



15^2	225	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29															
16^2	256	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31														
17^2	289	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33													
18^2	324	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35												
19^2	361	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37											
20^2	400	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39										
21^2	441	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41									
22^2	484	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43								
23^2	529	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45							
24^2	576	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47						
25^2	625	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49					
26^2	676	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51				

Из данной таблицы становится понятным, почему для второй степени чисел можно найти некоторые решения для формулы  $C^2=B^2+A^2$ .

Все квадраты чисел можно представить в виде суммы нечетных чисел, последовательно следующих друг за другом. Сумма нечетных чисел для каждого последующего квадрата повторяет сумму предыдущего квадрата, только лишь добавляется еще одно следующее, нечетное число. Иногда последнее нечетное число или сумма конечных чисел составляют квадрат какого-то числа. Остальные впереди стоящие числа всегда будут соответствовать какому-то квадрату. Именно благодаря этому обстоятельству и можно иногда разложить значение квадрата числа на сумму двух квадратов. Таким образом, только так и находятся решения для формулы  $C^2=B^2+A^2$ .

$$5^2=1+3+5+7+(9) = 4^2+3^2$$

$$5^2=1+3+5+(7+9) = 3^2+4^2$$

$$10^2=1+3+5+7+9+11+13+15+(17+19) = 8^2+6^2$$

$$13^2=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+(25) = 12^2+5^2$$

$$15^2=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+(25+27+29) = 12^2+9^2$$

$$17^2=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+(31+33) = 15^2+8^2$$

$$25^2=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31+33+35+37+39+41+43+45+(49) = 24^2+7^2$$

$$25^2=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31+33+35+37+39+(41+43+45+49) = 20^2+15^2$$

$$26^2=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31+33+35+37+39+41+43+45+47+(49+51) = 24^2+10^2$$

Приведем еще один пример.

$$52^2=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31+33+35+37+39+41+43+45+47+49+51+53+55+57+59+61+63+65+67+69+71+73+75+77+79+81+83+85+87+89+91+93+95+(97+99+101+103) = 48^2+20^2$$

Как найти все варианты сумм квадратов, описано в моей статье “Как получить все целочисленные и неотрицательные решения для членов формулы суммы вида  $A^2+B^2=C^2$ “, где были приведены формулы, по которым можно найти все так называемые тройки Пифагора или все неотрицательные и целые значения для А, В и С.

Далее приведены таблицы сумм нечетных чисел, следующих друг за другом, для степеней больших, чем вторая степень.

Из таблицы видно, что в случае с третьей степенью суммы нечетных чисел не повторяют предыдущие, как это было в случае с квадратами чисел. Каждое первое нечетное число, с которого начинается сумма нечетных чисел, возрастает. Именно это обстоятельство и делает невозможным разложить последующие степени чисел на сумму двух чисел в этих степенях. Всегда будет больше двух членов суммы. Продемонстрируем это утверждение на примере третьей степени.

Сумма нечетных чисел для  $2^3$  начинается с 3, сумма нечетных чисел для  $3^3$  начинается с семерки и так далее. Нечетные числа суммы детерминированы, если мы хотим получить количество нечетных чисел, равное возводимому в степень числу.

Заглянем в таблицу, составленную для третьей степени.

$1^3$	1	1															
$2^3$	8	3	5														
$3^3$	27	7	9	11													
$4^3$	64	13	15	17	19												
$5^3$	125	21	23	25	27	29											
$6^3$	216	31	33	35	37	39	41										
$7^3$	343	43	45	47	49	51	53	55									
$8^3$	512	57	59	61	63	65	67	69	71								
$9^3$	729	73	75	77	79	81	83	85	87	89							
$10^3$	1000	91	93	95	97	99	101	103	105	107	109						
$11^3$	1331	111	113	115	117	119	121	123	125	127	129	131					
$12^3$	1728	133	135	137	139	141	143	145	147	149	151	153	155				
$13^3$	2197	157	159	161	163	165	167	169	171	173	175	177	179	181			
$14^3$	2744	183	185	187	189	191	193	195	197	199	201	203	205	207	209		
$15^3$	3375	211	213	215	217	219	221	223	225	227	229	231	233	235	237	239	

Возьмем для примера  $10^3= 1000$ . Число 1000 является суммой 10 нечетных чисел, следующих друг за другом. Количество нечетных чисел суммы соответствует делителю 10.

