Золотая пропорция в проекции деления целого на четыре аддитивные части

С.Л. Василенко

Контакт с автором: texvater@rambler.ru

В статье проанализированы модели пропорционального деления целого на четыре аддитивно-составные части с их эквивалентным представлением в виде алгебраических уравнений. В основе отдельных структур лежит константа золотой пропорции (ЗП). Представленные модели расширяют идею построения классических "золотых" зависимостей, как простейших пропорциональных отношений, на системно-структурные образования четвертого порядка. Одновременно показана несостоятельность так называемых «обобщенных золотых сечений», – по нашему мнению, как терминологически-ненаучного "клонирования" ЗП.

Оглавление

Введение 1
Общие представления о тетрадных структурах 2
Трином 4-го порядка с запаздыванием 3
Модель 4-го порядка с одношаговым запаздыванием 3
Золотоносные модели 4-го порядка 4
Модель *k*-боначчи 5
Общие закономерности 7
Модель 4-го порядка трех старших степеней 8
Трином 4-го порядка <двух> старших степеней 9
Обобщение тринома <двух> старших степеней 9
Ненужная фетишизация золотого сечения 9
От частного к общему и наоборот 11
Вместо заключения 13
Литература 13

Свобода – это возможность сказать,
что дважды два – *четыре*.
Если дозволено это,
всё остальное отсюда следует.
Дж. Оруэлл, "1984" (роман, 1949)

Введение

В работах С. Василенко и А. Никитина [1–3] рассмотрен новый подход к осмыслению-развитию феномена золотого сечения (ЗС).

Интерпретация модели осуществляется с точки зрения объективной составляющей процессов роста и развития живого начала, а не только как чисто математического отношения, выявленного учеными древнего мира. Такое представление больше тяготеет к понятию синтеза, нежели традиционного анализа.

Направление включает в себя как формализованные свойства многих замечательных структур пропорции, так и философское понимание в рамках единой концепции.

Представляется, что в золотом отношении исходным математическим объектом является всё-таки не сечение так таковое, а именно пропорция.

Хотя в своем первом упоминании Евклид традиционно соотносит "золотой" феномен именно с делением отрезка [4] и последующим сравнением-равенством площадей [5, с. 75] либо делением в крайнем и среднем отношении [5, с. 173].

При этом большая часть отрезка является средней пропорциональной величиной между целым и меньшим отрезком.

Всё же пропорция главенствует и превалирует над сечением-рассечением. В том числе в окружающем мире.

Достаточно представить обычное физическое развитие человека. Когда идет постоянное масштабное "обновление" целого. С практическим сохранением большинства пропорций.

Плюс к этому одно важное наблюдение.

Из целого и его двух (пусть условных или мысленных частей) можно составить всего две пропорции с выходом на деление пополам и золотое сечение.

Отсюда напрашиваются такие гипотезы:

- ЗС – возможная модель роста живого;
- ЗС – универсальная модель динамической симметрии.

Общие представления о тетрадных структурах

Речь идет о проецирование золотой пропорции в четырехмерной системе координат.

Уместно напомнить некоторые представления о тетрадных (четверичных) прообразах и структурах. Включая сравнение с тринарными (троичными) строениями.

Тетрада – комплексная структура, непосредственно формирующая видимый мир из четырех первоэлементов.

Четверка – традиционная мера человеческого восприятия многих предметов бытия:

4 стороны света (запад, восток, север, юг);

4 измерения телесного мира – трехмерного пространства и одномерного времени;

4 времени года (зима, весна, лето, осень);

4 возраста жизни (ребенок, юноша, муж и старец) и т.д.

Имя единого бога הוהי (Иеговы, Яхве) писалось на всех языках исключительно четырьмя буквами, как тетраграмма.

Пифагорейцы полагали святым источником материальной вселенной тетрактиду (четверицу, квартернер) $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ и почитали её как священное предание.

Тетраду нередко считают остовом построения глобального мира, гармоничной цивилизации и «тетранет мышления» [6].

В работе [7] рассмотрены характерные интерпретации геометрической тетрадной (четверичной) модели целого. Они удивительно гармоничны, и весьма рельефно отражают сущность целого. Возможно, наиболее ценным является философское осмысление тетрадного системно-образующего механизма.

Минимально возможное деление целого надвое порождает четыре точки-состояния. – За счет внешнего и внутреннего деления.

Их пропорциональное соответствие формирует абсолютно-гармоническое начало.

В отличие от математического множества, которое может состоять из одного элемента, данная система предполагает наличие хотя бы двух составляющих.

