А.Н. Шелаев

К ПРОБЛЕМЕ СОЗДАНИЯ АДЕКВАТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ СОЦИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В данной вводной статье проводится анализ процессов распространения во времени информации (напр., рекламной, пропагандистской) в однородных социальных группах на основе решения дифференциальных уравнений логистического типа при стационарных параметрах и без учёта ряда «тонких» эффектов, в частности, забывания информации, противодействия источников контрпропаганды.

Пусть N - число членов социальной группы, в которой распространяется некоторая информация, m - число контактов, завязываемых сторонниками в единицу времени T ($[m]=T^{-1}$), q/N - безразмерная величина ($0<q/N<1$), отражающая то, что не каждый контакт в группе привлекает нового сторонника-распространителя полученной информации, $k=m\cdot q/N$, $n(t)$ - число сторонников в момент времени t, n_0 - число сторонников при $t=0$.

Тогда полагая, что скорость изменения числа сторонников пропорциональна произведению $k\cdot n(t)\cdot(N-n(t))$, получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{dn(t)}{dt}=k\cdot n(t)\cdot[N-n(t)] \qquad (1)$$

Уравнение (1) при $k=\kappa/N$ аналогично нижеследующему уравнению (2), введённому в 1836 г. бельгийским математиком Ферхюльстом для расчёта изменения численности населения и названному им (по неизвестным причинам) логистическим:

$$\frac{dn(t)}{dt}=\kappa\cdot n(t)-\frac{\kappa}{N}n^2(t) \qquad (2)$$

Первое слагаемое в (2) должно учитывать быстрый эспоненциальный рост населения за счёт рождаемости при неограниченных ресурсах (модель Мальтуса), второе – убыль населения по совокупности причин.

Ясно, что уравнение (2) нельзя считать достаточно адекватным задаче о численности народонаселения, так как оно не учитывает много важных факторов, например, длительность жизни людей, возможную зависимость параметра κ от времени и от текущей численности населения $n(t)$. Самым существенным, что показывает решение уравнения (2), является то, что при $t \to \infty$ численность населения стремится к устойчивому стационарному значению $n(t = \infty) = N = const$.

Тем не менее, основываясь на уравнении (2) Ферхюльст с высокой точностью предсказал численность населения Бельгии к концу 20 века $\approx$ 9,4 млн. человек, что лишь немного ниже реальной численности $\approx$ 10,1 млн. Это различие обусловлено, прежде всего, тем, что уравнение (2) не учитывает резко усиливавшийся в последнее время приток мигрантов в Европу, особенно из арабских стран.

Современные модели численности народонаселения, предсказывающие, в частности, демографический переход от быстрого роста к стационарному значению числа жителей Земли $\simeq$ 14 млрд. примерно в 2025 г., рассмотрены, в частности, в статье С.П. Капицы [1].

Вернёмся теперь к уравнению (1) и, разделяя в нём переменные, проведём процесс интегрирования:

$$\frac{dn(t)}{n(t)\cdot(N-n(t))} = [\frac{1}{n(t)} + \frac{1}{N-n(t)}]\cdot\frac{1}{N}\cdot dn(t) = k\cdot dt \qquad (3)$$

$$\ln\frac{n(t)}{N-n(t)} = k\cdot N\cdot t + \ln C, \qquad n(t) = \frac{C\cdot N\cdot \exp(kNt)}{1 + C\cdot\exp(kNt)} \qquad (4)$$

$$n(t=0)=n_0=\frac{C\cdot N}{1+C}, \qquad C=const=\frac{n_0}{N-n_0} \qquad (5)$$

На рис. 1 показаны зависимости $n(t)$ (кривая 1), $d^2n(t)/dt^2$ (кривая 2) при следующих значениях констант: $N=1000$, $n_0=50$, $k=0{,}01$, $C\approx 0{,}0526$.

