоотношении и непрерывном внутреннем взаимодействии идеальной и материальной природы» [Соловьёв В.С. Философские основания цельного знания. Мн., Харвест, 1999].

Замечено, что итогом спора материализма и идеализма в вопросах жизни и сознания является бесконечная перестановка этих терминов [9]. Исключающее ИЛИ здесь является неверной постановкой вопроса, адекватно ИЛИ объединяющее [7, гл. 1].

Развитую систему аргументов против материальной природы сознания представляет современный философ Д.Чалмерс [10, р. 141–192], который выдвинул альтернативную идею о двумерной, *экстенционально–интенциональной*, семантике сознания, излагаемой языком [там же, Appendix, р. 541]. Разностороннее описание сознания, данное Г.Хантом [6], также выявляет его двойственность, представленную автором в виде двух осей: горизонтальная ось, *sensus communis* – общее знание, связывает его с наличным внешним миром, является аналогом синтагматики ЕЯ; вертикальная ось, *aion – psyche*, жизненная энергия в целом – духовность, связывает личное с Космосом, в которой можно видеть аналог парадигматики ЕЯ [6, с. 302–308].

Во всех приведённых мнениях о природе сознания явно или неявно проговаривается необходимость посредника между противоположностями, которая принимает вид трансцендентальной схемы у Канта:

«Ясно, что должно существовать нечто третье, однородное, с одной стороны, с категориями, а с другой – с явлениями. ... Это посредствующее представление должно быть чистым (не заключающим в себе ничего эмпирического) и тем не менее, с одной стороны, интеллектуальным, а с другой – чувственным» [11, с. 22–24].

А также – в *нелинейной динамике и теории хаоса* у Ханта, в которую погружены все живые существа [6, с. 104–109; 210–214; 218–219; 223; 253; 300, 371]:

«... теория хаоса предлагает начала науки структурного изоморфизма физической Вселенной, сред обитания живых организмов, организации мозга и потоков и вихрей сознания, поскольку на всех этих уровнях должны действовать одни и те же принципы самоорганизации. ... По-прежнему неясно, как нам перейти от этих “странных” геометрий, включая представления фрактальных свойств в ветвлении дендритов, к

динамическому потоку качественного сознания. Разумеется, если одни и те же повторяющиеся организации возникают на всех уровнях природы, мы действительно имеем отношение сложного отражения или изоморфизма между внешне несопоставимыми категориями. Однако трудно понять, как одна из них становится привилегированным уровнем для объяснения других ... Вместо этого мы имеем описательное обобщение, что многообразные уровни реальности, включая восприятие и сознание, самоорганизуются примерно аналогичным образом» [6, с. 106–107].

У Д.Чалмерса посредник назван недостающей составляющей для связи между физикой и сознанием (*extra ingredient* – англ.) [12], X-фактором – у Г.Ханта и В.В.Васильева [6, с. 230; 13]. Необходимость диалектической логики – логики промежуточных переходных состояний – взамен формальной, обосновывает А.В.Брушлинский [14]. В.Г.Панов, апеллируя также к диалектической логике, рассматривает посредника как Волшебное зеркало [11, с. 191], решающее логический парадокс Брадобрея.

Наиболее глубоко проблема математизации мышления и сознания проанализирована А.В.Брушлинским, который привлёк для этого идею дополнительного натурального ряда, высказанную в своё время П.К.Рашевским, и специфику восприятия/абстракции, заложенную в канторовской теории множеств. Развитую систему аргументов Брушлинского, в частности отстаиваемый им тезис о *недизъюнктивности* сознания/мышления в противовес *дизъюнктивности* современной математики во всех её вариантах [14], можно в терминах нашей схемы свести к необходимости введения теории множеств Мириманоффа, 2-адических чисел и оппозиции *определимость* (дизъюнктивность)–*неразрешимость* (недизъюнктивность). В ЕЯ этой паре соответствуют двойной смысл союза ИЛИ и асимметричный дуализм лингвистического знака.

Суммируя, двухаспектную теорию можно представить как теорию логической самоприменимости, она же – парадокса Лжеца, она же – Брадобрея. Схема Панова для посредника: «если  $A$ , то (при посредстве  $M$ )  $B$ » имеет вид:

$$A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow B. \quad (1)$$

Посредник  $M = A \rightarrow B$  «содержит в себе эквивалент, общий как для  $A$ , так и для  $B$ ...», где с формальной стороны символ  $B$  означает отрицание  $A$ » [11, с. 186–187]. Посредник в этом случае выполняет роль источника движения [11, с. 189] и характеризуется как «*свой другой*», то есть *alter ego*  $A$  и  $B$  [11, с. 190]. Главное в (1) – необходимость движения, то есть действия посредника, без которого логически необходимый переход от  $A$  к  $B$  не совершается. Этот момент выделен Л.Кэрроллом в его известном эссе [15]. Этот же очевидный факт следует из рассмотрения

действия машины Тьюринга: для её работы необходимо механическое движение считывающей головки, не входящее, однако, в её определение. Математика воспроизвела эту схему в интерполяционной лемме Крейга. Посредник в ней назван интерполянтом, обладающим свойствами как  $A$ , так и  $B$ :

Кратко говоря интерполяционная схема выглядит как состоящая из двух семантических следствий: «если  $\varphi$  и  $\psi$  – предложения и  $\varphi \models \psi$ , то найдётся такое предложение  $\theta$ , что  $\varphi \models \theta \wedge \theta \models \psi$ , и всякий логический символ, за исключением равенства, входящий в  $\theta$ , входит также в  $\varphi$  и  $\psi$ » [16, с. 105]. (Но о движении в лемме нет ни слова. – *Ф.М.*)

Формальное решение парадокса Лжеца можно усмотреть из результата Дж. Майхилла: «Если в логической системе  $S \models P(n)$  и выводится  $\models P(x)$ , где  $x \notin S$ , то в  $S$  может быть определено понятие истины» [17]. Здесь достаточно положить  $x \in \neg S$  и использовать смысл отрицания, как в соответствиях Галуа, то есть  $x$  – *alter ego* объекта  $n$ .

Семантика числа 2 при таком подходе к двухаспектной теории не есть множество из двух элементов, но является указанием на две стороны единой, недизъюнктивной реальности [14, с. 148–149, 161–162].

Фракталы, как посредник внешнего и внутреннего миров (см. [6]), описаны П.А. Флоренским (выделения мои – *Ф.М.*):

«... в математике мне внутренне, почти физически говорят ряды Фурье и другие разложения, представляющие всякий сложный ритм как совокупность, как бесконечную совокупность простых. Мне говорят родные непрерывные функции без производных и всюду прерывные функции, где всё рассыпается, где все элементы поставлены стоймя. **Вслушиваясь в себя самого**, я открываю в ритме внутренней жизни, в звуках, наполняющих сознание, эти навеки запомнившиеся ритмы воли и знаю, что они ищут во мне своего сознательного выражения чрез схему тех математических понятий. Да. Потому что ритмический звук волны изрезан ритмами более мелкими и частыми, ритмами второго порядка, эти, в свой черёд, расчленяются ритмами третьего порядка, те – четвёртого и т.д. и т.д. Как бы далеко ни пошли мы, ухо не слышит последней расчленённости, уже далее не членимой, нечленораздельной, как грудной звук, дающийся сознанию; но всегда звук кажется сыпучим, а непрерывность волны – ещё и ещё изрезанной, до бесконечности расчленённой и потому **дающей пищу умному постижению**. Впоследствии, когда я услышал знаменитые ростовские звоны, где сплетаются, накладываясь друг на друга, ритмы всё более частые, мне

опять вспомнилось ритмическое построение морского прибоя и фуги Баха, исконные ритмы моей души. **В самом деле, шум прибоя слагается из шумов падения отдельных капель морской воды. Лейбниц уверяет, будто мы не слышим этих отдельных падений и лишь суммарный шум доходит до нас. Но это неправда; мы слышим их, слышим и падение капли, и падение частей капли, и так до беспредельности, когда вслушиваемся, когда войдём во впечатление, сложившееся от прибоя в самом сердце, в глубинах нашей души: там открываем мы бесконечную сыпучесть звука, всегда сыпучего, всегда чёткого и сухого в малейших своих элементах.** Таинственная, бесконечная поверхность моря бесконечна и по содержанию своему, и по своему звуку, как бесконечна она и по зернистости, тончайшей зернистости своего свечения. Ропот моря — оркестр бесконечного множества инструментов. Есть один звук, родственный ему по содержательности и тоже возникающий в недрах бытия! Это — узор нагоняющих и перегоняющих друг друга ритмов, когда падают капли — тоже капли — в пещерах, где сочится со сводов и стен вода. И там, в ритмах, слышны ещё ритмы, и тоже до бесконечности. Они бьются, как бесчисленные маятники, устанавливающие время всей мировой жизни, разные времена и разные пульсы бесчисленных живых существ. И когда войдёшь в мастерскую часовщика, то там опять слышен похожий шум от множества маятников, тоже родимый, тоже напоминающий земные недра и глубь морскую. ... И главное — всего много, много, много... Конца нет производительной мощи природы. И всё это “много” приносится вот этой, прозрачной, зелёной и флуоресцирующей поверхностью моря. В глубине его таятся бесчисленные жизни, странные и вместе прекрасные животные, растения, из которых **каждая внутренне связана со мной, внутренне соотносится с моей личной жизнью, посылает в неё истечения своего бытия и признаёт в ней за равного среди равных, за члена бесконечного царства таинственной, мерцающей флуоресцирующим светом жизни»** [П.А. Флоренский Пристань и бульвар / У водоразделов мысли. Новосибирск. 1991, с. 50–54].

«Разложения в ряд Фурье», иерархия «расчленяющихся ритмов», «сыпучесть звука», «оркестр бесконечного множества инструментов», «узор нагоняющих и перегоняющих друг друга ритмов», «тончайшая зернистость свечения», «ростовские звоны», «шум от множества маятников» — всё это различные метафоры фрактальной геометрии структур внешнего мира, связанных с внутренним миром человека. О фрактальности мышления и сознания много было сказано в период разворачивания идеи фрактальной геометрии природы [18–21]. Многочисленны также интернет-источники, посвящённые этой связи.

Выделим особо работу У.Джексона [22], посвящённую роли фракталов в *образах* мира народов планеты, то есть фактически феномену правополушарного мышления, полностью отсутствующего в математике, и содержащую обширную библиографию:

«Что является типичными функциями фракталоподобных структур для человечества? ... Как они используются и для каких целей? ... фракталы помогают нам расширить наше видение далеко за обычный первичный способ, который есть наше собственное индивидуальное Я. Фракталоподобные образы помогают расширить и бесконечно продлить наше пространство видения, сохраняя его как часть опыта ”здесь” и “теперь”. В архитектуре, живописи, поэзии и юриспруденции, например, фракталы обычно связывают бесконечность и единство посредством графических символов. Фракталы хорошо работают, когда нужно уловить динамику связи конечного как части бесконечного, части как оппозиции целого, частей как оппозиции друг друга — множество отражающих драгоценных камней одного всего-связующего сознания. ... все метафоры, или *рефлектафоры*, являются нюансировкой фракталов ... они не всегда очевидны и присутствуют на подсознательном уровне. ... Постоянные образы, такие как архетипы коллективного бессознательного, действуют в жизни человека как “странные аттракторы” ... На протяжении веков архетипы и образы Единое—Многое в космических мифах и абстрактных образах оказались способными разрешать сложные жизненные ситуации в многообразии форм. Такие космические образы имеют большую силу расширения и сохранения, притяжения и преобразования. ... Фракталы могут быть способом хранения в сознании больших целостностей, в которые мы оказываемся включёнными — реальное, но ускользающее единство. [22, p. 242–244] (пер. — Ф.М.).

Целью этой главы будет сопоставление антиномичности, двойственной природы сознания и числовой асимметрией модели. Например, сразу видно, что пункты 3–6, 9–14 сводки Приста с заменой «духовное» на «идеальное» и поправкой личное = субъективному = внутреннему = Я в точности соответствуют нульмерным  $Q_2$  и  $Z_2$ . «Темпоральное» можно понимать как «имманентно изменчивое», «материю—время» поставить против временного—физического, отделённого от статического—пространственного.

Мы рассмотрим  $p$ -адик в качестве кандидата на недостающее звено в объяснении сознания, его некоторых характеристик и свойств. К этому нас побуждают идея и свойства *посредника* Панова в трансцендентальной схеме Канта, замечания Г.Ханта об исклю-

чительной роли нелинейной динамики и фрактальная геометрия *бытия* в изложении П.Флоренского, которые в точности соответствуют, с одной стороны, неразделимости внешнего и внутреннего миров человека, с другой – числовой асимметрии.

В связи с этим стоит упомянуть бытийные предложения в русском языке, которые явно воспроизводят двойственность сознания и мышления [23, с. 229–284]:

«В русском языке область бытия может иметь объём Вселенной или её части, микромира человека или его части. Она может быть материальной или идеальной [с. 233] ... Прибегая к бытийным предложениям, русский язык моделирует сообщение о микромире по типу сообщений о макромире [с. 256] ... практически все семантические типы сообщений, касающиеся личной сферы, могут получить в русском языке форму бытийных предложений. Использование одного принципа для описания макро- и микромира составляет особенность русского языка, отличающую его от ряда других европейских языков, в частности, романских и германских ... принцип бытия, существования применяется в нём и к тому, что есть в мире, и к тому, что есть в человеке, с человеком, в непосредственном окружении человека» [23, с. 256–257].

Сравним:

«Сознание, которое всегда представляет собой сознание “о мире” и “в мире”, столь же изначально и необходимо является сознанием “с миром”. [14, с. 105; 6, с. 339, 361].

2. *Обзор  $p$ -адики.* Впервые  $p$ -адические числа для моделирования сознания и мышления были использованы А.Ю.Хренниковым в его монографии [24]. В ней автор в явном виде формулирует ультраметричность как проявление когнитивности и демонстрирует интерпретации  $p$ -адики на иерархической деревоподобной, то есть масштабно-инвариантной, решётке. Однако Хренников обходит факт антиномичности и парадоксальности сознания и мышления, необходимость самообъяснения предлагаемых формализмов динамических систем. Автор придерживается той распространённой среди математических физиков идеи, что для воспроизведения феномена нет необходимости в его понимании, достаточно наличия его математической модели. В своих дальнейших работах Хренников продолжает развивать модель сознания на основе переноса физических формализмов ньютоновой и, особенно, квантовой механики [25].



Как заметил Д.Чалмерс по поводу квантовых моделей сознания, все они исходят из принципа «минимизации непознанного»: квантовая механика непонятна, сознание — также, следовательно, они явления одной природы. Можно согласиться с квантовой интуицией физиков, выделяющих, в частности, сопряжённость сознания и измерения, объективного и субъективного, которые в нашей модели выражаются одинаково двумя метриками [26], но никак не с формализмом квантовой механики в силу ГЛГ-аргумента (см. также [27] о проблемах квантовых моделей сознания). В связи с этим отметим главу 6 упомянутой монографии Хренникова. В п. 6.4 автор приводит теорему А.Лемина об ультраметризации произвольного метрического пространства [28, Th.7] и делает вывод о том, что «*физическая динамика ... может рассматриваться как динамика на такой [деревopodobной] решётке. В частности, нейронная сеть нашего мозга представляет ультраметризацию евклидова пространства  $R^3$* ». В этом выводе, так же как и в теореме Островского, явно светится идея сопряжения пространств, ведущая к дополнительности в терминах квантовой механики. Автор, однако, придерживается, как и ранее, исключаящего ИЛИ — или вещественная метрика, или  $p$ -адическая, третьего не дано — и проходит мимо возможности формальной реализации дополнительности.

Кроме того, авторы, использующие автореферентность в моделях сознания, следуя, видимо, математическому стандарту, используют аксиоматический метод [29], проходя, тем самым мимо всех граней автореферентности и парадоксальности явления.

3. *Степенные законы.* Человек — биосоциальное существо. Поэтому все биологические и лингвистические закономерности, в том числе степенные законы, справедливы и для сознания. Степенные законы психофизики *стимул–восприятие*, такие как степенной закон Стивенса, связывают внешний мир с внутренним миром человека. Как было показано ранее (гл. «Степенные законы»), в этом случае можно считать числовой моделью внутреннего мира нульмерное  $Q_2$ . Недавно было доложено о значительно более широком поле применимости степенных законов в когнитивных науках на нейронном, поведенческом и лингвистическом уровнях описания. Они, а не варианты нормального распределения, типичны для живых систем. Степенные законы ведут к зависимостям, связывающим механизмы восприятия и моторику на всех масштабах. Их особенностью в когнитивных науках является вариабельность показателя степени, что связывается с гибкостью и контекстной зависимостью восприятия [30].

Психометрические выводы согласуются с отстаиваемым тезисом Брушлинского о том, что «мышление есть живой процесс» [14, с. 168 и далее по всей книге]. Этот тезис биологически расширяет вывод о 2-ади-

ческой природе мышления/сознания, который следует из степенных законов. Тем самым язык и биология оказываются *формально* неотделимы от психического, имея 2-адику в качестве общей основы. И мы, так же как и ранее, имеем право ввести  $p$ -адические числа как порождающее пространство степенных законов с целью расширения арсенала моделирования.

4. *Пространство*. В качестве универсума сознания, внутреннего, субъективного мира человека, в нашей схеме полагается нульмерное  $Q_2$  с принятым выше смыслом числа 2 как пары функций восприятия-измерения  $2 = (|\bullet|_\infty, |\bullet|_2)$ . Процесс мышления и функции сознания понимаются как отображение  $Q_2$  в себя, так как все три члена в (1) даны в сознании:

$$\text{con}(\tau, t) : Q_2 \rightarrow Q_2 . \quad (2)$$

Здесь  $\tau, t$  – два направления времени: дивергентное, биологическое и конвергентное, физическое соответственно.

Две метрики, два направления изменения, или два предела неархимедовой метрики, моделируют пары *анализ–синтез, интеграция–дифференциация* и другие, топологически адекватные функциям сознания. Они являются общими для всех модальностей восприятия, воспроизводя их «свёртывание, исчезновение» – «развёртывание, появление».

Это пространство порождает вещественное  $R^\#$ , то есть видимый объективный мир, который, по положению, является фрактальным, то есть миром нелинейной динамики, числовым содержанием которой является числовая асимметрия  $Q_2^\# = R^\# \times Z_2$ . Здесь верхний индекс в левой части означает самодвойственность  $Q_2$ , в нашей интерпретации.

Согласно нашей схеме, человек как (биологическая) материя, тело, имеет свой нульмерный прообраз в  $Q_2$ . В нём и ищутся свойства сознания/мышления, поэтому  $Q_2$  в данном контексте имеет смысл чувствилища человека.

Рефлексивная схема – автореферентность, самоотнесённость (см. [6])

$$Q_2 \cong Q_2^1 \times Q_2^2 \times \dots \times Q_2^n \times \dots \quad (3)$$

связывает различные, топологически идентичные, но физико-химически различные модальности (правая часть), в которой посредником выступает само  $Q_2$  (в левой части). В модели сознания объект совпадает с субъектом, цель – со средствами, процесс – с результатом [14].

Голограмма – варианты инварианта

$$C \cong \exp(C) \cong 2^C \cong Z_2 \cong [IFS \equiv \{0,1\}^N] \cong [Z_2 \rightarrow Z_2] \cong BA \quad (4)$$

в дополнение к (3) – воспроизводит различные движения/проявления сознания и мышления.

В частности, два крайних члена (4) представляют пару *материя–символ* или *разум–тело, биологическое (нейронная структура мозга)–психи-*

ческое (субстанция мышления/сознания). Первый и четвёртый –  $Z_2$  – есть топологическая алгебра, то есть материя со свойствами чисел, основа пифагорейского взгляда «Всё есть число».

Вся цепочка, но без первого и пятого членов – материи и языка, схематически представляет «несловесное мышление», внутреннюю речь [31], динамическую, изменчивую, потоковую природу мышления/сознания [6, 14]. Второй член есть целостность феномена, она же – неделимость ультраметрических пространств.

Два последних члена – решётки, представленные своими функциями, и булева алгебра – соответствуют двум полюсам мышления: *образному* и *логическому*. Они представляют формальный эквивалент функциональной асимметрии мозга [32], описанной как *творческое (дивергентное)–стереотипное (конвергентное)* мышление [33], определяющей личностные свойства *женское–мужское* соответственно [34]. Двойная природа чувственного зрения – объект в целом и в деталях своих частей [35] – также соотносится с первым, четвёртым и пятым членами в (4). В целом здесь узнаётся дихотомия *правый–левый* мозг как эмпирия числовой асимметрии.

Сопоставим голограмму с её инволюцией, то есть правополушарное мышление с левополушарным. В логическом виде (4) запишется как конъюнкция

$$\models C \wedge \exp(C) \wedge 2^C \wedge Z_2 \wedge [IFS \equiv \{0,1\}^N] \wedge [Z_2 \rightarrow Z_2] \wedge BA . \quad (4^*)$$

Инволюция на решётке, то есть отрицание (4\*), включает соответствия Галуа *дивергенция–конвергенция* и даёт дизъюнкцию:

$$\models M \vee \bigcup m_i \vee \{G, V(m_i)\} \vee R^\# \vee d(m_i, m_j) \vee f_M(x, t) \vee \{\text{законы природы}\}. (4^{**})$$

Здесь слева направо: выделенное тело/объём, объединение частей тела/объёма (множества Кантора), граф взаимодействий тел (задача многих тел в физике), вещественные числа, процесс и результат измерения расстояний/воздействий/сил (алгоритмы/языки переходят в измерения), траектория механического движения  $M$ , причинно-следственные связи. В целом картина соответствует миру физики как множеству разделённых тел (*cookie-cutter paradigm* – англ.).

Противоречия мышления тогда можно представить как отрицание закона исключённого третьего для (4\*) и (4\*\*):

$$\models (4^*) \wedge (4^{**}) . \quad (4^{***})$$

Поэтому в нашей схеме «сознание ... и все его потенциальные преобразования, безусловно, представляют собой факты природы» [6, с. 33].

5. *Время и сознание.* Сознание и чувство времени соопределяемы: в отсутствии потока сознания нет ощущения длительности. Они составляют общий поток из *неизвестного источника* [6, с. 307, 379, 383,

390–391]. Формально: поскольку человек как всякое чувствующее существо порождается нульмерным  $Q_2$ , постольку источником времени-сознания является его вершина/корень. Чувство времени основывается на потоках *откуда—куда* и пульсации восприятия [6, с. 389]. Воспринимаемое течение/движение поэтому проще всего отобразить четвёркой производных по метрикам/восприятиям в  $Q_2$ . Поскольку в этой *масштабно-инвариантной* [6, с. 210] и *формально-неразделимой* четвёрке присутствуют как непрерывные движения, так и дискретные события (см. гл.6), то метафора сознания как потока «импульсов внутри волны и волн внутри импульсов» оказывается формально точной. Поток, являющийся одновременно произвольным, навязываемым извне и в то же время «моим», личным, фиксирует неразделимость сознания и мира как неразделимость ультраметрического пространства и подобие части целому, реализуемое всем спектром инверсий (см. гл.10 – Биология). [14, с. 84, 86–88; 6, с. 194, 196, 205]. Поэтому «когда человек мыслит, ему мыслится» [14, с. 19] и «сознание продолжается независимо от нашей собственной воли» [6, с. 197–198].

Ниже мы рассмотрим отдельные понятия сознания в соответствии с нашей схемой числовой асимметрии. Конечно, каждое из них имеет свой пласт литературы, нюансы и интерпретации. Наше рассмотрение поэтому будет предельно схематичным, ограниченным числовой геометрией, мотивируемым поиском единого понимания.

6. *Геометрия сознания.* Сознание и мир возникают из общей основы или источника [6, с. 361]. В качестве геометрического образа сознания используем двойную петлю (см. гл. Биология, рис. 1-3), схематически

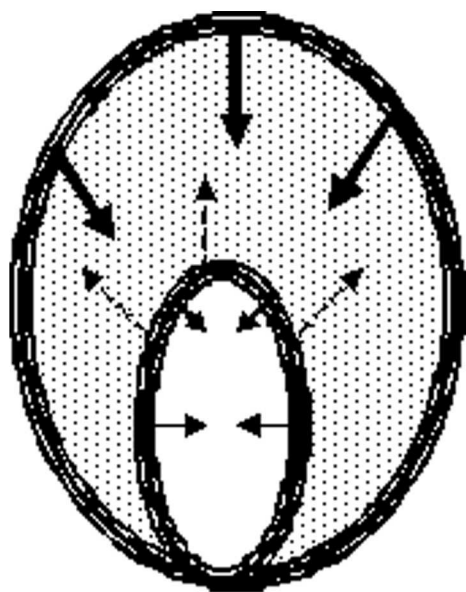


Рис. 1. Геометрия сознания

имеющую вид, представленный на рис. 1. Компьютерный образ является упрощением, в нём отсутствует вторая – интенсивная – координата. На этом рисунке она схематически обозначена как заштрихованная область, состоящая из таких же двойных петель меньшего размера. Более точно, геометрию можно построить методами теории решёток, последовательно рассматривая инволюцию взаимодуальных полурешёток  $R^\#$  и  $Z_2$ , пересекающихся по рациональным числам. Такая геометрия напоминает об Уроборосе – символе всякого автореферентного познания [6, с. 306].

Точка касания петель есть точка инволюции « $0 = 1$ » рационального отрезка  $[0, 1] \subset R^\#$ , она соответствует общему источнику нульмерного сознания и вещественного мира. В этом случае внутренняя петля соответствует рациональным числам как композиции/пересечению 2-адических и вещественных, имеющих тождественный синтаксис (рис. 2).

Рациональные числа формально представляют видимый мир, в частности тело человека, которое есть уникальная точка пересечения между объективным и субъективным [6, с. 196]. Внешняя петля представляет нульмерную, невидимую, идеальную область.

Во внутренней петле действует прямая перспектива, конвергентные процессы — образуются тела. Здесь человек видит внешний мир и сам себя. На внутренней петле вовне действуют дивергентные процессы (пунктирные стрелки) — это обратная перспектива (сплошные стрелки), здесь возникают образы. Во внешней петле также действуют конвергентные процессы — здесь человек *видит-себя-видящим-себя-в-мире*, то есть человек находится одновременно «В» и «НАД» ситуацией. В целом получается картина *осознания/самосознания* [36, с. 486]. Фрактальность обеих петель продолжает осознание до *чувственной осведомленности* [6, с. 17 и по всей книге], то есть органического включения 2-адического чувствилища человека во *фрактальный* мир предметов и явлений без дополнительных усилий с его стороны. Повторим рис. 1 из гл. 9. Из этого рисунка видно, что сознание человека является открыто—замкнутой системой, то есть аналогом открыто—замкнутых (под) множеств  $Q_2$  (или  $Z_2$ ).

7. *Двойная природа человека.* Человек состоит из тела и его чувствилища — нульмерного прообраза тела в  $Z_2$ , ультраметрического прообраза, так же как и живой организм:

$$\text{тело} \subset R^\# \leftarrow \text{человек} \rightarrow a_0 a_1 \dots a_n \circ 2^{n+1} Z_2. \quad (5)$$

Здесь префикс определяет координаты человека в биологическом пространстве Аристотеля, а шар  $H = 2^{n+1} Z_2$ , который может быть произвольной видимой формы, — как проекция из нульмерного пространства, прообраз тела человека (внутренняя петля на рис. 1).

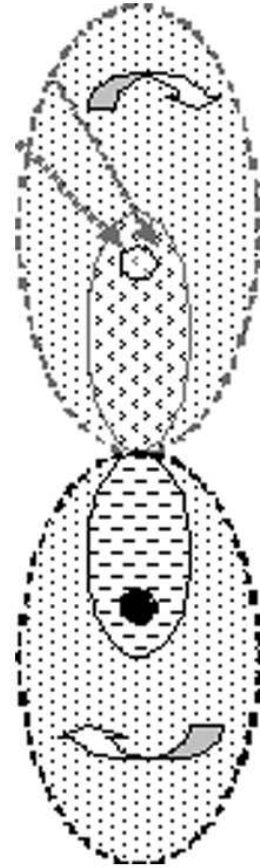


Рис. 2. «Бабочка»  
числовой асимметрии.  
Стрелками указан  
порядок

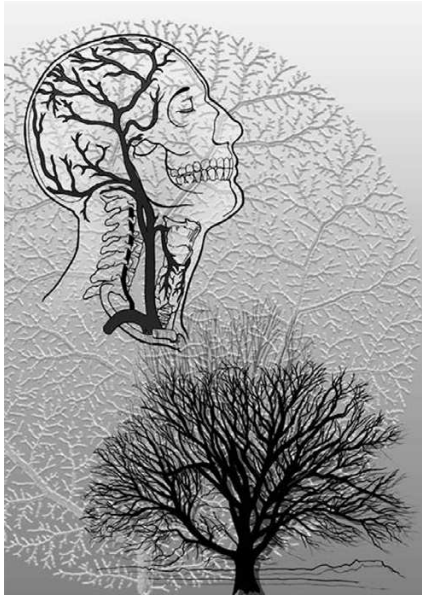


Рис. 3. Двойная природа человека (Diane Danegas The Tree of Life // Reflections. Vol. 2, №7, p. 6-7)

Тем самым возможно несловесное мышление телом. В целом (5) – это числовой вариант решения *психофизиологической проблемы* (*mind-body problem* – англ.). Человек мыслит не только мозгом, но и всем телом: «Сознание спаяно с телом» (М.Мерло-Понти) [31, с. 3]. Телесное знание – это знание, опирающееся на опыт, умение, конкретику [32, с. 82]. Такова грамотность людей различных специальностей: врачей, агрономов, ремесленников, спортсменов, артистов, архитекторов и т.д. Сюда необходимым образом включается восприятие движения, которое полностью отсутствует в формальном познании. Опытно-визуальное знание является антиподом алгоритмического [32, с. 84], то есть гильбертова формализма. Такие умения основаны на

тождестве топологий и спектра движений *чувствилища* человека и ультраметрического прообраза, то есть фрактала конкретного предмета. В этом случае их единосущность становится основой познания, так как знание/понимание становится частью предмета.

8. «Я» есть целостность сознания, единство прошлого и настоящего, непрерывность биографии, центр сознания, управляющее начало телом человека [37, с. 497]. В нашей схеме целостности отвечает инверсное поле (см. гл. 10 – Биология). Нульмерный прообраз тела человека не зависит от течения физического, календарного времени  $t$ , поэтому префикс в (5) в пределах адаптационных возможностей остаётся неизменным. Биологическое время, то есть *течение из неизвестного источника* (см. Время) –  $\tau$ , изменяет нульмерную природу человека  $H = 2^{n+1}Z_2$ , косвенно сказываясь на форме тела. Префикс возникает с первым вдохом при появлении на свет (аксиома астрологии как космобиологии!) и остаётся постоянным в течение жизни – последовательности моментов *теперь* настоящего, определяя путь к центру сознания-времени, то есть корню  $Z_2$ . Четвёрка производных  $Z_4$  формализует энтелехию человека как (психическую) энергию – *имманентную изменчивость сознания*. Отсюда возможность человеческого движения, не опосредованного физикой.

9. *Восприятие* есть чувственное познание предметов и объективных ситуаций – специфическое переживание контактов с внешним миром. Оно имеет парадоксальный характер, так как существует вне со-

знания, не является физической вещью, но зависит от актов сознания [38, с. 443–446]. В нашей схеме восприятие и его механизм – внимание, выделение сенсорного поля [39, с. 67] – можно рассматривать как событие на границе  $R^\#$  и  $Z_2$  на границе тела, где происходит инволюция:  $[R^\# \supset O] \rightarrow \{O^* \subset Z_2\}$ , то есть акт формирования перцепта, нульмерного прообраза контакта (пятна/окна внимания). Восприятие зависит от разрешающей способности органов чувств – зрения, слуха, осязания. Как акт познания инволюция сопрягает топологически тождественные области внешнего мира  $O$  и внутреннего  $O^*$ . Техническим примером является сканирование изображения компьютером или фотографирование цифровой фотокамерой, оцифровка любых данных. Развитость программного обеспечения – длины разрядной сетки, например – аналогична разрешающей способности органов чувств. Парадоксальность восприятия объясняется через объединяющее ИЛИ – как «и физическая вещь, и акт сознания». Геометрически на рис. 2 – это пара конвергентных стрелок, направленных на объект. Человек ощущает *себя-ощущающего-внешний мир*. Механизм восприятия, выделение сенсорного поля, в связи с геометрией (рис. 1 и 2) требует определения положения/координаты области/точки на внешней петле, в которой находится внутренний взгляд, наблюдающий малую петлю с разных сторон. В языке это аналогично дейксису в прагматической парадигме, в системной теории – метапозиции, в  $p$ -адике – произвольности центра шара.

10. *Предвосхищение (антиципация)*. Числовая асимметрия сопрягает *возможное с действительным*. В ней Вселенная имеет смысл «блок-Вселенной», то есть пространства, где прошлое, настоящее и будущее присутствуют одновременно, все траектории/судьбы/события уже существуют потенциально, подобно тому как в большом словаре все предложения, тексты, высказывания присутствуют как траектории между словарными статьями. Метафора «блок-Вселенной» как Универсальной Библиотеки является мостом между математикой сложности в различных вариантах, теорией чисел и биологией [40]. Так, во фрактальном континууме Менгера присутствуют топологические образы-эквиваленты всех возможных кривых, а в Универсальной Библиотеке как множестве всех последовательностей строк символов в фиксированном алфавите узнаётся  $Z_2$ . Вследствие рефлексивности/самоподобия такого пространства, то есть действия инверсии, её образ как *макрокосма*, возможно, неполный и частично искажённый, присутствует в *сознании-микрокосме* каждого человека. Двойная петля оказывается частью другой, вселенской петли. Философские следствия такого положения *по образу и подобию* проанализированы Пановым [11, с. 230–246]. Поэтому, существуя в поле внимания человека,

Блок-Вселенная предоставляет в его распоряжение образ будущего, спектр возможностей. Это позволяет человеку экстраполировать, то есть планировать свои действия и решения задач до того, как они будут осуществлены, до их алгоритмизации и логической обработки. В этом случае объект включается в структуру понятия, а понятие становится структурой объекта: человек получает способность создания понятий, не имеющих (пока) эмпирических денотатов [41, с. 28, 139]. (**Замечание.** Здесь усматривается так называемая аксиома изобилия, или полноты (*axiom of plenitude* – англ.), теории нефундированных множеств. В ней вместо пустого множества как основы теории принимается существование множества  $U$  урэлементов, которые не являются множествами. Аксиома гарантирует изобилие урэлементов вне любого множества, появляющегося в поле внимания/рассмотрения теории [Barwise J., Moss L. On the mathematics of Non-Wellfounded Phenomena. CSLI Lect. Notes. 1996, 60, p. 21–23]. Впервые урэлементы появились у Мириманоффа как ядра, то есть неразложимые элементы множеств [Mirimanoff D.// L'Ens Math., 1917, v. 19, p. 211]. В нашей схеме за урэлементы естественно принять две метрики/функции восприятия и из них составленные строки, которые подлежат всем материальным образованиям и способам восприятия человека. Аксиома полноты в этом случае означает изобилие, существование полного разнообразия их комбинаций во внешнем и, следовательно, внутреннем мирах, то есть полное множество одновременно существующих 2-адических чисел, существование Универсальной Библиотеки (см. выше). По Мириманоффу, такие множества, построенные на ядрах {протяжённость, делимость}, будут изоморфными, то есть взаимоподобными в общем случае).

Блок-Вселенная и рефлексивность пространства дают основу так называемого *общего знания*: «Я знаю, что ты знаешь, что я знаю ...» – с произвольным числом рекурсий. Это означает (ограниченный) доступ в сознание-микрокосм *не-Я*, то есть другого. В такой Вселенной «часть и тождественна целому, и отлична от него» (Энесидем), и центром её является любая точка, как в теореме о центре шара в  $p$ -адике.

Общее знание есть основа социальных отношений, формирования единого смыслового пространства. Заметим, что формальная логика и язык разрывают это пространство, блокируют взаимопонимание людей. Здесь можно видеть формально-числовую и онтологическую основу нефизических явлений – *совести, любви, милосердия, дружбы* – специфически человеческих качеств как видения и чувствования *другого-как-себя* [42, с. 385–387]. Такие понятия, как *долг* и *мораль*, можно рассматривать как соответствие ценностям своего Я в *биологическом* будущем.

11. *Мышление.* Здесь, помимо критики А.В.Брушлинским теории множеств Кантора (см. выше), известен логико-топологический ана-



лиз фрейдовской пары *сознательное—бессознательное* чилийского психиатра И.Матте Бланко, который представил её в виде *асимметричного—симметричного* бытия [43]. Приведём краткий обзор по [44]:

«Бессознательное, или симметричное, бытие характеризуется как (*правополушарное. — Ф.М.*) пространство литературы, искусства, поэзии. В нём нет противоречий, отсутствует отрицание, пространство-время, порядок и отношение смежности/разделённости. Оно целостно и сознанием не наблюдается.

Сознательное, или асимметричное, бытие характеризуется аристотелевой логикой, формирует множественность и разделённость восприятия, имеет пространственно-временной характер. Наблюдается сознанием.

Оба вида бытия существуют совместно. Симметричное бытие познаётся, становится видимым как бы через увеличительное стекло или призму асимметричного бытия. Эмоции, их интенсивность понимаются как отношение между этими двумя видами бытия. Бессознательные события характеризуются не единичными измерениями, подобно физическим, но их бесконечной последовательностью, которая соответствует определению бесконечного множества Кантора как изоморфного своей части. Если рассматривать случай многомерных пространств, то симметричное бытие может быть развёрнуто в бесконечное число асимметричных отношений. Симметричное бытие превращается в асимметричное посредством слов» (пер. — *Ф.М.*).

Было показано, что эти характеристики бессознательного соответствуют ультраметрическому пространству [45]. Остаётся несколько уточнить это представление в соответствии с нашей схемой. Первые два абзаца цитаты явно описывают сопряжённые решётки  $R^\#$  и  $Z_2$ . Отсутствие противоречий и отрицания объясняется свойствами арифметики Пресбургера. События в симметричном бытии  $Z_2$  становятся наблюдаемыми посредством языковой номинации (см. интерпретацию Калужнина). Эмоциям можно поставить в соответствие понятие энергии и привлечь четвёрку производных по метрикам, которые получаются из расщепления целостности на части словами:

$$p \circ 2^N Z_2 \rightarrow p \circ \bigcup_I p_I \circ 2^{N+I} Z_2 \quad (6)$$

Здесь  $pr$  и  $pr_I$  — префиксы, то есть слова, соответствующих кластеров. Отношение (6) есть формальное выражение действия призмы в пространстве (не логики!) Аристотеля. В отношении энергии (6) можно рассматривать как аналог цепной реакции деления. Иными словами, *эмоции* есть энергия перевода бессознательного в сознательное.

Мириманоффом было обосновано определение бесконечного множества как нефундированного [46], которое полнее канторовского. Таким образом, описание пары *сознательное—бессознательное* вполне соответствует числовой асимметрии.

Мышление поэтому можно определить, как это часто делается, и как процесс поиска решения некоторой задачи и планирования действий в асимметрическом пространстве слов, и как последовательность образов в симметрическом бессознательном. Оно имеет, следовательно, два полюса, то есть существует два основных способа мышления: дизъюнктивный, логический и недизъюнктивный, интуитивный [14, с. 112]. В науке о сознании эта оппозиция проявилась как «Вюрцбургский спор о фундаментальной природе мышления, ... между теми, кто понимает мышление как логику высказываний, и теми, кто видит его основу в ... игре образов» [6, с. 227–230]. В целом, с позиции третьего лица, мышление можно представить как действие проективной группы (дробно-линейных преобразований) в  $Q_2^\# = R^\# \times Z_2$ , определённой над двумя числовыми системами/полюсами сознания. Иллюстрации к обоим полюсам представлены М.Барнсли в [47, Ch.2]. Понятие логического следования в этом случае совпадает с движением: булева алгебра совместима с арифметикой Пресбургера, образуя булеву алгебру с арифметикой Пресбургера – *ВАРА* [48, Ch.7, p. 109–140]. Поэтому инверсии в проективной группе над  $Q_2$  сопрягают мысли и образы со своими дополнениями, то есть отрицаниями [49, p. 322–323], и имеют поэтому смысл ассоциаций или метафор языка. Если иметь в виду рефлексивную схему (3), то пространство мышления *с позиции первого лица* следует считать многомерным, счётно-бесконечномерным. Тогда четвёрка движений может быть заменена двумя – подобием и инверсией [65] в двух направлениях причинности/времени. Четвёрка производных может быть сопоставлена физическому четырёхмерному пространству-времени, которое образуется и воспринимается двумя метриками-функциями восприятия.

12. *Тождество субъекта и объекта в мышлении* отображается рефлексивностью пространства – чувствилища  $Q_2$ . Самосознание переводит евклидов, физический образ человека в  $R^\#$  – в его ультраметрический прообраз в  $Z_2$ , то есть в своё чувствилище.

13. *Основной парадокс мышления* заключается в противоречии между начальным и конечным состояниями: «Если я знаю, что искать, то нечего мыслить, если я не знаю, что ищу, то как же мне мыслить». Разрешается парадокс на основе *предвосхищения* [14, с. 55–61] посредством движений в блок-Вселенной (см. выше п.8).

14. *Основной механизм мышления есть анализ через синтез*. Этот процесс заключается во включении предвосхищаемого результата во

всё новые связи, в поворачивании его разными сторонами [14, с. 51, 64–67]. Объясняется развёртывающейся рефлексивной формулой (3). В ней левая часть может меняться местами с одним из сомножителей в правой части, порождая инверсию иерархии. Прямое разворачивание рефлексивной формулы соответствует включению объекта в новые связи, инверсии – поворачиванию/рассматриванию с разных сторон. В этом случае целое/результат становится частью некоторого отношения/свойства. Многочисленные примеры такого рода инверсий описаны в [50]. Инверсии иерархии есть частный случай инверсий-связей в нульмерных множествах. Вторые образуют целостность. Когда часть играет роль целого, это есть смещение центра в  $Z_2$ . Этим механизмом постоянно пользуются врачи при постановке диагноза, криминалисты, воссоздающие картину преступления, проектировщики сложных систем, анализирующие достижимость целей и устойчивость функционирования. Примеров из обыденной жизни не счесть.

15. *Прогнозирование мышлением* осуществляется в ходе непрерывного взаимодействия внешних и внутренних условий деятельности [14, с. 221]. Здесь включается восприятие, которое переводит внешние условия в перцепт посредством двойственности Стоуна. Перцепт включается в контекст внутренних условий, образуя своего рода граничные условия для процесса мышления. Таким образом, всё *внешнее познаётся и действует через внутреннее* [14, с. 23, 221].

16. *Сознание и физическая метафора*. Из-за неразделимости сознания и мира оно часто описывается с использованием физических метафор потока и турбулентности [6, с. 40, 218–219], что объясняется парой  $(4^*) - (4^{**})$ . Из неё также видно, что одним из свойств сознания является его *объединяющая–разобицающая* способность [6, с. 50–51], то есть сопряжение конъюнкции  $(4^*)$  к дизъюнкции  $(4^{**})$ , единство непрерывного и дискретного [14, с. 88]. В языке эта способность преломляется как асимметричный дуализм лингвистического знака, в математике – как двойная определимость строки символов и теорий (парадокс Левенгейма–Сколема), в теории систем и биологии – как динамический и лингвистический режимы функционирования. Отсюда *необходимость слов с двойной функцией* для описания сознания [6, с. 207]. Тогда внутренняя чувствительность понимается как зеркальное отражение нелинейной динамики [6, с. 218–220], то есть бинарно-логической фрактальной структуры числовой асимметрии.

«Эти нелинейные физические процессы “вмещают” разнообразные жизненные миры чувствующих существ в качестве их наиболее непосредственной оболочки. Именно эти динамические процессы, отражаясь внутри, определяют организацию непосредственной чувствитель-

ности — особенно объемлющий перцептуальный строй, более или менее общий для всех подвижных организмов. Сама не будучи живой, эта динамическая оболочка отражает свою организацию внутрь, формируя “качественную специфику” непосредственного восприятия. ... это отражение настолько точно, что язык профессиональных метеорологов, относящийся к динамике бурь и циклонов, полон организмических метафор приспособления, выживания и намерения. Несмотря на то что эти неживые системы в конечном счёте лишены непосредственной проприоцептивной реактивности на последствия своих “действий”, они всё же дают нам весьма точные внешние зеркала для организации нашего опыта. Несомненно, эти изоморфизмы между сознанием и динамикой окружающего физического мира делают нашу жизнь, как говорил Хайдеггер, в полном смысле слова бытием-в-мире, а не где-то вне его» [6, с. 219].

В связи с мыслью Хайдеггера напомним, что интерпретацией  $p$ -адических чисел, принятых нами согласно С.Уламу, является множество границ тел и процессов на всех масштабах деления/различения. Иными словами, *бытие-в-(нелинейном)-мире* в нашей схеме есть бытие в его нульмерном прообразе — *чувствилище*  $Q^{\#}_2$ , который «является фоновым состоянием, лежащим в основе всех более дифференцированных организаций» [6, с. 221].