Поэтому можно предположить, что *тетрадная модель* – суть наименьшая монада системного структурирования, инициированная парно-двоичным (дуальным) сравнением.

Это не преувеличение, не метафора...

Та же тринитарная модель, широко распространенная среди христианских апологетов, – частный случай глобально-божественной сущности мира. Вероятно, как его наиболее важная сторона, ощущаемая и воспринимаемая человеческим сознанием.

Но всё-таки частное объединение в виде троичной структуры.

Вычленение и объединение тройки «божественных объектов-видений» не обязательно обозначает и/или фиксирует идею-претензию на всеобщность.

Даже в простейшей схеме тринарного подхода, как минимум, часто упускается из виду *всеобщий принцип внешнего деления*, который вскрывает и дает *дополнительные точки опоры* – зеркальные, ассиметричные, уравновешивающие, дополняющие и проч.

В этом контексте тетрадные или четверичные образования выступают как важнейшие перво-структуры. В том числе в их гармонично-пропорциональном формировании.

Именно таким структурам, облеченным в форму алгебраических полиномов и составных (комплексных, комбинированных) пропорций, посвящена настоящая работа.

Данный термин для пропорций используется нами в качестве характеристики и сравнения объединенных отношений, содержащих более одного знака равенства.

Трином 4-го порядка с запаздыванием

Аддитивно-составное целое представим равным единице $1 = a + b + c + d$.

Это весьма удобное действо для изложения материала. Без потери общности рассуждений.

Один из частных случаев деления целого на четыре части {*a*, *b*, *c*, *d*} в составной пропорции

$$x = \frac{c+d}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

приводит к простому алгебраическому уравнению $x^4 = x + 1$.

Точное значение наибольшего по модулю корня определяется выражением

$$x = \frac{1}{2\sqrt{6}} s + \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{r}{6} + \frac{8}{r} + \frac{2\sqrt{6}}{s}} \approx 1{,}22074; \qquad r = \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{849}}, \qquad s = \sqrt{r - \frac{48}{r}}.$$

Составные части единичного отрезка равны

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}32896 \\ 0{,}26947 \\ 0{,}22074 \\ 0{,}18083 \end{pmatrix}.$$

Модель 4-го порядка с одношаговым запаздыванием

Комбинированная пропорция и результирующе-эквивалентное алгебраическое уравнение имеют вид:

$$x = \frac{b+c+d}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d};$$

$$x^4 = x^2 + x + 1.$$

Эквивалентная рекурсия $x'_n = x'_{n-2} + x'_{n-3} + x'_{n-4}$ формирует целочисленную последовательность

(0, 0, 0, 1), 0, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 8, 11, 17, 24, 36, 52, 77, 112, 165, 241, 354… – A013979,

как количество композиций натурального числа n на составные части {2, 3, 4}.

Напомним, в теории чисел композицией или разложением натурального числа называется его представление в виде упорядоченной суммы натуральных слагаемых.

Слагаемые, входящие в композицию, называют частями, а их количество – длиной композиции.

Исходное уравнение легко преобразуется в произведение двух полиномов

$$x^4 - x^2 - x - 1 = (x+1)\left(x^3 - x^2 - 1\right).$$

Поэтому положительный максимальный корень находится аналитически

$$x = \frac{1}{3} + \frac{r}{6} + \frac{2}{3r} \approx 1{,}46557, \qquad r = \sqrt[3]{116 + 12\sqrt{93}}\,.$$

Составные аддитивные части единичного целого равны:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}40559 \\ 0{,}27674 \\ 0{,}18883 \\ 0{,}12884 \end{pmatrix}.$$

Золотоносные модели 4-го порядка

Будем исходить из классического уравнения золотой пропорции $x^2 = x + 1$, где x – отношение целого к большей части и большей части – к меньшей.

Выполним простые операции:

– умножив на x^2, получаем $x^4 = x^3 + x + 1$;

– возведем в квадрат $x^4 = x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2\left(x^2 - 1\right) + 1 = 3x^2 - 1$.

Полученным уравнениям соответствуют комплексные пропорции с отношением $x = \Phi$

$$x = \Phi = \frac{a+c+d}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d};$$

$$x = \Phi = \frac{3b-d}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}.$$

В обоих случаях составные части единичного целого равны (*модель золотой константы*):

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(2+\phi^3\right)^{-1} \\ (3+\phi)^{-1} \\ \left(6-\phi^4\right)^{-1} \\ c/\Phi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}44721 \\ 0{,}27639 \\ 0{,}17082 \\ 0{,}10557 \end{pmatrix}.$$

Подстановка $z = x^2$ в алгебраическое уравнение $x^4 = x^2 + 1$ дает модель золотого сечения $z^2 = z + 1$.