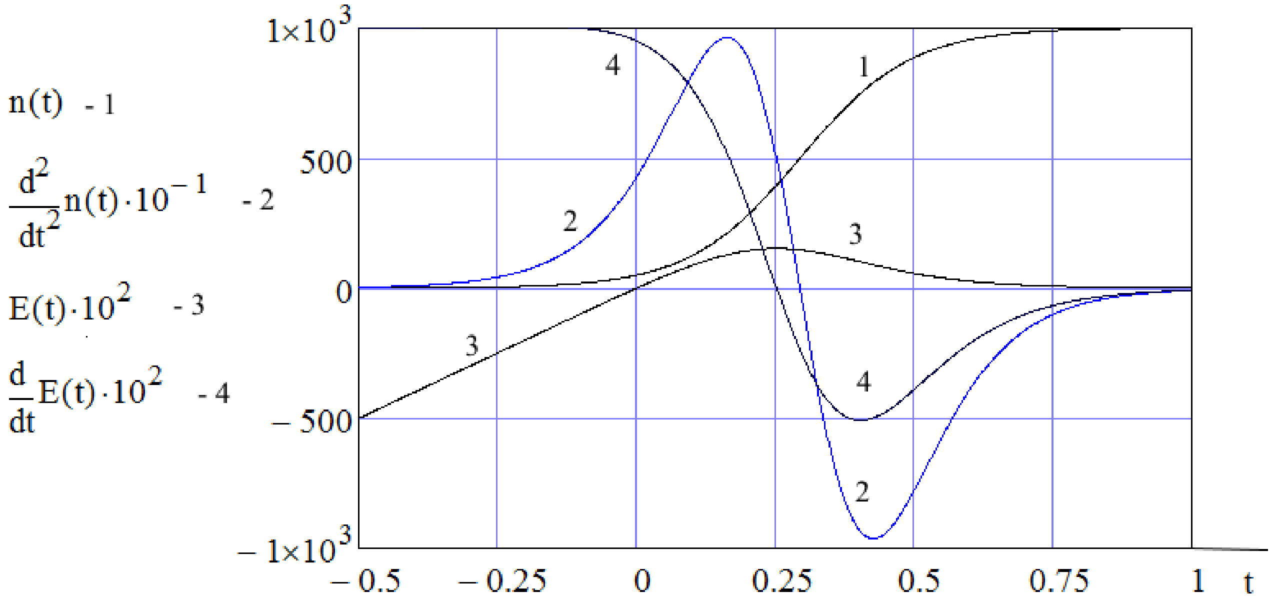

Рис. 1

Точка перегиба (inflection point) логистической кривой $n(t)$, реализующаяся при равенстве нулю 2-й производной (кривая 2) , определяется соотношением:

$$T_i=\ln\left(\frac{N-n_0}{n_0}\right)/kN \qquad (6)$$

Для указанных выше значений констант $T_i\approx 0{,}294\,443\,898$, при этом $n(T_i)=N/2=500$.

Кривая 3 определяет эластичность $E(t)$ функции $n(t)$:

$$E(t)=\frac{dn(t)}{dt}\cdot\frac{t}{n(t)} \qquad (7)$$

В общем случае эластичность функции $y(x)$ определяется следующими соотношениями:

$$E(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}\right) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = y'_x \cdot \frac{x}{y} = \frac{(\ln y)'}{(\ln x)'} \qquad (8)$$

Таким образом, эластичность функции - коэффициент пропорциональности между относительными изменениями функции и её аргумента.

Иначе говоря, эластичность приближённо показывает на сколько процентов изменяется функция при изменении её аргумента на 1 %.

Существенно также то, что с геометрической точки зрения эластичность возрастающей (убывающей) функции численно равна отношению расстояний по касательной от точки касания касательной к кривой до её пересечения с осями ординат и абсцисс, взятых со знаком плюс (минус).

Поскольку при анализе социологических и экономических математических моделей очень важны все детали получаемых зависимостей на рис. 4 показана и зависимость 1-й производной от эластичности по времени t от t – кривая 4.