Последние два числа в сумме дают - 216. Это третья степень числа шесть.

$$91+93+95+97+99+101+103+105+(107+109)=1000.$$

В данном примере сумма чисел  $91+93+95+97+99+101+103+105$  должна бы была равняться значению  $8^3$ , но восьмерка в третьей степени записывается как сумма других нечетных чисел, которые меньше указанных.

$$8^3=57+59+61+63+65+67+69+71=512$$

$$10^3=91+93+95+97+99+101+103+105+(107+109)=784+6^3$$

Обозначим сумму следующих друг за другом нечетных чисел, на которые раскладывается любое число в любой степени, „как сумма нечетных чисел“ и будем это обозначение иметь ввиду далее.

Можно сделать следующий вывод для степеней выше двух. Но чем больше степень, тем больше разрыв значений первых чисел „суммы нечетных чисел“. Уже из таблицы для третьей степени это наглядно видно. Любое, первое нечетное число, с которого начинается, „сумма нечетных чисел“ для числа в степени больше двух, всегда будет меньше последующих первых нечетных чисел в „суммах нечетных чисел“. Поэтому уже, начиная с третьей степени, невозможно найти сумму из двух чисел, возведенных в степень, и равную третьему числу этой же степени.

Ниже таблица для четвертой степени. Выводы из нее следуют аналогичные.

1 <sup>4</sup>	1	1												
2 <sup>4</sup>	16	7	9											
3 <sup>4</sup>	81	25	27	29										
4 <sup>4</sup>	256	61	63	65	67									
5 <sup>4</sup>	625	121	123	125	127	129								
6 <sup>4</sup>	1296	211	213	215	217	219	221							
7 <sup>4</sup>	2401	337	339	341	343	345	347	349						
8 <sup>4</sup>	4096	505	507	509	511	513	515	517	519					
9 <sup>4</sup>	6561	721	723	725	727	729	731	733	735	737				
10 <sup>4</sup>	10000	991	993	995	997	999	1001	1003	1005	1007	1009			
11 <sup>4</sup>	14641	1321	1323	1325	1327	1329	1331	1333	1335	1337	1339	1341		
12 <sup>4</sup>	20736	1717	1719	1721	1723	1725	1727	1729	1731	1733	1735	1737	1739	
13 <sup>4</sup>	28561	2185	2187	2189	2191	2193	2195	2197	2199	2201	2203	2205	2207	2209

5<sup>4</sup> не равно 4<sup>4</sup>+3<sup>4</sup> несмотря на то, что сумма двух последних нечетных чисел для 5<sup>4</sup> равна 4<sup>4</sup>.

$$5^4 - 4^4 = 121 + 123 + 125$$

$$3^4 = 25 + 27 + 29$$

Таблица с примером для пятой степени.

1 <sup>5</sup>	1	1												
2 <sup>5</sup>	32	15	17											
3 <sup>5</sup>	243	79	81	83										
4 <sup>5</sup>	1024	253	255	257	259									
5 <sup>5</sup>	3125	621	623	625	627	629								
6 <sup>5</sup>	7776	1291	1293	1295	1297	1299	1301							
7 <sup>5</sup>	16807	2395	2397	2399	2401	2403	2405	2407						
8 <sup>5</sup>	32768	4089	4091	4093	4095	4097	4099	5101	5103					
9 <sup>5</sup>	59049	6553	6555	6557	6559	6561	6563	6565	6567	6569				
10 <sup>5</sup>	100000	9991	9993	9995	9997	9999	10001	10003	10005	10007	10009			
11 <sup>5</sup>	161051	14631	14633	14635	14637	14639	14641	14643	14645	14647	14649	14651		
12 <sup>5</sup>	248832	10357	10359	10361	10363	10365	10367	10369	10371	10373	10375	10377	10379	