В этом случае имеем пропорцию с квадратным корнем из константы ЗС:

$$x = \sqrt{\Phi} = \frac{b+d}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}\,.$$

Составные части соответственно равны:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}34601 \\ 0{,}27202 \\ 0{,}21385 \\ 0{,}16812 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентное разностное уравнение или рекурсия $x'_n = x'_{n-2} + x'_{n-4}$ генерирует повторяющиеся числа Фибоначчи (0, 0, 0, 1), 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 8, 13, 13 … – A103609 (on-line encyclopedia of integer equences – OEIS, режим доступа – http://oeis.org).

В общем случае "золотой" трином $x^k - F_k x - F_{k-1}$ с числами Фибоначчи F_k в роли коэффициентов имеет корень $x = \Phi$ и пропорциональное деление отрезка на k частей

$$x = \frac{F_k r + F_{k-1} s}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \ldots = \frac{r}{s}.$$

Первая наибольшая часть равна $a = \dfrac{1}{1+\phi+\phi^2+\ldots+\phi^{k-1}}$.

Остальные части последовательно уменьшаются в Φ раз.

Суммы в знаменателе, в частности, равны

$$1+\phi+\phi^2 = 2, \quad 1+\phi+\ldots+\phi^3 = 2+\phi^3, \quad 1+\phi+\ldots\phi^4 = 2+\phi^2, \quad 1+\phi+\ldots+\phi^5 = 2+2\phi^3.$$

Модель *k*-боначчи

Если говорить о развитии-обобщении *задачи ЗС* (но не самого числа ЗС!), то лучше обратиться к известной модели k-боначчи.

Это, пожалуй, наиболее правильное и логически верное направление, органически вытекающее из задачи золотого сечения, не выходя за пределы планиметрии.

Соответственно система k-боначчи легко идентифицируется (квалифицируется) нами как *задача о крайнем и* $(k-1)$ *средних отношениях*: целое так относится к первому, как оно ко второму, которое, в свою очередь, – к третьему … и так далее до последнего <отрезка>:

$$\frac{a+b+c+\ldots+h}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \ldots = \frac{e}{g} = \frac{g}{h} \quad \Rightarrow \quad b^k + b^{k-1} + \ldots + b = 1;$$

$$x = \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad x^k = x^{k-1} + \ldots + x + 1.$$

Для четвертого порядка соответственно имеем:

$$x = \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d},$$

$$x = \frac{a+b+c+d}{a+c+d} = \frac{a+c+d}{a+d} = \frac{a+d}{a} = \frac{a}{b},$$

$$x^4 = x^3 + x^2 + x + 1,$$

где $a = x-1$, $b = a/x$, $c = b/x \ldots$

Эквивалентная рекурсия $x'_n = x'_{n-1} + x'_{n-2} + x'_{n-3} + x'_{n-4}$ генерирует числовой ряд (tetranacci sequence):

(0, 0, 0, 1), 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773, 1490 … – A000078,

как количество композиций натурального числа n на элементы {1, 2, 3, 4}.

Составные части целого равны:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}51879 \\ 0{,}26914 \\ 0{,}13963 \\ 0{,}07244 \end{pmatrix}.$$

В целом модель k-боначчи является наиболее естественным продолжением двучленно-суммирующей структуры Фибоначчи в контексте добавления аддитивных элементов полинома с эквивалентным разностным уравнением

$$x'_n = x'_{n-1} + x'_{n-2} + \ldots + x'_{n-k}\,.$$

Умножим исходный полином на величину x и выполним вычитание, в результате получаем триномиальную модель старших степеней $x^{k+1} = 2x^k - 1$.

В рассмотренной комбинированной пропорции наблюдается следующая закономерность: слагаемые числителя в первом отношении повторяют набор одночленов в правой части алгебраических уравнений.

Действительно, запишем аналогичную сумму с произвольными весовыми коэффициентами m_i

$$x = \frac{m_1 a + m_2 b + m_3 c + m_4 d}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}\ .$$

Выполнив несложные преобразования

$$x = m_1 + m_2\frac{b}{a} + m_3\frac{c}{a} + m_4\frac{d}{a} = m_1 + m_2\frac{1}{x} + m_3\frac{1}{x^2} + m_4\frac{1}{x^3},$$

окончательно получаем

$$x^4 = m_1 x^3 + m_2 x^2 + m_3 x + m_4\,.$$

Хорошо видно, что количество частей целого не имеет принципиального значения.