Исходная математическая модель распространения информации, описываемая уравнением (1) может быть развита при использовании следующего дифференциального уравнения (9) :

$$\frac{dn(t)}{dt} = [\alpha + \kappa \cdot n(t)] \cdot [N - n(t)] \qquad (9)$$

При этом если параметр k учитывает распространение информации за счёт контактов внутри группы, то параметр α должен учитывать распространение информации за счёт внешних источников, воздействующих сразу на всю данную группу.

Разделяя переменные в (9) получим соотношение:

$$\frac{1}{\alpha + kN} \cdot \left[\frac{k\,dn}{\alpha + k\,n} + \frac{dn}{N - n}\right] = dt \qquad (10)$$

Интегрируя (10) получим следующие соотношения:

$$n(t) = \frac{-\alpha + C^* \cdot N \cdot \exp[(\alpha + kN)t]}{k + C^* \cdot \exp[(\alpha + kN)t]} \quad , \qquad C^* = \frac{\alpha + k \cdot n(0)}{N - n(0)} = const \qquad (11)$$

$$n(t) = \frac{-\alpha[N - n_0] + [\alpha + k \cdot n_0] \cdot N \cdot \exp[(\alpha + kN)t]}{k[N - n_0] + [\alpha + k \cdot n_0] \cdot \exp[(\alpha + kN)t]}, \qquad n_o = n(0) \qquad (12)$$

Существенным различием уравнений (9) и (1) является то, что для уравнения (1) зависимость отношения 1-й производной $dn(t)/dt$ к $n(t)$ от $n(t)$ представляет собой прямую линию (см. прямую 1 на рис. 2). При $n(t) = 0$ это отношение равно $kN = 10$ для $k = 0.01$, $N = 1000$. При $n(t) = N$ это отношение равно нулю.

При включении внешнего источника информации $(\alpha \neq 0)$ исходная прямая превращается в ломаную линию. Излом происходит при $n(t) = n_0 = (\quad 5$. Причём при малых α ниспадающая часть ломаной близка к исходной прямой, имеющей место при $\alpha = 0$, см. ломаную 2 на рис. 2, реализующуюся при $N = 1000$, $k = 0{,}01$ и $\alpha = 0{,}001$. Зависимость отношения $[dn(t)/dt]/n(t)$ от $n(t)$ при $\alpha = 1$ показывает ломаная 3 на рис. 2.

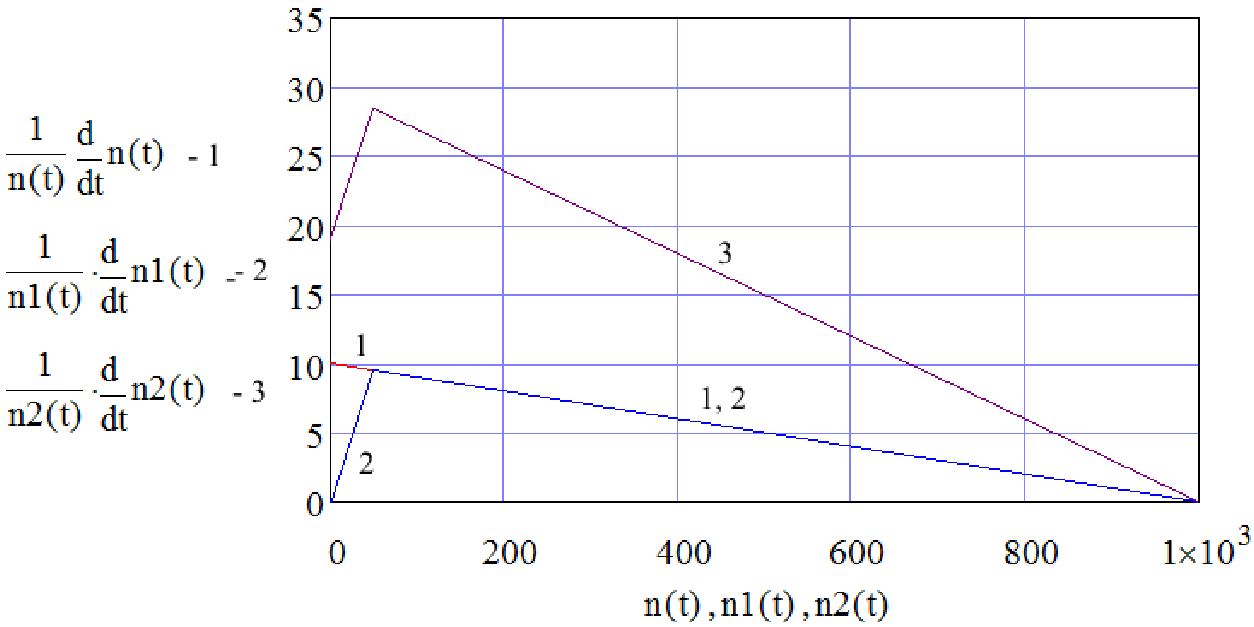

Рис. 2

На рис. 3 показаны зависимости (12) $n(t)$ при различных значениях α: $\alpha_1 = 0,001$ (кривая 1), $\alpha_2 = 1$ (кривая 2) и $\alpha_3 = 10$ (кривая 3). Остальные параметры те же $N = 1000$, $n_0 = 50$, $k = 0,01$.

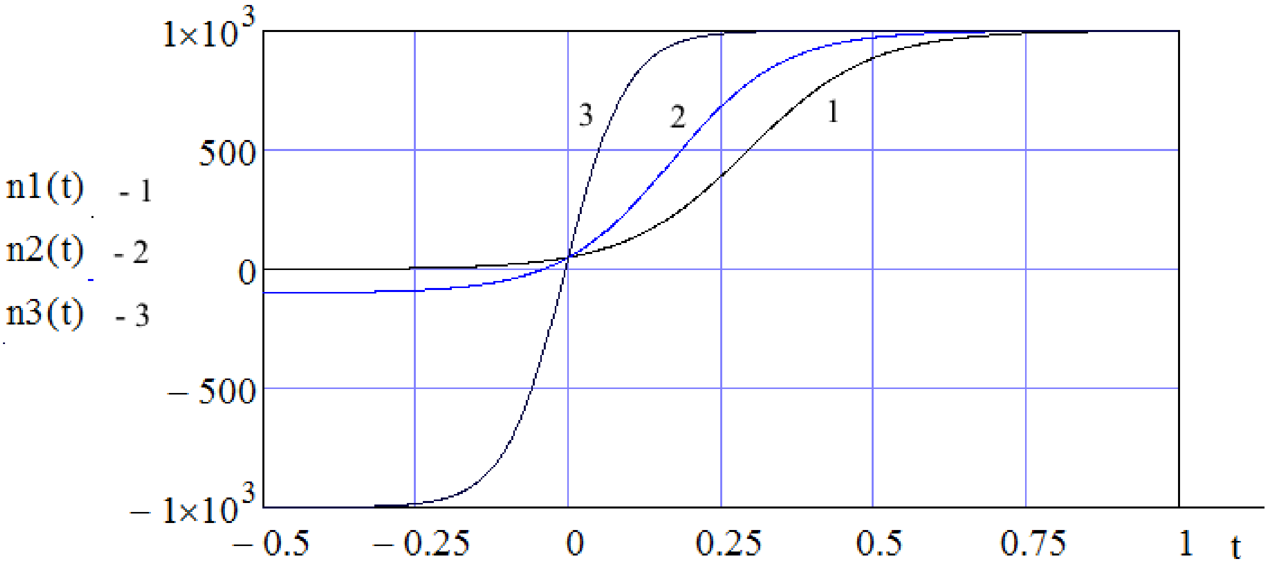

Рис. 3

Важным является то, что с ростом α численность сторонников распространяемой информации возрастает во времени гораздо быстрее и также стремится к устойчивому стационарному состоянию $n(\infty) = N$. В связи увеличением крутизны кривой $n(t)$ с ростом α отметим интересную книгу [2].

В выбранный нами начальный момент времени $t = 0$ все 3 кривые проходят через одно значение $n(0) = n_0 = 50$. Но при предыдущих значениях времени $t < 0$ величины $n(t)$ являются отрицательными.