17. *Свет и числовая асимметрия.* В исследованиях сознания и мышления заметное место занимают вариации и коннотации понятия «видеть»: идея, умное видение, проникающий разум, видение-другого-как-себя, воображение, образ как транспарантное, то есть прозрачное для зрения, единство. Здесь, очевидно, неявно подразумевается агент, при помощи которого эти варианты видения становятся возможными, — свет.

В связи с нашей схемой бинарности/дополнительности имеет смысл обратить внимание на метафизику света. Метафизика, как известно, начинается с разделения бытия на видимое и невидимое. Видимый свет как электромагнитное явление описан физикой. Однако она останавливается на границе человеческого чувственного восприятия — барьер планковских масштабов для неё абсолютен. В то же время известен пороговый характер человеческого восприятия (см. гл. «Степенные законы»). В истории не-физической человеческой мысли присутствует и невидимый свет — явление до-планковских масштабов. В этом плане симптоматично замечание С.И.Вавилова:

«История науки о свете ... началась с попытки перенесения “опыта детей и поэтов” (то есть воображения. — Ф.М.) в область сознательного, последовательно развиваемого знания». [51, с. 8].

Иными словами, видимый свет — это левополушарный, «одноглазый» (А.Н.Уайтхед) свет. Каким может быть представление света правополушарного? Попробуем в общей схеме связать его в контексте двухаспектной теории с числовой асимметрией. Для этого перечислим его упоминаемые в литературе свойства:

- 1) свет, как известно, невидим, пока не попадает в глаз человека;
- 2) свет есть поток [51, с. 5];
- 3) из смешения чёрного и белого возникают при некоторых условиях цветные образы (диск Бенгама) [51, с. 15];
- 4) в природе присутствуют лучи со всевозможными длинами волн — от бесконечно больших до бесконечно малых [51, с. 24];
- 5) свет всегда исходит от вещества, рождается в веществе, поглощаясь, исчезает в веществе [51, с. 29];
- 6) существующий материальный мир представляется нам в виде двух основных форм — вещества и света. Свет превращается в вещество и обратно [51, с. 39–40].

Первое свойство есть нульмерность света. Четвёртое свойство означает по сути, что свет есть пространство, второе — время. Пятое и шестое свойства в точности повторяют связь нульмерного  $Z_2$  и вещественного  $R^\#$  и делают пространство света бинарным. Третье свойство объясняет появление качеств на границе видимого света и тьмы, так же как и рациональных чисел на пересечении  $R^\#$  и  $Z_2$ . Или, словами И.В.Гёте: «Для возникновения света необходимы ... свет и несвет». Эта оппозиция, по его предположению, предшествует всем ощущениям цвета.

Отсюда следует предположение, что свет есть самодвойственное нульмерное  $Q_2^\#$ , невидимое за планковскими масштабами и видимое до них. Поэтому, для продолжения анализа, обратимся к *метафизике света* как включающей «правополушарную часть» его теории [52]:

- 7) свет есть первофеномен мира;
  - 8) объединяет в себе всё сущее;
  - 9) совмещает в себе несовместимые начала;
  - 10) исконно связан с порядком, числом, отношением, а следовательно, с разумом, истиной, словом;
  - 11) играет роль посредствующего звена между телесным и духовным (макро- и микрокосмосом), чувственным и умопостигаемым, вещественным и идеальным, тварным и нетварным;
- благу в мире умопостигаемом соответствует Солнце в видимом (Платон);

свет есть творение первого дня, предшествует другим актам творения; иерархия света — чувственный, умопостигаемый, божественный;

естественный свет есть граница телесного мира и мира чистых форм, в которых существует свой умопостигаемый свет, выступающий одновременно как свет бытия, свет прекрасного и свет разумения;

благодаря тому, что свет устанавливает начала одновременно как бытия, так и познания, устанавливается соответствие между пронизывающей мир иерархической структурой и строем мышления, делающим этот мир прозрачным для разума.

Видно, что метафизические свойства продолжают физические:  $7 = 4$ ,  $8 + 9 = 5 + 6$ ,  $15 = 3$ , и расширяют их. Свойства 10 и 11 сопоставляются с двойственной интерпретацией  $Q^{\#}_2$ , оснащённого двумя метриками-функциями человеческого восприятия, способного порождать оппозицию *число—слово*. Проективная геометрия  $Q^{\#}_2$ , геометрия с источником света как началом, объясняет оппозицию 12. Универсальность нульмерных множеств, их способность порождать вещественные (под)множества и любые тексты [53] объясняется в 13. Иерархию света 14 можно трактовать следующим образом. Тварный — чувственный и умопостигаемый, логика и воображение, дедукция и индукция (*MP* и *MT*). Нетварный — инволюция, связывающая обе числовые системы в единую модель бытия, то есть свойство 16. Этот вид света соединяет нули и единицы в диадические строки — характеристики восприятия человека.

Часто упоминаемый Роберт Гроссетест приводит следующие свойства света [54]:

17) свет в силу своей природы (*per se*) распространяет себя самого во все стороны, причём таким образом, что из световой точки порождается сколь угодно большая световая сфера ... свет есть то, чему таковая деятельность (*operatio*), то есть самого себя умножать и во все стороны тотчас же распространять, присуща самой его природе;

18) свет есть ... сама телесность;

19) свет ... распростирал в начале времён материю ... до размеров мироздания. ... посредством своего бесконечного умножения распростирает материю до меньших конечных размеров и б ольших конечных размеров в соответствии с любыми пропорциями, которые они имеют по отношению друг к другу, а именно числовыми и нечисловыми;

20) общим видом и совершенством всех тел является свет; но у высших тел — более духовный и простой, у низших же — более телесный и приумноженный;

21) ... низшее тело из-за причастия его наряду с высшим телом одной и той же форме воспринимает движение от той же самой бестелесной движущей силы (*virtue motiva incorporadi*), которой движимо и высшее тело.

В трактате «Об истине» Гроссетест касается темы интеллигибельного света, или света разума, который

22) «Прежде всего и посредством себя обнаруживает то, что есть, подобно тому как только лишь свет обнаруживает тела. Но посредством этого света также и истина вещи обнаруживает то, что есть, подобно тому как цвет обнаруживает тела посредством Солнца».

Гроссетест следует Августину, разделявшему мир на чувственный (*sensibilia*) и умопостигаемый (*intelligibilia*). По Августину, в обеих сферах средством познания является свет. В первом случае это естественный свет, во втором – свет умственный. Однако у Гроссетеста внешний мир не просто освещается светом, он им производится [55].

Из перечисленных свойств видно, и это легко наблюдать в жизни, что свет распространяется не только прямолинейно, но и дивергентно. Лампа или свеча, испуская прямые лучи, испускают их вокруг во все стороны. Свет есть лучи, состоящие из волн, которые состоят из лучей.

Свойство 17 схематически изображается итеративной системой функций и её числовым изоморфом  $Z_2$ . Если принять не дискретную, а плотную  $p$ -адическую метрику, то самоумножение/самоподобие числового бинарного дерева станет видно в каждой точке. Можно сказать, что протяжённость порождается парадоксально–непрерывной мультипликацией/делением света, так же как вещественные (под)множества – тела проекцией нульмерного пространства. Точнее, каждая строка деления сопряжена/порождает последовательность аффинных движений посредством инволюции:

$$\xi = \xi_0 \xi_1 \dots \xi_n \in Z_2 \quad \mapsto \quad a = \text{inv } \xi, \quad a = a_0 a_1 \dots a_n \in R \quad (1)$$

Следующие два свойства, 18 и 19, в ином, нежели 13, виде трактуют порождение вещественного мира нульмерным.

Свойство 20 соответствует суммарному проявлению 7 и 8.

Движение, упоминаемое в 21, можно истолковать четвёркой производных, приняв за функцию соответствие  $\xi \leftrightarrow a$  в (1).

Для объяснения 22-го свойства вспомним, что на ретине глаза образуется подобный образ объекта конечного размера. Это граница между видимым и невидимым – область рациональных чисел. Продолжая лучи в пространство за ретиной к корню  $Z_2$ , перейдём в область невидимого, которая подобна внешней области видимого. В ней свет исходит из неизвестного источника – корня  $Z_2$  – противоположно свету, исходящему от внешних предметов, солнца.

Это схематически показано на рис. 4. В связи с данной схемой можно сказать, что мысль древних, детей и поэтов о «сиянии глаз»

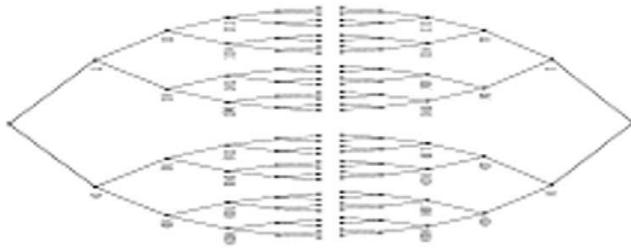


Рис. 4. Два света

[51], о способе видения путём испускания лучей из глаз как акте «перевода единого во многое» (то есть от воображения к логике. — Ф.М.), о том, что видимый свет есть проявление в материи света невидимого (то есть его инволюции. — Ф.М.)

имеет основания в числовой асимметрии.

Суммируя, имеем оппозицию Гёте *свет—несвет*, где *несвет* = *inv(свет)*. Нульмерный прообраз человека можно понимать как область невидимого света.

Из перечисленных свойств света видно, что он есть не только чистая геометрия, но и чистое движение (которые, по-видимому, надо понимать как линии без оцифровки. — Ф.М.). Если к перечисленным свойствам, то есть метафизике света, добавить корпускулярно-волновое представление физики, то свет как движение определён над двумя числовыми системами.  $Z_2$  порождает его дивергенцию, а  $R^\#$  как оцифровка  $R$  (связного) — его конвергентное, то есть прямолинейное движение. Иначе говоря, свет объединяет динамику и термодинамику, механическое и диффузное движения. Простейшим уравнением движения, рассмотренным, однако, над двумя числовыми системами, является

$$\frac{d \xi}{d \eta} = a .$$

Если рассмотреть это символическое уравнение над рациональными числами  $Q$ , то для получения наблюдаемой картины следует рассматривать его члены — числитель, знаменатель и правую часть, причём каждый в двух метриках, которые являются функциями восприятия — архимедовой  $|\bullet|_\infty$  и неархимедовой  $|\bullet|_2$ . Тогда четвёрка производных удвоится и получается 8 составляющих движения света как целого. Это число в точности соответствует  $8 = 7 + 1$  (плюс пурпурный, переходный от фиолетового к красному) цветам разложения света. Поскольку, как известно из исследований сознания и мышления, психическое неотделимо от физиологического, то во внутреннем пространстве невидимого света должны наблюдаться те же 8 цветов, например, в цветных снах. Так как все наши чувства — зрение, слух, осязание — имеют электромагнитную, то есть световую природу, то совпадение 8-и цветов с 8-ю составляющими музыкального строя — октавами — не кажется случайным. То же в отношении «магического числа»  $7 \pm 2$ .



Таким образом, перцепт, не будучи внешним предметом, приобретает свойства внешнего мира. Ввиду двойной природы света перцепт различает не только формы внешних предметов, но и, «окрашивая» их, вводит субъективные различия между ними.

Отсюда возникает двойственность точки зрения, проявляющаяся не только в искусстве как проблема прямой и обратной перспектив [56, с. 9–13], но и в науке как проблема *материя–символ, тело–душа. Обратная перспектива* показывает, что есть изображаемый объект, прямая – каким он кажется художнику [56, с. 248]. Позиция художника/исследователя в первом случае внутренняя, во втором – внешняя [56, с. 252–253; 297]; в обратной перспективе изображается мир в целом, в прямой – в наборе отдельных предметов [56, с. 250], величина фигуры зависит от её положения в иерархии символического пространства (т.е.  $Z_2$  –  $\Phi.M.$ ) в обратной перспективе [56, с. 274]. Противопоставление правого и левого универсально для человеческой культуры. Оно может иметь относительный, физический смысл, но также и абсолютный, аксиологический. Так можно трактовать и числовую асимметрию:  $Z_2$  как Благо есть правое, десное, а  $R^\#$  – левое, шуйево пространства [57, с. 18–23].

Обратная перспектива русской иконы и средневекового искусства поэтому есть не изображение вещей, освещаемых внешним светом, а производимых светом внутренним.

18. *Опыт.* Возвращаясь к сознанию, обратимся к проблеме внутреннего опыта – «знанию, которое непосредственно дано сознанию субъекта и сопровождается чувством прямого контакта с познаваемой реальностью (внешней или состояний сознания). Проблематично выделение “внутреннего опыта” в качестве самостоятельного. Если обычный (внешний) опыт предполагает воздействие внешнего предмета на органы чувств, то непонятно, какие органы чувств может использовать субъект, испытывающий свой “внутренний опыт”» [58].

В нашей схеме таким органом является чувствилище  $Q^\#_2$ , ультраметрический или световой прообраз телесного человека, испытывающий непосредственный контакт с внутренним светом, будучи с ним единичностным.

Рассмотрим, как ведёт себя перцепт во времени. Двойная природа человека  $H$  изобразится диаграммой:

$$Z_2 \supset B(\xi_0) \leftarrow H \rightarrow B(a) \subset R^\# = Z_{1/2}.$$

Символическое время имеет вид:  $T = \left| T \right|_\infty \cdot \left| T \right|_2 = \frac{1}{2} \cdot \tau = t \cdot \left| c \cdot 2^N \right|_2$  (так же как в апории «Ахиллес и черепаха»). Здесь  $t$  – физическое,  $\tau$  – биологическое событийное время.

Зона контакта в символическом виде изобразится шаром в  $Q$  радиуса, зависящего от времени:  $B_{r_Q}(x_0) \subset Q$ , где

$r_Q \in Q$   $r_Q = |c \cdot T|_\infty \cdot |c \cdot T|_2 = \rho_\infty \cdot r_2$ ,  $c$  – некоторая константа. Радиусы  $r_2, \rho_\infty \in Q$ .

Множество рациональных чисел, образующих шар  $B_r(x_0) \subset Q$ , приводит к представлению зоны контакта в виде

$$B_r(x_0) = |B_r(x_0)|_\infty \cdot |B_r(x_0)|_2.$$

Представим перцепт  $\pi$  как шар во внутреннем пространстве:  $\pi = B_{r_2}(\xi_0) \in Z_2$ , где  $r_2 = 2^N$  – радиус шара, который может быть произвольной формы,  $\xi_0$  – его центр. Внешний контакт тела человека – шар в  $B_{\rho_\infty}(a) \in R^\# = Z_{\frac{1}{2}}$  с центром в некоторой точке  $a$ .

С течением биологического времени  $|T|_2 \rightarrow \infty \Leftrightarrow |2^{-N}|_2 \rightarrow \infty \Leftrightarrow |2^N| \rightarrow 0$  величина/объём перцепта, то есть его радиус  $r_2 = 2^N$  в неархимедовой метрике с  $r_2 = 2^N \Rightarrow |r_2|_2 \rightarrow 0$ , а значит, будет происходить его (фрактальное) сжатие. Последовательность восприятий внешнего ли, внутреннего ли контакта образует опыт – знание о предыдущих событиях. Иными словами, внутренний опыт есть проективный предел внешнего.

19. *Синестезия*. Синестезии – «это динамические процессы иерархического слияния и перетекания между модально-специфическими паттернами» (т.е. перцептами. – *Ф.М.*), «досимволические матрицы сенсорных размерностей» (т.е. степеней свободы. – *Ф.М.*). Бывают сложными образными и простыми дискретными [6, гл.7, с. 235, 239–240, 244]. В нашей схеме синестезиям отвечает рефлексивная схема (3), где модальностям соответствуют множители в правой части, а их содержаниям – члены голограммы (4). Приведённые выше в разделе о свете доводы в пользу формальной модели восприятия качеств делают такие понятия, как «цветной слух», формально содержательными. Сложным синестезиям соответствует образный полюс, дискретным – словесный. Синестезии – правополушарные явления [6, с. 241], формальным аналогом которых мы считаем  $Z_2$ .

«Понятийное мышление влечёт множество уровней межмодальной трансляции. Язык – это синестезия, причём многократная» [6, с. 233, 253, 300, 371]. Тогда «мысль как эмерджентная синестезия» [6, с. 235] можно понимать как траекторию характеристических функций шаров/слов/предложений в рефлексивном представлении (3), так же как и в ЕЯ (см. гл. 9, «Синтаксическая парадигма»). Синестезия поэтому – основа системной феноменологии, системного видения мира как множественности формально несводимых друг к другу языков описания систем [59–63].

Связь между образным, правополушарным и вербальным, левополушарным мышлением [6, с. 282–283], в нашем понимании – синестезий, обеспечивается инволюцией в  $Q_2$ , то есть соответствиями Галуа.

20. *Надличностный опыт.* Поскольку инверсия связывает внутренний и внешний миры человека, существование трансперсонального, надличностного сознания выглядит как имеющее содержание.

21. *Познание.* Выше мы описали отдельные свойства сознания, используя лишь структуры его самого, точнее — базовые свойства его модели, нульмерного чувствилища  $Q_2$ ; рефлексивности, *метрики-как-функции-восприятия*, инверсии или инволюции, связывающие его с внешним миром такой же структуры. Тогда вывод о том, что

«первичной матрицей для всего познания служат структуры самого восприятия ... все научные понятия представляют собой формализации принципов, уже присутствующих в восприятии» [6, с. 277, гл.13],

объясняет феномен ускользающей предметности: «Нам всё дано через сознание» [2, с. 13, 19].

22. *Смысл* — общее понятие для сознания и языка. Определяется как «внеположная сущность феномена, оправдывающая его существование, связывая его с более широким планом реальности. Определяя место феномена в некоторой целостности, смысл превращает его осуществление в необходимость, соответствующую онтологическому порядку вещей. ... В лингвистической семантике смысл рассматривается как особая сущность, отличная от выражающего этот смысл текста, но определяющая допустимые референции текста — его способность указывать на те или иные реалии» [64]. За смысл признаётся ответственным правополушарное мышление, способное оперировать образами, контекстами, улавливать суть, метафоры [6, с. 141]. Полезно сравнить опыт математического моделирования сложных систем с этим понятием. Итогом абстрактного моделирования, игнорирующего связь с внешней средой, всегда является «короткое», но точное решение, не допускающее никаких вариаций, то есть продолжения в будущее. Практики такие решения оценивали как *бессмысленные*. Имея в виду степени свободы, предоставляемые числовой асимметрией, смысл — слов  $\dot{a}$ , предложения, решения — можно интерпретировать как поток сознания через части речи, как потенцию решения/мысли/текста не только соответствовать реальному положению дел, но и быть продолженным за наличную ситуацию, к цели, в будущее.

23. *Шестое чувство.* Рассмотренные выше соответствия в п. 5, 7, 9, 12, 16, 17, 18, 21, 22 отвечают осознанию как непосредственному резонансу с течением мира [6, с. 335]. Они могут служить объяснением «оргонному чувству» в дополнение к способностям видеть, слышать, осязать и т.п., которое присутствует у здоровых людей. Это шестое чувство — чувство непосредственного внутреннего ощущения течения жизни — частично

утрачивается при развитии символической способности и потому отесняется в область духовных традиций и психических патологий [6, с. 335].

24. *Присутствие—открытость* «является базовой структурой чувствительности, с необходимостью, общей для всех подвижных организмов. Но это не метафора ... Это фундаментальная организация самого восприятия» [6, с. 337]. Здесь, помимо описанного в п. 9 восприятия, присутствуют свойства света. Конвергентное, определяемое самим субъектом (произвольность центра в  $p$ -адике, дейксис в ЕЯ), и дивергентное, определяемое двойственностью момента теперь — инволюцией внутреннего состояния, например, Я, во внешний мир. Сознание «о мире и в мире» сопрягается инволюцией с сознанием «вместе с миром» [6, с. 339].

Стоит отметить, что в математике эта базовая структура отсутствует, но присутствует в физике под видом «(присутствия) наблюдателя». Она явно видна при преобразовании координат и различного рода морфизмах. Например, переход от декартовых прямоугольных координат к полярным с тем же началом в математике аналогичен смене модальностей в рефлексивной схеме. Напротив, переход от одной координатной системы к другой, движущейся относительно наблюдателя и находящейся вне его, возможен только благодаря существованию пары восприятия «присутствие—открытость». Члены этой пары находятся по разные стороны смысла и соответствуют паре «действительность—возможность», то есть двум различным метрикам, неотличимым на вещественной оси. Поэтому если в физике она видна в полной мере, то при формализации подобных координатных преобразований эта структура исчезает.

## Литература к главе 12

1. Лекторский В.А. Сознание / НФЭ. Т. 3. М., 2010.
2. Иванов А.В. Мир сознания. Барнаул: АГИИК, 2000.
3. Heller M. Ultimate Explanations of the Universe. Springer, 2009.
4. Прист С. Теории сознания. М.: Идея-Пресс, ДИК, 2000.
5. Шрёдингер Э. Разум и материя. М.—Ижевск: РХД, 2000.
6. Хант Г. О природе сознания. М.: АСТ, 2004.
7. Райл Г. Понятие сознания. М.: Идея-Пресс, 2000.
8. Chalmers D.J. Philosophy of Mind. Classical and Contemporary Readings. OUP, 2002.
9. Brooks R. The Relation Between Matter and Life // Nature. 2001, v. 409 (6818), p. 409.
10. Chalmers D.J. The Character of Consciousness. Oxford U.P., 2010.
11. Панов В.Г. Мифы. Эмоции. Разум. М.: Высшая школа, 1992.
12. Chalmers D. Facing Up to the Problem of Consciousness // J. of Consciousness Studies. 1995, 2(3), p. 200–219.
13. Васильев В.В. Трудная проблема сознания. М., 2008.

14. *Брушлинский А.В.* Субъект: Мышление, учение, воображение. М.—Воронеж: МО-ДЭК, 2003. Ч. III. Мышление и прогнозирование (первая публикация в 1979 г.).
15. *Кэрролл Л.* История с узелками. М.: Мир, 1973, с. 368—372.
16. *Кейслер Г., Чен Ч.Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1975.
17. *Myhill J.* A System which can define its own truth // *Fund. Math.* 1950, XXXVII, p. 190—192.
18. *Globus G.* Towards a noncomputational cognitive neuroscience // *J. of Cognitive Neuroscience.* 1992, no.4, p. 319—330.
19. *Masterpaqua F., Perna P.A. (eds.).* The Psychological Meaning of Chaos: Translating Theory to Practice / Amer. Psychol. Association, 1997.
20. *Butz M.R.* Chaos and Complexity: Implications to Psychological Theory and Practice. Taylor & Francis, 1997.
21. *Gentry T.C.* Fractal Geometry and Human Understanding / In Abraham F.D., Gilden A.R. (eds.) *Chaos Theory in Psychology.* Greenwood P.C., 1999.
22. *Jackson W.J.* Heaven Fractal Net. Indiana U.P., 2004.
23. *Арутюнова Н.Д.* Предложение и его смысл. М.: ЛКИ, 2007.
24. *Хренников Ф.Ю.* Моделирование процессов мышления в  $p$ -адических системах координат. М.: Физматлит, 2004.
25. *Conte E., Khrennikov A.Yu. e.a.* Mental States Follow Quantum Mechanics During Perception and Cognition of Ambiguous Figures // *Open Systems & Informational Dynamics.* 2009, v. 16, no.1, p. 1—17; *Khrennikov A.Yu.* The Brain as Quantum-Like Machine, Operating on Subcognitive and Cognitive Time Scales // arXiv 0707.1129v1 [physics.gen-ph], 2007; *Khrennikov A.Yu.* Modelling Psychological Behaviour on the Basis of Ultrametric Mental Spaces: Encoding categories with Balls // *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications.* 2010, 2(2), p. 1—20, Anashin V., *Khrennikov A.* *Applied Algebraic Dynamics.* Walter de Gruyter. 2009, Ch. 14, 15; *Khrennikov A.Yu.* Ubiquitous Quantum Structure. Springer, 2010, Ch. 5—7.
26. *Менский М.Б.* Концепция сознания в контексте квантовой механики // *УФН.* Т. 175, №9, 2005, с. 413—435.
27. *Scott A.* Physicalism, Chaos, and Emergence / In *Tuszinski J.A. (ed.).* The Emerging Physics of Consciousness. Springer, 2006, p. 171—191.
28. *Lemin A.* On Ultrametrization of General Metric Spaces // *Proc. of AMS,* 2004, v. 131, no.3, p. 979—989.
29. *Khromov A.G.* Logical Self-Reference as a Model for Conscious Experience // *J. of Math. Psychology.* 2001, 45, p. 720—731.
30. *Kello C.T. et.al.* Scaling Laws in Cognitive Sciences // *Trends in Cognitive Sciences.* 2010, v. 14, iss.5, p. 223—232.
31. *Абрамова Н.Т.* Несловесное мышление. М.: ИФРАН, 2002.
32. *Брагина Н.Н., Доброхотова Т.А.* Функциональные асимметрии человека. М.: Медицина, 1988.
33. *Разумникова О.М.* Мышление и функциональная асимметрия мозга. Новосибирск: СО РАН, 2004.

34. *Разумникова О.М.* Отражение личностных свойств в функциональной асимметрии мозга. Новосибирск: СО РАН, 2005.
35. *Глезер В.Д.* Зрение и мышление. СПб., 1993.
36. *Лекторский В.А.* Самосознание / НФЭ. М., 2010, т. 3.
37. *Лекторский В.А. Я.* / НФЭ. Т.4.
38. *Лекторский В.А.* Восприятие // НФЭ. Т. 1, М., 2010.
39. *Мещеряков Б.Г., Зинченко В.П.* Внимание / Большой психологический словарь. М., 2002.
40. *Augenstein V.* Complexity, Universal Libraries, DNA Sequences // *Chaos Solitons and Fractals*. 1999, v. 10, no.6, p. 953–973.
41. *Селиванова В.И.* Этюды об экстраполяции. М., 1992.
42. *Апресян Р.Г.* Совесть // НФЭ. Т. 3, М., 2010.
43. *Matte Blanco I.* The Unconscious as Infinite Sets: An Essay on Bi-logic London. 1998, первая публикация 1975 г.
44. *Murtagh F.* Ultrametric Model of Mind I: Review // arXiv: 1201.2711v3 [cs.AI]. 2012.
45. *Lauro-Grotto R.* The Unconscious as an Ultrametric Set // *American Imago*. 2007, 64(4), p. 535–543.
46. *Mirimanoff D.* // *L'Ens Math*. 1917, v. 19, p. 37–52.
47. *Barnsley M.F.* Superfractals. CUP, 2006.
48. *Kuncak V.* Modular Data Structures Verification. PhD Thesis. МТИ, 2007.
49. *Robert A.* A Course in p-Adic Analysis. Springer, 2000.
50. *Севостьянов Д.А.* Инверсивное тело. Новосибирск: РИФ+, 2009.
51. *Вавилов С.И.* Глаз и Солнце. М.: Наука, 1976.
52. *Шишков А.М.* Метафизика света / НФЭ. 2010, т. 2, М., с. 546.
53. *Dube S.* Undecidable Problems in Fractal Geometry // *Complex Systems*. 1993, 7, p. 428–432.
54. *Гроссетест Р.* О свете или О начале форм // *Вопросы философии*. 1995, №6, с. 125–136.
55. *Шишков А.М.* *Вопросы философии*. 1995, №6, с. 124.
56. *Успенский Б.А.* Семиотика искусства. М.: Языки славянской культуры, 2005.
57. *Успенский Б.А.* Крест и круг. М.: Языки славянских культур, 2006.
58. *Лекторский В.А.* Опыт / НФЭ, т.3, с. 158.
59. *Rosen R.* Hierarchical organization of automata theoretic models of biological systems / In L.L., Whyte A.G. Wilson, Wilson D. Hierarchical structures. 1969, p. 159–198, N.Y., Elsevier.
60. *Pattee H.H.* Hierarchy Theory. The Challenge of Complex Systems. Brazilier, 1973.
61. *Rosen R.* Complexity and System Description / In *Systems, Approaches, Applications*. Harnet W.H. (ed.), Reidel D., 1977.
62. *Мусеев Н.Н.* Логика динамических систем и развитие природы и общества // *Вопросы философии*. 1999, №4, с. 3–10.
63. *Рябинин И.А.* Надёжность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Политехника, 2000.
64. *Шрейдер Ю.А.* Смысл / НФЭ. Т. 3, с. 576–577.
65. *Blair D.* Inversion Theory and Conformal Mappings. AMS, 2000.

## Глава 13

### Математическая физика

*Введение.* В своих основных положениях мы далеко отошли от атомизма математической физики, приняв отрицание аксиомы фундаментирования (регулярности)  $FA$  и континуум гипотезы  $CH$  (и «негативные аксиомы» вообще), представителем которых является теоретическая механика – гладкое движение неделимых материальных точек. Однако у физики есть и другой полюс: микромир, мир мельчайших частиц материи, неопределимое/хаотическое движение делимых сущностей. На сегодняшний день вопрос существования элементарных кирпичиков мироздания, далее неразложимых, во многом остаётся открытым [1]. Мы, следуя интерпретации  $p$ -адических чисел С.Улама, будем считать делимость актуально бесконечной, а  $p$ -адические числа, множества и пространства – первичными по отношению к вещественным. (**Замечание.** При желании эту смену точки зрения можно обосновать математически при помощи теорем об ускорении доказательств (*proof speeding theorem* – англ.): «Можно так изменить аксиомы, что самые трудные теоремы станут простыми и доказательства – короткими». Неосознанно этой теоремой пользуются все, кроме самих математиков. У инженеров она выглядит как поиск наиболее эффективного и короткого пути решения задачи, когда приходится задачу рассматривать с различных точек зрения, так чтобы решение стало простым и очевидным. Иными словами, мы меняем аксиоматику и перемещаемся в нульмерный мир  $p$ -адических чисел).

Теоретическая механика в идейном плане наиболее удалена от нашей схемы, но в математической физике есть темы, помимо общеизвестных – корпускулярно-волнового и электромагнитного дуализма, где явно ощущается присутствие двойственности. Именно с этой точки зрения мы будем рассматривать физику – как формализмы над двумя числовыми системами числовой асимметрии  $U = R^{\#} \times Z_2$ . В последние годы считающий аппарат математической физики сильно рас-

ширился логическими и информационно-теоретическими работами, которые приносят новые идеи и возможности, согласованные с таким шагом. В частности, намечается вхождение общего естественнонаучного принципа двойственности в аппарат физики.

С точки зрения общей теории систем, существует только одна замкнутая система — вся Вселенная. В физике этому положению соответствуют экстремальные вопросы в виде Теории Всего, роли наблюдателя и его связи с объективным миром. Именно в этом универсуме мы будем искать связь понятий, оставляя в стороне технические вопросы лабораторного масштаба. С этой позицией связан вопрос о самоорганизации, то есть *как это делает сама Природа, включающая человека с его возможностями наблюдения*, то есть в контексте неаксиоматизируемости. Системность или целостность Природы является основным регулятивным принципом физики, подлежащим всем теориям, интерпретациям, мотивациям [2].

1. *Принцип инвариантности*. Можно видеть, что бескоординатный принцип переноса или двойственности для решёток аналогичен принципу инвариантности законов физики в технике координатных систем. В этом случае смысл имеют только «расстояния между точками и интервалы времени» [3], которые обладают у нас различным генезисом. Их связь в нашей схеме отображается гиперболическим соотношением между метриками  $R$  и  $Z_2$ . Принцип переноса был сформулирован в виде постулата об инвариантности основных законов физики при смене числовых полей в [4].

2. *Мегамир и микромир* образуют два полюса физики, аналогичные полюсам естественных наук. В мегамире объекты образуются в основном конвергенцией, слиянием в микромире — делением, дивергенцией. То есть налицо функциональная асимметрия природы, проявляющаяся как её фрактальная геометрия и имеющая две оси «динамического базиса»: конвергенцию, сжатие, негэнтропию и дивергенцию, расширение, энтропию. Мегамир представлен космологией и теорией относительности Эйнштейна, микромир — квантовой механикой и ядерной физикой. Совместимость этих двух главных теорий как двух оппонентных полюсов — связности и делимости, в парадигме теоретической физики есть вариант апории «Ахиллес и черепаха» в двумерной семантике нашей схемы.

3. Степенные законы, проанализированные нами в главе 7, инвариантны относительно инверсии, присутствуют в физике на всех масштабах. Один из их вариантов: «проблема больших чисел», необъяснимые совпадения некоторых безразмерных численных отношений [5]. Их диапазон простирается от космологических моделей, таких как  $G \cdot \rho_0 \cdot T^2 \sim 1$ , где  $G$ ,  $\rho_0$ ,  $T$  — соответственно, гравитационная постоянная, средняя плотность материи и время существования Вселенной [2], до квантовомеханического принципа неопределённости Гейзенберга.



В нашей схеме степенные законы служат формальным поводом введения  $p$ -адических чисел, а связанные с ними меры Хаара представляют собой численное выражение пар *Единое—Многое* в виде *Макро—Микро*.

Эта пара была проинтерпретирована Ю.И.Маниным в понятиях колмогоровской сложности как скрытой переменной физических теорий. В этих терминах один полюс науки имеет малую сложность — законы физики, генотип, мутация. Сложность задач второго бесконечно велика — начальные и граничные условия, фенотип, популяции [6]. Колмогоровская сложность во всех своих вариантах и смежных вопросах определяется двоичными строками, то есть на бинарном дереве [7]. Поэтому «пространство» колмогоровской сложности объектов можно считать *alter ego*, ультраметризацией материального мира физики. В нашей схеме это  $Z_2$  в числовой асимметрии или нульмерное  $Q_2$ . Тем самым мы получаем возможность связать два полюса одного целого.

4. *Математическая физика* представляет собой физическую модель/интерпретацию математических теорий исключительно над  $R$  вне зависимости от топологии объектов [8]. (**Замечание.** Известно, что понятие «вещественного числа» является весьма проблематичным [Chaitin G. How Real are Real Numbers// arXiv:math. NO/041418, v.3, 2004] и ведёт к многочисленным проблемам в моделировании [McCauley J.L. Chaos and Fractals. An Algorithmic Approach. CUP, 1995, Ch.11; Guang-Liang Li, Victor O.K. Inconsistencies in Current theories of Real Numbers, Measure, Probability and Stochastic Processes // arXiv:math. GM/0606635, v. 1, 2006]: множество единичной меры невозможно зафиксировать измерениями, воспроизвести вычислениями, обнаружить в эксперименте, связную прямую нельзя образовать из точек. В целом, все связанные с ним сложности уходят корнями в теорему Гёделя о неполноте, то есть имеют фундаментальный для математических методов характер).

Общей её логической базой являются *определимость* во всех её видах и принцип исчерпания возможностей. Феноменологией служит атомизм (т.н. *cookie-cutter paradigm* — англ.), когда считается, что объект ограничен его видимой границей. Основой такого взгляда служит канторовская теория множеств — собрание хорошо различимых объектов. Прародительницей теорий этого типа является астрономия, то есть теоретическая механика. В силу *ГЛГ-аргумента* её формализм остаётся пока общим для всех теорий физики (и их экстраполяций на нефизические проблемы) со стандартной математикой. Одним из следствий такого положения дел является «лабораторный масштаб» физико-математических теорий, то есть необходимость введения начальных и граничных условий и эффективности вычислений. Иными словами, сведя, например, все космологические теории нумерацией Гёделя в арифметике натуральных чисел, мы обязаны признать существование начальной точки

$n = 0$ , то есть нуль стандартного натурального ряда. Отсюда – необходимость явлений, аналогичных Большому Взрыву. Тогда вторая сингулярность – конец Вселенной – соответствует точке  $N = \infty$ . Поскольку в нашей схеме актуальная бесконечность может быть только нефундированной, то эта точка должна помещаться в сознании человека, так как счётная бесконечность потенциальна. Отсюда – множественность космологических теорий как отражение человеческой субъективности.

Ввиду этого нам придётся приложить некоторые усилия, чтобы выбраться из проблем, порождаемых механикой деформируемого твёрдого тела – единственной интерпретации/модели уравнений математической физики.

5. *Двойственность, неразрешимость, неполнота.* Декларируемой парадигме детерминизма, точности, вычислимости и фундаментальности физики по отношению к другим наукам противостоит реальная неразрешимость и неполнота основных её математических теорий, которая проявилась ещё в спорах о принципе дополненности Н.Бора [9].

Все теории математической физики – аксиоматические, поэтому для всех них верна теорема Гёделя о неполноте. Наблюдаемое развитие физики есть не что иное, как постоянное гёделево расширение её формальной системы, которое, однако, не выводит теорию на уровень полноты и непротиворечивости. Недавно на это было указано С.Хокингом:

« ... физические теории автореферентны, как в теореме Гёделя ... Теории, которые мы к настоящему времени имеем, являются одновременно неполными и противоречивыми» [Hawking S.W. Godel and the End of Physics. Dirac Centennial Celebration. Cambridge UK, 2002. <http://www.damtp.cam.ac.uk./strtst/dirac/hawking>].

История вопроса изложена С.Яки [10], современный оптимизм – в [11]. Математические и философские следствия рассмотрены в [12]. Широкое общенаучное обсуждение второй теоремы Гёделя в связи с языком, биологией, квантовой механикой, проблемой *субъект–объект* в познании дано А.Н.Паршиным [13].

Дело, однако, не в этой теореме, которая, как говорил сам К.Гёдель, построена по принципу парадокса *Лжеца*. Она не изолирована от всего корпуса вычислений и доказательств [14]: используя *отрицание* как математическую операцию, она влечёт многочисленные следствия. В самой математике, как уже отмечалось, наличествует сильная чувствительность её результатов от «флуктуаций» аксиоматической системы, порождаемых *отрицанием* какой-либо её аксиомы. Каноническим примером является аксиома о параллельных Евклида и геометрия Лоба-

чевского. Типичность подобных результатов о независимости и неразрешимости, тесно связанных с этой теоремой Гёделя (см. гл. «Двойственность в основах»), итожатся известным слоганом: «Неразрешимость (*т.е. двойственность. — Ф.М.*) повсюду» [15]. В нелинейной динамике неразрешимость проявляется как невозможность формального различения детерминистического и хаотического поведения динамических систем по внешнему виду определяющих его уравнений (проблема *paper-and-pencil vs. computation*: «Гладко было на бумаге, но забыли про овраги»). Отсюда — закономерность появления работ, обсуждающих пары оппозиций в общезначимом контексте [16]. Формально же, двойственность как общезначимый и общенаучный феномен пока почти полностью остаётся в поле математики — как классические результаты локального характера, так и новые её варианты, более масштабные [17] и имеющие общенаучный [18] смысл. Выход этого понятия на общенаучный уровень указан Паршиным на основе обобщения двойственности Фурье-преобразования до общематематической конструкции [19].

Примечателен вывод, предполагающий принцип самодвойственности Вселенной, способной к самоописанию, самообъяснению, который имеет общенаучный смысл, выходящий за пределы чисто физической науки:

«Теории физики останутся неполными, пока обращение действий (*аргументов и функций. — Ф.М.*) не станет возможным. ... Законченные теории физики должны допускать поляризацию на две половины, каждая из которых является представлением другой. Деление должно быть произвольным — должно быть возможным обращение интерпретаций» (*Majid S., в Heller M.* [17]).

Физическая неординарность вывода в том, что он, будучи явно развитием принципа дополнительности Бора в направлении создания целостной картины мира, также очень близок к выводу Дж. фон Неймана о структуре сложных систем, самовоспроизводящихся автоматов: система должна иметь два дополнительных и взаимносовместимых режима функционирования — динамический, числовой и символический, лингвистический. Только в этом случае возможны явления развития, самоописания (самообъяснения), адаптации (см. обзор и развитие этого вопроса в [20]). Он также почти дословно повторяет принцип неразличимости операторов и операндов в теоретической информатике [21].

Иными словами, налицо принципиальная разница между декларируемой парадигмой точности физики и свойствами её объектов, которые обнаруживают математические модели её явлений. Она заключа-

ется в неустранимом индетерминизме, неединственности решений соответствующих уравнений. Физически неразрешимость проявляется как наличие движения и делимости/гетерогенности/сложности объектов, неэлементарности элементарных частиц, как повсеместная случайность/флуктуации. Это, естественно, приводит к неполной определенности, информационной несжимаемости, которые порождают множественность вариантов теорий, приближений, числовых поправок и т.п. Эти корректировки неявно представляют в формализмах физической теории нематематический чувственный опыт, что обычно оправдывается экспериментальным характером науки. Эксперимент, безусловно, важен и нужен как проверка правильности модели, но здесь он также отражает и компенсирует теоретический изъян метода.

Типичность неразрешимости, общий вид которой имеет вид парадокса Лжеца, или истинности отрицания закона исключённого третьего (*LEM* – англ.)  $\models P \wedge \neg P$ , мы будем трактовать в позитивном смысле: как семантическую истинность двойственности, дополнительности явлений и, как следствие, необходимость рассмотрения основных положений над *двумя числовыми системами сразу*, то есть над числовой асимметрией и теми оппозициями, которые с ней связаны. Иными словами, принцип дополнительности Бора оснащается самодвойственной числовой базой.

6. *Пара возможное–действительное*, которая является отражением времени, полностью отсутствует в математике. *Возможное* – это *действительное* в будущем времени [22]. Математический универсум – множество его теорий, алгоритмов, уравнений, формул и т.д. – является нульмерным пространством, не имеющим линейных размеров и величин. Его объекты не разделены в пространстве и времени. Поэтому, как известно, в математике всё возможное действительно, а времени нет (отсюда и апории Зенона). Тем более нет будущего времени: рассматриваются лишь ставшие структуры и объекты, которые уже можно распознать, измерить, обозначить и затем включить в теории, подставить в уравнения, формулы и т.п. Универсум физики – пространство трёх и более измерений. Поэтому в физике события оказываются разделёнными во времени и/или пространстве, и эта оппозиция имеет место. Пример – таблица умножения. В математике – это константный образ, но уже в компьютерах сложение или произведение двух чисел является физическим процессом, и результат оказывается растянутым во времени. Поэтому требуется поразрядная синхронизация операций, в противном случае результат приобретает неузнаваемый вид. Другой пример: преобразование координат. Если, например, ортогональная и полярная системы имеют общее начало, то переход от одной к другой можно счи-

тать двумя разными числовыми характеристиками данного объекта в данном действительном. Но если две координатные системы разделены в пространстве и/или времени, то одна из них является *возможностью* для числовых величин объекта, *действительных* в другой, считающейся неподвижной. Стандартная ситуация — решение уравнений: уравнение перед глазами исследователя есть *действительное*, его решение — число, функция — *возможное*. Ряд можно продолжить изо- и гомоморфизмами, установлением сопряжённости динамических систем. Кроме того, например, принятое в физике вычисление средних величин, которые не всегда имеют референта в физическом мире, но всегда — в мире математики, переводит процесс/результат усреднения в категорию *возможного* в физике. Пример: использование равномерной плотности распределения материи во Вселенной при видимой её неоднородности (фрактальности) [23]. На эту разницу как на различие идеальных математических координат и систем отсчёта физики впервые обратил внимание Л.Бриллюэн [3, гл.IV]. Платонизм математики в том и состоит, что все эти и подобные структуры существуют вневременно в мире идей, а не в материальном мире физики. Математика есть нульмерное, невидимое образование, мир физики — зримое, материальное.

7. *Дейксис*. Соответственно, отсутствует в теориях и *формализация* понятия наблюдателя и его координат/позиции, то есть дейксис, «имение в виду» («подразумевание» — *Прим. ред.*), говоря языком лингвистов. Дейксис определяется парами слов: ЗДЕСЬ—ТАМ, СЕЙЧАС—ТОГДА, ЭТОТ—ТОТ, Я—ТЫ. Он обладает универсальным значением и сводится к фактическим физическим различиям между предметами в пространстве или событиями во времени [24]. Дейксис ориентирован на внеязыковую, то есть нематематическую, действительность, отражаемую в содержании высказывания (теории). Он реализуется «в вещественном поле указания», но может быть ориентирован на внутреннюю организацию текста — «в контекстуальном поле указания» (т.е. в самой математике) [25, с. 126]. Как видно, дейксис неотделим от математического описания как внешнего физического, так внутреннего математического миров. Математическая физика является редуктом, упрощённым подмножеством естественного языка, поэтому в своём стремлении к полноте и адекватности описания мира она должна наследовать и понятие дейксиса. Его отсутствие имеет следствием отсутствие понятия момента теперь — сопряжённости действительного с возможным. Более полное рассмотрение этого вопроса, включающее контекст и смысл, представлено в [26]. (**Замечание.** В прикладной математике нефизических дисциплин эта пара незримо определяет адекватность большинства её методов: замена *действительного* *возможным* ощущается особенно остро (часто как подлог!) из-за большой

материальной, финансовой и т.п. ответственности решений. Например, в математике (и в физике) большую роль играет аксиома выбора – вневременная и внепространственная возможность извлечения нужного элемента/аргумента из запаса имеющихся множеств, например, в теории (разнообразных) предельных переходов, вычислений, приближений и прогнозирования. Такие элементы всегда существуют в математической действительности. Как, однако, было замечено, живые организмы, например, никогда не имеют достаточного запаса времени для выполнения этой операции, и нужные предельные значения аргументов для моделей биологии остаются в возможности. То же положение часто складывается и в сложных системах. Пример – задачи на экстремум из теории оптимального управления. Экстремум функции легко вычислить по правилам дифференциального исчисления, приравняв нулю производную. Но если появляются ограничения на ресурсы, то есть на независимые переменные, то задача, как известно, качественно меняется и её решение требует совершенно других методов. Ограничения на ресурсы – это и есть *отказ* от (или ограничение) аксиомы выбора. Поэтому и говорят, что «чистая математика делает то, что можно, так, как нужно (т.е. по правилам *действительного в мире идей Платона*), а прикладная – то, что нужно, так, как можно (т.е. согласно реальному *действию*)».