13^5	371293	28549	28551	28553	28555	28557	28559	28561	28563	28565	28567	28569	28571	28573	
14^5	537824	38403	38405	38407	38409	38411	38413	38415	38417	38419	38421	38423	38425	38427	38429

Теперь запишем в таблице, которая представлена ниже, с какого числа начинается сумма нечетных чисел для каждого числа, возводимого в степень. По вертикали запишем числа, возводимые в степень. По горизонтали запишем номер степени, которой соответствует первое число суммы нечетных чисел. Например, если нас интересует, с какого числа начинается сумма нечетных чисел для пятой степени числа 6, то мы по вертикали смотрим число шесть, по горизонтали смотрим X5, получаем число 1291. Это значит, что сумма нечетных чисел для шести в пятой степени будет состоять из шести нечетных чисел.

$$1291+1293+1295+1297+1299+1301=7776=6^5$$

	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X^11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
3	1	7	25	79	241	727	2185	6559	19681	59047
4	1	13	61	253	1021	4093	16381	65533	262141	1048573
5	1	21	121	621	3121	15621	78121	390621	1953121	9765621
6	1	31	211	1291	7771	46651	279931	1679611	10077691	60466171
7	1	43	337	2395	16801	117643	823537	5764795	40353601	282475243
8	1	57	505	4089	32761	262137	2097145	16777209	134217721	1073741817
9	1	73	721	6553	59041	531433	4782961	43046713	387420481	3486784393
10	1	91	991	9991	99991	999991	9999991	99999991	999999991	9999999991
11	1	111	1321	14631	161041	1771551	19487161	214358871	2357947681	25937424591
12	1	133	1717	20725	248821	2985973	35831797	429981685	5159780341	61917364213
13	1	157	2185	28549	371281	4826797	62748505	815730709	10604499361	1,37858E+11
14	1	183	2731	38403	537811	7529523	105413491	1475789043	20661046771	2,89255E+11
15	1	211	3361	50611	759361	11390611	170859361	2562890611	38443359361	5,7665E+11
16	1	241	4081	65521	1048561	16777201	268435441	4294967281	68719476721	1,09951E+12
17	1	273	4897	83505	1419841	24137553	410338657	6975757425	1,18588E+11	2,01599E+12
18	1	307	5815	104959	1889551	34012207	612220015	11019960559	1,98359E+11	3,57047E+12
19	1	343	6841	130303	2476081	47045863	893871721	16983563023	3,22688E+11	6,13107E+12
20	1	381	7981	159981	3199981	63999981	1279999981	25599999981	5,12E+11	1,024E+13
21	1	421	9241	194461	4084081	85766101	1801088521	37822859341	7,9428E+11	1,66799E+13
22	1	463	10627	234235	5153611	113379883	2494357867	54875873515	1,20727E+12	2,65599E+13
23	1	507	12145	279819	6436321	148035867	3404825425	78310985259	1,80115E+12	4,14265E+13
24	1	553	13801	331753	7962601	191102953	4586471401	1,10075E+11	2,64181E+12	6,34034E+13
25	1	601	15601	390601	9765601	244140601	6103515601	1,52588E+11	3,8147E+12	9,53674E+13

Теперь запишем формулы, которые были использованы для получения значений первых нечетных чисел, которые приведены в таблице.

По вертикали в первом столбце запишем число, которое возводится в степени.

По горизонтали, X2, X3, X4, X5 и так далее — это условное обозначение степени, для которой мы ищем первое нечетное число суммы нечетных чисел и само первое нечетное число суммы нечетных чисел.

Итак, начнем с того, что для второй степени все первые нечетные числа суммы нечетных чисел начинаются с 1. Чтобы получить первые нечетные числа для каждой следующей степени, умножаем предшествующие значения первых нечетных чисел на возводимые в степень числа.

Потом прибавляем к полученным значениям квадрат предшествующего числа, возводимого в степень.

Получаем значения для X3, X4, X5, X6 и так далее.