Добавляется только дополнительная цепочка отношений частей и соответственно увеличивается порядок результирующего алгебраического уравнения.

Таким образом, если рассматривать пропорциональное деление целого на составные части, то первая сумма фактически является формообразующей структурой характеристического алгебраического уравнения.

Это уравнение "цементирует" пропорциональность отношений и является последним условием для однозначного разрешения системы.

В конечном счете, уравнение задает код или числовое значение конкретного отношения.

Из приведенного материала следует очевидное утверждение, что никаких обобщенных золотых сечений не существует и близко.

Есть только разнообразные вариации обычного алгебраического уравнения общего вида.

Среди них естественно выделяется одна единственная и уникальная модель золотого сечения. Как наиболее тривиальный случай пропорционального деления целого на две составные части.

Только с единичными коэффициентами в соответствующем уравнении.

Общие закономерности

Не теряя общности рассуждений, для удобства интерпретации и определенности можно по-прежнему считать составное целое равным единице $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 1$.

На основании литературных источников и собственных исследований установлены следующие положения.

Комплексную пропорцию общего вида для пропорционального соотнесения k аддитивных частей a_j, $j = \overline{1, k}$ целого можно представить в удобном и компактном виде, подстроенном под форму алгебраического уравнения общего вида (табл. 1):

$$x = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_k a_k}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \ldots = \frac{a_{k-1}}{a_k}.$$

Первая сумма задает "ритм" пропорциональных отношений. Это своеобразный каркас или структурный остов-скелет, который обрастает отдельными пропорциональными частями.

Сумма всех частей определяет меру составного целого.

Обычно она принимается равной единице $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 1$.

Таблица 1

Сопоставление "комплексной" пропорции с характеристическим алгебраическим уравнением и эквивалентным разностным (возвратным) уравнением

	m_1	m_2	$\ldots$	m_{k-1}	m_k	– коэффициенты
	a_1	a_2	$\ldots$	a_{k-1}	a_k	– аддитивные части целого
	$m_1 a_1 +$	$m_2 a_2 +$	$\ldots +$	$m_{k-1} a_{k-1} +$	$m_k a_k$	– параметр пропорции
$x^k =$	$m_1 x^{k-1} +$	$m_2 x^{k-2} +$	$\ldots +$	$m_{k-1} x +$	m_k	– алгебраическое уравнение
$f_n =$	$m_1 f_{n-1} +$	$m_2 f_{n-2} +$	$\ldots +$	$m_{k-1} f_{n-k-1} +$	$m_k f_{n-k}$	– возвратное уравнение (рекурсия)

При неотрицательных коэффициентах $m_j \geq 0$ и начальных условий $\delta = (0, 0, \ldots 0, 1)^{\mathrm{T}}$ величина f_n определяет количество комбинаций натурального числа n из m_1 видов (цветов) единиц, m_2 видов двоек и так далее до m_k видов k.

Для вектора произвольных начальных условий $\delta = \left(f_1 \ldots f_k\right)^{\mathrm{T}}$, как первых членов рекурсии, которые одновременно не равны нулю, имеет место простое матричное соотношение для вычисления кортежа элементов числового ряда

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ m_k & m_{k-1} & \ldots & \ldots & m_1 \end{pmatrix}^n \cdot \delta = \left(f_n \;\; f_{n+1} \;\; \ldots \;\; f_{n+k} \right)^{\mathrm{T}},$$

где T – символ транспонирования матрицы или вектора.

Тривиальный вариант – это деление целого на две части $a_1 + a_2 = 1$ в соотношении

$$x = \frac{m_1 a_1}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} \rightarrow a_1 = \frac{m_1}{m_1 + 1}.$$

В частности, коэффициент $m_1 = 1$ образует деление пополам $a_1 = a_2 = 0{,}5$.

Значение $m_1 = 1$ дает модель "две трети" $a_1 = 2/3$ и так далее.

Данному, можно сказать вырожденному случаю, соответствует очевидное уравнение типа $x = m_1$ и соответствующей рекурсией $f_n = m_1 f_{n-1}$ степенного вида $f_n \cong m_1^n$.

То есть правая часть алгебраического уравнения превращается в одночлен, равный коэффициенту m_1, а соответствующий параметр пропорции становится равным $m_1 a_1$.

Наипростейшей моделью данного множества структур становится золотое сечение или пропорциональная золотая модель

$$x = \frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

с характеристическим уравнением $x^2 = x + 1$ и максимальным корнем $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Модель определяет пропорцию целого и его двух частей с единичными весовыми коэффициентами.