8. *Наблюдаемость*. Пара *действительное–возможное* соответствует базовой структуре человеческого восприятия – *присутствию–открытости, здесь–там* [27, с. 336–337], что должно определять структуру наблюдаемости и интерпретацию экспериментальных данных в физике. *Действительное* – то, что переживается здесь и может быть непосредственно измерено, *возможное* – то, что воспринимается там и измерено может быть косвенно. За неимением физико-математического аналога обратимся к лингвистическому толкованию этой пары, впрочем, вполне физическому:

«Действительное и возможное – это местоименные понятия, которые относятся как местоимения “Я” и “Он”: каждый “Он” – это “Я” для себя, каждое “Я” – это “Он” для другого. ... Возможности – это реальное, каким оно видится с позиции внешнего наблюдателя, принадлежащего другому миру. ... Все возможные миры также действительны, поскольку *действительность и возможность – это два дополнительных свойства одного и того же мира*» [Эпштейн М. Философия возможного. СПб.: Алетейя, 2001, с. 31 (курс. – Ф.М.)].

Иными словами, оппозиция *действительное–возможное* есть форма дейксиса в картине мира – как лингвистической, так и физико-математической. Поэтому все экстраполяции математической физики за

свои пределы, например, в виде принципа дополнительности Н.Бора, должны включать эти дополнительные свойства мира [28].

9. *Пара локальное—глобальное* [29] является продолжением пар *действительное—возможное* и *присутствие—открытость*, *большое—малое* и неразрывно связана с математической техникой физики. Уравнения математической физики всегда пишутся для физически бесконечно малого объёма (часто к тому же усреднённого), то есть локальны (тем самым неосознанно обеспечивается синхронизация арифметических операций, формирующих уравнение). Тогда задача восстановить свойства мира как целого есть вариант системной проблемы *части и целого*. Она выводит на проблему согласования детерминизма общей теории относительности с вероятностным формализмом квантовой механики.

Для её решения был выдвинут ряд идей о существовании «предгеометрии» — области за пределами планковских масштабов, состоящей, по разным мнениям, из бесформенных точек, исчисления высказываний, элементарных измерительных актов, области, имеющей некоммутативную геометрию. Это «нечто неопределённое, выражающее возможность и действительность, философию и физику, логику и математику» [29, р. 157]. Подобные попытки свидетельствуют о том, что в «очень малом» представления о точках и моментах времени утрачивают свой обычный смысл и должны быть заменены некими другими математическими структурами. Общим местом этих теорий является принимаемая ими делимость пространства и неделимость времени, что ведёт к рассмотренным нами в первой части известным парадоксам Зенона [29, р. 148—152], что препятствует их логическому замыканию в единую теорию.

10. *Вселенная Дж.А.Уилера*. Уилер положил в основу строения Вселенной тезис *по continuum* (никакого континуума) [30]. Поэтому и согласно вышеприведённому, мы выделим автореферентную теоретико-информационную (т.е. нульмерную или квантованную по сути) космологию Дж.А.Уилера — “*It from Bi*”, в которой существование Вселенной тесно связано с существованием наблюдателя. Она имеет ряд предшественников, начиная с Парменида, и ведёт к известному антропному принципу. Её суть в том, что законы человеческого мышления/сознания (*физически ненаблюдаемых сущностей*. — Ф.М.) с необходимостью порождают пространственные, временные, причинные и прочие отношения внешнего мира. Предгеометрия Уилера состоит из двузначной логики высказываний, поскольку физика появляется как истинностные значения да—нет длинной цепи логических умозаключений, способных к тому же к автореференции. Пространство этой области состоит из петель без размеров; размеры вообще исключены из неё. В одной из своих статей Уилер сравнил Вселенную с самоорганизующейся квантовой сетью, в которой

материя проходит цикл рассеяния с мегауровня до микроуровня с последующей обратной конденсацией в физические объекты, реанимировав мысль И. Ньютона о природе как постоянном круговращателе, преобразующим тонкие, летучие тела в плотные и обратно [31].

Эта теоретико-информационная космогония Уилера пока не нашла сколько-нибудь полной реализации [29, р. 161] и воспринимается физиками как необходимость «найти геометрию предгеометрии» [32]. Можно, однако, видеть, в оптике нашей схемы, где

$$Q_2 = \prod_{i=-\infty}^{i=\infty} 2^i \cdot Q_2 \quad \text{и} \quad Z_2 = \prod_{i=0}^{i=\infty} 2^i \cdot Z_2,$$

что неопределённые элементы (т.е. неразрешимые (под)множества), петли (проективные прямые всех масштабов), сетевая структура, элементы ощущений (см. гл. 7) и т.п. теории разных авторов [32] включаются в эту космологию хотя бы на уровне первоначальных понятий. Рассуждения Ю.И. Манина о длине физических теорий от начальных понятий до формулировки стандартной модели в терминах колмогоровской сложности как скрытой компоненты физического мира [6, Appendix 2] так же поддерживают эту точку зрения.

А.Н. Паршин дал интерпретацию этой компоненты в терминах 2-адических чисел, указал на необходимость связи  $R$  и  $Z_2$  в дополнительную математическую структуру и очертил физические свойства этого пространства:

«Соображения делимости, используемые Лейбницем, естественным образом приводят к рассмотрению  $p$ -адических метрик на множестве рациональных чисел. Таким образом, умопостигаемое пространство может быть изучено, если мы будем вводить в нём  $p$ -адические координаты и рассматривать его как дерево  $\Delta$ . Получающееся на этом пути дерево  $\Delta$  имеет замечательные свойства. Оно является однородным пространством группы матриц второго порядка с  $p$ -адическими коэффициентами. Иначе говоря, каждой такой матрице отвечает преобразование дерева в себя, и любую точку дерева можно перевести в любую другую точку с помощью такого преобразования. В нашем случае в качестве  $p$  мы должны взять простое число 2. ... Наше дерево есть 2-адический аналог плоскости Лобачевского, и, с точки зрения геометрии, оно является не чем-то случайным, а фундаментальным объектом классической математики. Представление об этом дереве как об однородном пространстве с определённой геометрией восходит к Эрлангенской программе Феликса Клейна. Программа Клейна относилась к группам непрерывного типа (таким как группы матриц с вещественными коэффициентами), но в более широком плане сюда включаются и  $p$ -адические группы. Такое расширение



этой программы было произведено уже в наше время Жаком Титсом, где-то начиная с 1950-х годов, и затем в многочисленных работах происходило её развитие. Между этими объектами существует очень глубокая и нетривиальная аналогия. Вещи, которые мы умеем делать для обычного вещественного пространства, могут быть перенесены и на  $p$ -адический случай. ... Таким образом, можно попытаться перенести на  $p$ -адический случай значительную часть математической физики, известной в обычном евклидовом, или декартовом пространстве. Иными словами, в этом пространстве, куда мы можем поместить нашу формальную систему, у нас имеются богатые возможности как для “механического” движения, так и для “волновых” процессов. Это некий аналог обычной физики. Такие конструкции представляют большой интерес, потому что все мы знаем из обычного языка, что имеются огромные аналогии между физическим миром, движением предметов и движением мысли. ... И последнее замечание, которое в этом месте нужно сделать: акт познания, в частности математического познания, должен использовать бесконечность, и не просто бесконечность дискретного, счѐтного типа, а именно континуум. ... В более широком, философском плане можно сказать, что окружающий нас мир состоит, скажем, из вещей и отношений, и если вещи нуждаются для своего изучения в *перечислении*, то есть в описании натуральными (вещественными) числами с обычной архимедовой метрикой, то отношения, конечно, скорее задаются логическими схемами, и для них более подходят, как говорилось выше,  $p$ -адические числа. ... Если мы примем, что эти две стороны реальности описываются, соответственно, вещественными и  $p$ -адическими числами, то их взаимодействие ... должно проявляться в объединении двух видов метрик в единое целое. ... Итак, каждое дерево, имеющееся в природе, растѐт одновременно и в физическом (декартовом) пространстве, и в универсальном мировом дереве. ... Исходно они *не зависят* друг от друга (*т.е. представляют собой две различные степени свободы, которые мы назвали экстенциональной и интенциональной.* — Ф.М.). Но в некоторых случаях первое может быть вложено во второе. Такое вложение — это дополнительная математическая структура, непосредственно не проявляющаяся, когда мы говорим о  $p$ -адических и архимедовых метриках» [Паршин А.Н. Размышления над теоремой Гёделя / Путь, с. 67–101; с. 83–85, прим. 17, с. 97–98, 100].

Иными словами, нульмерная Вселенная Уилера, оснащённая 2-адическими числами, вполне содержательна физически. Будучи ультраметрическим пространством, она, согласно двойственности Стоуна, реализует бинарность *материя—символ*. Строки/фрагменты этой Вселенной имеют двойной смысл: как коды слов или просто слова, высказывания,

термы, или формулировки булевой алгебры; и как позиционная запись вещественных чисел. (**Замечание.** Отметим следующее обстоятельство. Эти же диадические строки (как числовые аналоги полиномов) могут интерпретироваться как нестандартные числа [Гильберт Д. Основания геометрии. М.,-Л.: ОГИЗ, 1948, пп. 8, 12, 32, 33]. Ультраметрика в этом случае аналогична стандартной части числа, использование которой, как известно, вызывает трудности из-за её неарифметичности, которая, по-видимому, сходна с неопределимостью ультраметрики. Нестандартный анализ упоминается и в связи с фракталами. В своей основе он использует аналог канонического разложения  $p$ -адических чисел [Nottale L., Schneider J. Fractals and Nonstandard analysis // J.Math. Phys. 1984, 25(5), p. 1296–1300]. Более специальной интерпретацией  $\mathcal{Q}_2$ , не нашедшей пока естественнонаучного применения, можно считать булевозначный анализ в универсуме, построенном над булевой алгеброй с его принципом переноса – совместимости с теорией ZFC [Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005, гл.4, с. 157]. В нашей голограмме (см. ниже) (1\*) булевозначному анализу соответствуют члены  $4+10$ . Автору неизвестны нематематические интерпретации булевозначного анализа. Обе эти возможности мы оставляем в стороне, отметив лишь их присутствие во Вселенной Уилера).

Здесь, по-видимому, стоит задать вопрос, в какой степени исключительное использование вещественных чисел, хоть и контролируемое экспериментом, порождает результаты и теории, не имеющие референта во внешнем физическом мире, заменяя, например, *возможное действительным*, то есть онтологизируя математические конструкции (оставим в стороне биологию, сознание и язык). Редуцированная наблюдаемость, отсутствие оппонентных пар понятий в теориях также дают основания такой постановке вопроса.

Хотя сущность физики жёстко связана с возможностью выделения «локальных подсистем» из сети связей, образующей Вселенную, многое в современной физике подсказывает, что на фундаментальном уровне пространства и времени её привычная форма отсутствует, и, следовательно, её «начало» должно быть внепространственным и вневременным [29, p. 162, 168]. Поэтому «предгеометрия», содержащая так много – логику, физику, математику, философию, – становится очень похожей на естественный язык, сознание. В диадической интерпретации она связывает многие неразрешимые, то есть негативные, результаты математического моделирования, поэтому допускает бинарность в общем смысле [33].

Так, сопоставив эту предгеометрию Уилера в теоретико-информационной интерпретации Паршина и числовое содержание фрактальной геометрии с  $Z_2$ , мы расширяем технику результатами о двойственностях – решёток, Стоуна, Галуа, Пресбургера, булевых алгебр и проективной. Во всяком случае, достаточно очевидно, что космология Уилера во многом

аналогична нашей схеме и, значит, должна допускать существование мира биологии и человека. Если уж принимать всерьёз антропный принцип физики без биологии и сознания, идея которого сейчас в значительной степени угасла, то, по-видимому, следует считать, что не только универсальные константы определяют возможность жизни, но и глобальность Вселенной в этой интерпретации определяет эти константы.

11. *Интенциональная координата в физике.* Вслед за Уламом (см. ниже) мы отказываемся от планковских барьеров делимости, считая их порождением пороговости человеческого восприятия: прежде чем *что-то* измерять, это *что-то* надо распознать — здесь и сказывается пороговость. Интенциональную координату образует бесконечная делимость/вложенность материи. В квантовой механике — «пределе делимости материи в физике» — она порождает противоречие с её формализмом, разрешение которого из-за неясности о природе планковской константы  $h$  мы оставляем физике с её специфическими мотивами (например, проблема Платона *Единое—Многое* в квантовой физике принимает вид оппозиции *индивидуальное—коллективное* [34]). Но в информационной космологии Уилера она совпадает с Сущностью в естественном языке и энтелехией в биологии, X-фактором в теории сознания/мышления. (Замечание. Можно видеть аналогию между интенциональной координатой и внутренними симметриями в физике калибровочных полей. И в том, и в другом случае геометрическая точка заменяется пространством. Расслоенные пространства калибровочных полей аналогичны иерархии  $p$ -адических чисел. Мы, однако, имеем в виду прежде всего нефизическую сторону дела).

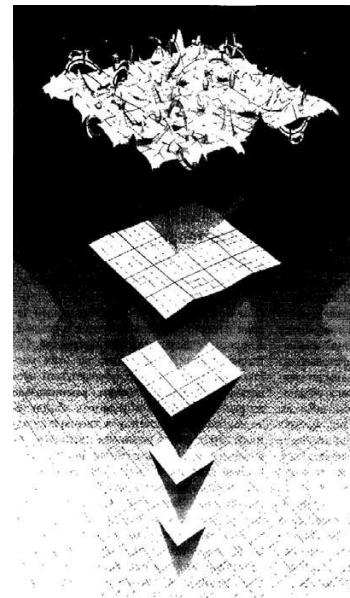
В итоге, универсумом физики оказываются нульмерные множества, которые трактуются не как предгеометрия, а как *alter ego* материального мира, так как переместившись во фрактальную Вселенную, в нелинейный мир мы покидаем область связного континуума и оказываемся в нульмерной Вселенной [35, Ch.11, p. 297–301]. В нашей схеме это субстанция теоретической информатики, или Вселенной Уилера. Материальные (фрактальные) объекты получаются как равнодействующая пары конвергенция—дивергенция её бескачественной субстанции. Это — умопостигаемый мир, который находится в чувственном, материальном. Он одновременно имманентен, но и трансцендентен ему:

«Можно было бы начать с построения умопостигаемого мира как некоторого пространства. Причём возможно понимать такое пространство только как философскую категорию или сделать следующий шаг и представить его более конкретно, как математическую конструкцию. И затем соединить два мира — физический и умопостигаемый — в одно целое, как и должно быть». [Паршин А.Н. в [28, с. 222]].

(Замечание. Можно предварительно заметить, что существование компьютерных систем символьной алгебры, таких как Mathematica и Maple, например, численных методов решения дифференциальных уравнений математической физики различного класса и вида, реализуемых 2-адическим компьютером [Anashin V., Khrennikov A. Applied Algebraic Dynamics. Walter de Gruyter, 2009, p. 252–259], практически закрывают вопрос об адекватности нашей схемы формализмам физики, в частности онтологии законов физики (*т.е. пространства, где они существуют.* – Ф.М.). Гёделева нумерация (также и нумерация Р.Смальяна), реализованная в компьютерах, показывает, что всё, что делается посредством чисел и функций, может быть реализовано посредством строк нулей и единиц и наблюдаемая фрактальная геометрия природы может быть сведена к арифметике посредством символической динамики [McCauley J.L. Chaos, Dynamic and Fractals: An Algorithmic Approach. Camb. U.P., 1995, p. 300]. В нашей версии – посредством 2-адических строк. Компьютеры являются усечёнными  $Z_2$ -фракталами. Однако этот же ход рассуждений приводит к *ГЛГ-аргументу*: все уравнения математической физики, как бы они ни назывались, воспроизводят механику деформируемого твёрдого тела. Поэтому на практике чаще всего физический смысл имеют не исходные уравнения, а различные цепочки приближений. Приближения, однако, не имеют статуса законов природы. Иными словами, приближения представляют собой вербализацию (формализацию) несловесного мышления (см. гл. «Сознание и мышление»), то есть нечто внематематическое. Согласно тому же аргументу, техника координатных систем, воспроизводящая нуль натурального ряда, неустранима из физических теорий, порождая проблему начальных/граничных условий, которая в лабораторном масштабе не препятствует моделированию, но в круге экстремальных вопросов космологии остаётся неразрешимой (Heller в [2]).

Кроме того, уже существуют работы, показывающие связь масштабной симметрии с некоторыми разделами физики: основанные на двух неподвижных точках ренормгруппы [Graner F., Dubrulle B. Analogy Between Scale Symmetry and Relativistic Mechanics – I // PRE. 1997, v. 56, no.6, p. 6426–6434; Graner F., Dubrulle B. Analogy Between Scale Symmetry and Relativistic Mechanics – II – Electric Analog of Turbulence // PRE. 1997, v. 56, no.6, p. 6435–6442; Eyink G., Goldenfeld N. Analogy Between Scaling in Turbulence, Field Theory and Critical Phenomena // arXiv: cond-mat/ 9407021, v. 1, 1994], между  $p$ -адическими числами и формализмом критических явлений [Pearson R.B. Number Theory and Critical Phenomena // PRB.1980, v. 22, no.7, p. 3465–3470], между физическими теориями и геометрией, основанные на соответствии между базовыми переменными и геометрическими примитивами – точками, линиями, поверхностями, которые соответствуют *границам* многообразий и объёмов, представляющих собой базовые физические законы [Tonti E.

Analogies Between Different Physical Theories // Appl. Math. Modelling. 1976, v.1, p. 37–56]; между статистической механикой строк символов и статистической физикой и термодинамикой [Tel T. Fractals and Multifractals // Z. Naturforsch. 1988, 43A, p. 1154; McCauley J.L. Fractals and Chaos. An Algorithmic Approach. CUP, 1995, Ch.8, 9; Beck C., Schlogl F. Thermodynamics of Chaotic Systems. CUP, 1993]. Масштабная симметрия, границы и строки символов, делимость материи и гранулированные фазовые пространства составляют содержание числовой асимметрии, поэтому мы удовлетворимся этими соответствиями).



Микромир физики за пределами планковских масштабов представлен теорией струн – протяжённых ненаблюдаемых объектов, которые получаются в процессе бесконечного деления/логического вывода/формальной определимости (языковой номинации) – ответа на вопрос: «что из чего состоит?» [36] (см. рис. 1). Показано, что этот процесс приводит к фрактальной структуре, принадлежащей видимому миру [37].

Поэтому в попытке сведения понятий мы будем считать 2-адическую нефундированную масштабно-инвариантную сеть формальным бескоординатным аналогом струнной Вселенной. Эта сеть имеет две степени свободы – экстенсивную и интенсивную. В физике интенсивная координата не отличается формализмами от экстенсивной. Интенсивная степень свободы – координата делимости – соответствует квантованному пространству-времени – alter ego евклидового пространства.

12. *Большое и малое в физике.* Устремлённость физики к Великому объединению – объединению пары *локальное* (кванты) – *глобальное* (космология) в единую теорию – является формой *Единого–Многого* Платона, или оппозиции *целое–часть*. Данная пара обнаруживается на всех уровнях делимости. Это проблема трёх (многих) тел, многомасштабное моделирование в материаловедении – теории *конденсированной* материи, связь динамического описания со статистическим, связь теории относительности с квантовой механикой, представленной сегодня квантовой теорией гравитации. Проблема объединения четырёх видов взаимодействий – гравитационного, электромагнитного,

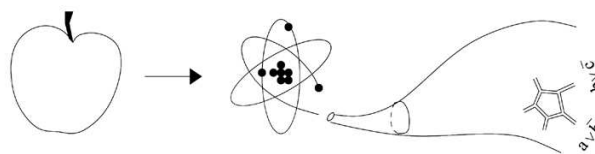


Рис. 1. Путь в  $Z_2$  – предгеометрию

слабого и ядерного – также имеет этот формат. Теория турбулентности, в которой линейный перенос частиц жидкости должен сосуществовать с дроблением её на кластеры (откуда и идеи мультифрактального формализма в этой теории) продолжает этот список.

Нетрудно видеть, что эти проблемы носят характер апорий Зенона «Ахиллес и черепаха» и «Множество», то есть согласования экстенсивной координаты движения с интенсивной. Следствием того, что в математической физике отсутствуют формализация движения и связи этих двух степеней свободы, является существование разнообразных проблем, в основе которых усматривается двойственность, скрытая за вещественнозначными (они же комплекснозначные) формализмами теоретической механики.

О формализации движения много было сказано в предыдущих главах. Здесь мы придадим ему несколько иной вид. Поскольку  $Q_2$ -, так же как и  $Z_2$ -числа могут рассматриваться как функции, то они являются коммутативными банаховыми алгебрами непрерывных функций, которые и служат математическим аналогом траекторий движения.

Кроме того известно, что любой нульмерный компакт (у нас –  $Z_2$ ) определяется кольцом непрерывных функций над самим собой [38]. Известна также аналогичная модель Р.Героча [39] – алгебра  $C^\infty(M)$ -функций над  $R$ , эквивалентная стандартной теории относительности, в которой первичным считается глобальное поле гладких функций, а не несущее множество  $M$  [29, р. 146]. Нетрудно видеть, что инволюция  $Z_2 = invR$  переводит вторую модель в первую, ультраметризация действует обратно. То есть (фрактальная) материя и движение (градиенты функций) составляют дополнительную пару (см. лежандрову двойственность в гл. 7).

Отметим далее следующий факт: в физике микромира существуют два взаимодополнительных понятия расстояния, связанных обратной пропорциональной зависимостью и физически неразличимых в теории струн [36, с. 166–170]. Сопоставив свёрнутые размерности в этой теории с интенсивной координатой, которая также свёрнута, точнее, сложена или сплюснута в евклидовом пространстве, а не «выпирает» из него подобно новой координате, отличной от  $X, Y, Z, T$ , проблему связи «очень большого» и «очень малого» можно представить гиперболическим соотношением двух метрик  $|\bullet|_\infty \propto const \cdot |\bullet|_p^{-D}$ , которое сопрягает не только величины, но и оппонентные понятия (см. лежандрову двойственность в гл. 7). Например, размер частиц, равный нулю как элемент нульмерного множества, сопряжён с бесконечной её скоростью. Постоянная Планка и конечность скорости света, как считают авторы статьи [40], являются порождениями архимедовости теорий и не поддерживаются неархимедовой математикой. Архиме-

довость, или экстенсивный характер теорий, соответствует теоретической механике неделимых тел.

Неархимедову метрику для физики можно интерпретировать следующим образом. Для того чтобы отделить две элементарные частицы друг от друга, неразличимые «на поверхности евклидова пространства», требуется проделать большую работу (т.е. конвергировать энергию) по делимости, точно так же как в нефундированных множествах или  $p$ -адических числах требуется пройти длинный путь по строкам, прежде чем добраться до места, где эти строки различаются цифрами. Поэтому размер частиц имеет неархимедов смысл мультипликативной меры Хаара, ему сопутствует большая архимедова энергия — аддитивной меры Хаара, то есть меры Лебега. Иными словами, упомянутые два типа расстояний/размеров в теории струн различаются своим генезисом, откуда их обратнопропорциональная связь. Тогда путь по строкам 2-адических чисел до разделения частиц есть колмогоровская сложность, или энергия [41].

В дополнение к ранее приведённой интерпретации  $p$ -адических чисел, приведём рассуждения Улама в связи с проблемой *большое—малое*:

«Начав с определения преобразований Лоренца, можно задаться вопросом определения, аналогично, и групп преобразований более общих пространств. ... Если предположить, что  $S$  и  $T$  (т.е. пространство и время —  $\Phi.M.$ ) к тому же имеют алгебраическую структуру, то есть являются группами, то можно постараться определить все автоморфизмы  $M = S \times T$ . ... Мы интересуемся в первую очередь глобальными преобразованиями всего пространства в себя, а не только «локальными» изменениями координат. Мы здесь рассмотрим только очень специальный случай этой общей проблемы —  $S$  как  $p$ -адическое векторное пространство,  $T$  как  $p$ -адическую числовую систему. Топология таких пространств является, конечно, неевклидовой. Эта топология представляет собой фактически дисконтинуальное пространство, которое является 0-мерным (т.е. Вселенной Уилера. —  $\Phi.M.$ ). Можно ожидать, что пространства этого типа могут быть полезны в будущих моделях ядерной и субъядерной физики. Они представляют собой схему, менее подверженную расходимостям в вычислении некоторых физических величин. Много попыток было сделано для введения в физические теории минимальной длины  $\lambda$ . Основная их трудность заключается в том, что такое введение не может быть осуществлено Лоренц-инвариантным способом. Привлекательное само по себе введение минимальной длины, «кванта» расстояния, не может быть согласовано с необходимо релятивистской трактовкой ядерных и субъядерных явлений. То, что мы хотели бы предложить, является иной возможностью: не предполагая существования минимальной длины для

пространства, можно представить только дискретное множество возможных расстояний, которое должно быть, однако, бесконечным, с произвольно малыми значениями, формируя совершенное, нигде не плотное множество — топологически эквивалентное канторову дисконтинууму, очень похожему на систему действительных чисел. В «очень малом», то есть на размерах  $10^{-13}$  см или менее, можно ожидать, что мы получим иную топологическую и алгебраическую модель» [Everett C.J., Ulam S. On Some Possibilities of Generalizing Lorentz Group Transformation in Special Relativity Theory// J.of Combinatorial Theory, 1966, v.1, p. 248–270].

«Дихотомия между двумя точками зрения — одной, рассматривающей математику и логику сами по себе как первичную основу в смысле Канта, и другой, дополнительной, рассматривающей наши идеи как формирующиеся внешним миром, — очень стара. Идея числовой системы, целых, рациональных чисел, континуум действительных и комплексных чисел, развитых в более глубокомысленные элементы более абстрактных алгебр, может быть не только стимулирована, но и вынуждена природой и свойством физического мира. То же можно сказать об идеях геометрии как творении нашего разума; или, по-другому, они могут рассматриваться как результат опыта наших чувств и эксперимента. ... Я намерен отметить некоторые математические области, где новые математические вопросы могут быть выдвинуты современными проявлениями физических реалий мира в очень малом, в субатомной области, и в большом, с возможностью введения *актуальных* бесконечностей, которые могут играть роль оснований физики. ... Программа Эйнштейна геометризации фундаментальной физики основана не только на локально евклидовой топологии, но и на дифференцируемой, если не аналитической метрике. Дифференцируемость, конечно, влечёт гладкость. Это вполне адекватно для явлений, включающих гравитационные силы. Мир атомов и ядер демонстрирует нарастающе сильное и искажённое поведение, электромагнитные силы становятся более мощными, чем гравитационные в  $10^{40}$  раз, и ещё более мощными в ядерных и субъядерных областях. Попытка построения геометрии для описания физических явлений в этих областях — философски и эпистемологически одна из замечательных идей, пропагандируемых Эйнштейном, — не может быть проведена классическим математическим анализом. На расстояниях, скажем,  $10^{-8}$  см, не говоря уже о  $10^{-11}$  или  $10^{-13}$ , где имеют место явления ядерных взаимодействий, некоторые другие возможные геометрии или даже прежде них, топология пространства-времени может быть отличной. ... Топология может быть неевклидовой локально — она может быть “гранулированной”, что не обязательно означает быть конечной. Там может не быть минимальной длины, ко-



торая несовместима с инвариантами группы преобразований Лоренца, но может быть произвольно малой, актуально или “потенциально” бесконечной; такая бесконечность не обязательно ведёт к евклидову континууму. ... Многие из наиболее важных уравнений математической физики линейны. (Я вспоминаю замечание Ферми, сделанное в беседе: “Я не верю, что в Библии сказано, что все законы физики должны быть линейными”). В этой связи я должен упомянуть о проблемах нелинейных преобразований, или функциональных уравнениях, некоторые из которых совсем новы. ... Параллельно (*обычному исследованию нелинейности в уравнениях*. — Ф.М.) расширяется фронт математического исследования итеративных преобразований, которые являются нелинейными, но остаются алгебраически простыми. ... Обилие странных явлений было обнаружено посредством вычислений. Итерации демонстрируют в некоторых случаях сходимость к инвариантной системе точек и в некоторых случаях являются конечными и периодическими в предельных точках; в некоторых других случаях, размерности 3 и более, итерации начальных точек сходятся к странному аттрактору или “патологически” выглядящим множествам, которые могут быть непрерывными кривыми, или канторовыми дисконтинуумами» [*Ulam S. On the Operations of Pair Production, Transformations and General Random Work // Adv. in Appl. Math., 1980, v. 1, p. 7–21 (пер. — Ф.М.)*].

Аналогичная мотивация о топологии «в малом», как отмечалось ранее, содержится в работах [42] и вне связи с  $p$ -адическими числами отмечена В.Л.Гинзбургом:

«Многие теоретические построения включают в себя асимптотические условия  $x \rightarrow 0$  или  $x \rightarrow \infty$  ... Нет сомнений, что на расстояниях, меньших планковской длины  $l_{Pl} = 1.6 \times 10^{-33}$  см (то есть при энергиях, больших  $M_{Pl} = 1.2 \times 10^{19}$  ГэВ), современные описания не работают, поскольку эффекты квантовой гравитации становятся стопроцентно важными. Значительно раньше подобная нижняя граница достигается при описании материальной среды, в которой предел делимости превышает среднее межмолекулярное расстояние. В то же время типичное рассуждение содержит в себе элементы типа “величина  $A$  не может служить решением, поскольку при  $x \rightarrow \infty$  или  $x \rightarrow 0$  она неограниченно возрастает”». [*Гинзбург В.Л. Нерешённые проблемы фундаментальной физики // УФН. 2009, т. 179, №5, с. 525*].

Простой обзор показывает, что шаблон «плотное, видимое ядро, окружённое невидимым полем» является универсальным для всех

наук. В лингвистике — это слово и контекст, в биологии — ядро клетки и протоплазма, в сознании — *присутствие—открытость, сознательное—бессознательное*, в физике — *атом и электронное облако*, и т.д. Это в точности соответствует нашей схеме числовой асимметрии, где ядру соответствует  $R^\#$ , полю —  $Z_2$ . Исходя из вышеизложенного, мы будем считать, что существует граница, точка на интенциональной оси, где мир «переворачивается» и искажается инволюцией, которая является довольно популярной точкой зрения [2, р. 41], то есть происходит ультраметризация евклидовых объектов, и вещественные понятия должны быть заменены оппонентными 2-адическими.

Впервые такая картина — сопряжённость понятий физики инверсией — встретила автору в работах С.Н.Горбунова, основанных практически полностью на большом экспериментальном материале, в значительной степени биологического характера [43].

13. *Свойства Вселенной Уилера*. Рассмотрим космологию Уилера —  $Q_2$ . Ранее были опубликованы её фрактальные аналоги без привлечения  $p$ -адических чисел [44], в которых были объяснены некоторые известные зависимости и величины.

13.1. *Субстанцией её является свет*, который формирует пространство (см. гл. «Сознание»). Свет как безмассовые частицы есть пространство точной масштабной симметрии [45]. Он нульмерен, и, значит, ему можно сопоставить  $Q_2$ . В пространстве  $p$ -адических чисел  $\forall \xi \in Q_2, \exists \eta \in Q_2, \xi + \eta = 0$ . Поэтому неархимедова длина  $Q_2$ , как сумма всех его элементов,  $|Q_2|_2 = 0$ . Из гиперболического характера связи метрик  $|Q_2|_\infty = \infty$ . Это, очевидно, верно и для любых масштабов:  $l_n = 2^n \cdot Q_2, n = \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Соотношение для массы (см. вывод ниже)  $m = \int_V |\xi_\alpha|_\infty \cdot |\xi_\alpha|_2^D \cdot d v$  имеет вид простейшего закона сохранения, где слева стоит интегральная (конвергентная) величина, справа — она же, записанная в дивергентном виде. Известно, что закон сохранения массы имеет место для всех видов материи, то есть на всей координате делимости (т.е. интенциональной оси). В нашей схеме его следует рассматривать именно в этих двух направлениях. Предельные переходы:  $|\xi|_2^D \rightarrow 0(\infty) \Leftrightarrow |\xi|_\infty \rightarrow \infty(0)$  движут объём (то есть чистую геометрию)  $V(t, \tau)$  в экстенсивном (соответственно — интенсивном) направлении, определяя для наблюдателя с его двойным зрением момент *теперь* и его положение (дейксис) в нём. Эти переходы от *действительного* к *возможному* постоянно используются физиками при рассуждениях об «очень большом» в космологии и одновременно (например, другой группой физиков) об «очень малом» в квантовых теориях. Особенность в том, что в  $Z_2$  все предельные переходы уже совершены, то есть соответствуют *нульмерному действительному*, а не *воз-*

можно материальному. Поэтому место выделенного объёма  $V(t, \tau)$  везде (см. апорию *Место места*). Иными словами, свет – везде, где появляется материальное тело как *вне*, так и *в* (теоретическом) мышлении наблюдателя. Ограниченность скорости распространения света есть следствие евклидово-пространственной ограниченности момента *теперь* и порога восприятия человека. Свет, как движение/градиенты функций  $Z_2 \rightarrow Z_2 \Leftrightarrow Q_2 \rightarrow Q_2$ , физически вневременен и внепространствен (см. голограмму). Поэтому *p-адические числа-как-свет* имеют смысл пространственно-геометрической числовой невидимой структуры.

13.2. Из очевидного соотношения  $Q_2 + dQ_2 = Q_2 = \text{Aut}Q_2$  следует, что геометрия этой структуры устойчива (ригидна) к изменениям своего содержания. Образы наблюдениями/восприятиями, или, что то же, измерениями, плоскость  $R^\# = (|\bullet|_\infty, |\bullet|_2)$ , мы получаем, что изменения, например, универсальных физических констант приводят лишь к перераспределению их числовых величин.

13.3. Из работы [46] следует, что *универсальные константы* могут быть получены единообразно из четырёх структурных чисел –  $2, i, e, \pi$  – посредством итерированного косинуса (*Dottie number*). Поскольку геометрия  $Q_2$  в нашей схеме проективна (см. «Введение» к части 2), то эти четыре числа, не являясь результатами измерений и поэтому не имеющие погрешностей, определяются числовой асимметрией, то есть самой геометрией Вселенной. Двойке соответствует бинарная структура естественных наук и числовой асимметрии, в частности,  $e$  – неархимедова метрика, через которую функцией логарифма определяется архимедова,  $i$  (мнимая единица) действует как инволюция/отрицание между  $Z_2$  и  $R^\#$ . Соответственно, метрики связаны как ортогональные координаты комплексного пространства  $C: R_2 = C \cdot Y = i \cdot X$ , то есть  $|\bullet|_2 = i \cdot |\bullet|_\infty$ . Тогда  $|\bullet|_2 = 2^{\pm D \cdot n} = \exp(\pm i \cdot D \cdot n \cdot \ln 2)$   $n \in N$ . Поскольку при умножении на  $e^{n \cdot i}$  отрезки переходят в окружности, то естественным образом возникает число  $\pi$  (система Коперника переходит в систему Птолемея).

Иными словами, так называемые универсальные константы, по-видимому, формируются в нульмерном пространстве и определяются всей структурой Вселенной [2, р. 95]. Их изменения – конечно в  $R^3$  часто обсуждаемые – не могут быть поэтому независимыми.

13.4. *Вселенная рефлексивна* ( $Q_2 \cong Q_2^n, \forall n \in N$ ) и поэтому допускает любое счётное число размерностей, то есть можно рассуждать о мультиверсе, отборе Вселенных и т.п. вещах [2].

13.5. *Вселенная голографична* (объяснения см. в гл. 4):

$$\begin{aligned} C &\cong C_{matter} \cong \exp(C) \cong 2^C \cong Z_2 \cong [IFS \cong \{0,1\}^N] \cong \\ &\cong [Z_2 \rightarrow Z_2] \cong C(Z_2, Z_2) \cong H \cong C_{Bool} \cong C_{Stone} \cong C \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь слева направо: канторова структура материи, множество всех её подмножеств/частей, множество истинностных булевых функций, домен теоретической информатики (то есть формальные языки), множество непрерывных функций над решёткой, множество непрерывных функций над нульмерным компактом, гильбертово пространство (пространство последовательностей см. ниже), булева алгебра – стонново пространство, символический объект.

Первый и последний члены этой схемы образуют пару “*материя–символ*”. То есть она содержит в себе посредством формальных языков и булевой алгебры самоописание и самообъяснение. Пример – код текстового редактора компьютера, на котором набрано это или другое возможное описание. Так, в нашей схеме Вселенной Уилера геометрическое замыкание порождает её логическое замыкание, такая Вселенная может не иметь аксиоматического начала [2, р. 20–22].

13.6. *Совпадение структуры Вселенной с Сущностью языка, с энтелехией в биологии, X-фактором в теории сознания, с функциями измерения и функциями восприятия человека (см. гл.7 «Степенные законы»)* вместе с ригидностью пп.2 и 3 расширяет возможности рассуждений в духе «антропного принципа». Функции человеческого восприятия и научно-технически-практических измерений совпадают. Два способа измерения совпадают с двумя режимами мышления/восприятия – функциональной асимметрией мышления. Левополушарному мышлению соответствуют архимедовы измерения, правополушарному – неархимедовы. Точно так же левополушарному режиму соответствует восходящая причинность, правополушарному – нисходящая. Наблюдатель единсущностен с Вселенной. Напрашивается вывод, что жизнь и язык, как и философия, есть та же физика, только в нульмерном, рефлексивном пространстве.

13.7. *Вселенная почти циклична* и поэтому удовлетворяет «теореме о возвращении» Пуанкаре. Здесь, однако, есть неясность, связанная с проективной геометрией: в каком виде будет происходить это «почти возвращение», какой вид примут её объекты [2, р.26-29], имея в виду её расширенное биологией и языком содержание. Цикличность и осциллирующий характер Вселенной следуют из циклической модели К.Гёделя эйнштейновской теории гравитации [47].

Известно, что принцип двойственности для решёток и проективной геометрии сохраняет истинность, но выражать может совершенно разные факты [48, с. 345]. Поэтому исследование этого факта требует отдельной работы [Элиаде М. Миф о вечном возвращении. М.: Ладомир, 2000].

13.8. *Движение в общем понимании.* Уравнение связи метрик  $|\xi|_{\infty} \cdot |\xi|_{\infty} = C$  есть простейшая гармоническая функция, определяю-

шая ньютонов потенциал, то есть является источником движения. Отсюда дифференцированием гиперболического соотношения метрик получаем два закона обратных квадратов, справедливых для всех масштабов. Один из них связан с протяжёнными телами, второй — с их границами. На макроуровне напрашивается сопоставление первого — с гравитацией, второго — с антигравитацией. На мезоуровне инволюция линейных кулоновских сил даёт циклические магнитные в силу связи метрик  $|\bullet|_2 = i \cdot |\bullet|_\infty$ . Композиция линейного и вращательного движений порождает ритмы и циклы, хорошо известные в естественных науках. Здесь напрашивается аналогия с эфирной теорией Мира И.Ньютона (подробно в *Дмитриев И.С. Неизвестный Ньютон*. СПб, Алетейя, 1999, с. 379–509).

Рассмотрим далее простейшее уравнение движения в символическом виде:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = a \quad \xi, \eta, a \in Q_2.$$

Над двумя числовыми системами производные и правые части следует вычислять в двух метриках — вещественной и 2-адической. Получим четвёрку производных и два вида правой части:  $|a|_\infty$  и  $|a|_2$ , итого 8 уравнений в физическом пространстве. Нетрудно видеть, что для этих производных

$$e_1 = \frac{|d\xi|_\infty}{|d\eta|_\infty}, \quad e_2 = \frac{|d\xi|_\infty}{|d\eta|_2}, \quad e_3 = \frac{|d\xi|_2}{|d\eta|_\infty}, \quad e_4 = \frac{|d\xi|_2}{|d\eta|_2} \quad (2)$$

произведение  $e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot e_4 \neq 0$ , то есть, поскольку метрики совпадают с функциями наблюдения/восприятия, наблюдатель будет видеть связную, то есть евклидову, вещественную плоскость  $(X, Y) \propto (|\bullet|_\infty, |\bullet|_2)$ . Поскольку мы предполагаем (см. выше мнения С.Улама и В.Л.Гинзбурга) наличие границы (субъядерной зоны, среднего межмолекулярного расстояния), где мир переходит в зеркальный, евклидов — в ультраметрический, то, как можно видеть из определения четвёрки производных:  $inve_1 = e_4^{-1}$  и  $inve_2 = e_3^{-1}$ .

Иными словами, сопрягаются четыре основных вида взаимодействий: гравитационное — с сильным ядерным, электромагнитное — со слабым ядерным [49]. Большое и малое связаны инверсией в степенных законах [50]. Из-за взаимной неопределимости метрик здесь следует проследить за переходами *возможное—действительное*. Если брать их в одной модальности, например, в евклидовом пространстве, то три из них оказываются неопределимыми (скрытыми) или случайными.

Поскольку (2) верно для любых пар 2-адических чисел, то Вселенная оказывается нелокальной. Все высказывания/события являются

контекстуально-зависимыми. Этот факт стал недавно обсуждаться физиками [51].

13.9. *Вселенная Уилера*, будучи ультраметрическим пространством, является своей собственной вычислительной моделью [52]. 2-адическая топология Вселенной объединяет физические процессы, которым соответствуют процессы вычислений, геометрию, анализ и логику посредством символической динамики [53]. Из предыдущего пункта следует, что в этой Вселенной всё происходит «само собой», она генерирует все силы и движения.

13.10. *Вселенная содержит все уравнения*, так же как и все их решения. Выбор за исследователем, что считать *действительным*, а что *возможным*. Переход к нульмерным множествам как аксиоматическому старту позволяет начинать прямо с решений уравнений и исследовать их свойства.

13.11. *Упорядочим стандартный натуральный ряд*  $N = 1, 2, 3, \dots, n$  при помощи двух метрик способом, аналогичным осуществлённому авторами в [53]:

$$m \triangleleft n \Leftrightarrow \{ |m|_2 > |n|_2 \} \vee \{ |m|_2 = |n|_2 \Rightarrow |m|_\infty < |n|_\infty \}.$$

Проделав простые вычисления, получим *порядок Шарковского*, известный как «Порядок три рождает хаос». Записав его в виде прямоугольной таблицы, как это обычно делается в теории динамических систем, увидим, что её склейка по краям по возрастанию значений метрик порождает проективную плоскость. Циклы, о которых идёт речь в теории, получаются, если связать две метрики мнимой единицей (см. п.3 настоящей гл.). Обычно проективная геометрия излагается евклидовыми понятиями — связными линиями и плоскостями. В нашем случае мы имеем дело с её дисконтинуальным вариантом. Иными словами, универсум Уилера есть хаос как в математическом, так и в античном смысле.

13.12. *Геометрия* является локально евклидовой, глобально — проективной. Уточним прежнее её выражение:

$$P^2(R) = R^2 \cup P^1 \cong R^2 \cup Q_2 \cong (R^\# \times Z_2) \cup Q_2 \cong C^\#,$$

где  $C^\#$  — дисконтинуальный аналог комплексной проективной плоскости. В нашей схеме не требуется введение дополнительного элемента в виде сферы Римана и, соответственно, стереографической проекции. Её роль играет  $Q_2$ , возможно, в рефлексивном виде. Роль комплексных чисел поэтому сохраняется и расширяется дисконтинуальным аналогом. Забегая вперёд, заметим, что вывод теоремы М.Соле об исключительности вещественных  $R$ , комплексных  $C$  и кватернионных полей  $H$ , пригодных для характеристики гильбертова пространства, остаётся в силе [54]. В этом случае ортонормированную последовательность, требуемую

теоремой, можно организовать 2-адическими строками, где 1 стоит на  $i$ -м месте, а на остальных — нули. Полюс с  $*$ -инволюцией в нашей схеме соответствует инволюционный антиизоморфизм в числовой асимметрии.

На проективной плоскости в каждой точке возможны два противоположно направленных единичных вектора нормали:  $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ ,  $|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = 1$ . Однако  $1 = (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1 \cdot 1 \cdot \cos \pi = -1$ . Или  $|\vec{n}|^2 = -1$ . Таким образом, отрицание закона исключённого третьего проявляется и в геометрии — мнимой единице соответствует расщеплённое отрицание. Поскольку проективная геометрия ведёт к гиперболической геометрии Лобачевского, то посредством дисконтинуальности в неё включается инверсия в виде степенных соотношений между двумя числовыми метриками. Поэтому и геометрическим образам/объектам в  $S^{\#}$  как на инверсной плоскости соответствует движение, переводящее их из одного в другой. Рассуждения предыдущих глав делают, по видимому, эту геометрию общей для нефизических наук. Отметим, что проективная геометрия является инвариантом относительно *конвергенции—дивергенции*. Если рассматривать расширение точки в прямую и, наоборот, сжатие прямой в точку, то эта инвариантность есть просто принцип двойственности проективной геометрии.