Этот результат можно попытаться трактовать как наличие в эти (начальные) времена не сторонников, а противников данной информации, которые затем под воздействием получаемой внешней информации изменяют мнение и становятся её сторонниками.

Подчеркнём, что если $\alpha = 0$, то $n(t) > 0$ и при временах $t < 0$ (см. кривую 1 на рис. 1), и, таким образом, как и следует ожидать, только за счёт внутреннего обмена уже имеющейся информацией изменения мнений не произойдёт.

На рис. 4 показаны зависимости времени достижения точки перегиба T_i на кривой $n(t)$ от начальной численности сторонников данной информации n_0 при тех же указанных выше значениях α: $\alpha_1 = 0{,}001$ (кривая 1), $\alpha_2 = 1$ (кривая 2) и $\alpha_3 = 10$ (кривая 3) и $N = 1000$, $n_0 = 50$, $k = 0{,}01$.

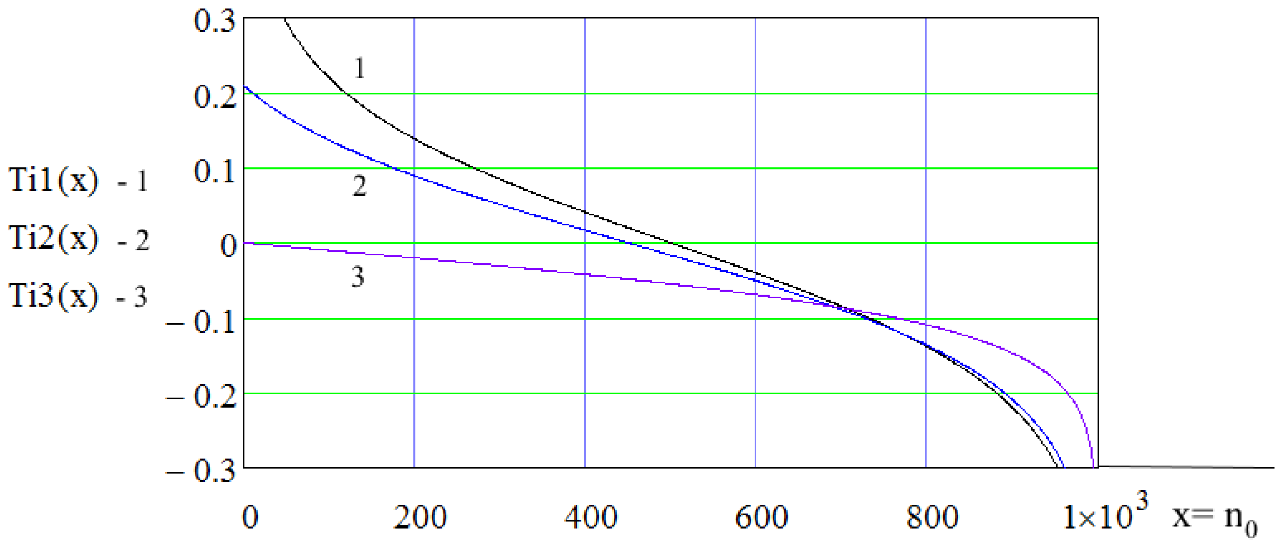

Рис. 4

Точка перегиба при учёте параметра α, то есть вешнего источника информации, определяется следующим выражением, являющимся обобщением выражения (6) :

$$T_i = \ln\left[\frac{k(N - n_0)}{kn_0 + \alpha}\right] / (kN + \alpha) \qquad (13)$$

Как следует из рис. 4, с ростом начального значения сторонников данной информации n_0 при $t = 0$ точка перегиба кривой $n(t)$ смещается в область предыдущих (отрицательных) значений времени t.

Подставляя выражение (13) для времени перегиба T_i в выражение (12) для $n(t)$, получим зависимость числа сторонников данной информации в точке перегиба $N_i(\alpha)$ от параметра α.

На рис. 5 показаны зависимости $N_i(\alpha)$ и первой производной $dN_i(\alpha)/d\alpha$.

Интересно, что эти зависимость оказались прямыми линиями. При этом $N_i(\alpha=0)=N/2=500$, $N_i(\alpha=10)=0$.

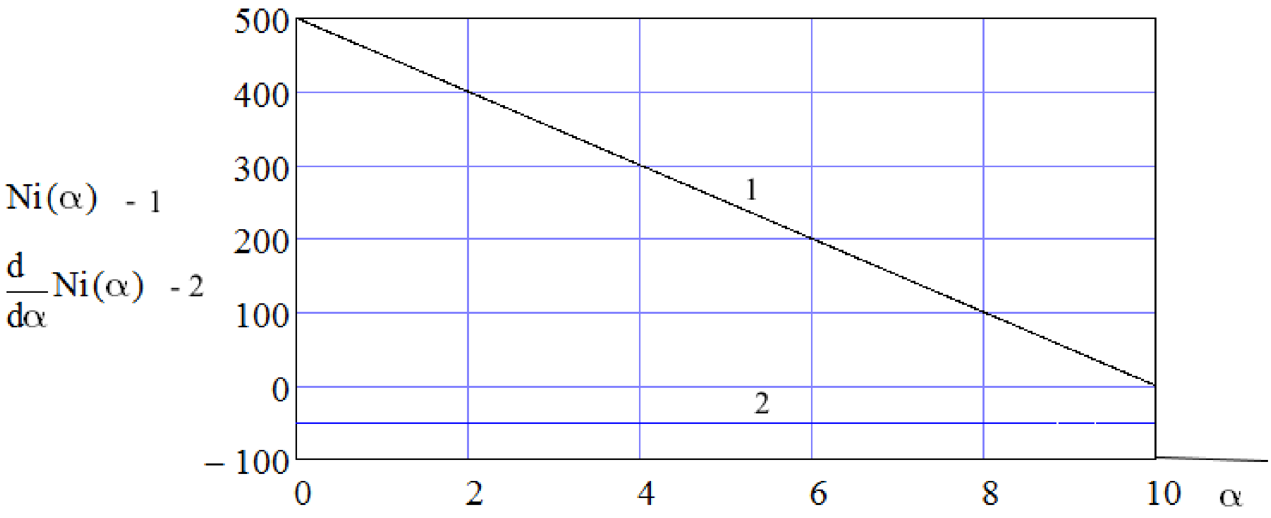

Рис. 5

Таким образом, даже простые математические модели распространения информации требуют тщательного анализа и согласования с данными экспериментальных исследований.

Рассмотрение других социологических и экономических моделей будет проведено в следующих статьях с учётом современных методов математического моделирования изложенных, в частности, в [3,4].

При этом главной проблемой социологических исследований является адекватный учёт так называемого человеческого фактора и общественно-политических отношений. Ибо в гуманитарных науках, в отличие от естественных наук, в которых действуют чётко установленные Законы Природы, такие законы не установлены.

Социальные параметры трудно измеримы и различны в масштабах для разных социальных групп, этносов, государств. Социальные объекты разнородны, социальные явления существенно нелинейны, сильно зависят от результатов политической борьбы и властных амбиций лидеров партий.

.. Список литературы

1. С.*П. Капица*. Феноменологическая теория роста населения Земли. УФН. 1996, т. 166, № 1, с. 63-80.
2. *Malcolm Gladwell.* The Tipping Point: How Little Things Can Make a Big difference. - Little, Brown and Company, 2000. - 288 с.
   Малкольм Гладуэлл. Переломный момент. Как незначительные изменения приводят к глобальным переменам. М.: Альпина Паблишер, 2012. - 256 с.
3. *А.А. Самарский, А.П. Михайлов*. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Приёмы. М., Физматлит. 2005.- 320 с.
4. *А.П. Михайлов, А.П. Петров*. Поведенческие гипотезы и математическое моделирование в гуманитарных науках. Математическое моделирование, 2011, т.23, № 6, 18-32.