	X2	X3	X4	X5	X6
1	1	(X2) *1+0 <sup>2</sup>	(X3) *1+0 <sup>2</sup>	(X4) *1+0 <sup>2</sup>	(X5) *1+0 <sup>2</sup>
2	1	(X2) *2+1 <sup>2</sup>	(X3) *2+1 <sup>2</sup>	(X4) *2+1 <sup>2</sup>	(X5) *2+1 <sup>2</sup>
3	1	(X2) *3+2 <sup>2</sup>	(X3) *3+2 <sup>2</sup>	(X4) *3+2 <sup>2</sup>	(X5) *3+2 <sup>2</sup>
4	1	(X2) *4+3 <sup>2</sup>	(X3) *4+3 <sup>2</sup>	(X4) *4+3 <sup>2</sup>	(X5) *4+3 <sup>2</sup>
5	1	(X2) *5+4 <sup>2</sup>	(X3) *5+4 <sup>2</sup>	(X4) *5+4 <sup>2</sup>	(X5) *5+4 <sup>2</sup>
6	1	(X2) *6+5 <sup>2</sup>	(X3) *6+5 <sup>2</sup>	(X4) *6+5 <sup>2</sup>	(X5) *6+5 <sup>2</sup>
7	1	(X2) *7+6 <sup>2</sup>	(X3) *7+6 <sup>2</sup>	(X4) *7+6 <sup>2</sup>	(X5) *7+6 <sup>2</sup>
8	1	(X2) *8+7 <sup>2</sup>	(X3) *8+7 <sup>2</sup>	(X4) *8+7 <sup>2</sup>	(X5) *8+7 <sup>2</sup>
9	1	(X2) *9+8 <sup>2</sup>	(X3) *9+8 <sup>2</sup>	(X4) *9+8 <sup>2</sup>	(X5) *9+8 <sup>2</sup>
10	1	(X2) *10+9 <sup>2</sup>	(X3) *10+9 <sup>2</sup>	(X4) *10+9 <sup>2</sup>	(X5) *10+9 <sup>2</sup>
11	1	(X2) *11+10 <sup>2</sup>	(X3) *11+10 <sup>2</sup>	(X4) *11+10 <sup>2</sup>	(X5) *11+10 <sup>2</sup>
12	1	(X2) *12+11 <sup>2</sup>	(X3) *12+11 <sup>2</sup>	(X4) *12+11 <sup>2</sup>	(X5) *12+11 <sup>2</sup>
13	1	(X2) *13+12 <sup>2</sup>	(X3) *13+12 <sup>2</sup>	(X4) *13+12 <sup>2</sup>	(X5) *13+12 <sup>2</sup>
14	1	(X2) *14+13 <sup>2</sup>	(X3) *14+13 <sup>2</sup>	(X4) *14+13 <sup>2</sup>	(X5) *14+13 <sup>2</sup>
15	1	(X2) *15+14 <sup>2</sup>	(X3) *15+14 <sup>2</sup>	(X4) *15+14 <sup>2</sup>	(X5) *15+14 <sup>2</sup>

Можно получить первые нечетные числа для суммы нечетных чисел другим способом. Число, возводимое в степень, умножаем на степень меньшую на 1, и из полученного результата вычитаем число, меньшее на 1, которое возводим в степень.

Например, нам надо получить первое число для суммы нечетных чисел для 6<sup>5</sup>. Степень числа – пять. Вычтем из пяти единицу. Запишем первый член формулы - 6<sup>4</sup>. И из полученного результата вычитаем число меньшее на 1, чем число, которое возводилось в степень. 6-1=5.

Получаем такую формулу и результат 6<sup>4</sup>-5=1291.

Первое нечетное число для суммы нечетных чисел для 6<sup>5</sup> это 1291.

$$1291+1293+1295+1297+1299+1301=7776=6^5$$

В плане получения результата оба способа приводят к получению одинакового результата.