Модель 4-го порядка трех старших степеней

Комбинированная пропорция и характеристическое алгебраическое уравнение имеют вид:

$$x = \frac{a+b+d}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d};$$

$$x^4 = x^3 + x^2 + 1.$$

Эквивалентная рекурсия $x'_n = x'_{n-1} + x'_{n-2} + x'_{n-4}$ генерирует ряд

(0, 0, 0, 1), 1, 2, 3, 6, 10, 18, 31, 55, 96, 169, 296, 520… – A060945,

как количество композиций числа n на части {1, 2, 4}.

Исходное уравнение легко преобразуется в произведение двух полиномов

$$x^4 - x^3 - x^2 - 1 = (x+1)\left(x^3 - 2x^2 + x - 1\right).$$

Положительный максимальный корень находится аналитически из кубического уравнения

$$x = \frac{2}{3} + \frac{r}{6} + \frac{2}{3r} \approx 1{,}75488, \qquad r = \sqrt[3]{100 + 12\sqrt{69}}.$$

Составные части целого равны:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}48086 \\ 0{,}27401 \\ 0{,}15614 \\ 0{,}08898 \end{pmatrix}.$$

Трином 4-го порядка <двух> старших степеней

Деление целого на четыре части в пропорции

$$x = \frac{a+d}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

приводит к алгебраическому уравнению $x^4 = x^3 + 1$ с корнем $x \approx 1{,}38028$.

Известные свойства пропорции позволяют также записать альтернативные отношения через суммы $x = \frac{a+b+c+d}{a+c+d} = \frac{a+c+d}{a+d} = \frac{a+d}{a} = \frac{a}{b}$.

Составные части отрезка равны

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}38028 \\ 0{,}27551 \\ 0{,}19960 \\ 0{,}14461 \end{pmatrix}.$$

Обобщение тринома <двух> старших степеней

В общем случае элементы соотносятся в пропорции

$$x = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \ldots = \frac{q}{s} = \frac{s}{r} = \frac{r+a}{a}.$$

Последняя часть r не может самостоятельно ни к чему относиться.

Поэтому в модели она объединяется с первой a и с ней же соотносится.

Этим самым система отношений замыкается, что называется "в круговую".

То есть она дополняется последним необходимым условием и становится однозначно разрешимой с алгебраическим триномом старших степеней $x^k - x^{k-1} - 1$. Или эквивалентным разностным (возвратным) уравнением $x'_n = x'_{n-1} + x'_{n-k}$.

По мере увеличения числа составных элементов в единичном отрезке и адекватного роста степени тринома k значение корня уменьшается так, что его мантисса всегда равна наибольшему отрезку $a = x - 1$.

С учетом этого и завершающего отношения $x = \frac{r+a}{a}$ последний элемент равен квадрату первого $r = a^2$.

Ненужная фетишизация золотого сечения

В ряде работ уважаемого проф. А. Стахова многие годы неустанно и настойчиво продвигался посыл о личном приоритете "первооткрывателя" вышеупомянутого тринома, который он записывал в виде $x^{p+1} - x^p - 1$, а его корни называл «золотыми p-сечениями». В рамках слабо аргументированной терминологии ОЗС – «обобщенных золотых сечений».

Разные аспекты, так называемых p-сечений, подробно освещены в работах [8, 9].

Довольно наглядно показано, что по субъективным оценкам уровень значимости данных сечений искусственно завышен и далек от реальной картины в этой области прикладной математики. Начиная от несообразной "золоченой" терминологии, и заканчивая тщетными воззваниями к их внедрению в вычислительно-цифровую технику вместо традиционной двоичной системы счисления.

В статье [10] проведен исторический экскурс и отмечена ранняя библиография по данному вопросу специалистов Fibonacci Association.

Исторически ранними и наиболее примечательными здесь, пожалуй, являются исследования Джозефа (1963) [11], где рассмотрена модель $x^k - px^{k-1} - q = 0$ с эквивалентным разностным уравнением $x'_n = px'_{n-1} + qx'_{n-k}$.

Отличительная черта упомянутой работы – подробный анализ сумм в обобщенных треугольниках Паскаля. Показано, что параллельные диагональные суммы дают искомые члены числовых рядов.