13.13. Поскольку *арифметика Пресбургера* не интерпретируется ни в  $R$ , ни в  $C$  (комплексные числа), ни в  $H$  (кватернионы), но только в  $Q_p$  [55], то она наследует универсальные свойства  $p$ -адических чисел. Её отличительной чертой как логической системы является то, что в ней есть отрицание, но нет противоречий: она является полной и непротиворечивой формальной системой. Тогда, по теореме Гёделя—Россера, она неаксиоматизируема (так же как и ЕЯ). И по теореме Майхилла [56] может формулировать истину собственными средствами. Поэтому дисконтинуальный вариант проективной геометрии (см. п.13.11) имеет смысл проективной геометрии домена теоретической информатики и является пространством информационных процессов — вычислений и логики, проективной решёткой. Тогда логическое следование по смыслу непрерывности передачи причинности совпадает со спектром непрерывных движений, которые даются группой Мёбиуса, имеющей тождественный вид как для вещественных, так и для  $p$ -адических чисел [57]. Существование в ней прямых и обратных изометрий даёт пары зеркально симметричных физических объектов (энантиоморфов), существование которых нельзя обосновать в физическом пространстве, выключающем инверсию, но которая присутствует в нульмерном пространстве. В силу рефлексивности как  $Q_2$ , так и  $Z_2$  они являются бесконечномерными пространствами. Поэтому из конформных отображений физики в

них остаются только скейлинг и инверсия [58]. Возможно, это путь объяснения нефизичности умопостигаемого мира сознания.

13.14. *Бинарность Вселенной.* Сопоставим голограмму с её инволюцией, то есть введём двух (а не одного) наблюдателей, с разными функциями восприятия:  $W$  – дивергентное, правополушарное, соответствующее неархимедовой метрике, и  $M$  – конвергентное, левополушарное, порождаемое архимедовой. В логическом виде (1) запишется как конъюнкция для  $W$ -наблюдателя:

$$\begin{aligned} & \models C \equiv C_{matter} \wedge \exp(C) \wedge 2^C \wedge Z_2 \wedge [IFS \equiv \{0,1\}^N] \wedge \\ & \wedge [Z_2 \rightarrow Z_2] \wedge C(Z_2, Z_2) \wedge H \wedge C_{Bool} \equiv C \end{aligned} \quad (1^*)$$

Инволюция на решётке, то есть отрицание (1\*), включает соответствия Галуа *дивергенция–конвергенция* и даёт дизъюнкцию для  $M$ -наблюдателя:

$$\models M \vee \bigcup m_i \vee \{G, V(m_i)\} \vee R^\# \vee d(m_i, m_j) \vee f_M(x, t) \vee \{\text{законы природы}\} \quad (1^{**})$$

Здесь слева направо: масса (объём) тела, совокупность многих тел, граф взаимодействий/ причинности, вещественные числа, измерения (формальные языки переходят в измерения), движение тела/объёма  $M$  (два члена, соответствующие полям непрерывных функций на решётке и над нульмерным компактом, при конвергенции сводятся к одному), свет (как гильбертово пространство, см. ниже), булева алгебра – символический объект. Получается переход от материи (слева) к символу (справа). Пару (1\*) и (1\*\*) можно рассматривать как развёрнутую двойственность Стоуна, включающую её теоретико-информационную интерпретацию.

13.15. *Пространства функций.* Пространства непрерывных функций – одно из неясных мест математики. Если непрерывные функции являются образами связного  $R$ , то они также связны. Однако, как говорилось ранее, связность вещественной прямой является нематематическим фактом и не может быть формально установлена. Такие функции невозможно задать, как обычно, парой точек  $(x, f(x))$ , то есть у них нет области определения, аргументов. Следующий вопрос – какова связность пространства функций над  $R$  – не освещён в литературе. Если, как обычно, пространства функций задаются их характеристическим свойством, то есть формальной языковой номинацией, то это пространство должно быть несвязным, точнее – многосвязным, то есть решёткой [59]. Тогда как для траектории движения оно нуждается в отдельной формализации понятия движения.

Известно, что всякое пространство непрерывных функций может быть ультраметризовано. То есть у всякого пространства непрерывных функций есть его ультраметрический двойник. И обратно, всякое ультраметрическое пространство изометрически вкладывается в гильберто-



во [60]. Поэтому результат Героча фактически есть одновременно и результат о нульмерном множестве, если ультраметризовать несущее множество  $M$ . То есть теория относительности есть инволюционный антиизоморфизм квантовой механики без планковских ограничений.

Результаты о вложении мы будем рассматривать, имея ввиду первичность  $p$ -адических чисел, как результаты о двойственности: поле непрерывных функций равноправно может быть охарактеризовано как ультраметрическое множество, гильбертово пространство или решётка. Таким образом, абстрактному пространству функций сопоставляются конкретные [61, с. 147]. Сплошное/связное поле функций, так же как и  $R$ , является нематематическим объектом. Кроме того, любое ультраметрическое пространство изометрически вкладывается в  $l_2$  [62], а  $l_2$  унитарно изоморфно бесконечномерному гильбертову пространству [61, с. 169]. Замыкают рассмотрение функциональных пространств очевидные свойства 2-адических чисел: они могут быть представлены как функциональные пространства  $l_1, l_2, l_\infty$ , поскольку, как нетрудно видеть, из сходимости 2-адических строк в ультраметрике следует их сходимость в нормах этих пространств. То есть если  $l_q = \{ \xi = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \}$ , то норма (здесь индекс пространства  $q > 1$  не есть простое число) характеристика  $Z_p$ . Запишем нормы элементов последовательности в виде:  $\|a_i\| = |a_i|_\infty \cdot |a_i|_2$ . Тогда

$$\| \xi \|_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \| \xi \| = \left( \sum_{i=0}^{\infty} \| a_i \|^q \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0.$$

Скалярное произведение определяется, как обычно, по координатным умножением с последующим сложением. Иными словами, исходя из голограммы (1) и последнего вывода, мы будем считать  $Q_2$  (как пространство двусторонних последовательностей) и  $Z_2$  (пространства односторонних последовательностей) конкретными гильбертовыми пространствами со всеми свойствами, следующими из голограммы. То есть это проективная решётка высказываний и их истинностных значений, пространство волновых функций, множество элементарных частиц. Отсюда, в частности, следует, что гильбертово пространство в представлении 2-адическими числами является неориентируемым:

$$\xi + \eta = 0 \Leftrightarrow \forall n \in N \exists \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n : \eta = \xi + \xi_1 + \dots + \xi_n.$$

Иными словами, поскольку знак минус (–) является техническим элементом вычислений, не имеющим референта во внешнем мире и поэтому носящим условный характер, сумма «положительных» элементов гильбертова пространства оказывается «отрицательной».

Как гильбертово пространство  $R$  и  $Z_2$  обладают противоположными свойствами, которые следуют из взаимной неопределимости метрик, если, как обычно в практике измерений, их не различать:  $R$  в архимедовой метрике сепарабельно, в неархимедовой — нехаусдорфово (несепарабельно). Рассмотрим последовательность  $n_R = \{n^{-k}\}_{k=1}^{\infty}$ . Как нетрудно видеть, в 2-адической метрике её пределом будет множество  $\{1, 2^{-1}, 2^{-2}, \dots, 2^{-k}, \dots\}$ . Соответственно,  $Z_2$  в ультраметрике сепарабельно, в архимедовой — несепарабельно, так как все последовательности его элементов имеют своим пределом нуль — 0, поскольку элемент нульмерного множества сам нульмерен. Если же не различать генезис метрик, то всё  $Q_2^{\#} \cong R^{\#} \times Z_2 \cong H$  есть гильбертово пространство с парадоксальными свойствами.

Делимость приводит к частям/подмножествам, которые рассматриваются как ортогональные подпространства. Тогда само гильбертово пространство есть тензорное произведение этих подпространств. В пределе делимости, если рассматривать 2-адические числа как векторы состояний, налицо феномен их суперпозиции  $Z_2 = \otimes \prod \xi_i$  и связанный с ним феномен запутанности состояний. То же верно и для  $Q_2$ . Эта формула имеет символический смысл — произведения определяются для счётного, перечислимого множества элементов. Но  $Q_2$  и  $Z_2$  несчётны. Формулу, по-видимому, следует рассматривать каждый раз для конечного или счётного числа подмножителей.

Для пространств последовательностей  $l_2$  и числовой асимметрии  $R^{\#} \times Z_2$  пространство примет вид тензорного произведения  $H = l_2(R^{\#}) \otimes l_2(Z_2)$ .

13.16. *C\*-алгебра*. Предыдущие рассмотрения, касающиеся пространства функций, подводят к выводу: числовая асимметрия  $U = R^{\#} \times Z_2$  есть дисконтинуальный аналог *C\*-алгебр*. Этот вопрос освещают результаты о связи *C\*-алгебр* с итеративной системой функций [63], с пространствами последовательностей [64] и общий результат о двойственности И.М.Гельфанда на локально компактных хаусдорфовых пространствах над полем комплексных чисел, которая имеет продолжение посредством теории пучков на некоммутативные *C\*-алгебры* [65]. *C\*-алгебры* обычно рассматриваются над полем вещественных чисел с аксиомой непрерывности [64]. Однако нетрудно проверить выполнение аксиом *C\*-алгебры* [66, с. 12, 15, 17–18] для числовой асимметрии, если трактовать её составляющие числа как последовательности, то есть как нульмерное образование. Конкретика рассмотрения заключается в арифметике рядов — канонических разложений  $p$ -адических чисел. Инволюция/сопряжение  $*$ :  $Z_2 \rightarrow R^{\#}$  есть обращение направления строк и порядка суммирования. Вместо поля комплексных

чисел  $C$  берётся его дисконтинуальный изоморф  $U = R^\# \times Z_2$ . Тогда общее представление «асимметричного аналога» комплексного числа принимает вид:  $u \in U$ ,  $u = x \cdot \xi$ ,  $x \in R^\#$ ,  $\xi \in Z_2$ . Его сопряжённое  $u^* = (x \cdot \xi)^*$  при переводе на язык рядов оказывается равным  $u^* = \xi^* \cdot x^*$ ,  $\xi^* \in R^\#$ ,  $x^* \in Z_2$ . Норма в  $R^\#$  берётся в виде  $\sup$ -нормы на последовательности, которая совпадает с ультраметрикой в  $Z_2$ . В качестве единицы берётся её двойной смысл  $[ \dots 0, 0, \{ 1 \}, 0, 0, \dots ]$ . Здесь фигурные скобки указывают на принадлежность к  $Z_2$ , квадратные — на  $R^\#$ . Соответственно, нормы единицы в  $R^\#$  и  $Z_2$  совпадают, и квадрат её нормы оказывается равен любой из них. Тогда, очевидным образом, подалгебры  $2^n \cdot (R^\# \times Z_2)$  также являются  $C^*$ -алгебрами.

Вопрос о  $C^*$ -алгебрах в таком, казалось бы, далёком и абстрактном результате чистой математики, в представлении числовой асимметрии оказывается близким к компьютерной идеологии и системной теории. Дальнейшее развитие этой темы, как представляется, может обогатить вычислительные методы естественных наук в целом богатым арсеналом функционального анализа и связать их с физическими теориями.

13.17. *Мнимости, многомасштабный анализ.* Несмотря на многочисленность работ, посвящённых многомасштабному моделированию в разных областях физики, лишь в работах Дж.Ф.Р.Эллиса и Ф.Андерсона иерархия и связанные с ней интенциональные явления выделены как особая, дополнительная степень свободы с нисходящей причинностью [67], как недостающий фактор общих теорий физики. Авторы отмечают так называемое *нарушение симметрии*: оказывается невозможным вывести свойства целого образования из свойств его частей. Редукционизм оказался необратим, так же как и время.

С точки зрения нашей схемы, это объяснимо. Ситуация в точности соответствует итеративной системе функций, бинарному лексикографическому дереву логики. Редукция, то есть движение вниз к частям, является набором сжимающих операций по правилу *MP*, направляемых дивергенцией ветвей. Обратный ход мысли — конвергентный по ветвям — является отрицанием дивергентности редукционизма. Стремление уложить в один формализм два противоположных процесса — энтропию и неэнтропию — приводит к парадоксам. Сложность ситуации здесь в её двусмысленности: основа выводов — булева алгебра — совместима как с движением в евклидовом пространстве, так и с делением [68, с. 48–49, 358, 367], и делимость сохраняет все основные четыре симметрии физики согласно теореме Лиувилля (см. гл. 2, 5). Это основная причина того, что экстенциональная координата формально неотличима от интенциональной.

Но можно ли вообще формализовать эту ситуацию — многомасштабную связь частей целого? Поскольку и здесь явно усматриваются знакомые парадоксы, можно надеяться на некоторое продвижение в понимании этого явления, используя идеологию двойственности. Выше мы интерпретировали мнимую единицу как отрицание/инволюцию между  $R^\#$  и  $Z_2$ . Поскольку в нашей схеме делимость есть один из процессов в евклидовом пространстве и фракталы, так же как и  $Z_2$ , являются изнанкой/оборотной стороной евклидова пространства, то можно видеть, что эта интерпретация аналогична интерпретации мнимостей П.А.Флоренского, данной им для двумерных образов (плоскостей) геометрии [69].

Интерпретацию Флоренского можно проитерировать по масштабам следующим образом. Рассмотрим два масштаба, например, внутреннего пространства объёма некоторого вещества  $l_n$  и  $l_{n+1}$ . Второй получается из первого диспергированием материи, то есть процессом (под)разделения. Возникает известная пара: (*целое* =  $l_n$ ) — (*часть* =  $l_{n+i}$ ). Второй масштаб является изнанкой первого. Примем первый за действительное, второй — за возможное. Тогда эта плоскость ( $l_n, l_{n+i}$ ) есть изоморф плоскости  $(|\bullet|_\infty, |\bullet|_2)$ . Следовательно,  $l_{n+i} = i \cdot l_n$ . Для булевой алгебры масштабов это означает релятивизацию к выбранному масштабу/элементу. Иными словами, модели процессов на каждом масштабе строятся по известным правилам и связываются как комплексно-сопряжённые. В частности, для объёма вещества берётся его ультраметрический, нульмерный прообраз и пишутся  $n$  уравнений/моделей поведения его геометрии по одной на каждый масштаб. Получается, таким образом, «антиномичная» система уравнений/моделей. Именно такое определение системы является адекватным её природе. Технические и вычислительные вопросы, как достаточно понятные, мы не будем здесь разрабатывать. Скажем только, что такая схема ведёт к множественной *вычислительной дополненности*: каждой модели процесса выбранного масштаба соответствует свой вычислительный модуль (компьютер) и своё время. Связь между ними ведёт к необходимости анализа непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений и/или матриц их разностных схем от параметров. Но здесь обнаружены подводные камни — эта тема недостаточно проработана в математике [70, гл. 14, 15].

Нетрудно видеть, что последовательность масштабов на интенциональной оси попарно связана мнимыми единицами — для каждой пары своя мнимость. Эту множественность можно свести в один вывод. Поскольку в  $Z_2 - 1 = 1 + 2 + 2^3 + \dots + 2^n + \dots$ , то правая часть имеет первой цифрой квадрат единицы. Этого достаточно, чтобы ряд справа как 2-адическое число был квадратом некоторого другого 2-адического числа.

Иными словами,  $-1$  в  $Z_2$ , так же как и в  $R^\#$ , может рассматриваться как квадрат некоторого числа  $j^2 = -1$ ,  $j \in 1 + 8 \cdot Z_2$  [71, p. 50]. Очевидно, что приём, аналогичный релятивизации к выбранному элементу в булевой алгебре, применённый рекурсивно по масштабам  $l_n = 2^n \cdot Z_2$ , приводит к появлению последовательности мнимостей  $J = \{j_i\}_{i=1}^\infty$ , что в то же время технически объясняет нашу конструкцию связи масштабов.

Конечно, для каждого масштаба известным процессом удвоения можно перейти к кватернионам и октонионам, но этот вопрос мы оставляем в стороне.

13.18. *Микромир.* В нашей схеме числовой асимметрии микромиру соответствует  $Z_2$ . Естественно, мы будем рассматривать микромир как нульмерный, то есть без планковских ограничений, согласно интерпретации Улама.

*Масса.* В современной физике масса, как одна из основных наблюдаемых/измеряемых величин, интерпретируется как (неделимый) коэффициент в уравнениях движения [72, 73]. В силу того, что в нашей схеме делимость играет существенную роль, имеет смысл обратиться к генезису этого понятия.

В «донаучные времена» понятие массы привлекало значительно большее внимание [72, гл. I–V]. Авторы того времени в объяснении понятия массы прибегали к процессам сгущения–разрежения [72, с. 35] того, что сейчас называется праматерией, хаосом, неопределённым [72, гл. I–V], что аналогично паре конвергенция–дивергенция; к двойным – определённым и неопределённым – количествам, одно из которых содержит другое. Причём неопределённое количество не может занимать определённый объём, что аналогично свойству нульмерного пространства –  $Z_2$ , которое неотделимо от определённого, то есть  $R$  – протяжённого количества, и может вызывать качественные изменения [72, с. 51–55]. Традиционным было противопоставление формы – материи, объёма–плотности. По Лейбницу, масса есть свойство множества, её протяжённость есть результат действия и движения [72, с. 85]. То есть в генезисе этого понятия присутствуют сразу две апории Зенона – о движении и множестве.

В нашей схеме все наблюдаемые величины описываются рациональными числами, и динамически их материальные референты являются равнодействующими процессов конвергенции–дивергенции в моменте теперь. Причём в понятие массы неявно заложена синхронистичность сложения в действительном (апория Медимн). Это обеспечивается процессом конвергенции. Набор элементарных масс для конвергенции предоставляется процессом дивергенции. Формально этой ситуации соответствуют интегродифференциальные соотноше-

ния в ограниченной области интегрирования. Тогда понятие массы может иметь следующее обоснование.

Пусть  $M = \{ \xi_\alpha \in B_{2^{-N}}(\zeta) \subseteq Z_2, \alpha \in I, \}$ , где  $I$  – индексное множество с  $card I \leq card Z_2$ . Тогда  $|\xi_\alpha|_\infty$  – плотность материи,  $|\xi_\alpha|_2^D$  – мера возможности (принимаемая вместо плотности распределения вероятностей в классическом смысле). Наблюдаемое в объёме  $V = proj_{Z_2 \rightarrow R} M$  количество материи, то есть масса  $m$  примет узнаваемый вид:  $m = \int_V |\xi_\alpha|_\infty \cdot |\xi_\alpha|_2^D \cdot dv \sim \int_V \rho \cdot f \cdot dv$ . В таком виде природа массы имеет полевой характер, то есть, в частности, электромагнитный. Используя гиперболическое равенство между метриками, получим в предельных случаях (исключая пороговость человеческого восприятия):  $|\xi|_2^D \rightarrow 0 \Leftrightarrow |\xi|_\infty \rightarrow \infty$ . Вспоминая лежандрову двойственность между метриками как относительное их движение (см. гл. «Степенные законы») в паре *действительное–возможное*, интерпретировав неархимедову метрику как скорость/движение (*возможное, там*), а архимедову – как протяжённость (*действительное, здесь*), получим аддитивное представление массы; если неархимедова метрика означает размер частиц (*действительное*), то архимедова – их скорость (*возможное*). Это соответствует полевому (релятивистскому, вакуумному?!) представлению массы.

Для «точечной» частицы ( $e \in R, e = proj_{Z_2 \rightarrow R} \zeta_0, \zeta_0 \in Z_2, |\zeta_0|_2^D < 1$ ), движущейся с большой скоростью  $|\zeta_0|_2 > 1$ ,  $e = |\zeta_0|_\infty \cdot |\zeta_0|_2^D$ , первый сомножитель можно соотнести с массой покоя, второй аналогичен релятивистской поправке.

*Заряды, оппозитные частицы.* Знака (–) в  $p$ -адических числах нет. Но для каждого 2-адического числа существует его противоположный:  $\forall \xi \in Z_2 \exists \eta \in Z_2 \xi + \eta = 0$ . Поэтому в  $Z_2$  существуют две стороны нуля на каждом масштабе:  $I^+ = \{ 2^n \cdot (\xi + 2 \cdot Z_2) \}$  и  $I^- = \{ 2^n \cdot (\eta + 2 \cdot Z_2) \}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  [74, р. 65–67, 258, Ex. 24 B]. Для  $p \neq 2$  имеется, соответственно,  $p$  сторон нуля. Судя по тому, что в опыте физики такое явление отсутствует, это может служить дополнительным основанием выбора двойки. При инволюции эта иерархия сторон нуля порождает частицы с противоположными качествами, например, зарядами.

3. *Координатизация.* Поскольку поля, в нашей терминологии, являются распределёнными, то есть дивергентными объектами, то, значит они не могут быть заданы/описаны посредством техники теоретической механики даже с привлечением вероятностной терминологии, то есть стандартных уравнений математической физики. Поэтому координатизация точек/объектов поля возможна лишь с привлечением аналогичных по структуре дивергентных формальных конструкций. Недавно была высказана идея моделирования физических полей алгебраическими [75]. Особенностью поля является то, что оно повторяет

себя в каждой точке волнового фронта (принцип Гюйгенса). В нашей схеме таким формальным объектом являются итеративная система функций и её числовой изоморф  $Z_2$ . Поскольку в нашей модели аффинные движения в  $R$  сопряжены со строками в  $Z_2$ , то конструкция порождения фрактальных множеств, то есть материи с фрактальной структурой, посредством объединения  $p$ -адических чисел со структурой итеративной системы функций, изложенная в [76, р. 12–17], даёт нужную основу для построения координатизации поля.

Приведём кратко основную формулу [76, р. 12–13] и построим, согласно ей, её инволюцию в  $Z_2$ . Выделим то, что буквы алфавита  $p$ -адических чисел заменяются в отображении векторизованными цифрами, то есть векторами или аффинными движениями. Определяется отображение:

$$\psi_{v,b} : Z_p \rightarrow E, \quad \sum_i a_i \cdot p^i \mapsto \theta \cdot \sum_i v(a_i) \cdot p^{-\alpha(i+1)},$$

где  $v(a_i)$  – векторизованные цифры,  $\theta$  – нормализационная константа, определяющая диаметр образа в евклидовом пространстве;  $b = p^{-\alpha(i+1)}$  параметр, определяющий фрактальную размерность образа. Поскольку  $Z_p = \prod_{i=0}^{i=\infty} p^i \cdot Z_p$ , то

$$\psi(Z_p) = \bigcup_{v(a_i)} \left( \theta \cdot \frac{v(a_i)}{b} + \frac{1}{b} \cdot \psi(Z_p) \right).$$

Эта формула имеет автореферентный характер, что в нашей схеме является определением актуальной бесконечности. Знак объединения отражает дивергентный характер отображения. Ему соответствует его комплексно–сопряжённый двойник в  $Z_p$   $\psi^* = inv\psi = i \cdot \psi$ :

$$\begin{aligned} \psi_\tau^*(Z_p) &= \bigcup_{a_i} (a_i + p^i \cdot \psi_\tau^*(Z_p)) = \bigcup_{a_i} (a_i + \bigcup_{a_{i+1}} (a_i a_{i+1} + p^{i+1} \cdot \psi_\tau^*(Z_p)) = \dots = \\ &= \bigcup_{a_i a_{i+1} \dots a_{i+\tau}} (a_i a_{i+1} \dots a_{i+\tau} + p^{i+\tau} \cdot \psi_\tau^*(Z_p)) = \dots \end{aligned}$$

где, конечно, вместо знака «+» можно использовать знак конкатенации «o». Тогда строке цифр  $\sigma = a_i, a_{i+1} \dots a_{i+\tau}$  соответствует вектор сдвига  $v_\tau = v_i + v_{i+1} + \dots + v_{i+\tau}$ . Шару  $B_\sigma$  радиуса  $r = p^{i+\tau}$  соответствует отрезок  $[\alpha_{i+\tau}, \beta_{i+\tau}] = p^{-(i+\tau)} \subset R$ . В  $p$ -адической физике это соответствие называется *отображением Монна* [77, р. 30–33, lemma I.9.12], которому отвечает интерпретирующая функция в теоретической информатике. Оно переводит меру Хаара в меру Лебега. Выше порога восприятия отрезок  $[\alpha_{i+\tau}, \beta_{i+\tau}] = p^{-(i+\tau)}$  представляет собой результат измерения. Таким образом, измерение описывается двояко: как шар в  $Z_p$  и длина отрезка в  $R$ . Его результат одновременно и принадлежит наблюдателю, и не принадлежит ему, будучи частью внешнего физического пространства. Ситуация в точности повторяет структуру *перцепта* в теории сознания.

Из-за взаимной неопределимости двух числовых систем отрезок действительной оси получается образованным случайными числами – строками  $Z_p$ . Для  $p = 2$  это аналогично образованию случайных чисел процессом удвоения периода в отображении Фейгенбаума [78]. То есть отрезок представляет собой множество *возможностей*  $[\alpha_{i+\tau}, \beta_{i+\tau}] = \{\pi_\tau = \{\xi|_2^d, \xi \in 2^{i+\tau} \cdot Z_2\}\}$  в смысле теории возможностей [79], имеющих разноприродные источники. Показано, что посредством *logit*-преобразования это распределение возможностей переводится в «почти гауссову кривую» [80]. Польза такого вероятностного приёма в том, что функция распределения получается с компактным носителем и не имеет длинных хвостов, присущих нормальному распределению. Поэтому подобное распределение локально, то есть распределено в «физически бесконечно малом» объёме и может включаться в уравнения движения. Получающийся отрезок допустимо сопоставить с какой-либо «элементарной» частицей; тогда её ультраметрический прообраз интерпретируется как волна или её дифракционная картина. Реальность частицы двойственна: она существует одновременно в двух взаимнодополнительных пространствах [81, с. 12–14]. Поэтому её присутствие нелокально (см. апорию «Место места»). Кроме того, поскольку так понимаемая вероятность основана на ультраметрике, то вероятность, равная 1, может возникать в измерениях более одного раза. Никаких коллапсов волновой функции  $\Psi = \psi \cdot \psi^*$  при измерении не происходит.

Следовательно, можно порассуждать о различных видах неопределённости/вероятности. Например, известный квадрат модуля волновой функции, определяющий вероятность, получается как  $|\Psi| = \left| 2^{i+\tau} \Big|_\infty \cdot \left| 2^{-(i+\tau)} \Big|_2 \right| = (2^{i+\tau})^2$ . Далее можно рассмотреть строки нулей и единиц  $\sigma = a_i a_{i+1} \dots a_{i+\tau}$ ,  $a_i \in \{0, 1\}$  как последовательность бросаний монеты, определяющих случайную координату частицы, и углубиться в эту схему (см. например, [82]). Эти интересные вопросы мы оставляем в стороне.

Наконец, последнее о вероятности – её нормировка. Для любого подмножества  $Q_2$  или  $Z_2$  вида  $B_s = 2^n \cdot Q_2$  нормирование производится посредством  $p$ -адической экспоненты:  $\xi \in B_s \mapsto \xi^0 = \exp_2(4 \cdot \xi) \Rightarrow \left| \xi^0 \Big|_2 = 1$ . Поскольку  $Z_2$  является изоморфом канторова совершенного множества  $C$ , которое является экспоненциально полным, то есть  $C = \exp C$ , то и  $Z_2$  – экспоненциально полно. Тогда в логике второго порядка, оперирующей множествами, получается функциональное уравнение  $Z_2 = e_2^{4 \cdot Z_2}$ , которое представляет собой краткую запись автореферентных формул, приведённых выше в данном пункте. Его анализ имеет смысл проводить, используя рефлексивность пространств 2-адических чисел,



который мы также опускаем. Свойства  $p$ -адических экспонент и их особенность – при  $p = 2$  (см., например, в [83]).

*Осциллирующая Вселенная.* Выше мы упоминали о циклическом характере Вселенной Уилера. Этот факт также обсуждается физиками в связи с петлевой теорией квантовой гравитации (*loop quantum gravity* – англ.) и осциллирующей Вселенной. Петлевая теория имеет целью создание квантового моста между расширением и сжатием Вселенной [84]. Представляется, что эта теория соответствует в основном нашей схеме. Соответствие схематически может выглядеть следующим образом.

Как можно видеть из представления функций  $\psi(Z_2)$  и  $\psi^*(Z_2)$ , первая моделирует расширение, вторая – сжатие в евклидовом пространстве. Расширение (света) происходит посредством его сжатия. Рассмотрим плоскость  $(|\bullet|_\infty, |\bullet|_2)$ . В произвольной точке  $x$  выполняется гиперболическая зависимость между метриками  $|x|_\infty = c(x) \cdot |x|_2^{-1}$ . Введём лабораторное время наблюдателя  $t$  и рассмотрим метрики как функции этого времени. В силу лежандровой двойственности имеем:  $|x|_2 \propto d_t |x|_\infty$ , где  $d_t$  – производная по времени. Дифференцируя по времени гиперболическое соотношение для метрик и обозначив для простоты  $|x|_\infty = q$ ,  $|x|_2 = d_t q$ , после несложных преобразований получим нелинейное уравнение:

$$\frac{d^2 q}{d t^2} + d_t c \cdot \frac{d q}{d t} - c \cdot (d_t q)^3 = 0,$$

которое имеет частный вид универсального уравнения для осциллирующих систем. Его особенность в том, что вынуждающая сила является не внешней, а внутренней. Оно, очевидно, верно для всех масштабов. Поэтому, например, осцилляция объёма «элементарной» частицы заключается в переходе его вещественного пространства в ультраметрическое, из конвергентного, материального вида в дивергентный, дифракционную решётку. Такое чередование известно как волна де Бройля [85, гл. 1]. Соответственно этому, в четвёрке производных (см. выше о движении) происходит чередование её первого и четвёртого членов, и вся четвёрка распадается на две пары, действующие в разных пространствах, то есть на разных масштабах. Если записать их в конечно-разностном виде с использованием мнимостей, то полная производная

$$\frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} = \frac{|\Delta \xi|_\infty}{|\Delta \eta|_\infty} + i \cdot \frac{|\Delta \xi|_\infty}{|\Delta \eta|_2} + \frac{|\Delta \xi|_2}{|\Delta \eta|_\infty} i \cdot \frac{|\Delta \xi|_2}{|\Delta \eta|_2}$$

определится двумя предельными переходами:  $|\Delta \eta|_\infty \rightarrow 0 \Leftrightarrow (e_2 \rightarrow 0, e_4 \rightarrow 0)$  и  $|\Delta \eta|_2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow (e_1 \rightarrow 0, e_3 \rightarrow 0)$ , что соответствует переходам между  $R^\#$  и  $Z_2$ .

*Детерминизм, случайность.* Рассуждения в п. 4 позволяют увидеть способ сопряжения детерминизма со случайностью, динамики с термодинамикой, моделирования диссипативных структур в смысле И.Пригожина [86]. Эта тема, как и все другие, весьма обширна, поэтому мы ограничимся лишь общими рассуждениями.

Предполагаемый подход может основываться на двойном смысле производной. Например, в четвёрке производных  $e_i$  имеет стандартный смысл скорости механического перемещения, а  $e_4$  — дивергентный, энтропийный смысл, скорости роста энтропии. Кроме того, известное из термодинамики деление переменных на экстенсивные и интенсивные соответствует паре метрик. Архимедова метрика аддитивна, экстенсивна, неархимедова — субаддитивна, интенсивна. Необратимость времени следует из отсутствия отрицательных чисел в  $p$ -адике. Временной параметр также имеет двойной смысл, его 2-адическая компонента необратима. Поскольку 2-адическими числами можно координировать внутреннее пространство системы, например, посредством квадродеревьев, то появляется основание для формализации внутреннего времени системы.

Поскольку пространство числовой асимметрии дисконтинуально, то адекватным вычислительным аппаратом следует считать матричный анализ. Причём в евклидовом подпространстве это обычные матричные операции, например, связанные с разностными схемами краевых задач. В ультраметрическом подпространстве в дело должна включаться кронекеровская техника. Здесь уже явно видна операторная техника функционального анализа. Время и другие параметры в этом случае становятся матрицами, то есть операторами.

13.19. *Химия.* Принято считать, что уравнение Шрёдингера даёт исчерпывающее квантовое описание химических процессов. Однако стоит отметить один момент, который выносится за рамки модели и который связан с её спецификой — наличием делимости как степени свободы. При непрерывной делимости меняется физико-химический смысл меры множества, то есть меняются свойства вещества и/или его частиц. *Масштабная инвариантность геометрии* сопровождается *масштабной детерминированностью свойств материи*. Это явление в практике приложений присутствует под видом многомасштабного или многоуровневого моделирования. Оно по большому счёту ведёт к проблеме математического описания периодической таблицы Менделеева.

Математический образ периодического закона таблицы Менделеева привлекает постоянное внимание [87]. Однако, как нетрудно видеть, периодическая система элементов является дивергентным объектом, на что указывают её многочисленные геометрические формы,

и традиционная линейная структура математических моделей, как мы отмечали в силу *ГЛГ-аргумента*, неспособна адекватно отобразить её суть. Это два разных полюса химии.

Здесь можно усмотреть присутствие *Сущности* естественного языка, движение по которой является одновременно и онтологическим, и гносеологическим — меняются размеры и свойства элементов. Кроме того, приведённые выше рассуждения о гильбертовом пространстве, в представлении 2-адическими числами, также могут послужить отправной точкой для рассмотрения числовой асимметрии в качестве кандидата на роль теории периодической системы.

Этот сложный и очень необычный для математики вопрос требует отдельной работы. Скажем лишь, что известная в теории систем *эмерджентность* (явление возникновения новых свойств), которая в последнее время привлекает внимание также и физиков, часто понимается как *химизм* системной реальности. Однако в этом направлении дальше иллюстративных примеров дело не идёт.

## Литература к главе 13

1. Сачков Ю.В. Макромир и микромир / НФЭ, т. 2, с. 481; Оппен Г.фон. Объекты и окружение // УФН. 1996, т. 166, №6, с. 661–667; Cao Tian Yu, S.Schweiber The Conceptual Foundations and Philosophical Aspects of Renormalization Theory // Synthese 97, p. 33–108, 1993.
2. Heller M. The Ultimate Explanations of the Universe. Springer, 2009, p. 167–168.
3. Бриллюэн Л. Новый взгляд на теорию относительности. М., Мир, 1972, с. 96.
4. Volovich I.V. Number Theory as Ultimate Theory of Physics/ Preprint CERN – TH.4791 1987, p. 13; перепечатано в *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications* 2010, v. 2, p. 77–87.
5. Carter B. Large Number Coincidences and the Anthropic Principle in Cosmology. / In: Longair M. (ed.). Confrontation of Cosmological Theories and Observational Data (IAU Symp.), Dordrecht, Reidel, 1974, p. 281–289; Сухонос С.И. Масштабная гармония Вселенной. М., Новый Центр, 2002, с.16–17.
6. Manin Yu.I. Kolmogorov Complexity as a Hidden Variable of Scientific Discourse: From Newton’s Law to Data Mining // arXiv: 1301.0081v1 [math. HO] 2013.
7. Li M., Vitanyi P. Kolmogorov Complexity and Its Applications. Springer, 1997.
8. Eyink G. Quantum Field Theory on Fractal Space-Time // Commun. Math. Phys. 125(4), 1989, p. 613–636 I. Introduction and Overview; его же v. 126(1), 1989, p. 85–101 II. Hierarchical Propagator; Eyink G. Besov Spaces and Multifractal Hypothesis // J.Stat.Phys. 78, (1995), p. 353–375; Triebel H. Fractals and Spectra. Birkhauser, 1997; Marec-Crnjak I. A Short History of Fractal-Cantorian Space-Time // Chaos, Solitons and Fractals, 41, 2009, p. 2697–2705; Nottalle L. Scale Relativity and Fractal Space-Time.

- WSPC, 2011; Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегродифференцированием дробного порядка. М.—Ижевск, 2011.
9. *Алексеев И.С.* Принцип дополнительности. В кн.: Методологические принципы физики. История и современность. М., Наука, 1975, гл. VIII.
  10. *Jaki S.L.* A Late Awakening to Gödel in Physics // *Sensus Communis* 5 (2004), p. 153–162.
  11. *Barrow J.D.* Gödel and Physics // [arXiv.org/pdf/physics/0612253.pdf](http://arXiv.org/pdf/physics/0612253.pdf).
  12. *Baaz M., Papadimitiou C.H., Scott D.S., Harper C.L. Jr.* Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics. CUP, 2011.
  13. *Паршин А.Н.* Размышления над теоремой Гёделя. В кн. Путь. М., Добросвет, с.67–101.
  14. *Papadimitriou C.H.* Computations and Intractability. Echoes of Kurt Gödel. In [12] Ch.7.
  15. *Pour-El M.B., Richards* Computability and Analysis in Physics, Springer, 1989; da Costa N.C.A., Doria F.A. Undecidability and Incompleteness in Classical Mechanics // *Int. J. of Theor. Physics*, v. 30, no.8, 1991, p. 1041–1073; Calude C. Incompleteness Complexity, Randomness and Beyond // [arXiv: quant-ph/0111118v2](http://arXiv:quant-ph/0111118v2) 2001; Svozil K. Randomness and Undecidability in Physics. World Sci. Singapore, 1993; Svozil K. Undecidability Everywhere? // [arXiv: chao-dyn/ 9509023](http://arXiv:chao-dyn/9509023) v.1, 1995; Svozil K. Indeterminism and Randomness through Physics // [arXiv:0905/0806v2](http://arXiv:0905/0806v2) [physics-hist-ph], 2011.
  16. *Ojima I.* Micro-Macro Duality in Quantum Physics // [arXiv: math-ph/0502038v1](http://arXiv:math-ph/0502038v1) 2005; Demaret J., Heller M., Lambert D. Local and Global properties of the World // *Foundations of Physics* 2(1997), p. 137–176; Lawvere F.W. Unity and Identity of Opposites in Calculus and Physics // *Applied Categorical Structures* 4, 1996, p. 167–174; Atiyah M. Duality in Mathematics and Physics. Lecture Notes, 18 Dec. 2007, Barcelona; Shijun Liao Chaos: a bridge from microscopic uncertainty to macroscopic randomness // [arXiv: 1108.4472v2](http://arXiv:1108.4472v2) [nlin.CD] 3Nov 2011.
  17. *Majid S.* Foundations of Quantum Group Theory. CUP, 2000, sect.6.4; Majid S. Quantum Groups and Noncommutative Geometry // *J.Mat.Phys.* 41, 2000, p. 3892–3942; Heller M. Algebraic Self-Duality as the Ultimate Explanation // *Foundations of Science*, 2004, №9, p. 369–385; Dutkay D.E., Jorgensen P.E.T. Probability and Fourier Duality for Affine Iterated Function Systems // [arXiv:00808.2946v2](http://arXiv:00808.2946v2) [math. FA] 2008.
  18. *Штерн А.И.* Двойственность компактности и дискретности за пределами двойственности Понтрягина // *Труды Математического ин-та им. В.А.Стеклова*, 2010, т. 271, с. 224–240.
  19. *Паршин А.Н.* Дополнительность и симметрия. В кн. Путь. М., Добросвет, 2002, с. 137–170.
  20. *Pattee H.* Evolving self-reference: matter, symbol, semantic closure. In: *Communications and Cognition – Artificial Intelligence*, v. 12, Nos.1–2, p. 9–27, Sp.Issue Self-reference in Biological and Cognitive Systems, L.Rocha (ed.), 1995; Pattee H. Physical and Functional Conditions for Symbols, Codes and Languages // *Biosemitotics* 2008, no.1, p. 147–168.
  21. *Scott D.* Data Types as Lattices // *SIAM J. Comput.* v. 5, no. 3, 1976, p. 522–587.

22. Левин Г.Д. Возможность и действительность / Касавин И.Т. (ред.) Энциклопедия эпистемологии и философии науки. М., Канон+, 2009, с. 118–119.
23. Baryshev Yu., Teerikorpi P. Discovery of Cosmic Fractals. WSPC, 2002, Ch.8; имеется русский перевод.
24. Апресян Ю.Д. Дейксис в лексике и грамматике и наивная модель мира//Информатика и семиотика, 1986, вып. 28, с. 272–298.
25. Ярцева В.Н. Языкознание. БЭС., М., 1990.
26. Падучева Е.В. Высказывание и его соотнесённость с действительностью. Изд. 5-е испр. М., ЛКИ, 2008.
27. Хант Г. О природе сознания. М., АСТ, 2004.
28. Паршин А.Н. Дополнительность и симметрия. В кн. Путь. Математика и другие миры. М., Добросвет, 2002, с. 149.
29. Demaret J., Heller M., Lambert D. Local and Global Properties of the World // Foundations of Physics 2(1997), p. 137–176.
30. Wheeler J.A. Information, physics, quantum: The search for links”. In W.H. Zurek (ed.) Complexity, Entropy, and the Physics of Information. Redwood City, CA: Addison-Wesley. 1990, p. 3–28.
31. Wheeler J.A. World as System Self-Organized by Quantum Networking / In E.Agazzi (ed.). Probability in Science. Dordrecht, 1988; Newton I. The Correspondence. In 7 vols. / Ed. by H.W.Turnbull, J.P.Scott, A.R.Hall, and L.Tilling. Cambridge, 1959-1978. V. 1 (1661–1675), 1959, (приведено по И.С.Дмитриев Неизвестный Ньютон. СПб, Алетейя, 1999, с. 386).
32. Mechini D., Lehto M., Piilonen J. Geometry, Pregeometry and Beyond // arXiv:gr-qc/0411053v3, 2006.
33. Augenstein B. Complexity, Universal Libraries, DNA Sequences // Chaos, Solitons & Fractals, v. 10, no.4, 1999, p. 953–973.
34. Khrennikov A., Schumann A. Quantum Non-Objectivity from Performativity of Quantum Phenomena //arXiv:1404.7077v1: [physics.gen-ph.] 14 Apr 2014.
35. McCauley J.L. Fractals and Chaos. An Algorithmic Approach. CUP, 1995.
36. Грин Б. Элегантная Вселенная. М., УРСС, 2004; Schmidhuber C. Strings from Logic // arXiv: hep-th 0011065v.1 2000.
37. Altaisky M.V., Bednyakov V.A., Kovalenko S.G. Fractal Structure of Quantum Gravity and Relic Radiation // Int. J. of Theor. Physics, v.55, no.2, 1996, p. 253–262.
38. Вечтомов Е.М. Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 29, ВИНТИ, М., 1991, с.119–191.
39. Geroch R. Einstein Algebras // Commun. Math. Phys. 26, 271–275(1972).
40. Rosinger E.E., Khrennikov A. Beyond Archimedean Space-time. / In Advances in Quantum Theory AIP Conf. Proc. 1327, Am. Inst.Physics, N.Y., 2011, p. 520–526.
41. Manin Yu.I. Theory of Computation and Theoretical Physics//atXiv: 1302.6695v1 [cs. CC] 2013.

42. *Volovich I.V.* Number Theory as Ultimate Theory of Physics / Preprint CERN – TH.4791 1987, p. 13; перепечатано в *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications* 2010, v. 2, p. 77–87; Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. *p-Адический анализ и математическая физика*. М., Наука, 1994.
43. *Голубев С.Н., Голубев С.С.* Взгляд на физический микромир с позиции биолога. Владивосток, Дальнаука, 2009, часть 2, п.2.6; Голубев С.Н. Квазикристаллическая структура вакуума. М., Либроком, 2013, с. 14, 16–17, 65.
44. *Oldershaw R.L.* Self-Similar Cosmological Model: Introduction and Empirical Tests // *Int. J. of Theor. Physics*, v. 28, no.6, p. 669–694, 1989; Oldershaw R.L. Discrete Scale Relativity. *Astrophysics and Space Science*, v. 311, no. 4, p. 431–433, October 2007; Yun Pyo Jung. *Infinite Universe In A Mote (Fractal Cosmology)*, Sagyejul Publishing Co., 1994. Сухонос С.И. Масштабная гармония Вселенной. М., София, 2000.
45. *Джекив Р.* Знакомьтесь с масштабной симметрией // *УФН* 1973, т. 109, вып.4, с.743–754.
46. *Аракелян Г.Б.* Фундаментальные безразмерные величины. Ереван, Изд. АН, 1981; Аракелян Г.Б. Числа и величины современной физики. Ереван, 1989.
47. *Rindler W.* Godel, Einstein, Mach, Gamow and Lanczos: Gödel’s Remarkable Excursion into Cosmology. In [12]. Ch.9.
48. *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия. М., Наука, Физматлит, 2003.
49. *Голубев С.Н.* Квазикристаллическая структура вакуума. М., Либроком, 2013, с. 14–15.
50. *Frieden B.* Science from Fisher Information. CUP, 2004.
51. *Durham I.T.* Contextuality: Wheeler’s Universal Regulating Principle // arXiv: 1307.3691v1 [quant-ph] 14Jul 2013; Khrennikov A., Schumann A. Quantum Non-Objectivity from Performativity of Quantum Phenomene // arXiv:1404.7077v1 [physics.gen-ph] 4 Apr 2014.
52. *Flagg B., Kopperman R.* Computational Models for Ultrametric Spaces // *Proc. of Mathematical Foundations of Programming Semantics* 13, ENTCS, v. 6, 1997; Edalat A., Sunderhauf P. Computable Banach Spaces via Domain theory // Elsevier Preprint, 2 June, 1998; Stoltenberg-Hansen V., Tucker J.V. Computability on Topological Spaces via Domain Representations. U.U.D.M. Report 2007:17 ISSN 1101–3591, Dept .of Math. Uppsala University.
53. *Agnes C., Rasetti M.* Undecidability and Chaos in Word-Coded Symbolic Dynamics // *Chaos, Solitons and fractals*, v. 5, no. 2, 1995, p. 161–175.
54. *Soler M.P.* Characterization of Hilbert Spaces with Orthomodular Lattices // *Commun. Algebra* 23, (1995), p. 219–243; приведено по Holland S.S. Jr. Orthomodularity in Infinite Dimensions // *Bulletin of AMS*, v. 32, no. 2, p. 205–234.
55. *Macyntire A.* Twenty Years of *p*-Adic Model Theory / *Logic Colloquium’84*. J.B. Paris, A.J. Wilkie, G.M. Wilmers (eds.), Elsevier, NH, 1986.
56. *Myhill J.* A System which can define its own truth // *Fund. Math.* XXXVIII, 1950, p. 190–192.