	X2	X3	X4	X5	X6
1	1 <sup>1</sup> -0	1 <sup>2</sup> -0	1 <sup>3</sup> -0	1 <sup>4</sup> -0	1 <sup>5</sup> -0
2	2 <sup>1</sup> -1	2 <sup>2</sup> -1	2 <sup>3</sup> -1	2 <sup>4</sup> -1	2 <sup>5</sup> -1
3	3 <sup>1</sup> -2	3 <sup>2</sup> -2	3 <sup>3</sup> -2	3 <sup>4</sup> -2	3 <sup>5</sup> -2
4	4 <sup>1</sup> -3	4 <sup>2</sup> -3	4 <sup>3</sup> -3	4 <sup>4</sup> -3	4 <sup>5</sup> -3
5	5 <sup>1</sup> -4	5 <sup>2</sup> -4	5 <sup>3</sup> -4	5 <sup>4</sup> -4	5 <sup>5</sup> -4
6	6 <sup>1</sup> -5	6 <sup>2</sup> -5	6 <sup>3</sup> -5	6 <sup>4</sup> -5	6 <sup>5</sup> -5
7	7 <sup>1</sup> -6	7 <sup>2</sup> -6	7 <sup>3</sup> -6	7 <sup>4</sup> -6	7 <sup>5</sup> -6
8	8 <sup>1</sup> -7	8 <sup>2</sup> -7	8 <sup>3</sup> -7	8 <sup>4</sup> -7	8 <sup>5</sup> -7
9	9 <sup>1</sup> -8	9 <sup>2</sup> -8	9 <sup>3</sup> -8	9 <sup>4</sup> -8	9 <sup>5</sup> -8
10	10 <sup>1</sup> -9	10 <sup>2</sup> -9	10 <sup>3</sup> -9	10 <sup>4</sup> -9	10 <sup>5</sup> -9
11	11 <sup>1</sup> -10	11 <sup>2</sup> -10	11 <sup>3</sup> -10	11 <sup>4</sup> -10	11 <sup>5</sup> -10
12	12 <sup>1</sup> -11	12 <sup>2</sup> -11	12 <sup>3</sup> -11	12 <sup>4</sup> -11	12 <sup>5</sup> -11
13	13 <sup>1</sup> -12	13 <sup>2</sup> -12	13 <sup>3</sup> -12	13 <sup>4</sup> -12	13 <sup>5</sup> -12
14	14 <sup>1</sup> -13	14 <sup>2</sup> -13	14 <sup>3</sup> -13	14 <sup>4</sup> -13	14 <sup>5</sup> -13

В данной статье использовалось утверждение, что значение числа в любой степени можно представить в виде суммы нечетных чисел, следующих друг за другом, и количество нечетных чисел этой суммы равняется возводимому в степень числу.

Только для квадрата чисел действует правило, что квадрат следующего числа повторяет сумму нечетных чисел от предыдущего квадрата и отличается лишь добавлением последнего нечетного числа. Именно это условие и создает возможность раскладывать квадрат на сумму двух квадратов. Иногда последнее число или сумма последних чисел суммы нечетных чисел образуют квадрат числа, а впередистоящие члены суммы нечетных чисел соответствуют какому-то другому квадрату. Это не новое наблюдение, но в данной статье данная идея была использована, чтобы показать, почему для любого натурального числа  $n > 2$  уравнение  $a^n + b^n = c^n$  не имеет решений в целых ненулевых числах  $a, b, c$ . Интереснее найти ответ на вопрос, почему наименьшее количество членов суммы чисел в степенях равно номеру степени. Например, наименьшее количество членов суммы чисел для третьей степени равно трем и так далее. То есть  $D^3 = A^3 + B^3 + C^3$ .

Любое число, возведенное в степень большую, чем вторая, можно представить в виде единственно возможной суммы нечетных чисел, следующих друг за другом, и в количестве слагаемых по числу, возводимому в степень. С увеличением степени все больше возрастает разница между первыми нечетными числами „суммы нечетных чисел“. Именно это обстоятельство и не позволит разложить значение числа в степени выше двух на сумму двух чисел в искомым степенях, это и было продемонстрировано на конкретных примерах.