Для единичных начальных условий из статьи [12] Харриса–Стилса (1964) следует обобщение аналитической формулы Муавра-Бине через корни λ_j исходного уравнения:

$$x'_{n-1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j^n}{k\lambda_j - k - 1}.$$

Таким образом, модель $x^k = x^{k-1} + 1$, упоминаемая в работах профессора в качестве его собственного "золотоносного творчества", исторически уже была предметом детального изучения в более ранних исследованиях многих зарубежных математиков (Пойа [13], Dickinson, Joseph, Harris, Styles и др.). Об этом говорится и в работах [14, с. 157; 15, с. 35].

При этом важно отметить отличительную особенность авторов: никто из них не называл "золотыми" сечениями частные случаи этой алгебраической модели.

Оно и правильно. Ничего близкого с золотым сечением (ЗС) данная модель не имеет.

Если и вести речь, то допустимо говорить о *развитии задачи* ЗС. При этом в новых конструкциях видовой признак "золотистости" естественно отпадает и опускается.

Похожей терминологически-золотой окраски в мировой математике не существует.

Есть только одно ЗС со своей константой.

Все остальные "позолоты" – частные авторские фантазии.

Это касается и терминологических вольностей типа «*p*-золотых сечений» для тринома старших степеней в его записи $x^{p+1} = x^p + 1$.

Они даже не подпадают под бритву Оккама или «научную стерилизацию» ЗС [16], – как процесса освобождения теоретических положений золотой пропорции от подобных фантазий и гиперболизаций.

Снова же по причине того, что алогично и бессмысленно называть решения всевозможных алгебраических уравнений обобщенными или иными золотыми сечениями во множественном числе.

В работе [17] отмечалось что "ОЗС" – это не столько термин или математическое определение, сколько некоторый художественный образ. Или, если угодно, сленг, который в строгом смысле больше тяготеет к псевдонаучному понятию.

Принимая "ОЗС" к использованию даже в качестве сленга, следует четко представлять всю его несообразность на физическом уровне, когда практически любую точку на единичном отрезке можно интерпретировать как "ОЗС" путем подбора решения соответствующего уравнения, построенного на основании математической пропорции того или иного вида.

Более того, автоматически становится верным и обратный переход, когда золотое сечение теряет свою индивидуальность и становится "обобщением" бесконечного множества других чисел только на том основании, что они находятся на одном графике или одной линии-функции.

Поэтому всякого рода обобщения самого золотого сечения, на наш взгляд, – забавные словесные манипуляции.

Чаще всего с претензией-заявкой на броскость или эффектность представления.

Возможно, для того, чтобы как-то отличиться-выделиться на фоне сравнительно простых математических свойств, присущих "золотоносному" феномену.

Отметим принципиальную разницу между псевдонаучными ОЗС и обобщенными моделями золотого сечения:

1. Золотое сечение – одно единственно. Одновременно это собственное имя математической константы, которая априори обобщению не подлежит.

2. Модельных структур золотого сечения может быть множество, но все они, так или иначе, приводят к константе Φ или её целой степени Φ^k. Возможны также варианты $\sqrt[k]{\Phi}$.

От частного к общему и наоборот

Выполненные нами исследования подтверждают надуманность и псевдонаучную подоплеку "ОЗС". Поскольку первым "числителем" в комбинированной пропорции может выступать практически любое выражение из алгебраических уравнений общего порядка.

То есть "золоченая" терминология невольно и неизбежно приводит к экзистенциально-абсурдному выводу о том, что практически вся числовая действительная ось – есть "ОЗС".

Достаточно взглянуть на расположение трех точек деления для четырех составных частей $k=4$ целого (рис. 1).

Это только примеры полиномов с единичными коэффициентами.

Назначение произвольных коэффициентов выводит нас на дополнительные безграничные множества модельных структур.

Тем самым областью решений становятся практически любые вещественные числа.

В частности, умножение "золотого" тринома x^2-x-1 на многочлены с целыми корнями, равными ±1, то есть меньшими Ф по абсолютной величине, воссоздает следующие золотоносные модели тетрадного (четверичного порядка):

1. $\left(x^2-x-1\right)\left(x^2-1\right)=x^4-x^3-2x^2+x+1;$

$x^4=x^3+2x^2-x-1;$

$$x=\frac{a+2b-c-d}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\Phi;$$

$x'_n=x'_{n-1}+2x'_{n-2}-x'_{n-3}-x'_{n-4}:$

(0, 0, 0), 1, 1, 3, 4, 8, 12, 21, 33, 55, 88, 144, 232, 377, 609 … – A052952.