57. *Robert A.* A Course in  $p$ -Adic Analysis. Springer, 2000, p. 321–323.
58. *Blair D.* Inversion Theory and Conformal Mappings. AMS, 2000.
59. *Weinrauch K.* Embedding Metric Spaces into CPO's // TCS 16 (1981), p. 5–24.
60. *Исмагилов Р.С.* Ультраметрические пространства и связанные с ними гильбертовы пространства // Мат. заметки, том 62, вып.2, 1997, п.1, с. 224; *Lemin A.* Isometric Embeddings of Ultrametric (non-archimedean) Spaces in Hilbert space and Lebesgue space. In:  $p$ -Adic Functional Analysis (Ioannina), v. 222, of Lect. Notes of Pure Appl. Math. Marcel Dekker, 2001; *Lemin A.* On Ultrametrization of General Metric Spaces // Proc. Of AMS, v. 131, no. 3, p. 979–989, 2004.
61. *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу. М., МЦНМО, 2004.
62. *Lemin A.* Isometric Embeddings of Ultrametric (non-archimedean) spaces in Hilbert space and Lebesgue space. In:  $p$ -Adic Functional Analysis (Ioannina), v. 222, of Lect. Notes of Pure Appl. Math. Marcel Dekker, 2001; *Lemin A.* On Ultrametrization of General Metric Spaces // Proc. Of AMS, v. 131, no.3, p. 979–989, 2004.
63. *Cuntz J.* Simple  $C^*$ -algebras generated by isometries // Comm. Math. Phys. 57(1977), p. 173–185; *Kajiwara T., Watatani Y.*  $C^*$ -algebras associated with self-similar sets//arXiv.math/0312481v2 [math.OA] 2004; *de Castro G.G.*  $C^*$ -algebras associated with iterated function systems // arXiv: 0811.1482v1 [math.OA] 2008.
64. *Weaver N.* Set Theory and  $C^*$ -algebras // arXiv: math.LO / 0604198v1, 2006.
65. *Вечтомов Е.М.* Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. Т.29, ВИНТИ, М., 1991, с.119–191.
66. *Диксмье Ж.*  $C^*$ -алгебры и их представления. М., Наука, 1974.
67. *Ellis G.F.R.* Physics and the Real World // Physics Today 58, 2005, p. 49–55; *Ellis G.F.R.* Physics, Complexity and Causality // Nature 435 (2005), p. 743; *Anderson P.W.* More is Different // Science, (N. S), v. 177, no. 4047, 1972, p. 393–396.
68. *Владимиров Д.А.* Теория булевых алгебр. СПб., 2000.
69. *Флоренский П.А.* Мнимости в геометрии. М., 2004, 2-е изд.
70. *Петров Ю., Петров Л.* Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. СПб., 2005.
71. *Robert A.* A Course in  $p$ -Adic Analysis. Springer, 2000.
72. *Джеммер М.* Понятие массы в классической и современной физике. М., Прогресс, 1967.
73. *Окунь Л.Б.* Понятие массы // УФН 1989, том 158, вып.3, с. 511–530.
74. *Schikhof W.* Ultrametric calculus. CUP, 1984.
75. *Домрачев Г.А., Лазарев А.И.* Приложение теории алгебраических систем для создания иерархии структур твердых тел, образующихся при равновесных и неравновесных условиях. ФТТ, 1999, т. 41, вып.5, с. 799–804.
76. *Robert A.* A Course in  $p$ -Adic Analysis. Springer, 2000.
77. *Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.* Theory of  $p$ -Adic Distributions. CUP, 2010.

78. *Phatak S.C., Rao S.S.* Logistic Map: A possible random number generator // *Phys. Rev. E* v. 51, no.4, p. 3670–3678.
79. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей, М., Радио и связь, 1990.
80. *Collins J.J., et. al.* A random number generator, based on logit transform of logistic variable // *Computers in Physics* v. 6, no.6, 1992, p. 620–622.
81. *Голубев С.Н.* Квазикристаллическая структура вакуума. М., Либроком, 2013.
82. *Успенский В.А.* Четыре алгоритмических лица случайности. МЦНМО, 2006.
83. *Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.* *p*-Адический анализ и математическая физика. М., Наука, 1994, с. 42–43.
84. *Oscillating Universe* // Wikipedia – интернет энциклопедия.
85. *Голубев С.Н.* Квазикристаллическая структура вакуума. М., 2013.
86. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М., Комкнига, 2006.
87. *Mazurs E.G.* Graphic Representations of Periodic System During One Hundred Years. Alabama. 1974, *Имянитов Н.С.* Уравнения для закона ... Менделеева // *Природа*, №6, с. 62–69, 2002; *Кораблёва Т.П., Корольков Д.В.* Теория периодической системы. Изд-во СПбГУ, 2005; *Дидык Ю.К., Астафьева Э.М.* Зеркальная симметрия в структуре атомов и периодичности элементов. СПб., Химиздат, 2008; Rourvey King (eds.). *The Mathematics of the Periodic Table.* Nova Science Publ. 2006.



## Глава 14

### Религия, высшая реальность

*Введение.* Поскольку Слово (язык), Жизнь (биология), Свет (физика) и Истина (двойственность в основах математики) являются немногими из бесконечного числа имен Бога, то логическим продолжением предыдущих глав видится попытка исследования связи математических понятий числовой асимметрии с религиозным мировоззрением.

Прошедший век знаменателен не только успехами точных наук, но и нарастающим осознанием их ограниченности, поиском новых научных парадигм и горизонтов. Наиболее значительным в этом процессе переосмысления основ новоевропейской науки является рост интереса учёных-естественников к проблемам религии, синтезу научных и богословских истин как дополнительных и даже *зеркально симметричных* (Дали Г., цит. по [2, с. 28]; Льюис К.С. в [7, с. 55]; Паршин А.Н. Путешествие Данте в ад, Дополнительность и симметрия, Античная натурфилософия и современная наука, Наука и религия во взглядах П.А.Флоренского, Свет и Слово. [4]). Укажем немногие работы, принадлежащие учёным-естественникам [1–17]. Философским работам несть числа, укажем лишь некоторые [18–27]. Симптоматично также появление энциклопедий, посвящённых синтезу [28–30] и содержащих обширную литературу.

Это явление можно считать сутью сдвига парадигмы от физико-математической науки к человеку, то есть фактически к биологическому мировоззрению (физику и математику делает всё же биологическая материя, обратное, как показала кибернетика, неверно!). Обе стороны диалога отмечают фундаментальную значимость религиозного мировоззрения для бытия человека:

«... что же делать, чтобы улучшить эти отношения? ... дело в том, что в данной ситуации граница конфликта проходит через сердце каждого человека (особенно верующего, который одновременно занимается

наукой). Человеческую личность нельзя разделить на сферы влияния. ... Ответ на вопрос «что делать?» следует искать, уважая своеобразие и целостность как наук, так и религии. ... Быть окружёнными ценностями и смыслами даже более важно для нас, чем воздух или пища. Без воздуха и пищи мы вынуждены умереть, без смысла и ценностей мы просто не были бы людьми. ... Замалчивание ценностей — цена, которую приходится платить за эффективность научного метода. ... Только живя в мире Ценности и Смысла, стоит заниматься наукой» [Хеллер М. Творческий конфликт. О проблемах взаимодействия научного и религиозного мировоззрения. М., ББИ им. св. ап. Андрея, 2005, с. 70–73].

«Лунный ландшафт редукционистской науки, игнорирующей всё, кроме материи, не место для жизни людей» [Полкинхорн Дж. Вера глазами физика. М., ББИ им. св. ап. Андрея, 2001, с. 20].

«Мы должны переоткрыть божественное» [Kauffman S. At Home in the Universe Oxford U.P., 1995, p. 392–394].

«Конечно же, наука не должна противоречить истинам веры. И если она всё же им противоречит, то не вера не права (наивна, несовременна, архаична), а наука всё ещё не развита» Паршин А.Н. в [4 с. 212].

«... безбожие — это научное недоразумение, это отказ от исследования всей реальности, это так же ненаучно, как сказать, что для меня музыка не существует и потому её нет. ... это нежелание принять свидетельство хотя бы истории, хотя бы отдельных людей» [Антоний, митрополит Сурожский. Человек перед Богом. Паломник, 2001, с. 43].

Интуиция видных учёных говорит в пользу возможности достижения согласия. Хорошо известна мысль Н.Бора о дополнительности истин и языков религии и физики, которая многократно повторялась исследователями [2, 3]. А.Н.Уайтхед также имеет в виду дополнительную, по сути, степень свободы в мировоззрении науки:

«... Этот конфликт свидетельствует о том, что существуют более полные истины и более благоприятные перспективы, в рамках которых может произойти примирение между сокровенными религиозными взглядами и более тонким научным пониманием. ... В формальной логике противоречие является сигналом бедствия, но в развитии реального знания оно означает первый шаг к победе» [Уайтхед А.Н. Избранные работы по философии. М.: Прогресс, 1990, с. 242–243, 246].

Конфликт между наукой и религией является, в сухом остатке, конфликтом между психомоторной, абстрактной и психосенсорной, связанной картинами мира. Вторая полнее первой, так же как двухполушар-

ное целостное мышление богаче редуцированного левополушарного. Когда говорят, блокируя более широкий контекст рассмотрений современных гуманитарных, экологических и духовных проблем, что «наука доказала ...!», то имеют в виду именно математическую доказуемость и однозначность. Это является не вполне точным — само понятие доказательства и строгости имеет исторический характер [31, с. 106–155], оно также лишено «биологической компоненты» — восприятия и психики человека [32]. Вдобавок современное математическое образование выстроено под две физические теории: квантовую механику и теорию относительности. Как следствие, многие структуры математики остаются в тени как лакунарные, внутриматематические конструкции. Они не получают должного общенаучного осмысления, а их понятия — адекватной интерпретации. Такими являются  $p$ -адические числа, результаты о независимости в аксиоматических системах, доказательство существования неаксиоматизируемых систем, и другие близкие им. Как пытался показать автор в предыдущих разделах, посвящённых математике бинарности фракталов, двойственности математической реальности, естественному языку, сознанию и биологии, эти немые конструкции оживают именно в области парадоксов, антиномий и дополнительности в широком смысле этих слов. Оппозиция религиозной и научной картин мира является одной из них.

Поэтому проблема синтеза двух картин мира сводится к вопросу адекватности современной версии математики внешнему миру. Вновь встаёт тень зеноновых апорий — проблема связи понятий и чувств, логики и очевидности.

«Сегодня, пройдя этап безусловного разделения предмета и понятия в знании, мы снова подошли к осознанию их органического единства, основанного уже не на тождестве в мышлении, но на врождённой внутренней способности мышления человека к экстраполяции. ... что такое знание? Как оно возможно? Какова его соотносённость с миром объективным и миром субъективным? Иными словами, КАКИМ ОБРАЗОМ ОБЪЕКТ ВКЛЮЧЁН В СТРУКТУРУ ПОНЯТИЯ, А ПОНЯТИЕ СТАНОВИТСЯ СОБСТВЕННОЙ СТРУКТУРОЙ ОБЪЕКТА? ... Но как, каким образом может быть постигнут объект, включающий в себя «всё существующее»? Что может дать нам уверенность в том, что это вообще возможно? Таковую возможность и такую уверенность даёт нам экстраполяция ... Человек сущностно един с Природой (Вселенной), и даны ему не только её интуитивное чувство и эмоциональное познание, но и диалектическая ВЗАИМООПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ. ... Именно эта

мысль содержится в идее действительной экстраполяции – в той её форме, которая включает в себя онтологическое бытие человека с его эмоциями, движениями души и верой. ... Возвращение человека в онтологию есть первая попытка приблизиться к действительной экстраполяции в той её форме, когда Вселенная включит в себя индивида как необходимый структурный элемент своего собственного онтологического существования» [Селиванова В.И. 18, с. 27–28, 160, 165, 185].

Критерий возможности синтеза научного и религиозного мировоззрения сформулирован Б. Расселом:

«Суть вопроса заключается в следующем. Есть ли нечто, о чём мы можем составить мысленное представление, для которого (этого нечто) одно то, что мы можем составить о нём мысленное представление, является доказательством существования того, что вне наших мыслей. ... Если утвердительный ответ правилен, то мы можем перебросить мост от чистой мысли к фактам, если неправилен – не можем» [Рассел Б. История западной философии. Новосибирск, 2001, гл. IX].

Известен ответ Парменида: «Мыслить и быть – одно и то же», «Одно и то же мышление и то, о чём мысль» [33]. Этот ответ толкуется на разные лады различными авторами. Многочисленные мнения и варианты решения проблемы синтеза имеют одну общую черту. Все они ограничены явно или неявно физическим значением терминов и понятий. Это является следствием физико-математической экспансии в естественные и даже гуманитарные науки, создавшей так называемый «невидимый университет». Выхода из этого замкнутого круга физико-математических понятий не видно. В то же время Г. Хант даёт ответ Б. Расселу в форме обоснованного вопроса-заключения, поддерживающего мысль Парменида:

«Ранее я говорил, что в науках о человеке нет никаких оснований считать, что «объяснение» опыта и поведения тем самым делает недействительным совершенно другой модус «понимания». Понимание и объяснение – это две разные познавательные позиции, которые встречаются и порой сталкиваются как в повседневной жизни, так и во многих дисциплинах, ставящих целью познание нашей собственной природы. Конечно, XX век был свидетелем беспрецедентных достижений в “объяснении” физической и биологической Вселенной. В то же время мне неизвестны никакие обоснованные доводы, которые бы показывали, что выражения человеческой природы в каком-

то смысле ошибочны по сравнению с представлениями физических наук. На самом деле последние сейчас сражаются с относительностью, дополнительностью и индетерминизмом, которые всегда были присущи всякому выразительному самоописанию. С этой точки зрения, “религия” должна быть ни чем иным, как преобразованием физической реальности (на том уровне, на котором её знает и объясняет данная культура) в самосоотносительную метафору. Различие между нами и традиционными культурами состоит в том, что за внезапным расширением и непрерывной реорганизацией нашего знания Вселенной лишь крайне неуверенно и с оглядкой последовали соответствующие неизбежные попытки “понимать” её, в конечном счёте, как наш дом. Таким образом, одни и те же структуры “смотрят” “внутрь” или “наружу” – с необходимой неопределённостью в отношении того, что есть то, о чём писал Хайдеггер. “Взгляд наружу” — это специальное расширение восприятия, составляющее физическую науку, а “взгляд внутрь” — метафорическое зеркало, предоставляемое природой, концептуализируемой таким образом. Почему для символического существа, чей мир основан на диалоге с “другим” и вхождении в его роль, одно из этих направлений должно быть “истинным”, а другое “ложным”?» [Хант Г. О природе сознания. М.: АСТ, 2004, с. 372–373].

Ранее мы уже реконструировали пространство Парменида с помощью числовой асимметрии как пространство зеноновых апорий, пространство антиномий. Оно позволяет перейти от логических тупиков и конфликтов к сосуществованию оппозиций и выйти за пределы физического универсума. В нём мы и будем искать путь к согласованию научной и религиозной картин мира.

Известно, что вопрос «существует ли Бог?» делит человечество на две половины. Для верующих здесь нет вопроса, для неверующих — ответа [18, с. 180]. Мы продолжим наши рассуждения, используя для этого рассмотрения предыдущих глав: языка, сознания, биологии и физики, а также математические рассуждения А.Н. Паршина, в надежде показать, *в чём может содержаться ответ для неверующих. Это путь естественного богословия, выводящего существование Бога из явлений Природы.*

Отметим следующее обстоятельство. В рассматриваемой области, так же как и в апориях Зенона, пути к решению проблемы уже найдены и высказаны многочисленными авторами во множестве весьма точных формулировок. Так же как и в приложениях математики, каждый термин на границе богословия и науки превратился в отдельное научное направление с богатой литературой. Охватить это многообразие в рамках нашего рассмотрения невозможно. Мы ограничим-

ся лишь общим суждением. Все высказанные решения, если они не сформулированы в рамках языка теоретической механики, то есть тех, для которых справедлив ГЛГ-аргумент, могут быть приняты как более или менее развитые виды решения вариантов диалога. Особенно содержательны рассуждения учёных-естественников – либо чутких к существованию «тонкого мира», либо являющихся одновременно священнослужителями. Их мнения для нас играют первостепенную роль. Анализ собственно религиозной литературы может, конечно, привести к пересмотру и корректировке результатов нашего опыта, но этот огромный труд есть дело отдельной работы и, скорее всего, не одного человека. Мы поэтому ограничимся теми опорными точками, которые уже сформированы участниками диалога.

Общей проблемой всех обсуждений и поисков является отсутствие природного и формального референтов для религиозных понятий, что составляет резкий контраст с понятиями науки. Из-за этого религию, как правило, относят к потустороннему, внеприродному миру. Однако можно напомнить о математической содержательности «пустого и бесплодного воображения», к которому часто относят религиозное мировоззрение. «Воображаемая геометрия» Н.И.Лобачевского и «Воображаемая логика» Н.А.Васильева послужили основой нового понимания пространства-времени в физике и паранепротиворечивых логик в математике. Богословские, мировоззренческие и естественнонаучные тексты П.А.Флоренского настолько пронизаны математическими идеями, что назвать его усилия по поиску союза между религией и математикой иначе как «воображаемой математикой» трудно. Общей чертой этих «воображений» является отказ от закона исключённого третьего, принятие истинности физически неверного постулата.

В этом разделе мы рассмотрим в качестве кандидата на предметную область религиозных понятий  $p$ -адические числа и числовую асимметрию вообще.

1. *Научное содержание* диалога сегодня представлено, помимо основных теорий физики, нелинейной динамикой (см. обзор в [2, 3, 7, 24, 34] и алгебраическим вариантом предгеометрии физики М.Хеллера [7].

Изолированными пока остаются космос И.Ньютона с его нематериальным действующим агентом эфиром и присутствием Бога как причины движения и существования видимого мира, в основе которого Ньютон видел также пару «конвергенция–дивергенция» [35, гл. «Космос Исаака Ньютона»], онтологическое доказательство К.Гёделя существования Бога средствами модальной логики и ряд идейно связанных работ, описывающих тонкий, эфирный мир посредством проективной геометрии [36–39].

Модальная логика использует операторы, которые чужды стандартной математической физике. Видимо, поэтому все попытки развить онтологический аргумент Гёделя наличными техниками пока остаются неубедительными. Модальная логика является расширением булевой присоединением вариантов операторов *необходимо* и *возможно*, понимаемых более широко как изучение лингвистических конструкций, касающихся знания, веры, темпоральности и этики. Эта черта — многозначность нефизического, человекообразного, смысла интерпретаций её операторов — выглядит дополнительной к спектру физических интерпретаций булевой алгебры, и в этом её привлекательность [40]:

necessarily	in all possible worlds
possibly	in some possible world
henceforth	at all future times
eventually	at some future time
it is valid that	in all models
it is satisfiable that	in some model
after the program finishes	after all terminating executions
the program enables	there is a terminating execution such that

Как видно, левый столбец представляет пару *Единое—Многое* Платона в виде *конвергентно-дивергентных* или *суммирующе-избирательных* пар, помещённых в правый столбец. Возможно, используя наши рассуждения в гл. «Математическая физика», развив представление реального мира оппозицией *возможное—действительное*, стоит попробовать придать модальной логике общенаучный статус, в котором доказательство Гёделя обретёт новые потенции. Но это предмет отдельной работы.

Проективная геометрия в указанных работах понимается не аналитически, как она традиционно излагается в курсах и монографиях, а как единственная, к тому же универсальная, включающая все остальные, геометрия с *источником света*, где роль прямых играют световые лучи: «Проективная геометрия — это вся геометрия» (А.Кэли). Известны соответствия между числовыми системами и геометрией *архимедово R — евклидова геометрия, фракталы — неархимедово Q<sub>p</sub>* [41]. Имея в виду двумерность человеческого восприятия, эти соответствия расширяются до «*чувственное видение (M-наблюдатель) — архимедово R — евклидова геометрия*», «*умное видение (W-наблюдатель) — фракталы — неархимедово Q<sub>p</sub>*». Такое проективное пространство авторы представляют как оппонентное к евклидову (*counterspace, antispace* — англ.), говоря уже об общей фундаментальной полярности всего пространства [37, р. 186]. Абсолют тонкого, эфирного (под)пространства может быть расположен в любой его точке (т.е. как в *p*-адике), и точки его, в противовес бесконечным длинам евклидова пространства, имеют бесконечную глубину [37, р. 251], то

есть нефундированы. Именно в этом эфирном пространстве развивается жизнь — центробежные антигравитационные силы позволяют растениям расти против силы тяжести [37, р. 264]. Это чисто биологический феномен — движение животного против действующей силы навстречу опасности — не раз отмечалось в литературе.

Это толкование пространства смещает внимание с чувственных, физических характеристик к опыту чистого видения, переносит акцент с части на целое [37, р. 18–20]. Это геометрия о взаимосвязях между формообразующими сущностями, о непространственных, эфирных, тонких и подвижных процессах, которые имеют место *В* и *ВОКРУГ* материального мира [37, р. 49]. Если в евклидовом пространстве происхождение объектов неизвестно, то в проективном они образуются проекцией из источника света (соответствующие результаты из фрактальной теории см. в [42, 43]). Объекты, состоящие из пустых точек, переходят в объекты, состоящие из точек, линий и поверхностей (т.е., по сути, в объекты с фрактальной структурой). Формы и фигуры в евклидовом пространстве статичны, в проективном — подвижны. Линии проективной геометрии невидимы для чувственного зрения и могут быть восприняты только умом. Если убрать источник света, то вся картина исчезает.

Этот вариант проективной геометрии с её парами сил «центробежные—центростремительные», «сжатие—расширение», «гравитация—антигравитация» [38, р. 288] может быть понят как ультраметрический прообраз традиционного вещественнозначного её варианта. В качестве формообразующих процессов у нас выступают варианты пары *конвергенция—дивергенция* в проективном пространстве числовой асимметрии. Соответственно, здесь мы имеем дело с информационной Вселенной Уилера и нелинейной, нецифровой, некомпьютерной моделью сознания, языка и биологии (учит ли Природа математическую физику — вопрос, кочующий по литературе).

Некоммутативная геометрия, в толковании М.Хеллера [7, с. 117–1186, 121–122, 130–131, 135–136], расположена ниже планковских пространственно-временных ограничений (т.е. в актуально бесконечной делимости. — *Ф.М.*), представляет собой нелокальное и вневременное бытие (т.е. Блок-Вселенная. — *Ф.М.*), где процессы, пространство и время — неразличимы, где всё связано со всем и нет ограничивающей скорости распространения сигнала, где возможна свобода воли у твари — сотворённого Богом существа. О такой Вселенной, о таком божественном устройстве можно говорить только «ценою разрушений синтаксических и семантических правил обычного языка» (см. ниже. — *Ф.М.*). В этой предгеометрии точки неразличимы (неразрешимость фракталов. — *Ф.М.*) и пространство-время заменяется  $C^*$ -алгеброй



функций. Далее Хеллер ставит вопрос о «незаконных скачках» от уравнений к бытию, от материи к языку и сознанию. В частности, это видно из того, что уравнения физики бытийственны, а не логически, должны предшествовать Большому Взрыву. В отличие от науки, естественного языка эта проблема не знает. Вывод Хеллера:

«На мой взгляд, то, что кажется незаконным скачком с точки зрения нашей сегодняшней логики, является фундаментальной стратегией природы в решении её самых насущных задач (таких как происхождение жизни и сознания). ... Моя гипотеза состоит в том, что «аристотелевская логика» — слишком упрощённая, чтобы справиться с проблемами, понимаемыми в этой главе. ... Нам нужна ещё не одна нестандартная логическая система, построенная путём изменения или отказа от той или иной аксиомы, того или иного вывода, нам нужно что-то радикально новое, нам нужна революция с далеко идущими последствиями, сопоставимая с переходом от линейной к нелинейной физике» [7, гл. 12, с. 171].

В положениях упомянутого варианта проективной геометрии, алгебры функций и эфира И.Ньютона уже можно усмотреть референт для понятий богословия — тонкий мир границ, лучей света, форм, траекторий движений, — что сближает их с нашей схемой. Эти аналогии мы, однако, развивать не будем. Обратимся к не раз отмеченной проблеме языка [2, с. 162; 7, с. 121–122]. Её суть в недостаточности научного языка для толкования понятий религии.

2. *Вопрос о языке* сводится к вопросу, на каком языке может быть описан объект, включающий в себя *всё существующее*, в том числе сам язык и формализмы науки. Всякое выражение наличного человеческого языка может быть понято как языковая номинация, то есть выделение некоторого объекта из более широкого контекста. Объект же, характеризующийся парадоксообразующими словами ВСЁ, СУЩЕСТВОВАНИЕ, СУБСТАНЦИЯ, БЫТИЕ, не может быть описан в конвергентной логике физико-математической науки, в теориях и их языковых производных, опирающихся на существование начальной точки, то есть аксиоматически.

«Проблема, которая возникает в контексте знания о Боге, состоит в установлении отношения между нашим мышлением и речью, с одной стороны, и божественной реальностью, о которой мы говорим, — с другой. Проблема в том, что имеется несоответствие между способом нашего познания и Богом как объектом нашего познания» [Торранс Т. Пространство, время и воплощение. М.: ББИ, 2010, с. 118].

«... богообщение предполагает явления, открываемые человеку на дотеоретическом уровне (т.е. на уровне дискурсивного мышления). Проблема философского оформления богословия и состоит в том, как теоретически выразить явления, относящиеся к дотеоретическому опыту. Например, как задействовать мышление и язык для того, чтобы выразить то, что не может быть помыслено и о чём невозможно говорить, то есть выразить то, что превосходит пределы конституирующего его. Другими словами, как возможно удержать трансцендентность божественного, говоря и думая о нём в имманентных рамках человеческой субъективности?» [Нестерук А. Примечание 2 в 25, с. 118–119].

Асимметричный дуализм лингвистического знака означает, однако, что помимо конвергентной языковой номинации, естественный язык содержит и дивергентную, обратную перспективу. В теории сознания аналогичная пара представлена осями *sensus communis* и *aion-psyche* [44]. Эти факты воспроизводят функциональную асимметрию природы, представленную в нашей интерпретации числовой асимметрией, воспроизводящей алфавитное единство языковых и числовых систем на дотеоретическом уровне. (Иначе как возможна была бы теоретическая наука, т.е. математическая физика, не имеющая ничего общего с естественным языком и сознанием?!). Поэтому имеет смысл обратиться к истокам языка – гипотетическим праязыку. В проблеме происхождения языка, если оставить в стороне все его «аксиоматические», то есть имеющие начало, варианты – звукоподражательную, трудовую, коммуникативную и прочие теории [45, с. 173], выделяется неаксиоматизируемая теория божественного происхождения языка, выдерживающая критику с момента её формулировки и по сей день. Её суть в том, что язык есть изначально заложенная в человеке языковая способность, на основе общности которой для всех людей, рас и народов становятся возможными коммуникация и развитие знаковых (и числовых) систем. Если бы не было этой общей основы, не были бы возможны переводы с языка на язык, понимание древних авторов и книг, не было бы истории и памяти человечества. (Для сравнения можно обратиться к дифференцированному формальному языку математики: здесь перевод между её разделами – явление крайне редкое и нетипичное). Второе соображение в пользу этой теории заключается в том, что если бы язык (и сознание) не был бы *alter ego* мира и его «структурного» элемента – человека, не был бы его органом восприятия, то он, однажды возникнув, не развивался бы и угас с изменением условий существования человека. Пусть читатель попробует ответить на вопрос: «Как выглядел бы мир, если бы его (читателя) родители однажды не встретились?».

Приемлемый ответ на поставленный в начале раздела вопрос мы находим у А.Н.Паршина в его интерпретации 2-адических чисел (см. ниже) и в работах биолога Е.В.Терёшиной [46]. Терёшина связывает возникновение языка с чередованием оппозиций *свет—тьма*, *сжатие—расширение* и им синонимичных, единых для окружающего мира и человека, и показывает путь к пониманию пары *образ—линейное письмо*. Образ передаёт божественную идею, слово — энергию. Слово есть имя как тварного мира, так и не проявленного.

«Праязык возник одновременно с пракультурой, они выросли на основе некоего единого представления человека об окружающем мире и о самом себе. ... Основной закон мироздания — это детерминированность чередования противоположных событий. К таким событиям относятся «мрак—свет» («ночь—день», тёмное время года—светлое время года), а также «холодное—горячее». ... Свет и жар — некие абсолютные величины, которые то появляются, то исчезают. ... В антиномии «расширение—сжатие» отрезок стягивается в точку, которая является его центром (серединой), а точка растягивается в отрезок. ... Язык в своих звуках и словах, в своих письменных знаках и числах дарован человеку небом в прямом смысле этого слова» [Терёшина Е.В. Праязык. М.: ЯСК, 2008, с. 3, 5, 6, 18, 37].

Рассмотрения Паршина, основанные на  $p$ -адических числах, и гипотеза Терёшиной очевидным образом согласуются друг с другом и с приведённым выше вариантом проективной геометрии в контексте нашей схемы бинарности фракталов и основ математики. Поэтому о союзе науки и религии имеет смысл говорить на этом праязыке, универсальная грамматика которого состоит из оппозиций *конвергенция—дивергенция* и их вариантов, рассмотренных нами ранее. Формальный аналог праязыка в нашей схеме — числовая асимметрия, допускающая к жизни антиномии как дополнительность. При таком подходе язык, сознание и Природа оказываются одновременными и единосущностными с существованием человека как биосоциального существа. Заметим, что такой выбор праязыка находится в согласии с математической по сути идеей универсальной библиотеки [47], имеющей очевидную 2-адическую интерпретацию.

Кроме прочего заметим, что числовая асимметрия как формальный аналог функциональной асимметрии природы и её фрактальной геометрии носит *имманентно-трансцендентный* характер в силу физической неопределимости границ, которые не есть материя и не есть что-то отличное от неё. Иными словами, принимаемая нами версия праязыка содержит «трансцендентные ссылки», она открыта сверху,

воспроизводит как понятия нашего вещного мира, так и измерение, то есть иерархию, ведущее за его пределы [25, с. 85–88]. Универсальность 2-адических чисел в нашей интерпретации есть подлежащее объектам вещного мира, и воспроизводит трансцендентные потенции естественного языка, сознания, биологии. Отсюда наша надежда, что этот праязык причастен к Абсолюту, то есть к Слову Божьему.

3. *Антиномизм П.А.Флоренского*. П.А.Флоренский был, пожалуй, первым в XX веке учёным-математиком, который систематически обращался к проблеме синтеза науки и богословия. Особенностью текстов Флоренского является то, что в них как явно, так и неявно присутствуют понятия математической логики, предвосхищающие, в частности, теорию моделей и нефундированные множества. Обращение к глубинной семантике и этимологии слова является постоянным элементом его метода: слово аналогично «свившемуся в комок предложению, а предложение – свободно распутившемуся слову». Отсюда то, что известно как *антиномизм П.Флоренского* – черта, выделяющая его из круга всех, занимавшихся проблемой диалога. Можно сказать, что рационализм Флоренского – двухполушарный, то есть его *научное* мышление осуществляется сразу обоими полушариями мозга: «для искания (*истины – Ф.М.*) мы должны выйти за пределы рассудка ... по праву, которое даёт нам сам рассудок: он нас к этому вынуждает» [48, с. 61]. Мы кратко остановимся на основных положениях его метода.

1. Основное действие Бога, «творца всего видимого и невидимого», – деление всего сотворённого на «небо и землю» – позволяет Флоренскому рассматривать мир как состоящий из видимого (у нас –  $R^{\#}$ ) и невидимого (у нас – нульмерное  $Q_2$ ), соприкасающихся на границе (у нас – рациональные числа  $Q$ , физически наблюдаемые объекты и явления с «усечённой» фрактальной структурой), которая их разъединяет и соединяет (у нас – имманентность и трансцендентность границ бесконечного деления материи). Невидимый мир как бы вывернут наизнанку по отношению к миру видимому. Тогда причина переходит в цель, невидимый мир телеологичен (у нас – взаимно обратный порядок полурешёток  $R^{\#}$  и  $Z_2$ ). Невидимый мир так же реален, как и мир видимый (вещественные и  $p$ -адические числа неотмысливаемы друг от друга [49]. Математически о. Павел характеризует «тонкий мир» как мнимый в своей интерпретации мнимостей [50]. Показательно то, что его интерпретация мнимостей, опирающаяся на более ранние математические работы, вызвала понимание со стороны философов и гуманитариев, но столкнулись с отторжением и молчанием со стороны материалистической науки (так же как и в случае с фрактальной геометрией) [51]. В нашей схеме мнимой единице соот-

ветствует инволюция, которая соответствует переходу на противоположную сторону плоскости (как в «Мнимостях...» о. Павла), поскольку сплошная плоскость  $R^2$  у нас заменена фрактальной, на которой такой переход не встречает возражений. Математическое оправдание идеям Флоренского дано в [Паршин А.Н. Путешествие Данте в ад., в. [4], с. 134–138]. Если взглянуть за пределы математики, то, как известно, телеология – существенная компонента в биологии и общей теории систем, в частности в теории управления и принятия решений, где понятие цели имеет равные права с остальными.

2. Рассуждения Флоренского не ограничены второй теоремой Гёделя, поэтому он включает истину в универсум, предвосхищая общенаучную идею дополнительности Н.Бора. Этот шаг позже будет оправдан арифметикой Пресбургера:

«всё внимание наше сосредотачивается на двойственном по составу, но едином по идее положении: Истина есть интуиция. Истина есть дискурсия, или проще – **Истина есть интуиция-дискурсия**» [Флоренский П.А. [48, с.61].

3. Мы находим описание диадического дерева в форме (см. также Паршин А.Н. Идеальные числа Платона // с сайта bfrz.ru):

«Дискурсивная интуиция есть интуиция дифференцирования до бесконечности (т.е. бесконечная делимость Улама и спуски Миримановфа. – Ф.М.), интуитивная же дискурсия есть дискурсия интегрирования до единства (*до корня дерева* – Ф.М.). [48, с. 62].

4. Решение парадокса Лжеца неявно воспроизводит более позднее формальное решение Майхилла [52]:

« $A = A$  недоказуемо, доказуемым оно может стать при условии существования не- $A$ ». ... «*да и нет неразлучны*» [48, с. 52, 56–57].

5. Выход за пределы рассудка есть выход из видимого евклидова пространства в невидимое нульмерное. Тогда

«Субъект истины есть отношение трёх, но отношение, являющееся субстанцией, отношением-субстанцией» [48, с. 66].

Наша реконструкция этого тезиса с учётом того, что о. Павел неявно различает два вида отрицания, выглядит следующим образом:

$\neg A = \overset{\sim}{A} = B$ , но *не-Б* понимается не как  $\neg\neg A$ , но как  $\sim B = B$ , то есть как ультраметризация *Б*. Это, по нашей схеме и согласно двухполушарному мышлению Флоренского, и есть выход за пределы рассудка в  $Z_2$ . Поскольку каждому предикату/утверждению, в данном случае *Б*, соответствует область/множество его истинности, то  $B \subset Z_2$ . В силу самоподобия (см. апорию *Место места*) верно также  $B \supset \sim A$ , то есть *В* содержит множество истинности утверждения *А*. Поэтому, оно содержит множества истинности противоречащих утверждений, то есть  $B \supset A \wedge \neg A$  «зараз». Эта схема применима и к теореме Гёделя о неполноте. «Зараз» о. Павла совпадает с *Consis* Гёделя. Эта же схема лежит в основе разбора Флоренским задачи Л.Кэролла [СИУИ, с. 391–395]. Здесь роль субстанции-отношения выполняет 2-адика. Обычное математическое отношение в виде стрелки  $A \rightarrow B$  заменено включением субстанции *А* в *В*:  $A \subset B$ .

Философское оправдание решения о. Павла дано И.А.Герасимовой [53], критика – в [54].

6. Отношение *имманентное–трансцендентное* – ключевое для диалога науки и религии положение – Флоренский моделирует числовыми объектами (более нигде не встретившееся автору. – *Ф.М.*). Рассматривая иррациональности в математике, о. Павел замечает, точно так же как в современной мотивации построения *p*-адических чисел, что даны нам всегда только числа рациональные, то есть представленные конечной строкой цифр. Иррациональности, бесконечные ряды/последовательности цифр, появляющиеся вследствие, например, логической ортогональности в  $\sqrt{2}$  и в последовательностях Коши пополнения рациональных чисел, Флоренский относит к трансцендентным сущностям. Наша схема воспроизводит этот довод как интерпретацию связи вещественных и *p*-адических чисел. Тогда ответ на вопрос Рассела в числовой интерпретации выглядит как:

«Имманентность и трансцендентность в области разума подобна таковым же в области онтологии: Бог трансцендентен для мира с точки зрения мира, но мир не трансцендентен Богу, а всецело пронизывается Божественными энергиями» [48, с.395–402].

Порождение вещественных чисел *p*-адическими проекцией интерпретирует последнее утверждение о. Павла. Нам ничего не остаётся, как присоединиться к этой интерпретации основной антиномии религии.

7. О. Павел рассматривает истину как *самодоказательный Субъект*, который через себя существует и через себя познаётся. Самодо-

казательный Субъект есть Бесконечная единица, трансцендентная для человеческих возможностей, – это конечный синтез бесконечности, созерцающий себя в себе [48, с. 63, 64–66]. Заметим, что поскольку мы находимся во Вселенной Уилера, которая является своей собственной вычислительной моделью, а в понятие вычислимости включаются и логика, и доказательства, то Самодоказательный субъект тем самым обосновывается физически. Субъектность его следует из рассмотрения сознания. Физическая Вселенная Уилера антропна, то есть

$$\begin{aligned} \text{Вселенная Уилера} &\cong \text{Сущность ЕЯ} \cong \\ &\cong \text{X-фактор теории Сознания} \cong \\ &\cong \text{энтелехия Аристотеля-Дриша.} \end{aligned}$$

Трансцендентность Единицы соответствует отсутствию в проективной геометрии  $Q_2$  архимедовых величин размеров. Самодоказательность следует из голограммы:

$$C \cong \exp(C) \cong 2^C \cong Z_2 \cong [IFS \equiv \{0, 1\}^N] \cong [Z_2 \rightarrow Z_2] \cong BA.$$

Здесь подходит интерпретация: тварный мир (1) и (2), Субъект (4), слова Субъекта (5), действия Субъекта (6), самодоказуемость (7), множество истинности «доказательств» Субъекта (3). Наши предыдущие рассмотрения позволяют (гипотетически) присоединить ещё два члена к этой голограмме:

$$Z_2 \cong Z_2^{\text{СОЗНАНИЕ}} \cong Z_2^{\text{БИОЛОГИЯ}}.$$

Тем самым *объективность* самодоказательного Субъекта имеет, по-видимому, основания. Остаётся вопрос о природе цифр 0 и 1. Дело в том, что цифры строк/разложений должны оставаться инвариантными относительно инволюции, чтобы они имели смысл при прочтении с «разных сторон листа». Из привычных графических символов, кроме 0 и 1, подходят конъюнкция  $\wedge$  и дизъюнкция  $\vee$ , сплошная ---- и разорванная -- черты, пустой « $\circ$ » и заполненный « $\bullet$ » круги. Обозначения метрик почти инварианты, и, добиваясь инволюционной инвариантности, ничто не мешает положить, например:  $|*|_2 = |*|$  и  $|*|_\infty = \|*\|$ . Мы положим:  $\vee \leftrightarrow 0 \leftrightarrow |*|_2$ ,  $\wedge \leftrightarrow 1 \leftrightarrow |*|_\infty = \|*\|$ , и таким образом свяжем их с функциями восприятия человека, общими для физических измерений и нефизического опыта. Получим то, что называется в религии «микрокосм и макрокосм». Наконец, заметим, что самодоказуемый Субъект о. Павла вполне соответствует физической идее самообъяснения Вселенной (см. гл. «Математическая физика»).

8. Вопрос *о природе Троицы* – «Истина есть единая сущность в трёх ипостасях» [48, с. 66]. *Троичность* и *сущность* появились выше в п.4 антиномий Флоренского. Можно предложить «научный» вариант следующим образом:

Единая сущность, первая ипостась —  $Q_2$ , вторая её ипостась — пара метрик ( $|\bullet|_\infty$  и  $|\bullet|_2$ ). Поскольку метрики связаны преобразованием Лежандра как координаты и скорости, то есть как (бестелесные) движения/градиенты (см. голограмму), то в переводе на богословский язык — это соответственно Бог Отец, Бог Сын, Бог Святой Дух. В этом случае явно видно соединение в одном человеке, как подмножестве  $R^\# \subseteq \{(|\bullet|_\infty \times |\bullet|_2)\}$ , божественной и тварной природы. Очевидно, что так понимаемая форма Троицы остаётся «единосущностной и нераздельной, единицей триипостасной и соприисносущностной» [48, с. 68].

9. Связь ипостасей Троицы о. Павел поясняет понятием зеркальности (со ссылкой на И.Канта в его «Пролегоменах ...»). Зеркальность ипостасей, как и физических сущностей, логически не может быть выражена и видна только при сопоставлении объектов вместе. У нас — зеркальности, точнее, *зеркальной наоборотности* [55, с. 121, 140, 285], соответствует инволюционный антиизоморфизм, связывающий две единосущностные, то есть определённые на одном материале диадических строк, числовые системы.

10. В своём оправдании Птолемеевой системы мироздания [50, с. 46–53] о. Павел фактически оправдывает ультраметрический вариант проективной геометрии, где центром шара является любая его точка, например, Земля. Аналогичное утверждение можно встретить у А.Пуанкаре в связи с отсутствием абсолютного пространства. Сейчас дополнительность коперниковской и птолемеевой систем, как дополнительность линейного и циклического времени, связанных преобразованием Фурье, уже входит в учебники [56, р. 12–14]. Таким образом, оправдано религиозное положение о Земле как центре Вселенной. По этому же поводу см. [57].

11. Обратная перспектива для человека и прямая для Бога, в понимании Флоренского, связывается с полнотой психосенсорного восприятия мира в противовес прямой перспективе, ограниченной научным евклидовым восприятием. В прямой перспективе объект тем меньше, чем более он удалён от наблюдателя. В обратной — объект с удалением растёт. Прямая перспектива лишает наблюдателя свободы восприятия, обратная — многоцентренная (вновь теорема о центре шара в  $p$ -адике) — подразумевает её, включая не только механическое зрение, но умозрение, созерцание, взгляд изнутри:

«... обратная перспектива в изображении мира вовсе не есть просто неудавшаяся, непонятая, недоизученная перспектива линейная, а именно своеобразный охват мира, с которым должно считаться как со зрелым и самостоятельным приёмом изобразительности ... Два мирозозерцания — научное и теоцентрическое — две перспективы связаны с



двумя построениями. ... Прямая перспектива является синтезом и психологии, и научного мировоззрения. Обратная перспектива сводится к прямой, но с точки зрения главного лица, изображённого на картине. Да, я буду говорить – эта перспектива та же прямая. То, что называется обратной перспективой, есть та же прямая, но слагается она ... с точки зрения главного лица. Обратная перспектива слагается из декоративных приёмов и психологическо-религиозных представлений художника...» [Флоренский П.А. Обратная перспектива. Священник Павел Флоренский. Соч. в 4-х т. Т. 3 (1), М.: Мысль, 2000, с. 46–103].

Очевидно, что оппозиция перспектив *прямая–обратная* при топологизации переходит в знакомую оппозицию *конвергенция–дивергенция*. Формально это гиперболическая связь метрик двух числовых систем. Подробно этот приём – множественность точек зрения, позиция и знания автора и наблюдателя православных икон – проанализирован Б.А.Успенским в [58]. Онтологизация противоположностей вообще характерна для русской религиозной философии, видевшей в вере как сверхрассудочной области способ выражения полноты бытия и снятия противоречий [59, гл. III]:

«Антиномия – логическое противоречие, за которым скрывается реальная гармоническая система противоположностей. ...тезис и антитезис, несмотря на кажущуюся несовместимость, оба остаются верными, но в разных смыслах. Они помогают открыть реальную систему бытия как гармонию разных и противоположных смыслов и значений, ибо конкретная реальность не однозначна, но многосмысленна и многозначительна.... Настоящее решение антиномии ... должно быть свободно от всяких «измов»... Оно должно быть укоренённым в самом бытии (онтологическим)» [Вышеславцев Б.П. Вечное в русской философии. М., 1994, с. 177].

Этим анализом идей П.А.Флоренского, которые являются общими как для западного, так и для восточного мировоззрений, мы закончим краткое введение в проблему антиномизма мировоззрений науки и религии. Подробный анализ математического содержания его трудов с точки зрения «двухполушарной» числовой асимметрии, как представляется автору, может дать многое для темы этой главы. Но это также дело отдельной работы. Приведём лишь основной посыл его трудов:

«То, что я хотел ещё со второго класса от математики, я теперь начинаю мало-помалу получать и вполне уверен, что получу больше, чем

ожидая и надеюсь. Математика для меня — ключ к мировоззрению, такому мировоззрению, где нет ничего настолько неважного, чем не надо было бы заниматься, нет ничего, не стоящего в связи с другим. При математическом мировоззрении нет надобности конкретно намеренно или бессознательно игнорировать целые области явлений, урезывать и достраивать действительное. Натурфилософия соединяется в одно целое с этикой и эстетикой. Религия получает совершенно новый смысл и находит соответственное место в целом, место, которого она была лишена раньше, почему ей приходится строить себе отдельное изолированное помещение» [Флоренский П.А. Из писем к матери от 4 окт. 1900 г.].

Заметим только, что многие положения о Павла развиты А.Н.Паршиным в его нефизических работах. Например, обосновывая аналогию тварного и умопостигаемого мира с деревом (т.е. с  $p$ -адическим пространством. — Ф.М.), Паршин формулирует его как пространство языка, света и слова (движение по дереву Сущности естественного языка есть одновременно и онтологическое, и гносеологическое, чем, кстати, оправдывается наш выбор в качестве праязыка модели Е.В.Терёшиной. — Ф.М.). Аналогия с Фурье-преобразованием (асимметричный дуализм лингвистического знака. — Ф.М.) даёт основания для феноменов антиномичности и существования двух Светов — чувственного и умопостигаемого. В умопостигаемом мире все слова Бога звучат одновременно и вечно. Слово имеет иерархическое устройство, похожее на атом в физике (здесь снова Сущность. — Ф.М.). Восприятие слова и есть свет (т.е. язык есть орган восприятия умопостигаемого света. — Ф.М.) [60].

4. *К богословию хаоса и фракталов.* Сегодня, наряду с классическими теориями физики — квантовой механикой и космологией, содержание диалога расширено теорией хаоса [61–64; 34, с.50–58]. Это можно было бы считать очередным всплеском научной моды, если бы не те новые, исключительно системные потенции, которые несёт в себе математическое содержание понятий хаоса и фракталов. Они заключаются в вовлечении в теорию тех глав математики, которые долгое время оставались в тени стандартного образования. В этой новой методологии уже не работает ГЛГ-аргумент, расширенная числовой асимметрией математика более не является механистичной, её истинность не ограничивается теоремой Гёделя о неполноте.

«Для последователей Ньютона в XVIII столетии было явным, что физика является механической, но открытие в XX веке динамической теории хаоса показывает, что это только частный случай» (Полкинхорн Дж. [2, с. 38]).

В этих и других работах содержание теории хаоса ограничено физическими интерпретациями нелинейной динамики. Однако наши предыдущие рассуждения приводят к выводу, что  $p$ -адическая модель мира является нелинейной, без всяких дополнительных формализмов, и представляет собой бескачественную субстанцию границ, то есть нульмерный, невидимый мир. Её мы и рассматриваем в качестве предметной области богословских теорий.

Таким образом, мы получаем одно из определений религии по апостолу Павлу — это «уверенность в невидимом как в видимом (т.е. в  $p$ -адических числах. — Ф.М.), ожидаемом и уповаемом как настоящем ( $p$ -адика существует здесь и сейчас одновременно с вещественными числами, и, что важнее,  $p$ -адика одновременна с существованием человека. — Ф.М.)». Следующее общее соответствие состоит в том, что «небеса религии ( $Q_p$ , — Ф.М.) и небеса астрономии ( $R^4$ , — Ф.М.) суть разные небеса», и мы вправе уважительно относиться к теориям физики но не считать их исчерпывающими. Поэтому мы не будем рассматривать многочисленные работы в области диалога, ограниченные стандартной версией космологии и квантовой механики. Тем более что, как замечено, «... облака небес (воображения. — Ф.М.) всецело принадлежат земле» [65], между Богом и миром нет никакого отстояния, никаких метрических соотношений [66]. Иными словами, наша схема имманентности и трансцендентности границ даёт диалектическое представление пространства-времени, которому в математике соответствует теорема о (co-)существовании ультраметрического варианта, то есть двойника любого метрического пространства, в частности —  $R^4$ . Подробное историческое исследование этой пространственно-временной оппозиции дано Т.Торрансом [25].

В контексте диалога выделяются две линии мысли, неявно, по мнению автора, воспроизводящие два вида причинности. Авторы линии *снизу—вверх* стремятся осуществить синтез, отправляясь от данных науки [2, 3]. Направление *сверху—вниз* интерпретирует научные истины в свете богословских [4, 6, 67]. Оба направления имеют в своей основе интуицию о том, что наука (*понятия, чувственное зрение*) и религия (*чувства, умозрение*) едины в своей основе и допускают сравнение в единой системе понятий, что делает возможным в принципе их сравнение и согласование. (**Замечание.** Нейропсихологи давно пришли к выводу, что «глаза есть часть мозга, вынесенная на периферию» [Демидов В. Как мы видим то, что видим. М.: Знание, 1987], поэтому «зрение есть мышление» [Глезер В.Д. Зрение как мышление. СПб., 1993], то есть оно функционально асимметрично, что совершенно не учитывается математической физикой).

В этом плане особую значимость для нашей схемы приобретает работа У.Джексона, специалиста по сравнительному религиоведению,

содержащая обширную библиографию [68, р. 242–244, 246, 247] (см. гл. «Сознание»). В ней на большом и разнообразном материале кросс-культурного и кросс-временного характера показано существование единой, согласованной, то есть intersубъективной, фракталоподобной структуры и её элементов в явлениях духовной жизни всех времён и народов планеты: психологии, мифах, философии, религии, в *образах* мира. Джексон делает акцент на intersубъективности фракталов – посреднике между внутренним и внешним мирами, – которая и обеспечивает «волшебную согласованность мировоззрений различных народов планеты» (Э.Шредингер). Это научное наблюдение оправдывает *исторический аргумент* существования религии.

Одно из очень немногих подробных объяснений широко известной пары *микрокосм–макркосм* как синонима *фрактально-р-адического* самоподобия и религиозного положения *по образу и подобию* дано П.А.Флоренским:

«Различными путями мысль приходит всё к одному и тому же признанию идеального сродства мира и человека, их взаимообусловленности, их пронизанности друг другом, их существенной связанности между собой. *Гносеологически* всё познаваемое нами есть нами усвояемое и в себя нами преобразуемое. *Биологически* – всё, окружающее нас, есть наше тело, продолжение нашего тела, совокупность дополнительных наших органов. *Экономически* – всё, возделываемое, производимое и потребляемое нами, есть наше хозяйство. *Психологически* – всё, нами ощущаемое, есть символическое воплощение нашей внутренней жизни, зеркало нашего духа. *Метафизически* – оно воистину есть то же, что мы, ибо, будучи иным, оно не могло бы быть с нами связано. ... Человек – в мире; но человек так же сложен, как и мир. Мир – в человеке, но и мир так же сложен, как человек. ... Человек есть сумма мира, сокращённый вариант его; мир есть раскрытие человека, проекция его. Эта мысль о Человеке как микрокосме бесчисленное множество раз встречается во всевозможных памятниках религии, народной поэзии, естественнонаучных и философских воззрениях древности [*Флоренский П.А.* Микрокосм и макрокосм. Соч. в 4-х т. М.: Мысль, 2000, с. 440–452].

Фракталы как посредник внешнего и внутреннего миров отдельно человека, то есть их автономность, также описаны П.А.Флоренским [69, с. 50–54] (см. гл. «Сознание»). Выводы Джексона и Флоренского фактически возводят субъективное фрактальное мировосприятие в ранг объективного. Неудивительно поэтому, что Ю.С.Степанов, лингвист и семиотик, так видит смысл фракталов:

«Но тогда — что это за свойство фракталов, этих форм, которые обладают Симметрией, Динамикой, Красотой? Сводится ли открытое здесь свойство к одному из уже названных? Я думаю — нет. Это свойство — одухотворённая законосообразность. Фракталы открывают нам, что она — есть. Так, я думаю, можно назвать это — ранее неназванное — свойство фракталов. Фракталы — это *одухотворённые формы ...*» [Степанов Ю.С. Протей. Очерки хаотической эволюции. М.: ЯСК, 2004, с. 216].

Также весьма точное в связи с нашими рассмотрениями понимание фракталов дано Р.Уфимцевым (с сайта [cognitivist.ru](http://cognitivist.ru)): «Фракталы есть результат взаимодействия материи с сознанием».

Иначе говоря, материальная универсальность фракталов здесь вновь, как и в нелинейной науке, сопрягается с идеальной, материя сопряжена с сознанием. Это к *личностному* аргументу оправдания религии — множественная автономность обеспечивает кафолистичность, то есть интересубъективность (С. Булгаков).

«Были предложены различные метафизические интерпретации, характерные для теории хаоса комбинации детерминированных уравнений и видимой непредсказуемости поведения. Альтернативное предложение, выдвинутое Покинхорном, заключается в том, чтобы первенство в интерпретации было отдано наблюдаемому поведению. Подобно тому, как принцип неопределённости Гейзенберга заставляет большинство физиков верить в непредсказуемость квантов, **теория хаоса должна поддерживать уверенность в существовании реальности более тонкой и гибкой, чем подобный часам мир Ньютона**» (Полкинхорн Дж. [34, с. 52], выд. — Ф.М.).

Хаос с его тонкими фрактальными аттракторами Полкинхорн, следовательно, рассматривает как возможный референт религиозных понятий. Поэтому приведённые мнения можно рассматривать как основу для утвердительного ответа на вопрос, поставленный Расселом: наши мысленные представления имеют референт во внешнем мире, и мост между ними возможен. Общая основа — нелинейная динамика, то есть фракталы [44], (см. гл. Сознание). По мысли В.Г.Панова [70]:

« ... логическое, понятийное мышление ... возникло как результат перехода от непосредственного взаимодействия организма с внешней средой к опосредованному отношению ... от двучленного отношения *субъект—объект* к трёхчленному *субъект—субъективизированный объект—объект*. При этом среднее звено этого отношения носит по необходимости двойственный, диалектически противоречивый характер,

что и позволяет ему играть роль логического эквивалента в синтезе двух различных, доходящих до противоположностей сторон в формуле «Если А, то (при посредстве М) В» (с. 163) ... Миссию таких объектов-посредников взяла на себя наука. В этом находит одно из своих проявлений историческое противоборство между мифом и наукой, наукой и религией. Тем самым мы вплотную подошли к вопросу о том, может ли наука (а если может, то при каких условиях) полностью заменить религию, сделать излишней веру в Бога?... В первом приближении ответ может быть сформулирован так:

– Да, может. Для этого требуется, чтобы наука открыла в сфере, независимой от сознания реальности, такие объекты, которые выполняли бы функцию посредника, перекидывающего мост через пропасть противоположных явлений, воспринимаемых нашим сознанием как несовместимые. Такие явления находят своё выражение в оппозициях, содержащихся во множестве противостоящих друг другу пар понятий: свет–тьма, добро–зло, жизнь–смерть, конечное–бесконечное и т.д.» (с. 174).

Фракталы и  $p$ -адика в нашей схеме бинарной семантики как субъективизированные объекты (см. гл. «Язык, Сознание») могут быть рассмотрены в качестве такого посредника. Тем самым мы получаем уже *формальное основание в терминах науки* для положительного ответа на вопрос Рассела. Заметим дополнительно, что оппозиция «наука–религия» включает в себя следующие апории Зенона: «Место места» (воплощение Бога, Брахмана, Дао), «О движении» (действие Святого Духа, Брахмана, Дао), «О множестве» (творение феноменального мира), «О Едином» (единство в Боге, восточная недUALьность), момент *теперь* (всеведение Бога, вездесущность Бога, Брахмана, Дао). Апорию «Стадий» можно сопоставить с парой «прямая–обратная» перспектива.

5. *p-Адическая перспектива диалога.* Наиболее перспективной, включающей данные как науки, так и положения религии, представляется  $p$ -адическая интуиция А.Н.Паршина, хотя бы в силу того, что она при помощи второй фундаментальной для математики числовой системы, открывает новые, *благоприятные* (см. мысль А.Н.Уайтхеда) перспективы/степени свободы для диалога [67, 71–74]. В своих работах Паршин подробно анализирует связь умпостигаемого пространства языка, биологии и религии и делает вывод о единстве *иерархической*, то есть 2-адической, структуры мира небесного и тварного, а также естественности соединения физического пространства естествознания и иерархического пространства религии в одно целое, которое является произведением этих пространств:

«Иерархическое устройство всей твари есть её важнейшее свойство и раскрывается как соответствие друг другу небесной (умной) и земной (чувственной) иерархии. Отражение небесной иерархии в земной ... неотмысливаемы друг от друга, являются проявлением одного и того же. ... находясь в каком-то месте обычного пространства, тело может ещё находиться или перемещаться в каком-то дополнительном пространстве, связанном с этой точкой. В некотором приближении можно эти дополнительные пространства считать независимыми от точки и тем самым одним и тем же. Тогда мы имеем два пространства — исходное декартово и новое, дополнительное, а интересующий нас объект находится, живёт одновременно в этих пространствах. Можно сказать, что он находится в более сложном пространстве, составленном из них. Мы получим то, что в математике называется произведением пространств. Так вот, в качестве первого шага к соединению литургического и физического пространств можно предложить модель такого произведения. Более доступно, мы живём или, скорее, можем жить, одновременно в обоих пространствах. ... как формы движений в двух разных пространствах, физическом и литургическом, сочетаются друг с другом, это проблема для дальнейших исследований. ... Это два разных пространства, Дерево и Земля, но их можно соединить так, как я сказал. Мы получим новое пространство, или, если хотите, новый мир  $\text{Дерево} \times \text{Земля}$ , существование в котором является гораздо более реальным, чем существование по отдельности в каждом из миров — Дереве или Земле. Более того, эти пространства соединены уже изначально, и человек реально живёт в полноте этого нового пространства, а выделение отдельно Древа и отдельно Земли представляет собой последующую редукцию» (*Паршин А.Н., Резвых Т.Н. [73]*).

Здесь Паршин имеет в виду общематематическую конструкцию, основанную на преобразовании Фурье:

«Если имеются две коммутативные группы  $X$  и  $X'$ , двойственные друг к другу. Каждой функции на  $X$  отвечает функция на  $X'$ , её преобразование Фурье и наоборот. В диаграмме проекций  $X \leftarrow X \times X' \rightarrow X'$  функции на  $X$  можно поднять  $X \times X'$ , затем умножить на  $\exp(i(\cdot, \cdot))$ , а затем отправить, интегрируя по слоям правой проекции, на  $X'$ . Это понятие можно ещё более расширить на некоммутативные группы и даже на негрупповые многообразия. Также его можно применить не только к функциям, но и к дифференциальным формам, кохомологиям, расслоениям и т.п. Это — общекатегорная конструкция, которая пронизывает очень многие области математики» [*Паршин А.Н. Дополнительность и симметрия. [4], с. 145*].

В нашей схеме двум взаимнодвойственным группам соответствуют  $R^\#$  и  $Z_2$ , а преобразованию Фурье, которое имеет в виду Паршин, – инволюционный антиизоморфизм в различных названиях, но с одинаковой топологической парой *связность–несвязность*. Их неполный перечень: *сжатие–расширение, протяженность–делимость, связность–разрывность, зoot in–zoot out, часть–целое, Единое–Многое* и т.п. (см. гл. 1 «Функциональная асимметрия природы и мышления»). Их формальным числовым аналогом является степенной закон связи пары числовых метрик, изменяющихся противоположным образом. Отличие от классического аналитического подхода к двойственности (по этому поводу см. обзор [75]) заключается в последовательном использовании топологизации понятий пары *связность (непрерывность)–разрывность (дискретность)*, дающей два полюса мира и сознания – материальный и образный. Тогда диаграмма проекций в нашей схеме выглядит следующим образом:

$$R^\# = \neg Z_2, \quad Z_2 = \sim R^\#, \quad R^\# \leftarrow R^\# \times Z_2 \rightarrow Z_2.$$

Здесь двойственность/инволюция между числовыми системами показана как расщеплённое отрицание ( $\neg, \sim$ ). Его составляющие, формирующие его двойственность, действуют в разных контекстах, разводя члены *антиномий* по разным пространствам. В формулировке А.Н.Паршина (см. также мысль об антиномии Б.П.Вышеславцева выше),

«антиномия – это противоречащие друг другу высказывания об одном и том же, но делаемые в разных, дополнительных ситуациях. Короче можно сказать, что антиномия = дополнительность» [Паршин А.Н. Дополнительность и симметрия./ В кн. Путь, с. 167].

В контексте нашей схемы рассуждения Паршина, по сути, отвечают на поставленный им самим же вопрос, где находится умопостигаемая реальность [4, с. 75], на Земле (см. [64]). Совместное использование *логики и чувства–символа и материи* объясняет эту дополнительность. Материя есть плотные (фрактальные) тела, 2-адика – их границы, границ их частей, частей частей и т.д, то есть умопостигаемая реальность есть ультраметризация физического мира, его *alter ego* (см. гл. «Сознание и Язык»). Согласно нашей схеме, они существуют совместно и неотмысливаемы друг от друга, так же как вещественные и  $p$ -адические числа (см. числовую интерпретацию П.Флоренского выше). Эмпирически – это мир фрактальной геометрии природы в точной масштабной симметрии, актуально бес-



конечной делимости, то есть *Свет*. Ослабив аналитические ограничения, то есть убрав из рассуждений связное  $R$ , мы получили возможность увидеть явно эту общекатегорную конструкцию в её разнообразных проявлениях: двойственности Стоуна, проективной двойственности, решётках, двойном понятии множества – Кантора и Мириманоффа, двойной структуре – вещественной и ультраметрической, метрического пространства, двойственности натурального ряда, асимметричном дуализме числа и слова в языке и биологии. Традиционный научный метод доказательства здесь, как и утверждает религия, заменён *показательством*. Эмпирически показательство содержится во фрактальном варианте Книги Природы – фракталы, как было ранее замечено (см. гл. «Фракталы»), как раз и воплощают в своих движениях преобразование Фурье.

Мы попытаемся дополнить наблюдения А.Н.Паршина интерпретациями  $p$ -адики в нашей схеме. В связи с этим обозначим нашу методологическую позицию как *двухаспектный монизм*, или *антиномичный монодуализм* (С.Франк [цит. по [76)], описанный П.А.Флоренским на философском языке:

«Всё-всё, что ни видит взор, – всё имеет своё тайное значение, двойное существование и иную заэмпирическую сущность. Всё причастно иному миру, во всём иной мир отображает свой отпечаток. ... Это воззрение на двойственную природу всего в мире – воззрение всечеловеческое. ... Всё просто – и не просто: всё – житейски – и не житейски. ... Ещё разительнее это совпадение двух мировоззрений выступает тогда, когда они стремятся уяснить способ сосуществования и образ взаимодействия двух миров – поту- и посюстороннего. Вы, конечно, знаете, что Платон определил это взаимодействие идеи и явления различно: 1 – то это сходство явления и идеи, а позднее подражание явления идее (*μιμησις*), ... 2 – то это участие (*μετεχειν*) явлений в идее, при этом реальна только идея, ... 3 – то это присутствие идеи в явлении (*παρουσια*): явления становятся сходными с идеей, когда она приходит к ним, и теряют это свойство, когда идея удаляется от них; вместе с тем идея – уже принцип не гносеологический, основа не познания, но принцип онтологический, причина бытия (*αιτια*). Идеи оказываются силами (*δυναμεις*), посредством которых объясняются явления» [Флоренский П.А. 48, Общечеловеческие корни идеализма, с. 14–15, 27].

Ту же идею Дж.Полкинхорн даёт в физико-математическом выражении:

«Это направление предполагает, что есть только один вид «материала», одна субстанция, из которой состоит мир, но она встречается в различных формах организации, что и выражается в существовании ментального и материального полюсов нашего восприятия. Физик может провести аналогию между твёрдым, жидким и газообразным состояниями, в которых встречается один и тот же вид материи. Эти фазы обладают разными свойствами, но состоят из одного и того же вещества. (Такую аналогию, однако, нельзя широко применять. ... Для объяснения взаимодействия ментальной и материальной фаз должно быть придумано что-то гораздо более тонкое). Двухаспектный монизм совместим с исторической концепцией возникновения ментального путём усложнения материального, не подчиняя при этом ментальное материальному, как если бы оно было лишь эпифеноменом по отношению к последнему. Напротив, такая точка зрения пытается утвердить равноправие этих двух аспектов реальности. Такая теория могла бы быть очень привлекательной. Проблема в том, как можно её адекватно выразить». (*Полкинхорн Дж.* [34], с. 64).

Очевидным образом двухаспектный монизм имеет смысл двойного материально-идеального соотношения естественного языка, двойственности символа в биологии, парадоксальности сознания — понятие перцепта, бинарной семантики Вселенной Уилера, математически общекатегорной конструкции дополнительности Паршина в интерпретации нашей схемы.

6. *Отдельные соответствия.* Парадоксальные логико-математические свойства пространства числовой асимметрии позволяют, по видимому, взглянуть на эту проблему с новой точки зрения. Эти свойства модели в сопоставлении с антиномичностью религиозного мировоззрения дают тому основание. Но здесь представляется сходство числовой субстанции со *светом*, как физическим, так и незримым, и *иерархичность строения умопостигаемого мира*, в точности соответствующая структуре модели. Мы опишем самые общие соответствия, не претендуя на полноту охвата этой деликатной темы.

*Интерсубъективность* науки противостоит *автономности* религиозного опыта. Результаты науки не зависят от субъекта, но религиозный опыт всегда есть личный опыт отдельного человека. Посредством 2-адики мы получили некоторые основания заглянуть в его внутренний мир (см. гл. «Сознание») и связать его с миром внешним. Таким образом, положения религиозного мировоззрения становятся также интерсубъективными, что и есть по факту истории человечества. Недавнее исследование В.В.Печорина [77] утверждает практически тождественное в основе различных религий и единый их источник.

*Онтологический дуализм богословия*, отличающего мир тварный, видимый и нетварный, умопостигаемый, противостоит монизму науки. В нём видится двумерная семантика пространства модели. Известная мысль П.Флоренского о том, что высшие миры как бы вывернуты наизнанку по сравнению с нашим, соответствует инволюционному анти-изоморфизму в структуре пространства-времени, который порождает обращение стрелок в полурешётках  $R^\#$  и  $Z_2$ . Тогда онтологизация противоположностей вообще позволяет говорить о *Софии*, которая

«есть идеальный, умопостигаемый мир. ВСЁ, истинное *εν και παν*, всеединое.... в Софии нет никакого *не*, а есть только да всему. ... Занимая место между Богом и миром, София пребывает между бытием и сверхбытием, не будучи ни тем, ни другим или же являясь обоими зараз» (Булгаков С. [78], с. 334–336).

В этой связи можно вспомнить о «третьем виде» Платона и материи—зеркале Плотина, «двуобращённом сущем едином, ... находящемся на границе мира ума и мира чувственного, мира вечности и мира времени, обращённого как к тому, так и к другому». Эта парадоксальная материя—зеркало, неизъяснимая и неуловимая кормилица и восприемница всего тварного, является бескачественной [79,80]. В нашей схеме такому пониманию материи соответствует масштабно-инвариантная сеть нульмерного пространства  $Q_2$ . Математически это модуль  $Q_2$  над самим собой, двойное реальное зрение. У нас в человечестве два наблюдателя —  $M$  и  $W$  — как раз и реализуют двойную обращённость. Конвергентное, левополушарное, мужское  $M$  — в мир тварный; дивергентное, правополушарное, женское  $W$  — в мир вечный, умопостигаемый.

*Истина* в богословии, в отличие от науки, является фактом и не выводится за рамки рассуждений. Научным барьером познания истины обычно является вторая теорема Гёделя как ограничитель познания. В нашем случае *зеркально-наоборотный* вариант этой теоремы — арифметика Пресбургера — позволяет вводить понятие истины в ткань рассуждений. (**Замечание.** Мы оставляем в стороне интересный вопрос о связи арифметики Пресбургера с алгебрами Гейтинга, где также отрицается закон исключённого третьего. Ограничимся лишь тем, что арифметика Пресбургера совместима с булевой алгеброй (Boolean Algebra with Presburger Arithmetics — *ВАРА*). *ВАРА* отличается от булевой алгебры введением дополнительного (конвергентного) оператора взятия мощности множества [Kuncak V. Modular Data Structures with Verification / Ph.D. Thesis MTI, 2007, Ch.7]. Преимущество использования *ВАРА* в том, что сохраняется привычная булева алгебра, так же как и в случае интуиционизма, но  $p$ -адическая интерпретация выводит мо-

дель за пределы логики, чего нет в интуиционистской математике. (Возможно, было бы интересно объединить эти две, по-видимому, близкие логики, сохранив их сильные стороны. Либо поискать интерпретацию такого синтеза, например, в модальной логике (см. выше)).

*Бог, Абсолют.* В теории решёток решётки, образованные двоичными (у нас – диадическими) строками, могут интерпретироваться как информационные системы. В них строки разной длины рассматриваются как более или менее полная информация об объекте. В полных решётках (у нас решётка числовой асимметрии с делением – полна) есть понятие *top*- и *bottom*-элементов. *Top*-элемент иначе называется переопределённым или *противоречивым* элементом, *bottom* – информационно пустым [81, р. 7, Ex.1.9; 34, 37 Ex.2.6; 37]. Иными словами, *top*-элемент имеет бесконечное множество имён. Его мы рассматриваем как множество имён Бога. В качестве этого элемента может рассматриваться нульмерное  $Q_2$ .

*Имманентность и трансцендентность Бога* – основанная антиномия религии [78, с. 154] – в нашей схеме трактуется как неотмысливаемость/дополнительность/взаимная неопределимость друг от друга двух числовых систем (см. выше рассуждения П.Флоренского). Иными словами,  $Q_2$  неопределимо, трансцендентно материи, но присутствует в ней, то есть имманентно ей, как её ультраметрический прообраз. «Моста логического между трансцендентным и имманентным нет» [78, с. 163], как невыводимы вещественные числа из  $p$ -адических и обратно. Они связываются в нашей схеме инволюционным антиизоморфизмом, который не имеет определения в привычном логико-математическом смысле. Он аналогичен волевому акту Бога «*Да будет*», творческому *fiat* [78, с. 280–281].

*Бог есть* Не-что, Не-как, Не-где, Не-когда, Не-почему [78, с. 159–160] в переводе на язык числовой асимметрии означает, что  $Q_2$  лишено обычных архимедовых величин, как пространственных, так и временных. Единица натурального ряда неопределима языком и появляется как акт именованья или внимания человека [82]. Утверждение «это НЕ есть отрицание всех определений и выражений» [78, с. 161] означает, что  $Q_2$  не может быть описано линейным, конвергентным языком, то есть извне, в прямой перспективе, оно есть универсальная библиотека, содержащая все тексты, в том числе и физико-математические, с пропусками, искажениями, ошибками [47]. Или, как говорят, «все слова Бога звучат одновременно». Это НЕ можно считать, по-видимому, аналогом несловесного мышления.

*Переход от Абсолютного к относительному*, когда «Абсолют, не теряя абсолютности своей, полагает в себе новый центр, относительное как самостоятельное бытие – реальное живое начало – и вносит двойственность в *единство неразличимости*» [78, с. 282–284], что в нашей

схеме соответствует проекции  $Q_2 \rightarrow R^\#$  и синтаксической неразличимости вещественных и  $p$ -адических чисел. В силу несчётности  $Q_2$  и единства иерархических структур двух миров «покой Абсолюта не возмущается. Его самораздвоение являет предельную антиномическую грань для мысли» [78, с. 282]. Если под мыслью понимать, как обычно, логику, то эта грань исчезает в числовой асимметрии.

*Творение из ничего.* Понятия Ничто, Небытие являются одними из самых трудных в богословии. Общим местом всех толкований является его безразличие и враждебность к существованию человека, отрицание существования определениями, существование в Бытии как его грань или тень, и, наконец, по Платону, Ничто есть ключевая проблема онтологии. Хайдеггер поставил вопрос о включении небытия/ничто в вопрос о Бытии, то есть о его онтологизации [83–87]. Суть сложности этого понятия в отсутствии референта двойного бытия и религиозных понятий. Имея в нашей схеме модель бытия в идее числовой асимметрии, можно рассмотреть и способ его отрицания.

В объяснении «творения из ничего» присутствуют две линии. Первая, более представленная в литературе, — творение из первоматерии, изначального хаоса [63]. Понятие первоматерии, часто упоминаемое, также не имеет референта в литературе. В нашей схеме ей можно сопоставить универсальность и масштабно-инвариантную сеть  $p$ -адических чисел  $Q_2$ . Тогда её основное свойство — порождение вещей видимого мира и восприятие их гибели/исчезновения — моделируется порождением вещественных подмножеств проекцией/инволюцией/«да будет» [78, с. 228, 280]. В этом случае Абсолютное, не теряя своей абсолютности, полагает вне себя иной центр, вносит двойственность в единство неразличимости [78, с. 282–284]. Этот вид творения мы описали выше. Антиномия неразличимости в нашей схеме совпадает с синтаксической неразличимостью вещественных и  $p$ -адических чисел и потому для логики является антиномией. Это творение из мёона ( $\mu\eta\omicron\nu$ ) как из первоматерии [78, с. 285–296].

Божественное Ничто имеет двойной смысл. Двойной смысл НЕ может выразить как полное отсутствие определения (конечной формулой, суждением, предикатом) — путь апофатического богословия, так и состояние непроявленности, потенциальности — *ещё не, пока не*, божественная первоматерия, в которой и из которой возникает всё, и божество, и мир, и человек [78, с. 234]. Если сопоставить Ничто и Нуль математики, то, по нашей схеме:

$|Q_2|_\infty = 0$  и  $|Q_2|_2 = \infty$ , тогда  $R^\# \xleftarrow{conv} 0 \xrightarrow{div} Q_2$   
имеет двойной смысл, который выражен И.В.Гёте: «Мгновение есть вечность». Ничто как субстанцию границ рассматривал ещё Леонардо

да Винчи, который воплотил свою идею в технике рисования сфумато – зримости незримого, наглядности существования несуществующего. В каждой точке на границе проектируется бесконечность: «Ничто Леонардо трудно понять иначе, как возможность Всего» [88]. С одной стороны, это точка с нулевым линейным размером, с другой – *материальная* пустота нульмерного пространства, потенциально содержащая всё существующее и не имеющая линейного размера, «объёмная пустота» восточной философии [89]. В нашей схеме нуль, понимаемый привычно рационально, есть предельный вариант момента теперь. Иными словами, Божественное Ничто может пониматься наукой в двойном смысле, указанном Булгаковым.

Положительное содержание апофатического НЕ обеспечивается арифметикой Пресбургера. Первоматерии, меональному НЕ, можно поставить в соответствие факты об универсальности нульмерных множеств, способных *проекцией* породить все вещи, организмы и тексты [42, 43]. Эта проекция соответствует *самораздвоению Бога* [78, с. 282] или его *умалению, кенозису*, что, как известно, не приводит к его ослаблению, уменьшению, так же как счётное число операций (т.е. математических истин) не уменьшает мощности несчётного множества (т.е.  $Q_2$ ). «Творение есть жертва Абсолютного своей абсолютностью, ничем и никем не вызывается, свободная, беспричинная и рационально не объяснимая» [78, с. 283–284]. Как было показано в гл. «Биология»,  $p$ -адическое пространство порождает четвёрку производных  $Z_4 = (e_p, \dots, e_4)$ , образующих алфавит энергий  $Z_4$ , из которых только одна определима рационально-физически. Три остальные – неопределимы. Причиной их существования является сам Абсолют, то есть Бог. Поэтому его действия свободны и беспричинны, соответствуют божественному *да будет, fiat*, лежащим между Богом и миром [78, с. 228, 280]. Здесь можно видеть ответ на вопрос Лейбница: «Почему есть что-то, а не ничего?». Вариант ответа: «Потому, что существует  $Q_2$ , то есть физически *ничего*, и два базовых процесса «сгущение-разрежение», порождающих четвёрку энергий/сил/проекций, создающих «что-то»».

Вторая линия, явно представленная у Булгакова [78], считает *мэон* производным из *укона* (*оук оv*) – полного и абсолютного Ничто [78, с. 288–291]. В этом виде утверждение о творении из укона есть вариант парадокса Лжеца – слово есть, референта нет, а это Бытие небытия. Логически *Бытие*  $\wedge \neg$  *Бытие* [84], то есть парадокс Лжеца. Каким образом из укона возникает мэон? Этот вопрос в терминах нашей схемы сводится к вопросу – откуда берётся  $Q_2$ ?

С некоторой точки зрения, проективная прямая  $Q_2$  дисконтинуальна, состоит из точек, подобно рациональным числам на числовой

прямой. Рациональные числа разделены пустыми промежутками, внутри которых находится всё их множество. Эти промежутки есть грань рациональных чисел, в наших терминах – грань Бытия. Если рациональные числа (и дисконтинуальное  $Q_2$ ) сопоставить мэону, то промежутки между ними – «грань бытия и небытия», «тень бытия» – можно сопоставить укону. Можно также увидеть тень  $p$ -адики, если дерево деления в триадном множестве Кантора, сдвинув восприятие, дополнить таким же деревом промежутков, вырезаемых частей. Эта тень, укон, очень напоминает абсолютное пространство-время Ньютона, не имеющее, как известно, отношения к каким-либо событиям и вещам видимого мира.

Творение из укона может пониматься тогда как творение Богом из Ничего *вне себя*. В этом случае рассмотрим двойную петлю числовой асимметрии. Она, в представлении полурешётками, имеет точку  $A$ , общую большой и малой петле. Нетрудно проверить, что в ней сходятся пара  $(0_R, \infty_2)$  с её инволюцией  $(\infty_R, 0_2)$ , которые получаются предельным переходом пар метрик. То есть и нуль, и бесконечность имеют двойной смысл, определяемый степенной зависимостью метрик. Четвёрка производных в этом случае вырождается в четвёрку числовых неопределённостей. Однако *символически и, значит, логически* она остаётся инвариантной, и численно произведение этих энергий по-прежнему ненулевое. Иными словами, точка  $A$  несёт в себе «волю» или «замысел» производства энергии и слова. Поскольку базовые процессы «сгущения (материализации)–разрежения (идеализации)» сохраняются, то эта воля аналогична асимметричному дуализму лингвистического знака, то есть Слову, саморазвёртывание которого порождает  $Q_2$ , то есть первоматерию или мэон. В терминах итеративной системы функций из теории фракталов числовая асимметрия  $U$  представляет собой объединение двух взаимнообратных итеративных систем функций, формально неразличимых (если не различать метрики), связанных инволюцией  $2 \rightarrow 2^{-1}$ .

$$U = IFS(Z_2) \cup IFS(R^\#) \quad IFS(Z_2) = IFS(R^\#)^{-1}$$

В этом случае точка  $A = (0_R, \infty_2) \cup (\infty_R, 0_2)$ , где индексы у знаков нуля и бесконечности означают вещественную и 2-адическую их части, или, что то же, вещественную и мнимую. В этом случае точка  $A$  является репеллером для  $IFS(Z_2)$  и аттрактором для  $IFS(R^\#)$ . Детали конструкции см. в [90], а предварительную гипотезу – в [91]. Иными словами, точка «выталкивает строки символов» с бесконечной энергией, являясь источником слов Бога, звучащих вне времени, и одновременно стоком для материи. Иными словами: «Вначале

было Слово». Поэтому восточное «Точка есть сжатая Вселенная» и мысль П.Флоренского:

«В онтологии точка означает Единицу, Первопричину. Это онтологический Центр, из которого всё развёртывается, это Активный Принцип, Дух, Разум, Бог, Бог-Отец, «йод» каббалистической философии...» [Флоренский П.А. Точка./ Памятники культуры. Новые открытия. Ежегодник. М., 1982, Л., 1984, с. 95–113]—

представляются математически содержательными. Это аналогично способности человека совершать действия и производить тексты силой собственной воли, замыслом своего Я, без причины извне.

Другое напрашивающееся объяснение бытия Ничто проистекает из проективной геометрии  $Q_2$ . Согласно проективной двойственности, каждой точке  $Q_2$  соответствует прямая или гиперплоскость (в рефлексивной схеме). Множество гиперплоскостей образует полярную, то есть логически ортогональную, проективную геометрию  $Q_2^*$ , состоящую из линейных (аффинных в общем случае) функций/движений. Если принять такие прямые, гиперплоскости за ньютоново-евклидово абсолютное пустое пространство, то оно, следовательно, будет выражаться теми же строками, что и  $p$ -адические числа (двойственность смысла строк), но высказывания, ими закодированные, не будут иметь референта в универсуме числовой асимметрии. Их множество истинности пусто, то есть они составляют не отрицательные, а ложные утверждения.

*Эсхатология.* Можно усмотреть и более радикальный вариант Нечто, Ничто. В двойной петле внутренняя малая петля соответствует рациональным числам, или видимому миру, в том случае, если две полурешётки — вещественных и 2-адических чисел с обратным порядком — сливаются в одну с двойным, взаимнообратным порядком. Если же по каким-то причинам эти полурешётки не сливаются, например, как в аттракторах нелинейной динамики — бабочке Лоренца, Рёсслера, Смейла—Вильямса, то рациональные числа не образуются, их место занимает Ничто. Какой процесс производит такие изменения в структуре числовой асимметрии — *разводит* и *сводит* петли? Разведение петель (вещественной и  $p$ -адической), если учесть их неотмысливаемость друг от друга в нашей схеме, означает также и их исчезновение, в частности, исчезают обе метрики как функции измерения/восприятия. Известен восточный вариант ответа: это «дыхание Единого». Постепенно разводя и сводя большие петли, можно видеть, что малая петля — видимый мир — то уменьшается, то увеличивается в размерах, подобно пламени свечи. Восточный аналог этого — «дни и ночи Брахмы».



Если обратиться к предыдущим главам Части 2, то представляется, что все наши рассуждения центрированы на человеке. Как выглядел бы мир, если бы в нём не было человека? Как описать такой мир, не используя человеческого (пра)языка, сознания и жизни, наконец? Здесь, очевидно, мы *сегодняшние* вынуждены молчать, поскольку оказываемся в Небытии.

Поскольку  $Q_2$  и двойная петля числовой асимметрии не имеют линейных размеров, то единственное определённое место, куда их можно поместить – это внутренний мир человека. Множественность человек не означает множественности невидимой реальности. Здесь теорема о центре шара в  $p$ -адике может быть выражена словами Христа: «Царство Божие внутри (множества. – Ф.М.) вас». Но она же допускает множественность точек зрения на видимый мир. Базовыми здесь могут служить два способа мировосприятия: левополушарное, научное, прямая перспектива, абстракция отделения; и правополушарное, религиозное, обратная перспектива, абстракция взаимопроникновения. Тогда процесс «сведения–разведения» петель числовой асимметрии производится человеком: каков человек, таков и мир.

Другой вариант движения петель даёт современная космология, согласно которой спустя некоторое количество миллиардов лет мир ожидает смерть либо от постоянного расширения, либо от гравитационного сжатия. Мир балансирует между этими двумя процессами в зависимости от значения космологической постоянной. В противовес физике существует понятие древних о космической симпатии – согласованности сил сжатия и расширения, а также восточное представление о трёх силах: *Тамас*, *Раджас* и *Саттва*. Первая пара соответствует сжатию–расширению, третья сила Саттва – гармонизирующая. Эти силы никогда не уравниваются. Их можно символически вписать в связь метрик:

$$|\bullet|_{\infty} = \frac{const}{|\bullet|_p} \leftrightarrow Саттва = Тамас / Раджас$$

В этом случае получается известная модель пульсирующей Вселенной, «временами возгорающейся, временами затухающей» (Гераклит), в которой каждый элемент вибрирует [92] (см. гл. «Математическая физика»). Так выглядит наш вариант эсхатологии.

*Бог и Сатана.* Общим местом противопоставления является наделение Бога созидательной силой, сатаны – разрушительной. Сатана является представителем греха, лжи, Небытия. Заметим, что тень  $Z_2$  как изоморфа канторова множества имеет такую же бинарную древесную структуру, состоящую из вырезаемых промежутков. Поэтому любое слово может быть равно отнесено к одному из этих деревьев.

Отнесённое к тени, оно лишается референта и превращается в ложь. Собственно образование пустот в построении канторова множества есть разрушение целого, то есть действие раскольника Сатаны.

*Антропность Вселенной, свобода воли, благодать, человек.* Образы человека в науке и религии диаметрально противоположны. Вместо научного акцента на самостоятельности человека, независимости его деятельности по преобразованию природы

«религиозное мировоззрение настаивает на том, что должное **состояние внутреннего мира определяется соответствием его строя фундаментальным принципам миропорядка**; человек приобретает искомую им точку опоры в той мере, в какой он прорывается из плена мыслей, чувств, переживаний, связанных с его повседневными заботами о выживании, к вечным началам всего сущего» [Гайдено В.П. Природа в религиозном мировосприятии // Вопросы философии, 1995, №3 (выд. — Ф.М.).

Согласно нашей гипотезе, структура человека — как его тела, так и внутреннего мира — описываются числовой асимметрией, где  $Z_2$  относится к сознанию, то есть к логике и воображению. Как было ранее показано, в главе «Фракталы», изоморф  $Z_2$  — итеративная система функций (*IFS*) — несёт в себе все четыре физических симметрии, определяемые теоремой Лиувилля, то есть человек и телом, и сознанием есть часть внешнего мира или внешний мир отображается в мир внутренний (принцип «внешнее через внутреннее» в психологии). Иными словами, с самых общих позиций, Вселенная антропна — человек есть её необходимая часть, и, наоборот, Вселенная есть «большой человек» (Я.Беме), то есть приписывание Богу личностных черт, по нашей схеме, логически оправдано. Логически надо понимать в двойном смысле: дедуктивно для разума и действий, то есть в логике первого порядка, и как мышление образами (т.е. множествами), как в логике второго порядка. Метафорически — мышление Бога в логике первого порядка производит косную материю, так же как мышление человека — числа, в логике второго порядка — живую, так же как человек — образы (эта мысль часто встречается в литературе).

Человек и внешний мир относятся как *Я — Ты*, то есть как *действительное* и *возможное*. В частности, законы физико-химии, которые, как часто считается, детерминируют волю человека, есть законы в возможности. В каждой точке внешнего мира, если вспомнить рефлексивную схему для 2-адических чисел, присутствует всё их разнообразие, как в упоминаемой нами универсальной библиотеке. Поэтому, говоря словами кибернетики, потенциальное разнообразие

как физических, так и ментальных потенций человека совпадает с разнообразием физико-химических законов в  $R^\#$ . Своими действиями он актуализирует, то есть переводит из возможности в действительность, один или несколько законов природы. Поэтому аргумент материального детерминизма, в том числе и биологического – ДНК-детерминизма, не может служить ограничением. Кроме того, известна антиномия закона и благодати:

«“Закон” преграждает путь в Царство Божие, он есть преграда между людьми и преграда между Богом и человеком. ... Несовместимость закона и веры, закона и благодати выражается в том, что закон помещается в прошлое, а благодать в настоящее и будущее. Две системы ценностей исключают друг друга во времени» [Вышеславцев Б.П. Этика преображённого эроса. М.: Республика, 1994, с. 25–27].

Здесь у Вышеславцева пара закон–благодать явно соответствует пара конвергенция, математическая определимость, детерминизм  $R^\#$ –дивергенция, неопределимость, индетерминизм  $Z_2$ . Благодать есть биологическое будущее, жизнь, продлённая в будущее, закон – физическое будущее и биологическое прошлое. В нашей схеме это пара времён  $\tau = |*|_2 \rightarrow \infty$  и  $t = |*|_\infty \rightarrow \infty$  соответственно. Поэтому оправдана способность человека к порождению внеприродной (в смысле нефизической. – Ф.М.), морально обусловленной причинности [93].

Следующий барьер – Божественное предвидение и предопределение против свободы воли, принятия решений, мотивации поступков – может быть снят, например, такими рассуждениями. Для всеведущего Бога, чьи слова звучат одновременно и действия (четыре энергии –  $Z_4$ ) осуществляются непрерывно, всё, в том числе и действия человека, есть настоящее действительное. В нашей схеме – это Блок-Вселенная. Для человека настоящее сосредоточено в его Я, а весь остальной горизонт Вселенной имеет модус возможного. Ретроспективно, что бы человек ни делал, траектория его поступков, мыслей и слов, безусловно, лежит в действительном Бога и им предопределена (так же как кривая Менгера в  $R^3$  содержит копии всех пространственных кривых). Но для человека часть божественного действительного есть биологическое будущее (пара «локальное – глобальное»), которое ветвится, предоставляя веер возможностей для решений человека. Если бы не было этой возможности, если бы не было человеческого Я, то человек превратился бы в машину, без совести, моральной ответственности. То есть просто не было бы человека и, значит, Царствия Божьего по Христу – всей Вселенной [94,

с. 13–19]. Иными словами, Бог дарует человеку бытие как проявление своей любви, *Благо* – одно из имён Бога:

«Бытие – это величайшее благо для человека. Всё остальное, что случается в жизни человека, имеет смысл, лишь поскольку человек уже обладает бытием» [Гайденко В.П. Природа в религиозном мировосприятии // Вопросы философии, 1995, №3].

Как иногда замечают, Бог всеблаг, всемогущ и всеведущ, но он не диктатор и не насильник. Нисходящая причинность – действие Бога (снова –  $Z_4$ ) – имеет смысл ввода информации, а не силового действия [2, 3]. В современной науке математическая определимость, ведущая, как заметил Р.Том, к трупному окочению (*mathematical rigor tends to become rigor mortis* – англ.), противоположна психотерапевтическим практикам, стремящимся сделать человека свободным и уникальным, то есть вывести из фиксированных мыслей и действий, открыть перед ним его биологическое будущее.

*Откровение.* Различают естественное откровение – познание Бога путём чтения Книги Природы – и сверхъестественное откровение, когда трансцендентный Бог открывается человеку, ищущему Бога (т.е. причины единства мира), и помещает/вводит его в божественную реальность, формируя тем самым абсолютные критерии поведения [95]. Для естественного откровения достаточно разума, для сверхъестественного – озарения, экстаза, просветления. Первый путь есть «дальняя дорога», второй – перерождение, «оборотничество». Оба эти пути эквивалентны. Они означают переход на другую сторону бытия (подпространство числовой асимметрии) и являются универсалиями, распространёнными по всему миру» [96]. Иллюстрацией служит путешествие в Ад Вергилия у Данте в «Божественной комедии». Математическое обоснование такой односторонней геометрии мира дано Флоренским в его «Мнимостях ...» [50].

В нашей схеме геометрия является проективной, поэтому в ней оба пути должны иметь место. Первый путь формируется левополушарным сознанием, в прямой перспективе, второй – правополушарным, в обратной перспективе. Сверхъестественное откровение имеет характер очевидности, а не логического доказательства. В главе «Сознание» мы попытались обосновать объективность сознания в двойном бытии. Следовательно, и сверхъестественное откровение следует считать объективным, естественным фактом. Удачнее истолкование откровения дано Печориным:

«Представьте себе людей, заблудившихся в густом лесу. Они ищут обратного пути, но не находят. Надо идти на север, говорит один,

потому что где-то там должно быть шоссе. Нет, надо идти на запад, говорит другой, потому что, когда мы входили в лес, был полдень, а солнце было от нас с левой стороны. Эти люди могут долго доказывать друг другу свою правоту, приводя новые и новые аргументы — какие-то правильные, другие нет. Но все они — заблудившиеся. А теперь взгляните на ситуацию «сверху», откуда вы видите и этих несчастных, и лес вокруг, и границы леса, и кратчайший путь, которым они могут выбраться. Вам не надо ничего объяснять и доказывать, достаточно указать верное направление» [Печорин В.В. Бог и человек. Парадоксы откровения. М.: Новый Акрополь, 2011, с. 72].

В откровении человек *видит-себя-видящим-себя-в-мире*, то есть человек находится одновременно «В» и «НАД» ситуацией, «Во» и «Вне» времени, синтезируя оппозицию *последовательность, В—одновременность, НАД*. В этой ситуации человек видит *образ* и поэтому, находясь вне времени, не в состоянии описать его временной последовательностью символов и/или звуков. Образ/картину, как известно, лучше один раз увидеть, чем сто раз о нём (о ней) услышать. В целом получается картина *осознания/самосознания* [97]. В восточной философии откровению, по видимому, соответствует понятие *Сатори* — просветления, (внезапного пробуждения к глубинному единству) [98, с. 99], когда человек

«... осознаёт себя «субъектом-объектом» ... подобно тому, как две на первый взгляд различные стороны ленты Мёбиуса есть одно и то же. ... сознательное переживание является полем, которое, подобно ленте Мёбиуса, замыкается само на себя. Таким образом, не я осознаю себя наряду с другими вещами, а всё поле «я-осознаю-нечто» осознаёт самоё себя». Уотс А. [20, с. 31].

В исламском мистицизме — направлении, непосредственно ощущающем Божественную реальность, — есть трудноопределимое понятие *хизр* — таинственный наставник, направляющий человека на истинный путь. Этот наставник не отделён от человека, он есть его истинное *Я*, неразрывно связывающее его с Божественной реальностью. *Хизр* — Божественная сущность каждого человека-микрокосма [98, с. 42-43].

В нашей схеме сверхъестественное откровение становится (объективным) дополнением естественного и представляется инволюцией вещественных чисел в 2-адические, или, в терминах Паршина, преобразованием Фурье. *Хизр*, таким образом, предстаёт в виде ультраметризации телесного человека, что помещает его образ-чув-

ствилище в общее поле Божественной реальности как его часть, подобную целому. Человек тогда и обретает чувство онтологической зависимости как

«завиток бесконечного узла, и стоит ему потянуть в одном направлении, как он обнаруживает, что его тянут в другом, причём он не может проследить место приложения усилия. Форма его мысли не позволяет ему понять это». Уотс А. [20, с. 16].

По-видимому, откровение может иметь различную «высоту» на дереве 2-адики в зависимости от человека. Его формами являются инсайт — внезапное решение какой-либо задачи/проблемы, озарение — вспышка понимания связей некоей ситуации, текста. Эти формы хорошо известны психологам и связаны с получением новой информации.

Суммируем: откровение есть синтез локального и (более или менее) глобального. В системной теории известна формула: «Мысли глобально, действуй локально», что прямо ведёт от технической реальности к Божественной. Как было замечено на заре становления фрактальной теории [99], фрактальная геометрия сама по себе осуществляет Фурье-преобразование. То есть оба вида Откровения естественны и объективны и являются формами человеческой рациональности.

*Нисходящая причинность.* Один из основных вопросов в рассматриваемой области — как Бог действует в мире — приобрёл форму поиска нисходящей причинности. Этим термином обозначается сила или причина, которая действует в мире, не нарушая, тем не менее, действия естественных сил и причин, будучи к ним несводима. Нисходящая причинность, или причинность сверху — вниз, узнаётся как биологическая или ментальная причинность. И как субъективное, то есть интенциональное, действует объективно (загадка человеческих действий и движений). Интенциональное — это то, что удивляет нас в сложных природных системах и организмах [100]. Это целесообразность — влияние целого на части. Наблюдаемая гармония и согласованность всего в мире всегда приводила человека к мысли о высшем разуме. В этом же ряду стоит вопрос о природе уравнений математической физики.

«Даже если бы мы располагали однозначной теорией всего, а некоторые физики обещают её нам в самом ближайшем будущем, остаётся вопрос: кто (или что) «вдохнул огонь» в уравнения, чтобы преобразовать простую состоятельную формальную теорию в ту, что моделирует живую Вселенную» (Хеллер М. [7, с. 249]).

В сравнении с восходящей причинностью нисходящая рассматривается как вневременная, как ввод информации; для её толкования используется метафора субъективного человеческого действия [2, 3]. Эта пара узнаётся в двух формах каузальности И.Канта — естественной и свободной, двух типах энергии Тейяр де Шардена — материальной и духовной. Физика допускает подобную каузальную дополнительную как следствие различия метрик пространств, хотя последовательная разработка этой идеи автору неизвестна.

Известно, что природа времени и субъективности, природа и источник движения и языка (качеств) являются нерешёнными проблемами науки. В нашей же модели именно сопряжение числа и слова формально включает время и движение на конформной границе  $R^{\#}$  и  $Z_2$ . Эта граница — рациональные числа — проходит везде в материальном мире, как вне, так и внутри материи. В таком виде движение можно сопоставить третьей сущности высшей реальности — Святому Духу, Логосу, действию Дао. Иначе говоря, сопряжение Слова, сущности трансцендентной Числу, предстаёт как источник движения. И поэтому динамика Слова может быть сопоставлена с нисходящей причинностью. Действие слова как проекции из умопостигаемого мира в мир явленный связано с неархимедовой метрикой числа и распознаётся в мире по наличию изменений общего вида. Возникновение новых и исчезновение старых границ, рождение и становление, трансформация качеств — все эти процессы носят характер языкового именованя и физически акаузальны. Формально это три неопределимые (нетварные) производные в  $Z_4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ , соответствующие божественным энергиям. Неопределимость, непредикативность и соотнесённость этого действия с сознанием человека, то есть интенциональность, позволяют видеть смысл в действии Бога в мире как действия личности. Этому аналогична так называемая «загадка человеческого движения» — какими силами производятся механические движения личности? [101].

Взаимное непонимание науки и религии становится понятным: «несовместимость закона и веры, закона и благодати выражается в том, что закон помещается в прошлое, а благодать — в настоящее и будущее! Две системы ценностей исключают друг друга во времени...» [102, с.27]. Будущее же жизни, как отмечалось ранее, есть прошлое физики, и наоборот.

7. *Восток*. Ранее мы касались некоторых понятий восточной религиозно-философской системы. Мы продолжим поиск соответствий. Общей отправной точкой восточного мировоззрения является любовь и почитание природы как таковой (*татхагата* — само по себе таково), сближение человека и природы [103, с. 47]. Высказывание о. Павла — «Что это

за естественность такая, когда малейшее отклонение от законов физики является ошибкой?» (цитирую по памяти. — Ф.М.) — можно вполне понять в рамках нашей схемы: как патологичность математической физики, и естественность фрактальной геометрии природы. Иными словами, фракталы, сгенерированные западной наукой, и есть *tatxagata* Востока.

Простой обзор восточной мысли показывает, что она имеет референтом не явленный, но умопостигаемый мир, являющийся сверхъестественным для науки. В нём, по нашей числовой схеме, *всё во всём*, и *всё в одном*, и каждое связано с каждым. Нульмерный мир и любая его (под)область, например, *хизр* человека, сопотряжённы вещественному. Это основное различие между западным и восточным естественным богословием. Категории восточной рациональности несут на себе печать лингвоспецифических слов языка (культуры, истории), в отличие от западной парадигмы объективности (*cookie-cutter paradigm*). Иероглифическое письмо восточных культур есть письмо образами, а не линейной последовательностью физических (атомарных) сущностей. Соответственно, восточная рациональность есть рациональность воображения, то есть «вхождение в транспарантное единство образа» (Г.Д.Гачев). Образ гетерогенен, есть единство разнородных частей и поэтому не может быть описан линейным письмом, что многократно отмечалось исследователями. (Замечание. Здесь вновь узнаётся известная из теории вычислительной сложности проблема:  $P=NP?$  — возможность сведения недетерминированного алгоритма, который на каждом своём шаге генерирует веер вариантов продолжения, к детерминированному, каждый последующий шаг которого однозначно определяется предыдущими шагами и правилами. В нашей схеме первому соответствует  $IFS \cong (Z_2, |*|_2 \rightarrow 0)$ , второму —  $IFS \cong (Z_2, |*|_2 \rightarrow 1)$ , поэтому алгоритмы разведены во времени, и  $P \neq NP$  в общем случае).

Поэтому основа познания Востока — переживание единства с Природой, а не выстраивание её по теоретическим схемам. Если западный исследователь прибегает к уравнениям и длинной логической цепи объяснений, то восточный — помещает себя в результат/процесс и полагается на ощущения своего *чувствилища* (см. гл. «Сознание») — своей *хизры*. Это имеет в своей основе *чувственную осведомлённость человека*. Такое переживание аналогично *несловесному мышлению* [104]. Это состояние известно как гуань — отсутствие дуализма видимого и видящего, отсутствие стремления найти или ухватить/выделить что-либо, чистое переживание [20, с. 79–82]. Иными словами, в западной науке первичны уравнения, решения вторичны, а в восточном менталитете «все решения считаются известными», и дело только за видением их человеком-микрокосмом, чувствование согласованности с целым. Это следует как из нашей схемы, так и из опыта науки о сознании:



«Фундаментом нашего надличностного и научного опыта становится наше живое, общее, чувственное присутствие в мире» (Хант Г. [44, с. 428]).

«Что внутри, то и снаружи, что снаружи, то и внутри» (Гермес Трисмегист).

«Истиной живут, её не преподают» (А. де Сент-Экзюпери).

Западная рациональность на Востоке дополняется рациональностью созерцания, сопереживания, воображения, то есть работой правого полушария мозга (и глаз, естественно!). Отсюда вся многозначность и парадоксальность терминов восточной философии, которая в западном мышлении принимает форму неопределённости, противоречивости догматов, «руин семантики» (*М.Хеллер* [7]). Восток включает в познание всю полноту восприятия – лево-, правополушарное мышление, дополненное авторитетом-откровением. Причём познание проходит в основном через правое полушарие [103, с. 27; 105, 204; 106, 107]. По мысли А.И.Кобзева, семантика восточной мысли не линейна, а двумерна и, возможно, трёхмерна [107, с. 10]. Эта двумерность показана А.В.Смирновым как пара «номинальность и содержательность» [108, с. 290–317] – «вариативность логик смысла влечёт и вариативность оснований рациональности ... и вариативность формально-логических критериев». Эта двойственность, вариативность смысла и будет для нас поводом использования числовой асимметрии в качестве кандидата математического смысла.

В поиске соответствия восточным понятиям мы обращаемся к двумерности семантики, которая и будет формальным аналогом их многозначности и неточности, то есть неразрешимости их смысла. Известный логик-математик Р.Смаллиан, задавшись вопросом «Определимо ли Дао?» [105, с.15], приходит к парадоксальному выводу:

«... любое определение будет неточным и неясным именно ввиду своей точности» (*Смаллиан Р.*[105, С.16]).

Этот вывод приложим и ко всем ключевым понятиям восточной философии. Можно, однако, усмотреть их общий признак: они едины для вещного и «тонкого мира», мира материи и мира умоспостигаемого. Что неудивительно – слова с двойным значением всегда присутствуют в языке; удивительно другое – термины математической физики не имеют референтов за пределами её предмета, несмотря на её декларируемую фундаментальность.

В ушедшем веке внимание к восточной мысли и параллелям её с западной наукой и культурой проявили многие учёные [1, 55, 109–122]. Показательно появление энциклопедий, посвящённых восточному

мировоззрению [123–126]. Часто параллели с наукой оказывались весьма поверхностными, но были и вполне содержательные математически, как, например, у Ф.Капры и М.Талбота.

Возвращаясь к одной из центральных тем нашего изложения — апориям Зенона, отметим сходство в разведении апорийности по двум подпространствам числовой асимметрии с аналогичным же исчезновением парадоксальности в философии мутакаллимов, представляющих время дискретно-непрерывным, бимодальным [127]. Прекрасный обзор восточного мистицизма дан О.Хаксли в его известном труде [128].

С точки зрения современной науки, восточное мировоззрение интегрально прежде всего как путь к целостному знанию, согласованию оппозиций и раздробленности науки. Это также и путь возвращения человека в космос и понимания его роли в структуре Вселенной. На Востоке этот путь значительно более акцентирован (человек сразу помещается в умопостигаемый, «тонкий мир»), нежели в западном богословии, где ищется путь земного человека к Богу. В качестве иллюстрации можно привести православный и католический способы наложения креста. Крещение справа налево и крещение слева направо аналогичны противопоставлению верхнего, божественного, и нижнего, земного [129, с. 26–33].

Однако очевиден и параллелизм между мировоззрениями, становящийся ясным из «золотого правила нравственности», которое в незначительных вариантах присутствует во всех учениях: «... как хотите, чтобы с вами поступали люди, так поступайте и вы с ними» (Христос, Фалес Милетский, Аристотель, Сенека, древнеиудейские тексты равви Хиллель, в исламе — один из хадисов пророка Мухаммеда, сборник буддийских изречений Дхаммапада, Махабхарата, Лао-цзы, Конфуций, ассирийские «Поучения писца Ахикара») [9, гл. 1]. Топологизация этого правила имеет своим очевидным референтом самоподобие фракталов и  $p$ -адических пространств, в которых и располагается тонкий (ультраметрический) двойник человека. В переводе на человеческий язык оно означает видение и чувствование себя как другого и другого как себя. Ещё одно основание единства мировоззрений — известная максима, приписываемая обычно дельфийскому оракулу: «Познай самого себя, и ты познаешь богов и Вселенную» — Мухаммед, Атман и Брахман, Дао и дэ. Здесь, по сути, говорится о том, что тайна происхождения человека, его *Я* есть одновременно и тайна происхождения Вселенной. Этой «формуле» мы поставим в соответствие точку *A*, общую двум петлям числовой асимметрии (см. выше). Она является общей, по нашей схеме, происхождению жизни, языка, сознания и материи (во Вселенной Уилера).

С этой точки зрения мы и будем проводить наши соответствия, интерпретируя понятия в терминах числовой асимметрии. Здесь необхо-

можно заметить определённую трудность перевода, которая заключается в том, что Восток описывает космос и природу в значительной степени в понятиях человеческих, то есть не физико-математических: мораль, воздаяние за грех, добродетель, мудрость, этика и т.п., которым нет математического эквивалента. Однако поверхностный обзор этих понятий — морали, нравственности, добродетели, долга [130—133] — показывает при их топологизации, что все они в разной форме представляют собой варианты пары *локальное* (человек и его сознание и действия) — *глобальное* (космос, Абсолют, общество, его структура и действия). Иными словами, в рамках нашей схемы эти понятия онтологичны в Блок-Вселенной и связывают в единство мировой порядок и мораль человека, объединяя мир материи и сознания [134, с. 7]. Как мы пытались показать (в главах «Биология», «Язык», «Сознание», «Физика»), сущность человека повторяет структуру космоса.

Инвариантом их содержания можно считать нефундированность: человек не атом, самоподобие — микрокосм и макрокосм, отношение часть—целое. Эти характеристики онтологически связывают человека с обществом, космосом. Вместо механистической логики теорий (ГЛГ-аргумент) восточное *переживание* использует «сознание, спаянное с телом» (М. Мерло-Понти), то есть использует биологические аргументы/инструменты познания. Поэтому эти «человеческие» понятия направляют его помыслы, воления и действия *в биологическое будущее*, составляя основу того, что можно назвать «поддержанием и передачей жизни». Об этом также свидетельствуют такие понятия, как Срединный Путь и Восьмеричный Путь буддизма, формулирующие максимум «непричинения зла живому» [135, 136]. Можно сказать, что пространство восточного космоса своим способом несловесного познания аксиологически поляризовано (см. по этому поводу 104, гл. 3), аналогично противопоставлению «правого» и «левого» в религиозных обрядах. Правая сторона относится к правильному, справедливому, вере, Богу, одним из имён которого является Жизнь, левая — к неправильному, злему, неверию, дьяволу [129; 137, с. 297—303; 138]. В нашей схеме это соответствует двум направлениям времени. Правое — биологическому и благодати, левое — физическому и закону. Таким образом, восточное мировоззрение лишь иными словами описывает религиозное.

Восточный космос биологичен (энтелехия), лингвистичен (*сущность* языка), а поэтому может быть описан как чистое сознание (рефлексия). В нашей схеме этому единству отвечает согласованность голограмм (2\*) и (2\*\*) посредством инволюции и инверсий и, конечно, в рефлексивной трактовке (1) и (3) (см. ниже). Вспомним русскую религиозную философию, как она дана в стихотворении Ф.И. Тютчева:

«Что такое год или век/ Перед тем, что бесконечно./ Хотя не вечен человек,/ То, что вечно — человечесно»; или у П.А.Флоренского — «истина есть интуиция — дискурсия» (т.е. «воображение—логика». — *Ф.М.*); а у Б.П.Вышеславцева — антиномия закона и благодати (см. выше также П.П.Гайденко). Мы, упрощая, будем относить человеческие/идеальные значения восточных понятий к вечности — благодати биологического будущего, которое человечесно, а не к физическому времени.

*Отдельные соответствия.* Имея в виду многозначность понятий восточной философии, мы вновь воспроизведём голограмму и её инволюцию, дополненную соображениями предыдущих глав (см. список литературы в гл. «Сознание»).

Рефлексивность:

$$Q_2 \cong Q_2^1 \times Q_2^2 \times \dots \times Q_2^n \times \dots, \text{ то же для } Z_2 \cong Z_2^1 \times Z_2^2 \times \dots \times Z_2^n \times \dots \quad (1)$$

Голограмма — варианты инварианта:

$$C \cong \exp(C) \cong 2^C \cong Z_2 \cong [IFS \equiv \{0, 1\}^N] \cong [Z_2 \rightarrow Z_2] \cong BA_I (\cong BA_E) \quad (2)$$

В частности, два крайних члена в (2) представляют пары *материя—символ*, или *тело—разум*, *биологическое (нейронная структура мозга)—психическое (субстанция мышления/сознания)*. Первый и четвёртый —  $Z_2$  — есть топологическая алгебра, то есть материя со свойствами чисел, основа пифагорейского взгляда — «Всё есть число». Вся цепочка, но без первого и пятого членов — материи и языка — схематически представляет «несловесное мышление», внутреннюю речь, динамическую, изменчивую, потоковую природу мышления/сознания, которое можно поставить в соответствие переживанию. Первый и второй — целостность феномена, она же — неделимость ультраметрических пространств.

Два последних члена — решётки, представленные своими функциями над решёткой, и булева алгебра — соответствуют двум полюсам мышления — *образному* и *логическому*, то есть представляют формальный эквивалент функциональной асимметрии мозга, описанной как *творческое (дивергентное) — стереотипное (конвергентное)* мышление, определяющей личностные свойства *женское—мужское* соответственно. Двойная природа чувственного зрения — объект в целом и в деталях своих частей — также соотносится с первым, четвёртым и пятым членами в (2). В целом здесь узнаётся дихотомия *правый—левый* мозг как эмпирия числовой асимметрии.

Сопоставим голограмму с её инволюцией, то есть правополушарное мышление с левополушарным. В логическом виде (2) запишется как конъюнкция

$$| = C \wedge \exp(C) \wedge 2^C \wedge Z_2 \wedge [IFS \equiv \{0, 1\}^N] \wedge [Z_2 \rightarrow Z_2] \wedge BA_I (\wedge BA_E), \quad (2^*)$$

$$| = M \vee \bigcup m_i \vee \{G, V(m_i)\} \vee R^\# \vee d(m_i, m_j) \vee f_M(x, t) \vee \{BA_E \equiv \text{законы природы}\}. \quad (2^{**})$$

Здесь слева направо: выделенное тело/объём и даже Вселенная, объединение частей тела/объёма/Вселенной, граф/сеть взаимодействий тел (задача многих тел в физике), вещественные числа/явленный мир, процесс и результат измерения расстояний/воздействий/сил (алгоритмы/языки переходят в измерения), траектория механического движения  $M$ , причинно-следственные связи. В целом картина соответствует миру физики как множеству разделённых тел (*cookie-cutter paradigm* – англ.). Дважды упомянутая булева алгебра с соответствующими значками-индексами  $I$  и  $E$  имеет смысл интенсивной алгебры деления и экстенсивной алгебры движений соответственно.

Подставим поочередно (2), (2\*) и (2\*\*) в рефлексивную схему и получим аналог искомой многозначности понятий восточного мировоззрения. В символическом виде обозначим голограмму (2) (отнесённую к каждому из множителей рефлексивной схемы (1) как  $H_1, H_2, \dots, H_n$ ) как ультраметрический прообраз (хизр) человека, то есть  $H_i = \bar{a}_i \circ 2^N Z_2$ , где  $a$  – префикс, его координата в нульмерном мире,  $2^N Z_2 = B_{2^{-N}}(\bar{a}_i)$  – шар в  $Z_2$  радиуса  $2^{-N}$  с центром в  $a_i$ , где индекс  $i$  обозначает множество качеств человека – физических, ментальных, моральных, волевых. Тогда

$$H \cong H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n. \quad (3)$$

Это формальное выражение пары «микрокосм–макркосм:  $H \cong Q_2$ , или, в восточных понятиях, *tat tvam asi* («Это и есть Ты») [128, гл. 1]. Соотношения (2) и (2\*) справедливы и для временного параметра  $T$  – направления причинности:

$$T \cong T_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_n, \quad (4)$$

где  $T$  – двумерно  $T = (t, \tau)$  – физическое и биологическое время соответственно, которые связаны неоднократно упомянутой степенной зависимостью.

Остаётся заметить, что голограммы (2\*) и (2\*\*) при подстановке в рефлексивные схемы (1) и (3) дают тензорное произведение голограмм, где каждый сомножитель-голограмма соответствует отдельному моральному качеству/способности человека. Физически это бутстрап. В ментальном плане подходит квантовомеханическое понятие суперпозиции состояний из мыслей/чувств – синестезия как основа сознания.

*Индия.* Индийская философия очень разнообразна, различные школы не только дополняют, но и противоречат друг другу. Из-за этого Индию часто называют «лабораторией человеческой мысли». Есть, однако, корпус понятий, общий для всего индийского мировоззрения, что позволило С.Радхакришнану охарактеризовать индийскую фило-

софию как «консервативный либерализм» [103, с. 29] – восприятие всего нового при удержании собственного наследия:

«В свои наилучшие дни Индия разделяла мудрые взгляды афинян, о которых Перикл говорил: «Мы с радостью прислушиваемся к мнению других и не злимся на тех, кто с нами не согласен. ... Нет ничего плохого в заимствовании культуры других народов; только мы должны усиливать, повышать и очищать элементы, заимствованные нами, растворять их в лучшем, что есть у нас» (*Радхакришнан С.* [103, с. 989–991, 994, 997]).

Та же мысль является центральной в русской философии всеединства:

«Только такая жизнь, культура, которая ничего не исключает, но в своей всецелостности совмещает высшую ступень единства с полнейшим развитием свободной множественности, – только она может дать настоящее прочное удовлетворение всем потребностям человеческого чувства, мышления и воли и быть, таким образом, действительно общечеловеческою или вселенскою культурой» [*Соловьев В.С. Философские основы цельного знания.* М.: Наука, 1999; *Акулинин В.С. Философия всеединства.* Новосибирск: Наука, 1990, гл. III].

Вторым характерным признаком индийской философии является связь мира и человека – основными науками считаются психология и этика. Индийская философия духовна в своей основе: «Вечное бытие Бога – всепроникающий фактор индийской жизни» [103, с. 26]. Так же как и западное богословие, Индия различает мир вещный, переходящий, и мир вечный, умопостигаемый. Рассмотрим некоторые из понятий индийской философии.

*Даршана* – духовное, интуитивное восприятие, весь кругозор душевного чувства, интуитивный опыт, подкреплённый логическими рассуждениями [103, с. 25–26; 139]. В нашей схеме этому понятию можно сопоставить две числовые *метрики-как-функции* восприятия.

*Пракрити* – непроявленное, основа, первоматерия, содержащая все феномены в недифференцированном состоянии – *всё во всём*. Разворачивает миры эманацией, и сворачивает их в обратном порядке [140]. Этому понятию у нас соответствует бескачественная первоматерия 2-адических чисел в многообразии их интерпретаций как границ/форм/языковых номинаций/информации.

*Брахман* – первичная реальность, абсолют, единое, вечное, не подверженное изменениям, причина существования Вселенной, чистая духовная реальность, чистое сознание, внутренний Атман всех существ,

бескачественная реальность. Ассоциируется с заполненной пустотой, миром форм [21, с. 78], наиболее полное и наиболее реальное бытие. Буквенное сочетание *AUM*, обычно употребляемое для обозначения природы Брахмана, выражает три его основных качества, олицетворённых в Брахме, Вишну и Шиве. *A* – это Брахман-творец, *U* – это Вишну-охранитель, и *M* – это Шива-разрушитель [103, с. 110]. В нашей схеме Брахману можно поставить в соответствие нульмерное  $Q_2$  с его основными признаками – субстанцией границ, порождением  $R^\#$ , неподвижностью  $Aut(Q_2) = Q_2$ . Производство всего сущего отражается проекциями и энтелехией Дриша–Аристотеля (см. гл. «Биология»). *AUM* соответствует единству пары *конвергенция/создание–дивергенция/разрушение*.

*Атман* – оппозиция Брахману как локальное–глобальное. Означает дух, личное Я, самость, является отражением Брахмана в человеке [141]. Космическое (Брахман) и психическое (Атман) рассматриваются как идентичные; трансцендентное понятие Бога в «Ригведе» здесь становится имманентным, это тождество объекта и субъекта [103, с. 108–109], *tat tvam asi – это и есть ты*. Истинная реальность содержит все остальные реальности, Брахман в каждой вещи, существе [128, гл. 1]. В нашей модели этой паре соответствует изоморфизм  $Q_2 \cong 2^{\pm N} Q_2$  универсального нульмерного множества и любого его подмножества (см. гл. «Биология», «Сознание»). Обращение к рефлексивной схеме (1) придаёт этой оппозиции нужную многозначность смысла. Субъект-объектные отношения между Атманом и Брахманом, трактуемые как действительное и возможное, аналогичны паре оппозиций *идеальное–материальное* [103, с. 108–110]. Так же можно интерпретировать цепочки (2\*) и (2\*\*). И хотя в текстах об индийской философии употребляется слово «индивид», что в переводе с латыни значит «неделимый», то есть атом, человек в универсуме индийских и восточных понятий вообще не является атомом, то есть «чёрным ящиком» кибернетики. Атомизм разрушает всю систему Атман–Брахман, весь индийский Космос, в котором человек представляется Всечеловеком [55], сопротязённым всему Космосу.

*Адвайта-веданта* – религиозно-философская школа, веданта «недвойственности». Её центральной идеей является тождество Атмана и Брахмана [142]. Субъект и объект едины. Природа антропоморфна, существует для человека. И мир предполагается имеющим сознание и волю [103, с. 109]. Недвойственность в разных смыслах у нас отображается голограммой (2), рефлексивными схемами (1) и (3). Антропоморфность природы отражается цепочкой (2\*\*), где измерения осуществляются функциями восприятия, то есть двумя метриками.

*Дхарма* – понятие, сочетающее в себе порядок, право, внешний закон наряду с внутренним законом – моралью, праведностью. Близко

к понятиям истины, правды, блага — соответствии сущности вещей правде. Дхарма синонимична русской *правде* и греческому *алетейя* и означает «корректность восприятия» в онтологическом, познавательном и моральном смысле [143–145]. *Дхармы* — изменчивые элементы, на которые разбивается поток существования. Утверждают одинаковое устройство и человека, и окружающего мира. Дхармы значимы в сцеплении с себе подобными, в череде «со-бытий», в смене одного другим, то есть фактом своей изменчивости [146]. В нашей модели дхарму можно понять как согласование голограммы (2) и её инволюции (2\*), то есть как 2-адические числа во всей их совокупности, в многообразии их интерпретаций, с привлечением рефлексивной схемы (1) и (3). Дхарму отдельного человека можно понять как один из сомножителей в рефлексивной схеме на соответствующем масштабе  $H_i = \bar{a}_i \circ 2^N Z_2$ .

*Джняна* в Адвайте-веданте — мгновение преобразования сознания, внезапная переменная угла зрения, которая даёт возможность осознать единственную реальность — Брахмана, то есть чистое сознание, с которым никогда ничего не происходило. Имеет также смысл способности логического познания (пурва-миманса) [147]. Здесь напрашивается аналогия с естественным богословием и откровением, которое мы обсуждали выше.

*Дукха* — страдание, неудовлетворённость, порождённые самим человеком. Субъективное отношение к дхарме — по сути это претерпевание жизни [148]. Здесь напрашивается аналогия «действие в вещественном мире (2\*\*) при забвении голограммы тонкого мира (2\*)», то есть левополушарное мышление при отключённом правом полушарии. Развёрнутое описание человеческих *левополушарных* страданий недавно дано А.П.Щегловым [149].

Понятия кармы и сансары как закона моральной, то есть аксиологически поляризованной, причинности включают в себя понятия души и духа. Поэтому ниже мы предварительно рассмотрим понятия духа и души.

В исследованиях сознания существует представление о двух его осях — *sensus communis* и *psyche—aion*. Первая, горизонтальная ось есть личностное знание, связывающее человека с окружающим миром, обществом, обыденный опыт. Вторая, вертикальная ось связывает его личное эго, жизненную энергию с надличностным опытом [44, с. 286–308, 315]. Эту пару осей можно сопоставить с антиномией К.Г.Юнга *каузальная—финальная* связи, в которой финальная определяет развитие человека и вместе они составляют *антиномический постулат*. Что для каузальной — факт (т.е. действительное), для финальной — символ (т.е. возможное), и наоборот. Это позволяет рассматривать мир как психический феномен [150, с. 66–71].



*Душа.* Мы сопоставим душу как жизненную силу, энтелехию органического (Аристотель), принцип движения (А.А.Ухтомский), принцип жизни (Платон), связующее начало между миром чувственным и умопостигаемым, тонкий слепок человека, оживляющий его при рождении [151, 152], как самочувствие, движущую силу, находящуюся внутри нас, основу познания, чувств и воли [153, с. 135], пользуясь нашими предыдущими интерпретациями, как

$$H = \bar{a} \circ 2^N \cdot (Z_2 \times Z_4) \quad N > 1, \quad (5)$$

которая есть подобласть мира, ограниченная одним иерархическим уровнем, то есть при фиксированном  $N$  и, соответственно, постоянным префиксом  $\bar{a}$  – координатой человека в психическом образе мира (см. К.Г.Юнг). Здесь жизненная сила человека  $Z_2$  представлена энергиями  $Z_4$ , ограниченными масштабом. Способность к познанию следует из антропоморфности Вселенной. Такое толкование души сближает её с дхармой, понимаемой как психофизическая структура, элемент сознания, Вселенная как объект мысли (тоже в нашей интерпретации. – Ф.М.). Тогда 2-адическая материя как изначальная природа дхарм становится *дхарматой* Махаяны. [19, с. 163].

*Дух, духовность* – способность человека к смыслополаганию, преобразованию действительности в плане дополнения природной основы индивидуального и общественного бытия миром моральных, культурных и религиозных ценностей [154], идеальная, правящая миром сила, к которой человек может быть причастен, движение к вершинам психики. Природа духа есть свобода – «Дух дышит, где хочет» [153, с. 134]. Этому понятию сопоставляется вертикальная ось финальной причинности. В (5) это движение префикса-психической координаты  $\bar{a} \rightarrow a' \circ \bar{a} \circ a''$  вверх-вниз по иерархии  $Z_2$ . Идеальная сила, правящая миром, рассмотрена ранее в Троице: это  $Z_4$  без ограничений на уровне иерархии. Соответственно, в (5)  $N \rightarrow \infty$  есть движение в физическое будущее, а  $N \rightarrow 1$  – в биологическое будущее. Это позволяет различать добро и зло в понятиях души и духа.

*Карма* – естественный закон влияния суммы совершённых индивидом действий (телесных, речевых, ментальных) на всю его последующую жизнь и характер будущего рождения. Предполагает морально окрашенную оценку поступков, утверждает причинно-следственную связь между деяниями существ в прошлом, настоящем и будущем и веру в перерождение души (сансара), которая приводит к перерождению земного мира в место нравственного воздаяния и к идее воздаяния в других мирах. Карма – рок, судьба, свобода воли. Кульминацией закона кармы является полное освобождение от него (нирвана). Карма обосновывает иерархическое устройство мира, неравенство людей, но

доводит до сведения человека его ответственность за прошлые поступки и возможность полного изменения своей участи [155].

*Сансара* – перерождение, реинкарнация, переселение душ. В широком смысле это синоним феноменального существования вообще, изменчивого и в то же время повторяющегося в своих сюжетах, в узком смысле – окружающего мира человека. Сансара, отождествляемая с дукхой, есть все страдания и невзгоды, которые приходится пережить человеку в земном мире [156]. Она задаёт единую иерархию, по которой человек восходит или нисходит в зависимости от баланса заслуг и пороков. Сансара безначальна [157].

В проекции в  $R^{\#}$  «тонкий слепок человека» (5) во времени описывает полосу (*цилиндр* – математически) его поступков и волений, направляемых психической координатой  $\bar{a}$  – судьбой. Баланс доброго и злого в жизни человека задаётся её движением  $\bar{a} \rightarrow a' \circ \bar{a} \circ a''$ . Правый (бернуллиевский) сдвиг по времени, то есть биологическое время, даёт свободу воли человека, движет его вверх по иерархии, левый – помещает его в физическую причинность, направляет вниз к материи. Поэтому в полном времени возможны явления, характеризующие карму. Полное освобождение – нирвана – происходит, по-видимому, при  $N = 1$ , то есть на вершине иерархии.

Из сопоставления дукхи и сансары видно, что они соотносятся как локальное с глобальным. Оба этих понятия отражают циклический и сетевой характер мироустройства, выражая тем самым онтологическую зависимость человека от всего целого мира. Отсюда и возникает ответственность: в «тонком мире» человек включён в иерархию циклов:  $Q_2 = \bigcup_{j,k,\dots} 2^{i,j,k,\dots} Q_2$ . Ясно также, что будущее закона кармы–сансары не есть физическое будущее теоретической механики, но биологическое будущее человека. Иными словами, этот закон предполагает Блок-Вселенную  $Q_2$ , в которой время  $T = |T|_{\infty} \cdot |T|_2 = t \cdot \tau$  имеет бинарный характер с  $\tau \rightarrow \infty$ .

*Майя* – понятие, тесно связанное с сансарой. Это разнородный мир событий, вещей и явлений, который скрывает единство мира в Брахмане. В нашей схеме майе соответствуют левополушарное мышление, чувственное зрение, архимедова *метрика-как-функция* восприятия. Без неархимедовой она неполна, иллюзорна.

*Мокша* – освобождение от майи – заключается в восприятии единства мира, Брахмана. В нашей схеме это доминирование правополушарного мышления, неархимедовой метрики-как-функции восприятия [21, с. 73]. Мокша поэтому есть *отрицание–инволюция* майи.

*Сеть Индры* – наиболее известная метафора строения Вселенной, на которую обратили внимание математики в связи с фракталами [113].

В Аватамсака-Сутре это образ «огромной сети из драгоценных камней или кусочков хрусталя, подобной паутине, освещённой восходящим солнцем. Каждый камень в ней отражает все остальные. Эта переливающаяся сеть и есть Дхарматхату, Вселенная, царство бесчисленных дхарм» [21, с. 117]. Сети Индры естественно сопоставляется иерархическая масштабнo-инвариантная сеть шаров различного радиуса, каждый из которых изоморфен всему  $Z_2$  – самоподобию фракталов. Сеть Индры, таким образом, есть структура татхагаты: связывая локальное с глобальным, она утверждает тождество Брахмана и Атмана. По-видимому, отправляясь от этого образа, можно логически связать основные понятия индийского мировоззрения.

*Китай.* Китайская философия столь же разнообразна, как и индийская. Для современной науки наибольший интерес представляют даосизм и дзен-буддизм. Их центральной идеей является недualьность – целостность мира и включённость в него человека. Также явно проступает аксиологическая поляризация Космоса: «разделение без отделения называется жизнью» (Чжуан Цзы) [19, с. 86]. Парадигмальным текстом для обсуждения служит «Дао дэ Цзин» Лао Цзы [158, 159, гл. XII]. Его особенность заключается в последовательном описании космологии недualьности, то есть в прямом противопоставлении её идее множественности западной науки. Основные понятия этой философии – понятия Дао и Дэ. Вторым, часто упоминаемым пунктом китайской философии является древняя Книга перемен – *И Цзин*, являющаяся источником картины мира [21, с. 38]. Посвящённые ей исследования образуют значительный по объёму пласт литературы, уходящий корнями к Лейбницу с его идеей универсальной математики. Понятия китайской картины мира также семантически многозначны и обусловлены двухполушарным, психосенсорным способом познания [21, с.16], познания всеми органами чувств, мышлением о мире, где всё происходит «сразу», одновременно, а не последовательно-линейно [21, с.31]. В китайском языке, в отличие от нашего, многие слова являются одновременно существительными и глаголами, предметы понимаются одновременно и как процессы [21, с.27–28]. Поэтому в дальнейшем, с целью избежать громоздкости, мы будем держать в уме наши рефлексивную схему и голограмму с её инволюцией (см. выше), ограничиваясь соответствиями в наиболее простой форме.

Синологи описывают роль чисел в мировоззрении Китая, которая весьма близка к множественной интерпретации (варианты инварианта!) 2-адических чисел:

«Исходя из анализа различных арифмосемиотических текстов, можно сделать вывод, что, по мысли древнекитайских мудрецов, чис-

ла являются одной из важнейших характеристик бытия, элементами некоего космического кода, с помощью которого оформляются и организуются все мировые реалии. В числе выражается структурная целостность вещей. Числа делают вещи познаваемыми. С натуралистических позиций, на которых выстраивалась древнекитайская наука, числа как такового нет. Оно не существует вне вещей. Число находится в самих вещах, задавая их структуру, и во временных процессах, задавая их ритм. В то же время оно предстаёт как некая творческая сила, приводящая к расчленению всякой непрерывности. Поскольку числа содержат в себе идею порядка, а не являются просто результатом счёта или измерения, то они не равны между собой по статусу. Учитывая это, китайцы выделяли некоторые числовые константы и подразделяли числа по их онтологической и гносеологической значимости, их месту в универсуме. Одним из таких подразделений является выделение нечётных (цзи) и чётных (оу) чисел. Первые считались янскими, а вторые – иньскими. Ряд натуральных чисел предстаёт, таким образом, последовательностью чередования янского и иньского принципов. С космогонической точки зрения, этот ряд описывает порядок возникновения вещей, которым приписываются те или иные числовые значения. Отсюда вытекает, что начальные числа ряда являются более онтологичными, чем последующие. Они более важны и с гносеологической точки зрения, поскольку, используя их, можно выразить любое другое число с помощью простой операции сложения. Кроме того, действия с ними являются наиболее лёгкими, ведь учитывая современные знания о свойствах человеческого мышления, числа в пределах первой десятки (по другим данным,  $7 \pm 2$ ) соответствуют объёму оперативной памяти. Древние китайцы полагали, что каждое число указывает на своё местоположение в пространственно-временном континууме. Это позволяло рассматривать числа как средства познания, на основе которых возможно эффективно выявлять классификационные и ранжировочные принципы. Числа в пределах десятка и некоторые другие были сопоставлены с классификационными комплексами понятий, игравшими важную роль в древнекитайской арифмосемиотике» (Еремеев В.Е. [117, с. 17]).

Эта числовая система – *сян шу чжи сюэ* – видится аналогом пифагорейского понимания числа:

«Образующие *Сян шу чжи сюэ* элементы – математические и математикоподобные построения, то есть пространственные («геометрические») структуры и числовые («арифметические») комплек-

сы — связаны друг с другом широким кругом связей: математических, символических, ассоциативных, фактуальных, эстетических, мнемонических, суггестивных и др.» (Кобзев А.И. [125]).

Нетрудно видеть, что *янские числа* соответствуют экстенсивному натуральному ряду, как получающемуся прикладыванием неделимых отрезков, а *иньские* — интенсивному, как множеству «связанных двоеточий» (именно так описывается иногда канторово совершенное множество, изоморф  $Z_2$ ). А множество интерпретаций — функций чисел — совпадает с использованием 2-адических чисел в физике, языке, сознании в нашей схеме. Тогда их комбинаторика, представленная в И Цзине, соответствует комбинаторике вещественных и 2-адических чисел и образует плоскость  $X, Y \propto \{|\bullet|_\infty, |\bullet|_2\}$ . Иными словами, древнекитайская система *сян шу чжи сюэ* описывает биологическую, антропоморфную Вселенную. Тогда понятно, почему структура живого мира-организма мыслилась китайцами как фрактальная [117, с. 23–26].

*Тай Цзи, У Цзи* — безграничная пустота, невещественная вещь, неосвязаемая плотность, бесформенная форма. Из этого источника развивается всё, включая *инь* и *ян*. Другое название — Дао, по И Цзину — это Тай Цзи [160, с. 122]. Этому понятию ставим в соответствие точку абсолюта  $A$  (см. выше) как источника (физически) невидимого, неясного, неопределённого  $Q_2$ . Безграничная пустота может быть описана как архимедов нуль  $|Q_2|_\infty = 0$ , то есть все  $p$ -адические числа в сумме равны нулю ( $\forall \xi, \exists \eta \in Q_2 \quad \xi + \eta = 0$ ), но являются пространственно-безграничными (антиномия Канта — «мир и бесконечно мал, и бесконечно велик», — понимаемая в нашей интерпретации).

*Ю-У* — бытие/не-бытие, наличие отсутствия. По этому поводу см. наши рассуждения «Ничто» выше.

*Инь и Ян* — те контрасты и противоположности, из которых состоят мир и жизнь [160, с. 17]. В нашей схеме это два универсальных базовых процесса, представленных копиями полурешёток  $R^\#$  и  $Z_2$ , и появляющихся на всех масштабах. Энергиям инь-ци и ян-ци и их взаимопереходам напрашивается соответствие с  $Z_4$ . Ян аналогичен энергийному конвергентному, а Инь — дивергентному членам четвёрки энергий. В целом  $Z_4$  сопоставляется с четвёркой символов *сы сян* — четвёркой энергий взаимопереходов инь и ян. Последовательное удвоение пары инь-ян ведет к *ба-гуа* — триграммам И Цзин и структуре китайского космоса [117, с. 22].

*Дао* есть одно *ян* и одно *инь*. Дао — многозначное понятие. Основные концепции — конфуцианская и даосская. Даосская, субъективная, связывает Дао с миром человека: путь жизни, правда, учение, теория, мораль, абсолют. Конфуцианская — с миром объективным, наличным:

первичная реальность, мать всех вещей [125]. Весь трактат Лао–цзы [158], по сути, посвящён описанию Дао, его действию и его проявлениям в природе и обществе, объединяя обе концепции [161].

*Дао* – основа всех вещей, неизменное, одинокое, великое, не знающее преград, беззвучное, бесформенное, бестелесное, туманное, неопределённое, содержащее все образы и вещи, содержащее в своей глубине тончайшие частицы, обладающие высшей действительностью и достоверностью, начало всех вещей [158, §§ 62, 25, 21, 14, 35, 4]. Этот набор определений вполне соответствует первичности нульмерного  $Q_2$  и отсутствию у него физических, чувственно-наблюдаемых свойств.

*Дао* находится в постоянном движении, не достигающим предела и потому возвращающимся к своему истоку [158, § 25]. Главная закономерность Дао – обратимость, движение по кругу [162]. Здесь усматривается циклическая (то есть биологическая) геометрия проективной прямой  $Q_2$ , присутствующая во всех творениях, подобно нескончаемой нити (т.е. на всех масштабах) [158, § 32]. Действие Дао неисчерпаемо [158, § 6], то есть осуществляется посредством энергий  $Z_4$ . Эти энергии, образуя биологическое инверсное поле в рефлексивном представлении  $Q_2$ , порождают бесконечные превращения Дао [158, § 6]. Иными словами, Дао есть космическая синестезия, что сближает его с чистым сознанием, Брахманом индийской философии.

*Дао* содержит и порождает все оппозиции и контрасты – превращение в противоположное есть действие Дао [158, §§ 40, 18, 19, 57, 58]. Формальная аналогия – арифметика Пресбургера и инволюция между полурешётками числовой асимметрии. Отсюда: «*Дао* рождает одно, одно рождает два, два рождает три, а три рождает все существа» [158, §42]. Этой генеративной последовательности можно поставить в соответствие последовательность

$$A \rightarrow \{Q_2 \rightarrow \{R^\#, Z_2\}\} \rightarrow \{R^\#, Z_2, Z_4\}.$$

То же в терминах метрик – функций восприятия или энергий

$$A \rightarrow \{Q_2 \rightarrow \{|\bullet|_\infty, |\bullet|_2\}\} \rightarrow \{|\bullet|_\infty, |\bullet|_2, (e_1, e_2, e_3, e_4)\}.$$

Глобальной оппозицией Дао можно рассматривать оппозицию «математическая физика–биология» и её социальный эквивалент «закон–благодать» (см. выше). В Дао Дэ цзине этим парам соответствует «Человеческое Дао–Небесное Дао» [158, §77]. Первому члену этих пар соответствуют действия человека в проявленном мире – искание Дао, умножение законов, учёность, хитрость и страсть к наживе и т.д. В этом случае Дао теряется. «Тропинки» алгоритмического поиска, определений, механических действий, линейных описаний, то есть любое множество формальных законов, направлены против биологической стрелы

времени: «Дао, которое может быть выражено словами, не есть постоянное Дао» [158, §1], «Если исходить из Дао, то всё это называется лишним желанием и бесполезным поведением» [158, §24], «Знающий не доказывает, доказывающий не знает» [§81], поскольку активизирует биологически негативные побочные эффекты — разделённость, противоречия, преступность, несчастья [158, §§ 53, 65, 77] и т.д., то есть современное состояние мира, верящего в математизацию [149; 163, с. 46].

Второй член пары явно описывает биологическую стрелу времени, аксиологическую поляризацию китайского космоса. Действие Дао — биологическое, Дао рождает и вскармливает вещи, гармонизирует разнообразие посредством связи «одно во всём и всё в одном» [158, §§ 32, 34, 51, 54]. «Небесное Дао не борется, но умеет побеждать. Оно не говорит, но умеет отвечать. Оно само приходит. Оно спокойно, но умеет управлять [вещами]» [158, § 73]. «Китайское Дао растит мир изнутри ... и этот источник роста — «изнутри» — есть в точности то, что обозначают китайским словом «природа»: цзы-жань, спонтанность. ... живые организмы растут изнутри наружу, а не создаются снаружи вовнутрь, как это делают архитекторы и механики, они движутся в соответствии со своей спонтанностью, а не в соответствии с объективными принципами» [20, с. 48–50]. В современной науке *спонтанность* известна под именем *эмерджентности* — появлению нового, — имеющей химико-биологические коннотации и обозначающей неизвестную физико-математической науке причинность.

Для контраста между Небесным и Человеческим Дао можно привести основную, логически комичную идею математической теории биологической самоорганизации, обычно формулируемую посредством «законов» в виде *определимостей* разного рода: уравнений, алгоритмов — «Самоорганизуйся!».

*Дэ* — добродетель, благодать, моральная сила, доблесть. Как внутреннее человеческое качество органичное и естественное Дэ составляет оппозицию внешней физической силе насилем и законом. *Дао-дэ* — мораль, нравственность, идея пути и просветления. Эквиваленты Брахман и Логос [164]. Кажется ясным, что *дэ* можно интерпретировать как Дао в человеке, обществе — следование природе биологической естественности [158, §§ 10, 16, 23, 41, 55, 59, 65], аналогично паре Брахман—Атман индуизма. В итоге *дэ* можно считать аналогом «золотого правила нравственности».

*У-вэй* — важнейшая категория даосизма, предписание «недеяния», символизирующая принцип этического и практического невмешательства в естественный ход вещей и событий. Диктует органическую и спонтанную активность осуществления недеяния [158, § 63; 165]. Основной вид действия Дао [158, § 37] — учение, не прибегающее к словам

[158, § 43], доверие к Дао [19, с. 123]. В нашей модели этому понятию можно поставить в соответствие действие и мышление в биологическом времени, в рамках биологической причинности, то есть используя энергии  $Z_f$ . Энергия надеяния, таким образом, есть энергия благодати — *дэ*.

Следующие три понятия представляются тесно связанными друг с другом.

*Синь* — сердце, психика, субъективное, дух, сознание, средоточие психических и духовных возможностей, функций сознания и познания. Окно в духовное пространство мироздания [125]. Синь означает некое препятствие, которое подлежит устранению. Поэтому часто встречаются такие сочетания, как: «первоначальный ум» (*пень-синь*); «ум Будды» (*фу-синь*); «вера в ум» (*синь-синь*), как ум, не умствующий о себе, подобно чувствам — зрению, дыханию, слуху — не ощущающим себя. «Скорее всего, синь обозначает взятое в целом функционирование психики человека» [21, с. 50–54]. Такая целостность, очевидно, должна включать и несловесное мышление, как спаянное с сознанием. Отсюда становится понятным *у-синь*.

*У-синь* — неактивность ума, спонтанная способность наблюдения/созерцания. В его описании — одновременное видение предметов и процессов их изменения, не-фиксирование, не-хватание какого-либо одного состояния/предмета [21, с. 50–54], усматривается действие обоих полушарий мозга и глаз в качестве его частей, вынесенных на периферию. Человек в этом случае находится в двух пространствах — вещественном (предметы, множественность) и ультраметрическом (процессы, поле).

*Гуань* — подразумевает наблюдение природы, при котором дуализм видящего и видимого отсутствует [20, с. 79–80]. *У-синь*, по-видимому, аналогично познанию с помощью чувствилища, ультраметрического прообраза. *Гуань* — одновременное действие зрения и умозрения.

Формально эти три понятия представляются действием двух *метрик-как-функций-восприятия*. Аналог в исламе — мышление и восприятие *хизром* человека.

*Ци* — понимается в двух смыслах. Первый — орудие Дао, составляющее его оппозицию. Второе — как эфир, воздух, дыхание, жизненная сила, бескачественная первичная материя, пространственно-временная, духовно-материальная, витально-энергетическая субстанция, из которой состояла Вселенная в фазе Тай Ци. Её начальные формы дифференциации — *инь* и *ян*. Ци преобразуется в конкретные объекты путём сгущения–разрежения. Стандартная оппозиция — *ли* [166]. В нашей схеме первоматерии сопоставляется материя числовой асимметрии в её выражении языком, сознанием, биологией (энтелехия) и физикой (материя). Оба смысла объединяются нетварными



энергиями,  $Z_4$ , отличными от Дао,  $Q_2$  и в совокупности являющимися способом его действия, то есть орудием.

*Ли* – принцип каждой вещи, её индивидуализирующее начало, текстура, закон вещи, не выразимый линейным языком. Близко к этому понятие «отпечатка, следа или образа» конкретной фрактальной структуры вещи (*dimension print, fingerprint* – англ.). Это понятие было введено для различения внутренней геометрии и характеристик фракталов, имеющих одинаковую фрактальную размерность [167], но не получило развития. Фракталы вообще как «негладкие, недифференцируемые» объекты являются *образами* и не поддаются определению, то есть выражению линейным языком. Точнее, представим объект  $V$  в виде:

$$R^\# \supset V^\# \xleftarrow{Z_4^0} V \rightarrow V^* = \bar{a} \circ 2^N \cdot Z_2.$$

В этой диаграмме правая стрелка указывает на ультраметрический прообраз вещи в  $Z_2$ . Левая – на её проекцию в вещественное пространство посредством конкретной реализации четвёрки энергий  $Z_4^0$ . Префикс  $a$  – индивидуализирующее начало, координата в ультраметрическом пространстве. Очевидно, проекция (правая стрелка) порождает фрактал, внутренняя геометрия которого, то есть *текстура вещи*, зависит от конкретного сочетания величин энергий  $Z_4$ .

*У син* – пять элементов, пять стихий, пять действий, пять типов динамических процессов, фундаментальных для всего мира природы. Это универсальная схема, согласно которой, все основные параметры мироздания, как вещественные, так и невещественные, имеют пятичленную структуру [117, с. 55–65; 160, с. 128]. Существует множество названий, интерпретаций и порядков последовательностей этих стихий. Наиболее распространёнными являются следующие их названия: *огонь, металл, вода, дерево, почва*. Нашей модели близки следующие их изображения [117, с. 60, 62]:

В первой схеме рисунка круговой порядок, изоморфный линейному экстенсивному натуральному ряду, описывает взаимопорождения стихий, перекрёстный порядок – образный, дивергентный – порядок их взаимопреодоления. Вторая схема аналогична первой.

В обеих схемах *почва* стоит в центре. Это значит, что все пространственно-временные характеристики стихий в ней совмещаются и/или ею порождаются и в неё возвращаются [117, с. 60]. Очевидным образом



Рис. 1. 5-лучевая симметрия у-син

вторая схема может быть преобразована в первую, и обратно. Нетрудно узнать в модели *у-син* 5-лучевую симметрию, запрещённую физическими законами, но типичную для биологии и нефизического мира вообще [168, 169]. Тогда *почва* должна пониматься как *первоматерия*, физический вакуум, рождающий как косную, так и живую материю. А.И.Кобзев даёт интерпретацию *у-син* как предшествующему Тай Цзи и Инь – Ян [170]. В нашей схеме *у-син* естественно сопоставить четвёрку движений/энергий  $Z_4$ , дополненную точкой абсолюта  $A$ , содержащей «замысел» рождения мира (см. выше).

*И Цзин* – Книга перемен – циклически описывает многообразие превращений и движений мира, связывая их в единство (*си тун*). Её аналогами являются европейские «универсальная знаковая система», «философский язык» Р.Декарта, Д.Уилкинса, Г.Лейбница [117, с. 7–10]. Элементами *И Цзин* являются символы инь и ян, объединённые в гексаграммы. Существует два способа их построения: сверху вниз и снизу вверх – ветвлением великого предела и слиянием из него же [117, с. 37–38]. Здесь напрашивается аналогия с базовой структурой числовой асимметрии. Ветвлению соответствует  $Z_2$ , слиянию –  $R^\#$ . На рис. 2 оба способа совмещены.

Кодировка символов часто принимается двоичной (у нас – диадической). В нашей схеме янские линейные отрезки соответствуют архимедовой метрике-восприятию, иньские, разрывные – неархимедовой метрике-восприятию. Поэтому кодировка гексаграмм может быть переписана в символах метрик, что уже в явном виде даёт связь внутреннего и внешнего миров человека, субъекта и объекта. Это видно из двух способов деления гексаграмм – на две и три части. Деление на три части указывает на двойную природу человека как «порог двойного бытия» (Ф.И.Пютчев) [117, с. 50]:

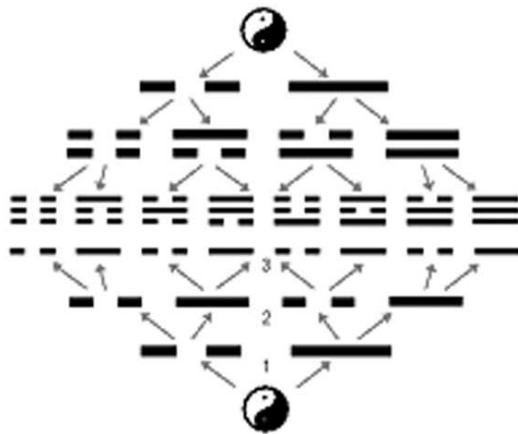


Рис. 2. Числовая асимметрия в *И Цзин*

Формальной аналогией *И Цзин* можно положить простейшее уравнение движения, определённое над двумя числовыми системами:  $dX/dT = v$ , в котором производные в левой части и правая часть вычисляются в двух метриках и в двух подпространствах числовой асимметрии. В результате этой комбинаторики получаем по 8 уравнений в

каждом подпространстве. Итого 64 уравнения, выражаемые двумя метриками-восприятиями. Циклический характер перемен повторяет, очевидно, циклическую геометрию числовой асимметрии. В этом случае понятен гадательный характер *И Цзин*: формальная теория как всё множество движений имеет

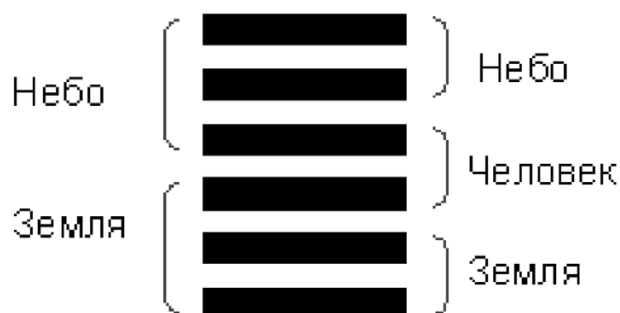


Рис. 3. Человек – порог двойного бытия в *И Цзин*

неизоморфные модели и поэтому является неразрешимой. Дедукция и анализ здесь не работают или, как показывает практика, превращаются в лавину несвязанных логических результатов. Такая формальная модель объясняет системность Книги перемен, на проблему которой указывал В.М.Алексеев [117, с. 7–8].

*Резюме.* На этом мы закончим наш весьма предварительный и фрагментарный поиск соответствий понятий науки и религии. Мы ограничились лишь частью того объёма, который уже вовлечён в диалог науки и религии. Он, конечно, неполон. Его неполнота заключается также и в том, что мы не исследовали картину мира Японии, ислама и русской религиозной философии, а лишь коснулись их. Оправданием может служить то, что эти системы только начинают вовлекаться в научное обсуждение. Кроме того, в настоящее время Восток уже является не только географическим понятием, а вбирает в себя множество мировоззренческих систем, рассматривающих мир как целое, и дополнительных к современному рационализму. Большой интерес в этом плане представляют мифы и легенды народов планеты, обнаруживающие «волшебную согласованность мировоззрений» (Э.Шрёдингер).

В главе «Естественный язык» мы приводили метафоры мира как книги и попытались обосновать их с точки зрения фрактальной геометрии и числовой асимметрии. Если наши рассуждения о религии имеют какое-то содержание, то эта метафора может быть продолжена:

«Для верующего естествоиспытателя Природа оказывается одной из форм Откровения. Св. Григорий Богослов писал, что весь природный мир – это «великая и преславная книга Божия, в которой открывается самим безмолвием проповедуемый Бог». Так понимал природу ... М.В.Ломоносов, писавший в работе «О слоях земных»: «Натура есть некоторое Евангелие, благовествующее не-

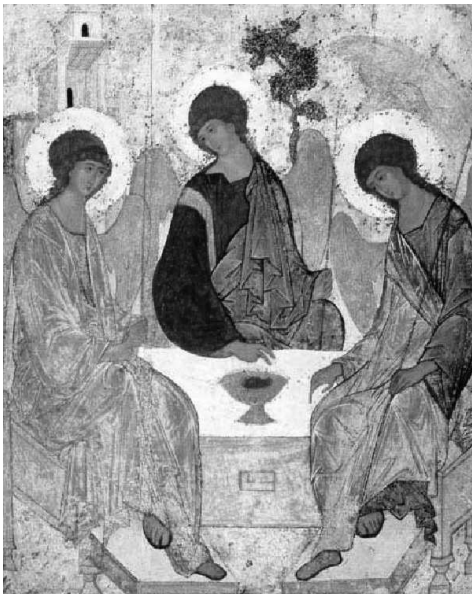
умолчно творческую силу, премудрость — величество». Так понимали её и средневековые схоласты, сформировавшие первую познавательную модель европейской науки, в рамках которой мир выступал как книга, а познание — как чтение или расшифровка». [Гоманьков А. В. Библия и Природа. М.: ГЕОС, 2014, с. 103].

Тогда напрашивается следующая метафора. Подобно тому как икона есть грамота для неграмотных, фракталы как естественноприродная геометрия есть *Евангелие для неверующих*.

Аксиологическая поляризация Космоса религиозным мировоззрением, которая основана на онтологизации человеческих качеств, наиболее выпукло представленная Востоком, означает уже не просто антропность Вселенной, но и её нравственный характер. В литературе не раз отмечалось, что человеческие качества не являются атавизмом на фоне научно-технического прогресса, но есть необходимый популяционный признак человеческого рода, способствующий приспособлению, выживанию и развитию.

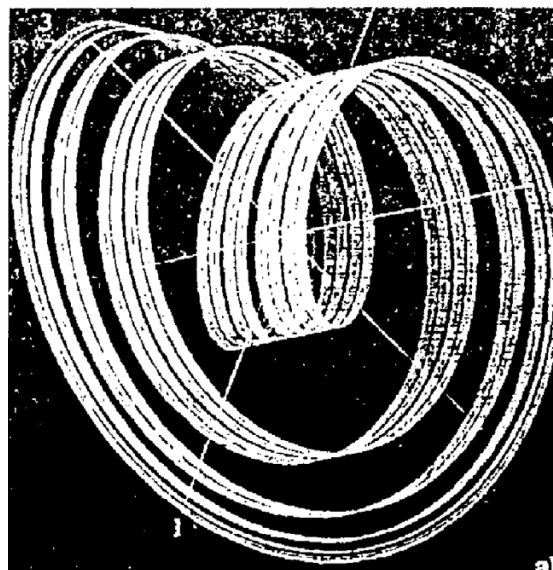
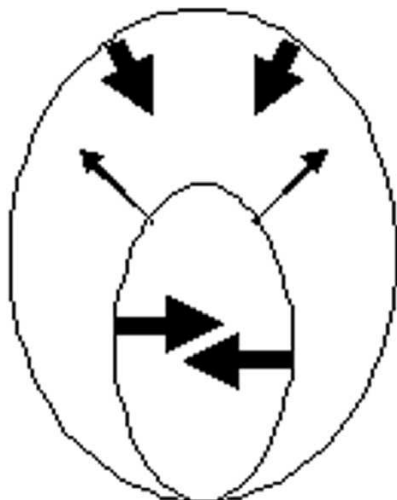
### Приложение.

**В качестве иллюстрации рассмотрим икону А.Рублёва «Троица» с позиций нашей модели.**



Это произведение есть, очевидно, продукт чистого самосозерцания человека, создано Рублёвым «из головы». Как было замечено А.В.Волошиновым [П1], изображение предполагает две точки зрения зрителя. На левого ангела мы смотрим с точки зрения правого, на правого — с точки зрения левого. Однако, как нетрудно видеть, и на это указывает видимая поверхность стола, на обоих ангелов мы смотрим с точки зрения третьего, центрального, ангела, то есть с третьей точки зрения — сверху.

Ниже слева приведены компьютерный образ числовой асимметрии [П2] и её схема, полученная произведением полурешёток  $R^\#$  и  $Z_2$  (внизу). Как видно из схемы, геометрия числовой асимметрии воспроизводит двойную рефлексию, двойное видение, прямую и обратную перспективы.



В этой схеме все три точки зрения изображены большими стрелками. Они имеют вид конвергентного внешнего взгляда. Во внутренней петле человек видит или осознаёт самого себя; во внешней – видит себя-осознающим-себя. Маленькими стрелками изображён дивергентный взгляд, обратная перспектива – человек знает, что он знает. Обратная перспектива для человека есть «прямая» для Бога – Бог вдали, и он везде, человек вдали, и он мал. Тем самым слова П.Флоренского «Если есть «Троица» Рублёва, значит, есть Бог» имеют теоремную точность в нашей схеме. Как было показано Б.В.Раушенбахом [П3] в его исследованиях по системам перспективы, прямая и обратная перспективы задаются одним и тем же уравнением. То есть и здесь налицо асимметричный дуализм знака и числовая асимметрия, которые лежат в основе модели. Поэтому совмещение обоих видов перспективы в православных иконах [П4] научно вполне оправдано.

Как известно, восточная картина мира и идея всеединства русской религиозной философии созданы созерцанием, то есть умозрением. Обе картины центрированы на человеке, обе видят его как неотъемлемую часть природы. Восточная недuality совершенно аналогична русскому антиномизму [П5]. Это родство есть момент «волшебной согласованности мировоззрений» разных народов (Э. Шрёдингер).

В целом можно показать, что эти параллели идут гораздо дальше приведённых иллюстраций.

## Литература к приложению

- П1. *Волошинов А.В.* «Троица» Андрея Рублёва: геометрия и философия. Саратов, 1997.  
 П2. *Чистяков Д.В.* Фрактальная геометрия образов непрерывных вложений  $p$ -адических чисел и соленидов в евклидовы пространства // ТМФ. 1996, т.109, №3, с. 323–337.

- П3. *Раушенбах Б.В.* Системы перспективы в изобразительном искусстве. М.: Наука, 1986.
- П4. *Успенский Б.А.* Семиотика иконы. Правое и левое в иконописном изображении / Семиотика искусства. М.: Языки Славянской культуры, 2005.
- П5. *Григорьева Т.П.* Китай, Россия, Всечеловек. М.: Новый Акрополь, 2011.

## Литература к главе 14

1. *Capra F.* The Tao of Physics. Shambala, 2000.
2. *Abraham R.* Chaos, Gaia, Eros. Harper San Francisco, 1994.
3. *Полкинхорн Дж.* Вера глазами физика. М.: ББИ им. св. ап. Андрея, 2001.
4. *Пикок А.* Богословия в век науки. М.: ББИ им. св. ап. Андрея, 2004.
5. *Паршин А.Н.* Путь. Математика и иные миры. М.: Добросвет, 2002.
6. *Нестерук А.* Логос и Космос. М. ББИ, 2006.
7. *Хеллер М.* Творческий конфликт. М.: ББИ им. св. апостола Андрея, 2005.
8. *Kauffman.* At Home in the Universe. Oxford U.P., 1995.
9. *Печорин В.В.* Бог и человек. Парадоксы откровения. М.: Новый Акрополь, 2011.
9. *Рассел П.* От науки к Богу. Путешествие физика в тайны сознания. София, 2005.
10. *Дель Ре Дж.* Космический танец. 2006.
11. *Липунов В.М.* Научно открываемый Бог // Земля и Вселенная, 1995, №1.
12. *Heller M.* Ultimate Explanations of the Universe. Springer, 2009.
13. *Гоманьков А.В.* Библия и Природа. М.: ГЕОС, 2014.
14. *Заречный М.* Невидимая глубина Вселенной. ИГ. Весь, 2009.
15. *Гриб А.* Квантовый индетерминизм и свобода воли. М.: ББИ, 2008.
16. *Захаров В.Д.* От философии физики к идее Бога. М.: ЛКИ, 2012.
17. *Селиванова В.И.* Этюды об экстраполяции. М.: 1992, этюд пятый.
18. *Григорьева Т.П.* Дао и Логос (встреча культур). М.: Наука, 1992.
19. *Уотс А.* Природа, мужчина, женщина. Киев: София, 1999.
20. *Уотс А.* Путь дзен. Киев: София, 1993.
21. *Барбур И.* Религия и наука: история и современность. М.: ББИ им. св. ап. Андрея, 2001.
22. *Мольтман Ю.* Наука и мудрость. К диалогу естественных наук и богословия. М.: ББИ им. св. ап. Андрея, 2005.
23. *Кюнг Г.* Начало всех вещей. Естествознание и религия. М.: ББИ им. св. ап. Андрея, 2007
24. *Торранс Т.* Пространство, время и воплощение. М.: ББИ, 2010.
25. Христианство и наука / Сб. докладов конференции. М., 2003.
26. *Бодров А., Толстолуженко М.* Богословие творения. М.: ББИ, 2013.
27. *Van Huyssteen J.W.V. (ed.).* Encyclopedia of Science and Religion. Macmillan, 2003.

28. *Runehov A.L.C., Oviedo L. (eds.)*. Encyclopedia of Sciences and Religions. Springer Science+Business Media, 2013.
29. *Taylor B.R. (ed.)*. Encyclopedia of Religion and Nature. Thoemmes Continuum, 2005.
30. *Успенский А.В.* Закономерности развития современной математики. М.: Наука, 1987.
31. *Calude C.S. et. al.* Passages of Proofs // arXiv: math./0305213 v2 [math.HO] 2004.
32. *Лебедев А.И.* Парменид / Новая философская энциклопедия (НФЭ), М., 2010, т. 3, с. 202–203.
33. *Полкинхорн Дж.* Наука и богословие. Введение. М.: ББИ им. св. ап. Андрея, 2004.
34. *Дмитриев И.С.* Неизвестный Ньютон. СПб.: Алетея, 1999.
35. *Adams G.* Physical and Etherial Spaces. Rudolf Steiner Press, London, 1965, 1978.
36. *Whitcher O.* Projective Geometry. Creative Polarities of Space and Time. Rudolf Steiner Press, 1986, 2013.
37. *Adams G., Whitcher O.* The Plant Between Sun and Earth and the Science of Physical and Etherial Spaces. 1982.
38. *Whicher O.* The Heart of the Matter. Temple Lodge Publ., 1997.
39. *Goldblatt R.* Mathematical Modal logic: A View of its Evolution. In Gabbay D.M., Woods J. (eds). Handbook of History of Logic. 2006, v. 7, Logic and Modalities in the Twentieth Century, Elsevier, NH, p. 1–98, p. 3.
40. *Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.* *p*-Адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
41. *Falconer K.* Digital Sundials, Paradoxical Sets and Vitushkin Conjecture // The Mathematical
42. *Intelligencer*, v. 9, no.1, p. 24–27; его же Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Wiley, 2003, Ch.6.
43. *Dube S.* Undecidable Problems in Fractal Geometry // Complex Systems 7 (1993), p. 428–432.
44. *Хант Г.* О природе сознания. М.: АСТ, 2004.
45. *Донских О.А.* К истокам языка. М.: Либроком, 2011.
46. *Терёшина Е.В.* Праязык. М.: ЯСК, 2008; Древние модели мироздания и универсальные матрицы. М., 2013 // электронная публикация на сайте delphis.ru/конференции.
47. *Augenstein B.* Complexity, Universal Libraries, DNA Sequences // Chaos, Solitons & Fractals, v. 10, no.4, 1999, p. 953–973.
48. *Флоренский П.А.* Столп и утверждение истины. М.: АСТ, 2003.
49. *Флоренский П.А.* Иконостас. СПб., 1993.
50. *Флоренский А.А.* Мнимости в геометрии. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
51. *Половинкин С.М.* Реальность 1920–1930-х годов и «Мнимости в геометрии» священника Павла Флоренского // Энтелехия, 2000, №2, с. 67–77.
52. *Muhyll J.* A System which can define its own truth // Fund. Math, XXXVII, 1950, p. 190–192.

53. *Герасимова И.А.* П.А.Флоренский о противоречии (Логико-методологический анализ) // Логические исследования, вып.18, М.–СПб., 2012, с. 77–96.
54. *Сидоренко Е.А.* П.Флоренский о совместимости логической противоречивости Священного Писания с его божественным происхождением // Тр. науч.-иссл. семинара логического центра ИФ РАН 1996, М., 1997.
55. *Григорьева Т.П.* Китай, Россия и Всечеловек. М.: Новый Акрополь, 2011.
56. *Kamnier D.W.* A First Course in Fourier Analysis. CUP, 2008.
57. *Паршин А.Н., Резвых Т.Н.* Пространство и время православного богослужения. 2007 // с сайта bfrz.ru.
58. *Успенский Б.А.* Семиотика искусства. М.: ЯСК, 2005.
59. *Акулинин В.Н.* Философия Всеединства. Новосибирск,: Наука, СО, 1990.
60. *Паршин А.Н.* Свет и слово / В [4], с. 228–230, 233.
61. *Achtner W.* Smedes Chaos Theory / Encyclopedia of Science and Religion, p. 101–103.
62. *Edwards D.* Chaos Religion and Philosophical Aspects In Encyclopedia of Science and Religion, p. 98–101.
63. *Bonting S.L.* Chaos Theology // Zygon, v. 34, iss. 2, 1999, p. 323–332.
64. *Carr P.H.* Does God Play Dice? Investigations from the Fractal Geometry of Nature // Zygon. 2004, v. 39, iss. 4, p. 933–940.
65. *Голосовкер Я.* Имагинативный абсолют / Логика мифа. Университетская книга–СПб., 2010.
66. *Нестерук А.В.* Пространство, воплощение и человек. Послесловие к богословию Т.Торранса / Торанс Т. Пространство, время и воплощение. М.: ББИ, 2010, с. 154–178.
67. *Паршин А.Н.* Лестница отражений // Конф. «Антропологические матрицы XX века», 2002 (с сайта mmk.mission.ru).
68. *Jackson W. J.* Heaven's Fractal Net. Retrieving Lost Visions of Humanities. Indiana Univ. Press, 2004.
69. *Флоренский П.А.* Пристань и бульвар / У водоразделов мысли. Новосибирск, 1991.
70. *Панов В.Г.* Эмоции. Мифы. Разум. М.: Высшая Школа, 1992.
71. *Паршин А.Н.* Размышления над теоремой Гёделя / Путь, с. 67–101; с. 83–85, прим. 17, с. 97–98, 100.
72. *Паршин А.Н.* Средневековая космология и проблема времени // Вопросы философии // 2004, №2, с. 70–88.
73. *Паршин А.Н., Резвых Т.Н.* Время и пространство православного богослужения / с сайта bfrz.ru, 2007.
74. *Паршин А.Н.* Циклы в православии и естествознании / Труды семинара ПСТГУ, вып. 1, с. 264–284, М.: ПСТГУ, 2011, с сайта bogoslov.ru.
75. *Штерн А.И.* Двойственность компактности и дискретности за пределами двойственности Понтрягина // Труды МИРАН им. В.А.Стеклова, 2010, т. 271, с. 224–240.
76. *Резвых Т.Н.* Флоренский–Розанов–Франк: идея антиномии // Энтелехия, 2009, № 9, с. 13–19.



77. *Печорин В.В.* Бог и человек. Парадоксы откровения. М.: Новый Акрополь, 2011.
78. *Булгаков С.* Свет Невечерний. М.: АСТ, Фолио, 2001.
79. *Шичалин Ю.А.* Третий вид у Платона и материя—зеркало у Плотина // Вестник древней истории. 1978, № 1(143), с. 142—161.
80. *Протопопова И.А.* Метафизика Зазеркалья, или О двух материях у Платона // Arbor Mundi. 2006, вып.12, с. 9—45.
81. *Davey B.A., Priestley H.A.* Introduction to Lattices and Order. CUP, 2002.
82. *Goldstein L.* The Undefinability of one // J. of Philosophical Logic. 2002, 31: 29—42.
83. *Хоружий С.С.* Ничто / НФЭ, 2010, т. 3, с. 95—97.
84. *Чанышев А.Н.* Трактат о небытии // Вопросы философии. 1990, №10.
85. *Гайденок П.П.* Бытие / НФЭ, 2010, т. 1, с. 337—345.
86. *Зотов А.Ф.* Бытие и ничто. Ж.-П. Сартр / НФЭ, 2010, т. 1, с. 347—348. Sorensen R. Nothingness // Zalta E. (ed.) Stanford Encyclopedia of Philosophy, plat/stanford.edu/nothingness, 2012.
87. *Баткин Л.М.* Леонардо да Винчи о бесконечном // Природа. 1983, 3 (815), с. 76—88.
88. *Хмуркин Г.Г.* Ноль и буддийское учение о пустоте / ИМИ. 2009, 13(48), с. 246—258.
89. *Barnsley M., Vince A.* Developments in Fractal Geometry // Bull. Math. Sci. 2013, 3, p. 299—348.
90. *Лесков Л.В.* Вселенная как лист Мёбиуса // Земля и Вселенная. 1993, № 2, с. 73—78; Лесков Л.В. Семантическая Вселенная // Вестник МГУ. 1994, сер.7 — Философия, № 2.
91. *Dey S.K.* Vedanta Philosophy in The Light of Modern Science // Интернет-источник; Dey S.K. Vedanta: The Science of Consciousness and Divinity. Roerich Society of Lithuania, 2012.
92. *Столяров А.А.* Свобода воли / НФЭ, 2010, с. 503—505.
93. Прот. Свенцицкий В. Диалоги. М.: Дарь, 2007.
94. *Аверенцев С.С.* Откровение / НФЭ, 2010, с. 173—174.
95. *Паршин А.Н.* Путешествие Данте в Ад / Путь, с. 134—138.
96. *Лекторский В.А.* Самосознание / НФЭ, М., 2010, т. 3.
97. *Степанянц М.Т.* Исламский мистицизм. М.: Канон+, 2009.
98. *Le Mehaute A.* Fractal Geometries. CRC Pr. 1991, p. 41—43.
99. *Ellis G.F.R.* Physics, Complexity and Causality // Nature. 2005, 435, p. 743.
100. *Мейс Л.Ф.К.* Загадка человеческого движения. КМК Scientific Press, М., 1996.
101. *Вышеславцев Б.П.* Этика преображённого эроса. М., 1994. подробно вопрос об антиномии «закон-благодать» исследован в Shlain L. The Alphabet versus the Goddess. The Conflict Between Word and Image. Penguin / Compass, 1998.
102. *Радхакришнан С.* Индийская философия. М.: Академический Проект, 2000.
103. *Абрамова Н.Т.* Несловесное мышление. М.: ИФРАН, 2002.
104. *Смаллиан Р.* Молчаливое Дао. М.: Канон+, 2012.

105. *Мюллер М.* Шесть систем индийской философии. М.: Искусство, 1995.
106. *Кобзев А.И.* Учение о символах и числах в китайской классической философии. М.: Вост. Лит. 1994.
107. *Смирнов А.В.* Номинальность и содержательность: почему некритическое исследование универсалий культуры грозит заблуждением / [124].
108. *Needham J.* Science and Civilization in China. 1954–1959.
109. *Zukav G.* The Dancing Wu Li Masters. Bantam books, 1979.
110. *Wilber K. (ed.).* Quantum Questions. The Mystical Wrightings of World Great Physics. Shambhala, 2001.
111. *Jenkins T.* The Chinese Traditional Thought and Practice: lessons for an ecological economics worldview // Ecological Economics. 2002, 40, p. 39–52.
112. *Mumford D., Series C., Wright D.* Indra's Pearls. CUP, 2002.
113. *Талбот М.* Голографическая вселенная. М.: София, 2004.
114. *Шредингер Э.* Мой взгляд на мир. 1925, М.: Комкнига, 2005.
115. *Еремеев В.Е.* Символы и числа Книги Перемен. М.: Ладомир, 2005.
116. *Еремеев В.Е.* Теория психосемиозиса и древняя антрокосмология. М.: АСМ, 1996.
117. *Григорьева Т.П.* Дао и Логос. Встреча культур. М., Наука, 1990.
118. *Григорьева Т.П.* Синергетика и Восток // Вопросы философии. 1997, № 3.
119. *Герасимова И.А.* Противоположности и парадоксы. М.: Канон+, 2008.
120. *Ячин С.Е. и др.* Дао и Телос в смысловом измерении культур восточного и западного типа. Монография. Владивосток: Изд-во Владивостокского федерального ун-та, 2011.
121. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. М.: Наука, 1994.
122. *Степаняц М.Т.* Индийская философия. Энциклопедия. М.: Академический проект, 2003.
123. *Степаняц М.Т. (ред.)* Универсалии восточных культур. М., 2001.
124. *Кобзев А.И. (ред.)* Китайская философия. Энциклопедический словарь. М., Восточная литература, 1994.
125. *Степаняц М.Т. (ред.)* Философия буддизма. М.: Вост. лит. 2011.
126. *Смирнов А.В.* Соизмеримы ли основания рациональности в разных философских традициях? Сравнительное исследование зеноновых апорий и учений раннего калама. В кн. [124], с. 76–90.
127. *Хаксли О.* Вечная философия. М.: Рефл-Бук Ваклер, 1997.
128. *Успенский Б.А.* Крест и круг. М.: ЯСК, 2006.
129. *Апресян Р.Г.* Мораль. М.: НФЭ. 2010, с. 610–612.
130. *Апресян Р.Г.* Нравственность / НФЭ, 2010, т. 3, с. 110.
131. *Гусейнов А.А.* Добродетель / НФЭ, 2010, т. 1, с. 677–679.
132. *Гусейнов А.А.* Долг / НФЭ, 2010, т. 1, с. 686–689.
133. *Эминова С.М.* Модель индийского универсума. М., 2002.

134. *Лысенко В.Г.* Восьмеричный путь. В кн. [126], с. 228–229, 651–653.
135. *Анашина А.В.* Срединный путь в китайском буддизме. В кн. [126], с. 653–654.
136. *Успенский Б.А.* «Правое» и «левое» в иконописном изображении / Семиотика искусства. М.: ЯСК, 2005.
137. *Успенский Б.А.* Крестное знамение и сакральное пространство. М.: ЯСК, 2004.
138. *Лысенко В.Г.* Даршана / [124], с. 325–326.
139. *Шохин В.К.* Пракрити / [124], с. 340–341.
140. *Исаева Н.В.* Атман / [124], с. 318–322.
141. *Исаева Н.В.* Адвайта-веданта / [123], с. 52–56.
142. *Шохин В.К.* Дхарма / [124], с. 328–331.
143. *Шохин В.К.* Дхарма / [123], с. 373–378.
144. *Wolenski J.* Aletheia in Greek thought until Aristotele // APAL, 2004, 127, p. 339–360.
145. *Лысенко В.Г.* Дхармы / [124], с. 331–332.
146. *Исаева Н.В.* Джняна / [124], с. 326–327.
147. *Лысенко В.Г.* Дукха / [124], с. 327–328.
148. *Щеглов А.П.* Метафизика денег. СПб.: Мир, 2014.
149. *Юнг К.Г.* Об энергетике души. М.: Академический проект, 2010.
150. *Шичалин Ю.А.* Душа. /НФЭ, т. 1, с. 710–713.
151. *Лысенко В.Г.* Душа / [123], с. 371–373.
152. *Мещеряков Б.Г., Зинченко В.П.* Душа. Большой психологический словарь, М., 2002.
153. *Доброхотов А.Л.* Дух/ НФЭ, т. 1, М., 2010, с. 706–708.
154. *Лысенко В.Г.* Карма / [123], с. 438–447.
155. *Лысенко В.Г.* Сансара / [123], с. 712–715.
156. *Шохин В.К.* Сансара / [124], с. 344–345.
157. *Дао Дэ Цзин/ Пер. и прим. Ян Хин-Шуна.* СПб.: Азбука-Классика, 2002.
158. *Мольтман Ю.* Наука и мудрость. М.: ББИ, 2005.
159. Чжоу Цзуньхуа. Дао Тай Цзи юаня. София: Киев, 1995.
160. *Ткаченко Г.А.* Дао дэ цзин, Даосизм / НФЭ, 2010, т. 1, с. 586–589.
161. *Кобзев А.И.* Дао. В кн. [125].
162. *Шафаревич И.Р.* Математическое мышление и природа / Две дороги к одному обрыву. М.: Айрис Пресс, 2003.
163. *Кобзев А.И.* Дэ. В кн. [125].
164. *Кобзев А.И.* Вэй. В кн. [125].
165. *Кобзев А.И.* Ци. / НФЭ, 2010, т. 4, с. 329–330.
166. *Falconer K.* Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. Wiley, 2003, с. 50–54.
167. *Hargittai I.* Fivefold Symmetry. 1995.
168. *Голубев С.Н.* Квазикристаллическая структура вакуума. М., Либроком, 2013.
169. *Кобзев А.И.* У-Син. В кн. [125]. СОДЕРЖАНИЕ

## Послесловие

Как подсказывает опыт автора, приложение математики к естествознанию и теории систем дело очень тонкое и трудоёмкое и едва ли может быть плодом усилий одного человека. Двумерная семантика математического естествознания требует совместных усилий как математиков, так и предметных специалистов. Поэтому автор далёк от формулирования «закрывающих» выводов и стремления представить свой опыт как «Основы теории ...», «Решение проблемы ...» и т.п.

Тем не менее вся совокупность эмпирических фактов естественных наук, составляющих базис теории систем, и математических результатов о двойственности, не входящих в состав образования как математиков, так и естественников, определённо указывает, по мнению автора, на возможность преодоления математикой своей физической ограниченности и развития математических методов теории систем, имеющих естественнонаучный, а не формальный смысл.

Как нетрудно видеть, человеческое познание требует для своей обоснованности как Слова, так и Числа. Теория, сформулированная лишь в Слове, чересчур лабильна, поверхностна, расплывчата, летуча. Сформулированная лишь в Числе, она становится, наоборот, ригидной, абстрактной, статичной, ограниченной. Взаимосвязь явлений природы и вечное её движение требуют для своего устойчивого понимания/описания сочетания этих двух противоположных начал. Эти полюсы познания известны как феномен «двух культур», картины мира «физиков и лириков». Как представляется автору, числовая асимметрия, возможно, в иной форме или даже формах, поскольку вариантов двух основных числовых систем и связанных с ними числовых метрик достаточно много в математике, может послужить наведению мостов между науками. При дальнейшей разработке видится возможность снятия напряжённости в образовании, которая как раз и является симптомом разрыва между числом и словом. В этом, пожалуй, и состоит единственный вывод автора, который он предлагает читателю.

## Содержание

Введение.....	7
ЧАСТЬ 1	
Глава 1. Функциональная асимметрия Природы. Топологизация понятий.....	23
Глава 2. Фракталы.....	53
Глава 3. Нефундированные множества и $p$ -адические числа.....	77
Глава 4. $p$ -Адические числа, нефундированные множества, теоретическая информатика и фрактальная геометрия.....	91
Глава 5. Двойственность Стоуна, соответствия Галуа, арифметика Пресбургера, булева алгебра, проективная геометрия.....	123
Глава 6. Степенные законы: измерения и восприятие.....	139
Глава 7. Двойственность в основах.....	159
Глава 8. Апории Зенона.....	177
ЧАСТЬ 2	
Глава 9. Опыт сведения понятий в естествознании.....	221
Глава 10. Естественный язык.....	233
Глава 11. Биология.....	251
Глава 12. Сознание и мышление.....	275
Глава 13. Математическая физика.....	305
Глава 14. Религия, высшая реальность.....	347
Послесловие.....	414

Ф.И. Маврикиди  
Числовая асимметрия  
в прикладной математике.  
Фракталы,  $p$ -адические числа, апории Зенона,  
сложные системы

Редакторы *Н.Н.Якимова, С.К.Борисов*  
Технический редактор *О.Ф.Заседателева*

Корректор *Т.А.Чернова*

Вёрстка: *Е.Г.Алексеева*

Подписано в печать 18.12.2015

Формат 60x90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Тираж 500 экз. Заказ \_\_\_\_\_

Издательство «Дельфис»  
Адрес: г. Москва, ул. Покровка, д. 3/7, стр. 1  
Тел.: (495)628-06-79  
E-mail: delphis@delphis.ru  
Сайт: www.delphis.ru

ISBN 978-5-93366-075-0



Отпечатано способом ролевой струйной печати  
в АО «Первая Образцовая типография»  
Филиал «Чеховский Печатный Двор»  
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1  
Сайт: www.chpd.ru, E-mail: sales@chpd.ru,  
8(495)988-63-76, т/ф. 8(496)726-54-10