$$x'_n=x'_{n-1}+x'_{n-2}+\frac{1+(-1)^n}{2}=F_{n+2}-\frac{1-(-1)^n}{2}.$$

2. $\left(x^2-x-1\right)(x-1)^2=x^4-3x^3+2x^2+x-1;$

$x^4=3x^3-2x^2-x+1;$

$$x=\frac{3a-2b-c+d}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\Phi;$$

$x'_n=3x'_{n-1}-2x'_{n-2}-x'_{n-3}+x'_{n-4}:$

(0, 0), 0, 1, 3, 7, 14, 26, 46, 79, 133, 221, 364, 596, 972, 1581 … – A001924.

$$x'_n \;=\; x'_{n-1} + x'_{n-2} + n \;=\; F_{n+4} - (n+3).$$

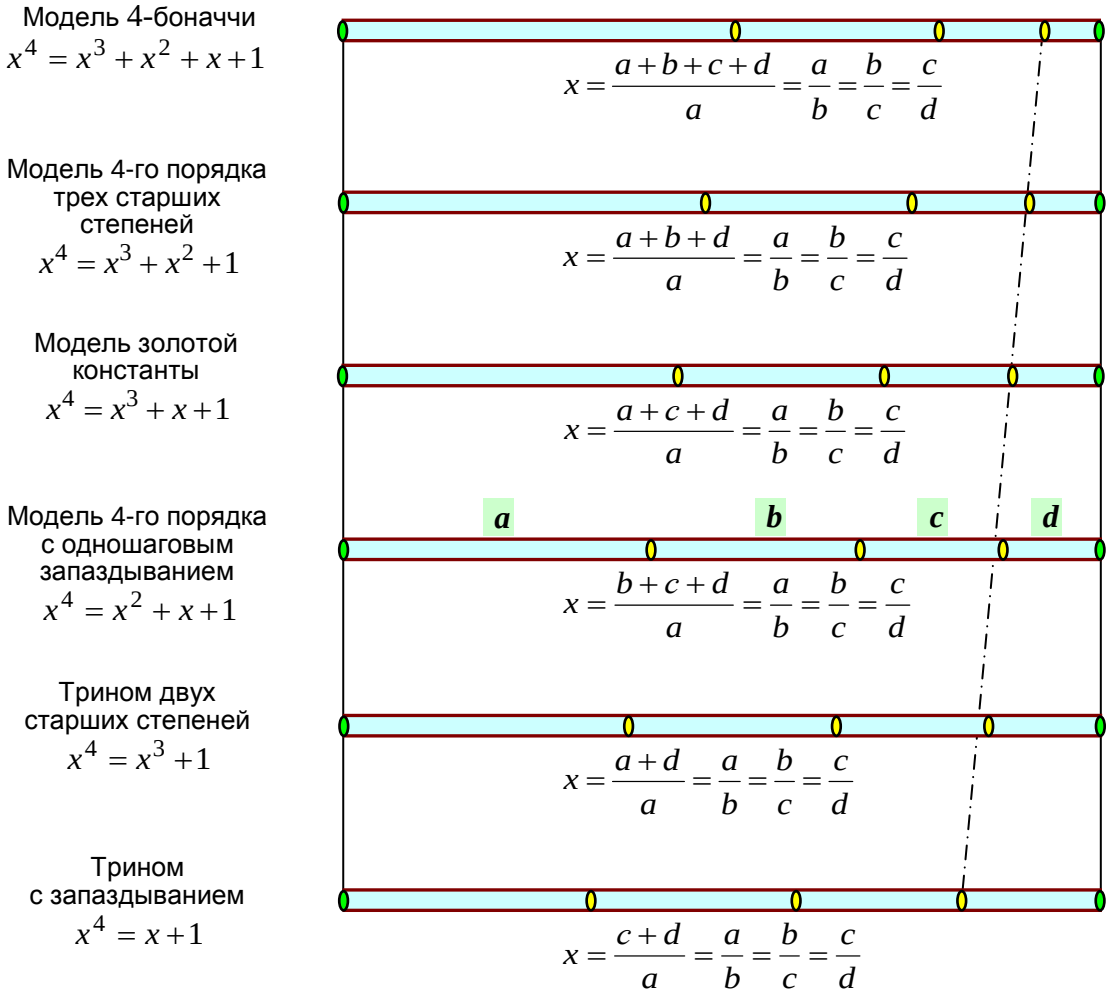


Рис. 1. Графическое представление моделей четвертого порядка деления целого на пропорциональные аддитивные части $\{a,\ b,\ c,\ d\}$

3. $\left(x^2 - x - 1\right)(x+1)^2 = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1;$

$x^4 = -x^3 + 2x^2 + 3x + 1;$

$$x \;=\; \frac{-a + 2b + 3c + d}{a} \;=\; \frac{a}{b} \;=\; \frac{b}{c} \;=\; \frac{c}{d} \;=\; \Phi;$$

$x'_n = -x'_{n-1} + 2x'_{n-2} + 3x'_{n-3} + x'_{n-4}$:

(0, 0, 0), 1, -1, 3, -2, 6, -2, 11, 1, 21, 12, 44, 44, 101, 131, 247 …

$|x'_n| \;=\; \left|\, (-1)^n F_{n-1} + n \,\right|$ – по абсолютной величине.

Во всех трех случаях максимальный корень равен константе золотого сечения Φ, что дает нам такое соотношение четырех частей целого (см. золотоносные модели 4-го порядка):

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}44721 \\ 0{,}27639 \\ 0{,}17082 \\ 0{,}10557 \end{pmatrix}, \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \Phi \approx 1{,}618.$$

Вместо заключения

По нашему глубокому убеждению, термин "ОЗС" – имеет природу современного нонсенса, как отсутствия обусловленного смысла.

Вполне подходит и более строгий образ в контексте ненаучного суждения.

Золотая константа Ф одна! Не считая своего обратного значения.

В то же время допустимо говорить про разнообразные модели – конструкции золотой пропорции. В том числе её обобщенные структуры.

Предполагаются разные записи, различные формы... Но в их основе непременно лежит золотая пропорция, характеризуемая константой Ф или её целой степенью, что также отвечает идее пропорциональности.

То есть во множественном числе употребляется на само золотое сечение, а его всевозможные модели-трактовки.

Это имеет принципиальное значение и хорошо укладывается в понятийную сущность золотой пропорции.

Будучи единственным по содержанию, золотое сечение допускает разнообразие форм записей-представлений.

Приведенное в данной работе проецирование золотой пропорции на четырехмерную систему координат – тому подтверждение. Когда во всём многообразии лишь немногие структуры содержат в своей основе константу золотого сечения Ф.

Литература:

1. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2 / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17972, 07.04.2013. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162094.htm.

2. Василенко С.Л., Никитин А.В. Модельные структуры пропорционального роста. Часть 1. Синтез // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.09.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=107&sm=2 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 22.09.2013. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13091.html.

3. Никитин А.В. Красота, гармония – простота // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 18239, 10.10.2013. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162189.htm.

4. Василенко С.Л. "Золотой разговор" с Евклидом // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15649, 12.11.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161575.htm.

5. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

6. Азбука гармонии для глобального мира, гармоничной цивилизации и тетранет мышления. Всемирный учебник. 34-й проект ГСГ. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 336 с. – URL: peacefromharmony.org/?cat=ru_c&key=512.

7. Василенко С.Л. Гармоническая тетрадная модель целого // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 23.03.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=100&sm=2.

8. Василенко С.Л. Миф про обобщения золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 23.07.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=32&sm=2.

9. Василенко С.Л. Незадачливые *p*-сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=50&sm=2.

10. Василенко С.Л. Об одной обобщенной модели Фибоначчи // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17360, 16.03.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161941.htm.

11. Raab Joseph A. A Generalization of the Connection between the Fibonacci sequence and Pascal's Triangle // The Fibonacci Quarterly, 1.3 (1963), 21–31.

12. Harris V.C., Carolyn C. Styles. A Generalization of Fibonacci Numbers // Fibonacci Quarterly, 2.4 (1964), 277–289.

13. Пойа Д. Математическое открытие: пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 452 с.

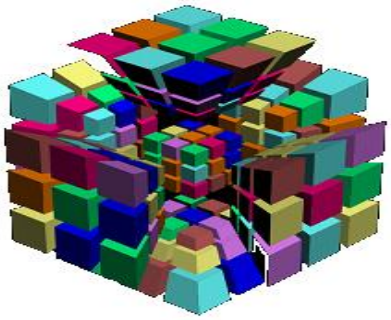
14. Ясинский С.А. "Золотое" сечение в культурном и социально-экономическом развитии общества с приложениями в связи и логистике (монография) // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14661, 14.12.2007. – URL: trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/1014-00.htm.

15. Ясинский С.А. "Золотое" сечение в стандартизации и теории измерения. – СПб.: ВАС, 2008. – 160 с. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321170.htm.

16. Василенко С.Л. Квазизолотая пропорция в структурированных системах // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16054, 30.08.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161694.htm.

17. Василенко С.Л. Клоны золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15641, 09.11.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161573.htm.

© ВаСиЛенко, д.т.н., 2016
Харьков, Украина



Авторские страницы:
http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm