Олег Черепанов

АРИФМОМЕТРИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

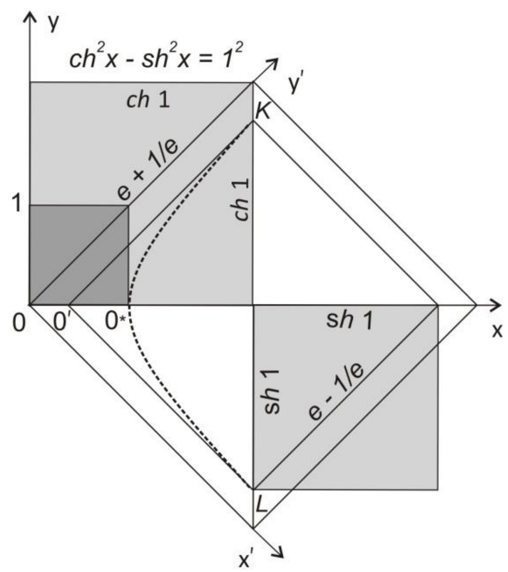
Урок четвёртый: парадокс – это факт высшего качества.

ГТ-парадокс, *e*- и π-тригонометрии, константа связи, цепные тангенсы.

Парадокс, подобно столбу, отмечает границу между парадигмами. В математике парадигм немного – всего две. Одна декларирует непрерывность числовой прямой в рамках гипотезы континуума, которую физики охотно позаимствовали у математиков и даже построили на ней релятивистскую картину мира. При этом физики изучают движение, понимая его как согласованную смену координат и времени. Но движение неотделимо от массы, существующей в виде объектов космоса (звёзд и планет) и в форме элементарных частиц, шкала которых дискретна. Таким образом, физики, сами не сознавая того, устроились на двух парадигмах - геометрической и арифметической, противоестественно смешивая их в теории движений. Однако совмещение гипотезы континуума с фактической дискретностью вещества может быть не столько ошибочным, сколько невозможным в принципе.

Критика эклективных основ физики должна быть объективной и достаточно глубокой, чтобы не показаться сомнительной. И лучше всего, если противоречие, сначала обнаруженное в математике, затем распространяется на физику. Тогда можно сказать, что математики обманули физиков, а те всех остальных. Хотя речь идёт не об обмане, а о заблуждении или излишней уверенности в том, что элементарная математика безгрешна. Но если в ней вдруг откроется брешь, через которую станут видны изъяны физики, то можно ожидать какого-то продвижения к истине, а не искать её следы среди старых фактов, организованных теориями аксиоматического толка. И желательно, чтобы противоречие имело вид парадокса, с которым нельзя не согласиться. Тем более, когда в нём конфликтуют две школьные дисциплины – геометрия и тригонометрия.

Геометро-тригонометрический парадокс «умещается» в рамке из двух квадратов - внешнего 1 и внутреннего 2, стороны которых отличаются длинами $e^{+1}+e^{-1}$ и $e^{+1}-e^{-1}$, где $e = 2{,}718\ldots$ - число Непера. Пусть диагонали подобных фигур 1 и 2 направлены по осям системы (x, y) с началом 0 в левой вершине внешнего квадрата, где пересекаются его стороны, лежащие на биссектрисах как средних линиях первого и четвёртого квадрантов.



Ясно, что биссектрисы $0x'$ и $0y'$, как оси, служат асимптотами гиперболы *Б*) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, вершина 0^* которой находится в пункте (1,0). При этом дуга $K0^*L$ кривой (*Б*) заключена в малом квадрате 2 и соединяет его вершины $K\,(ch1, sh1)$ и $L(ch1, -sh1)$, где $ch\,1 = \dfrac{e^{+1}+e^{-1}}{2}$ и $sh\,1 = \dfrac{e^{+1}-e^{-1}}{2}$ - это *x*- и *y*-координаты тех же вершин в случае, когда точки $K\ (e^{-1}, e^{+1})$ и $L\ (e^{+1}, e^{-1})$ зафиксированы в осях x и y перед их поворотом на угол 0,25 π по часовой стрелке до совмещения с осями x' и y'.

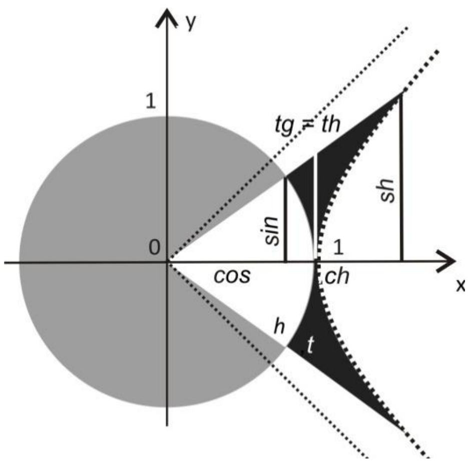
Очевидно, что хорда KL = 2 sh1 гиперболы (*Б*) служит диагональю квадрата 2, где она, как гипотенуза треугольника $K0'L$ с равными $e^{+1}-e^{-1}$ катетами, имеет длину $(e^{+1}-e^{-1})\sqrt{2}$, что не соответствует связи $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^{+x}-e^{-x}}{2}$, откуда при $x = 1$ следует sh1 = $e^{+1}-e^{-1}$. И выходит, что по определению гиперболического синуса гипотенуза KL равна катету ($K0'$ или $L0'$). Иначе говоря, длина диагонали квадрата 2 меньше её длины, вычисленной по теореме Пифагора.

С другой стороны, удвоенная площадь 2 sh^2 1 квадрата со стороной sh1 равняется площади $S_2 = (e^{+1}-e^{-1})^2$ фигуры 2 при том, что площадь $S_1 = (e^{+1}+e^{-1})^2$ фигуры 1 вдвое больше площади квадрата ch1 × ch1. Но если разность 2 $\mathrm{ch}^2 1$ – 2 $\mathrm{sh}^2 1$ приравнять разности $S_1 - S_2 = 4$, то результат $\mathrm{ch}^2 1 - \mathrm{sh}^2 1 = 2$ очевидно отличается от формы *Б*) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, где $x = 1$.

Таким образом, между построениями геометрии и определениями тригонометрии существует противоречие арифметического плана. И этот парадокс требует внимательного рассмотрения. Будем исходить из того, что единица под символами sh и ch и единица в форме *Б*) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1^*$ не эквивалентны. Напротив, теорема Пифагора тесно связана с квадратичной формой *А*) $sin^2\, t + cos^2\, t = 1^{**}$, отличающейся от (*Б*) не только переменной t, но и невозможностью приравнять единицы 1^{**} и 1^*.

Тригонометрия, как одна из трех дисциплин элементарной математики, имеет два раздела. Первый основан на геометрических построениях внутри и возле окружности, а второй опирается на свойства гиперболы, ветви которой, приближаясь к асимптотам, уходят в бесконечность осей координат. И оба раздела, базируясь на геометрической аксиоме непрерывности, оперируют понятием функции. При этом в тригонометрии на гиперболе важна роль числа e = 2,718…, а в круговой тригонометрии выделяется константа π = 3,141…

Известно, что функции e- и π-тригонометрий связаны тождествами $\mathrm{sh}\, x = -i\, sin\, (ix)$, $\mathrm{ch}\, x = cos\, (ix)$, $\mathrm{th}\, x = -i\, tg\, (ix)$, $\mathrm{sh}\, (ix) = i\, sin\, x$, $\mathrm{ch}\, (ix) = cos\, x$, $\mathrm{th}\, (ix) = i\, tg\, x$, где i - мнимая единица, а x - общий аргумент. Кроме того, числа e, π и i входят в тождество $e^{i\pi} = -1$. И как известно π служит мерой центральных углов окружности, радиус $R = \sqrt{sin^2\, \mathrm{h} + cos^2\, \mathrm{h}}$ которой равен единичному расстоянию от начала координат до вершины гиперболы $r^2 = \mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x$. То есть, линии $R^2 = x^2 + y^2$ и $r^2 = x^2 - y^2$ при $R^2 = r^2 = 1^2$ одинаково масштабированы и состыкованы в точке (1,0) системы (x,y).



Заметим, что заглавные формулы *А*) $1^2 = x^2 + y^2$ и *Б*) $1^2 = x^2 - y^2$ π- и e-разделов тригонометрии похожи на несовместимые тождества. При этом гиперболические функции ch и sh сопряжены выражением *Б*) $x^2 - y^2 = 1^2$, не тождественным теореме Пифагора, но известным как уравнение равнобочной гиперболы. Причём функция (*Б*) с переменными $x = \mathrm{ch}\, t$ и $y = \mathrm{sh}\, t$ эквивалентна $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1^2$, где аргумент t имеет два смысла:

- смысл абсциссы x заданной точки кривой (*Б*) и
- смысл площади t треугольника с основанием в виде дуги гиперболы (*Б*) и сторонами, соединяющими её концы с началом координат 0.

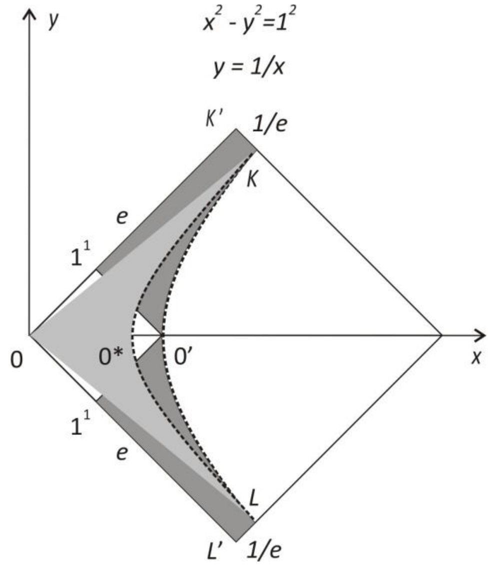
Таким образом, e-тригонометрия, как и π-раздел, снабжена двумя масштабами:

- первостепенным 1^1 со смыслом единицы длины и
- второстепенным $1^2 = 1^1 \times 1^1$, похожим на площадь.

При этом единичную площадь имеют и $\Delta K0L$ с криволинейным основанием $K0^*L$ и криволинейная трапеция $0'KK'1^1$ в составе фигуры $KK'\,0L'\,L0'$, площадь которой втрое больше единичной.

Очевидно, что четырёхугольные фигуры с тёмной заливкой лежат под кривой *В*) $y = x^{-1}$, точки K и L которой совпадут с точками гиперболы *Б*) $x^2 - y^2 = 1^2$ при повороте декартовых координат (x, y) вокруг начала 0 до взаимного наложения квадратов $e \times e$, вырезающих из головных участков гипербол (*Б*) и (*В*) симметричные дуги $K0^*L$ и $K0'L$.

Очевидно, что при совмещении осей симметрии линий (*Б*) и (*В*) их общие точки K и L имеют координаты (e^{-1}, e^{+1}) и (e^{+1}, e^{-1}) соответственно. А по определению функций $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^{+x} + e^{-x}}{2}$ и $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^{+x} - e^{-x}}{2}$ значением аргумента x может быть единица, якобы общая и для площади и для расстояния. Однако тождеству $\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x = e^{+x}$ при $x = t = 1$ противоречат геометрические построения, о чём говорит ГТ-парадокс.

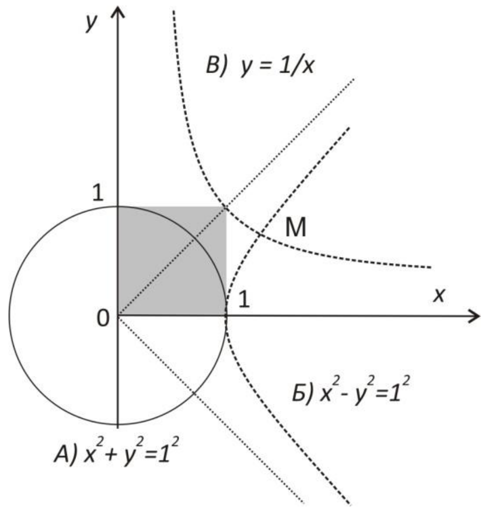


Итак, графические размеры и расчетные значения величин ch 1 = 1,543… и sh 1 = 1,175… не согласованы, что обозначает конфликт между геометрией и алгеброй, лежащий на возделанном поле e-тригонометрии камнем преткновения. Иначе говоря, теорема Пифагора, одной из форм которой служит уравнение *А*) $sin^2 x + cos^2 x = 1$, противоречит определению значений $\mathrm{ch}\, t$ и $\mathrm{sh}\, t$ посредством числа $e = 2{,}718\ldots$ и обратного ему скаляра $\pm e^{-1}$ как отрезков, сравнимых с первостепенной единицей 1^1. Причём разность $(2 + \varphi^2) - (1 + \varphi^2) \approx 1$ почленно почти тождественна выражению $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1^2$ при $t = 1$. В итоге, несмотря на то, что отрезки $e^{+1} + e^{-1}$ и $e^{+1} - e^{-1}$ служат гипотенузами равнобедренных прямоугольных треугольников с катетами ch 1 и sh 1, теорема Пифагора не является способом их расчета по причинам, указанным выше.

Парадокс, как неоспоримый факт, не укладывающийся в систему устоявшихся взглядов, сигналит о неадекватности оснований математики, требуя их корректировки или пересмотра.

А теперь сопоставим e-тригонометрию с круговой π-тригонометрией, построенной возле окружности радиуса 1, зная, что обе содержат функции с созвучными наименованиями, например, называя тангенсом отрезок, перпендикулярный оси x в точке (1,0), обозначающей вершину гиперболы *Б*) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1^2$ как место её соприкосновения с окружностью *А*) $sin^2 x + cos^2 x = 1^2$. Причем биссектрисы $y = x$ и $y = -x$ 1-го и 4-го квадрантов декартовых координат с началом в центре окружности, как асимптоты линии (*Б*) вырезают из единичного круга сектор площадью 0,25 π. А гипербола *В*) $y = x^{-1}$ при $x > 0$ умещается между осями x и y как асимптотами.

Очевидно, что гиперболы (*Б*) и (*В*) пересекаются в точке М (x_{M}, y_{M}), ордината y_{M} которой как число m равняется sh x_{M}, где $x_{\mathrm{M}} = 1/y_{\mathrm{M}} = \underline{m}^{-1}$. Но $x_{\mathrm{M}} = \mathrm{ch}\, x_{\mathrm{M}}$. То есть, значения x_{M} и y_{M} взаимно обратны и, значит, $\underline{m}$ отвечает $\mathrm{sh}\, x_{\mathrm{M}} \cdot \mathrm{ch}\, x_{\mathrm{M}} = \underline{m} \cdot \underline{m}^{-1} = 1$.



Обратная связь $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^{+x} + e^{-x}}{2}$ и $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^{+x} - e^{-x}}{2}$ в точке М (x_{M},y_{M}) подразумевает, что при $x = \underline{m}^{-1}$ будет $\mathrm{sh}\, x_{\mathrm{M}} \times \mathrm{ch}\, x_{\mathrm{M}} = \dfrac{e^{2\underline{m}} - e^{-2\underline{m}}}{4} = 1$, откуда $e^{2\underline{m}} - e^{-2\underline{m}} = 4$. Поэтому из $4 = \varphi^{-3} - \varphi^{+3}$ и $4 + \varphi^{+3} = 2 + \sqrt{5}$ имеем $e^{+2\underline{m}} = \varphi^{-3} = 2 + \sqrt{5}$ или $e^{-2m} = \varphi^{+3}$, откуда $\underline{m} = ln\sqrt{\varphi^{-3}} = 0{,}7218\ldots$, что связывает константу $\varphi = 0{,}6180\ldots$ в степени –3 с числом $e = 2{,}7182\ldots$

Заметим, что из уравнения *Б*) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1^2$ при $x = \underline{m}$ и $\mathrm{sh}\, \underline{m} \cdot \mathrm{ch}\, \underline{m} = 1$ следует $\mathrm{th}^{-1} \underline{m} + \mathrm{th}^{+1} \underline{m} = 1^2$, где $\mathrm{th}\, \underline{m} = \varphi$. Как видно, число $\underline{m} \approx 0{,}722$ объединяет постоянные e и φ в простом выражении и в форме $e^{-2\underline{m}}$ выражает третью степень φ конверсии $\dfrac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3} = \varphi^1 \leftrightarrow \varphi^3 = \dfrac{1-\varphi^1}{1+\varphi^1}$.

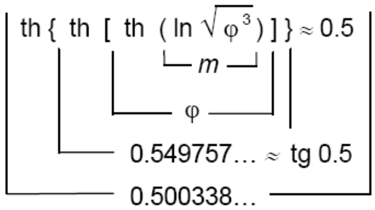
Принято, что оси абсцисс и ординат являются прямыми с метками для целых чисел, между которыми стоят метки долей масштабной единицы. И казалось бы, при $x = 1$ единицы в составе формул *Б*) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1^2$ и *В*) $y = 1/x$ двух гипербол не отличаются друг от друга, хотя скаляр 1^2 в выражении (*Б*) выглядит единичной площадью. При этом площадь того же размера получается интегрированием функции $y = x^{-1}$ по интервалу от 1 до e и она же равняется произведению координат $x = 1$ и $y = 1$ вершины $0'$ кривой (*В*). Более того, уравнение $x^2 - y^2 = 1^2$ в форме $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1^2$ с параметром t при $y = \mathrm{f}(t) = \mathrm{sh}\, t$ предполагает, что символ t выражает площадь между головной дугой KL линии (*Б*) и отрезками $0K$ и $0L$. При этом единичной площади соответствуют значения ch 1 = 1,54… и sh 1 = 1,17…, такие, что $\mathrm{ch}\, 1 + \mathrm{sh}\, 1 = e^{+1}$ и $\mathrm{ch}\, 1 - \mathrm{sh}\, 1 = e^{-1}$. Поэтому $\dfrac{\mathrm{ch}\, 1 - \mathrm{sh}\, 1}{\mathrm{ch}\, 1 + \mathrm{sh}\, 1} = e^{-2}$ или $\dfrac{1 - \mathrm{th}\, 1}{1 + \mathrm{th}\, 1} = e^{-2}$, где дроби th 1 = 0,761… и $e^{-2} = 0{,}135\ldots$ конверсивны, а гиперболический тангенс единицы эквивалентен отрезку 0,761…, перпендикулярному оси x в точке (1,0). Но тогда единичному значению t в th t отвечает площадь $\Delta\, K0L$.

Таким образом, подтверждено, что e-тригонометрия содержит две единицы – первостепенную 1^1 (как масштаб координатных осей x и y) и второстепенную 1^2 (как меру площади). И зная, что t в *Б*) $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1^2$ это площадь $\Delta K0L$ с кривой стороной KL, вспомним, что число радиан h в обычной форме *А*) $sin^2\,\mathrm{h} + cos^2\,\mathrm{h} = 1^2$ тоже площадь между двумя радиусами круга, симметричными относительно оси абсцисс. При этом *cos* и *sin* определены проекциями на оси абсцисс и ординат радиуса $R = 1$ окружности с центром в начале 0 координат (x, y). Как видно, единица π-тригонометрии тоже двойственна.

Итак, центр окружности находится в начале 0 декартовой системы с линией (*Б*), ветви которой симметричны относительно оси абсцисс и уходят в бесконечность. Тогда функция $\dfrac{sin\,\mathrm{h}}{cos\,\mathrm{h}} = tg\,\mathrm{h}$ от площади h и функция $\dfrac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}\,t} = \mathrm{th}\,t$ от площади t в известном интервале значений h представлены отрезками перпендикуляра к оси абсцисс в точке 1, понимаемыми как e- и π-тангенсы. Ясно, что $\mathrm{th}\,t = tg\,\mathrm{h}$ при $0 \le \mathrm{h} < 0{,}25\,\pi$ не предполагает равенства площадей t и $\mathrm{h} < t$, ограниченных дугами гиперболы (*Б*) и окружности радиуса $R = 1$. При этом значение h площади кругового сектора совпадает с радианной мерой угла между радиусами, принадлежащими асимптотам кривой (*Б*).

Воспользуемся подобием отрезков $sin\,\mathrm{h}$, $cos\,\mathrm{h}$ и $\mathrm{sh}\,t$, $\mathrm{ch}\,t$ при условии $\mathrm{th}\,t = tg\,\mathrm{h}$, где t равняется константе связи m из тождества $e^{-2\underline{m}} = \varphi^3$ с числами φ и e. Тогда из $\dfrac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}\,t} = \dfrac{sin\,\mathrm{h}}{cos\,\mathrm{h}} = e^{-2t}$ при $t = \underline{m}$ будет а) $\dfrac{sin\ \mathrm{h}(\underline{m})}{\mathrm{sh}\,\underline{m}} \times \dfrac{\mathrm{ch}\,\underline{m}}{cos\,\mathrm{h}(\underline{m})} = 1$, где $\mathrm{ch}\,\underline{m} = 1{,}272\ldots$ и $\mathrm{sh}\,\underline{m} = 0{,}786\ldots$ таковы, что $\mathrm{ch}\,\underline{m} \times \mathrm{sh}\,\underline{m} = 1$, а величина $\mathrm{h}(\underline{m}) = 0{,}553\ldots$ обеспечивает функции *cos* и *sin* значениями 0,850… и 0,525…, такими, что $tg\,\mathrm{h}(\underline{m}) = \varphi$. Причём преобразование (а) в тождество $\dfrac{sin\ \mathrm{h}(\underline{m})}{\mathrm{sh}\,\underline{m}} \times \left[\dfrac{\mathrm{ch}\,\underline{m}}{cos\,\mathrm{h}(\underline{m})}\right]^{-1} =$ $= 0{,}447\ldots$, где $\underline{m}$ - постоянная связи и $\mathrm{th}\,\underline{m} = tg\,\mathrm{h}(\underline{m}) = \varphi$, даёт число $0{,}447\ldots = 5^{-0.5} = (2 + \varphi^3)^{-1}$. Так в e- и π-тригонометриях выделяются константы φ, 2 и 5.

Единицу в уравнении гиперболы $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1^2$ представим как $1^2 = (\mathrm{ch}\ t + \mathrm{sh}\ t)(\mathrm{ch}\ t - \mathrm{sh}\ t)$ и тут же вспомним о связях $\dfrac{\mathrm{ch}\,t - \mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}\,t + \mathrm{sh}\,t} = \dfrac{1 - \mathrm{th}\,t}{1 + \mathrm{th}\,t} = e^{-2t}$ и $\mathrm{th}\,t = \dfrac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}$ конверсии дробных чисел $e^{-2t} \in [1^2, 0)$ и $\mathrm{th}\,t \in [0, 1)$ для всех $t \ge 0$. При этом $(\mathrm{ch}\,t - \mathrm{sh}\ t)^{-1} = \mathrm{ch}\,t + \mathrm{sh}\,t$.



Цепные тангенсы

Итак, есть связи $\underline{m} = ln\sqrt{\varphi^{-3}} = 0{,}721\ldots$ и $\mathrm{th}\,\underline{m} = \varphi$. При этом $\mathrm{th}\,\varphi = 0{,}54975\ldots$, что почти равно $tg\,0{,}5 = 0{,}546302\ldots$ и поэтому $\mathrm{th}\,(tg\,0{,}5) \approx 0{,}5$, чем выделяется как точное, так и приближенное значение двойки, получаемые инверсией скаляра 0,5 и дроби, близкой к 1 / 2. И, может быть, гиперболические тангенсы, выстроенные цепью, указывают путь к математической системе, идеи которой сходят со столбовой дороги, выложенной натуральными числами, уходящими в бесконечность через иррациональность, не свойственную малой разности между величиной 0,500338… = th [th (th $\underline{m}$)] и аргументом 0,5 функции tg .

А теперь отойдём от «золотой» темы, охваченной уроками 1, 2, 3 с наблюдениями и исследованиями, достаточными для фиксации числа φ в последовательностях {s} и {m} с использованием координат, не имеющих осей, но подразумевающих арифмометрическую связь чисел и образов геометрии. И вспомним, что одним из образов является дуга конверсии как часть равнобочной гиперболы, построенной по точкам, координаты которых заданы отношениями чисел Фибоначчи и Люка, изменяющимися по правилам ТОП-схода и СТЭП-спуска (*см. Урок первый*).

Похоже, что уравнение $y' = \dfrac{1-x'}{1+x'}$, имеющее «золотые» решения в виде бинаров A′(φ^3, φ^1) и T (($2+\varphi^3)^{-1}$, φ^2) как точек с конверсивными ($\dfrac{1-\varphi^1}{1+\varphi^1} = \varphi^3 \leftrightarrow \varphi^1 = \dfrac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3}$ и $\dfrac{1-\varphi^{-2}}{1+\varphi^{-2}} = 5^{-0,5} \leftrightarrow \varphi^2 = \dfrac{1-5^{-0,5}}{1+5^{-0,5}}$) x' и y'-координатами, не есть способ формализации кривой *В*) $y = x^{-1}$ в осях x и y, таких, что $x = x' + 1$, $y = y' + 1$. Напротив, уравнение *Б*) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1^2$ с тем же аргументом представляет равнобочную гиперболу, ветви которой симметричны относительно оси абсцисс, а асимтотами служат биссектрисы первого и четвёртого квадрантов. При этом кривая $y = x^{-1}$ пересекается с линией (*Б*) в точке М ($x_М$, $y_М$), координаты $x_М$ и $y_М$ которой взаимно обратны.

Таким образом, константа связи $\underline{m}$ не только объединяет постоянные e и φ в одном выражении, но через e определяет конверсию ($\varphi^1 \leftrightarrow \varphi^3$) первой и третьей степеней числа φ. И кроме того число e вместе с константой π входит в модифицированное тождество Эйлера $e^{i\pi} = i^2$ с мнимой единицей $i = \sqrt{-1}$ на двух позициях – в строке как i^2 и в показателе степени $i\pi$.

И, наконец, отметим, что все математические факты прячутся в области абстракций. Например, утверждение, что в геометрии нет возможности разделить отрезок на две равные части, может показаться не соответствующим действительности, если забыть, что прямая, частью которой он является, состоит из воображаемых точек и каждой из них соответствует какое-либо вещественное число. При этом главным числом служит единица, от которой ведут начало натуральные числа, пригодные для счета как простейшего измерения. А единичный отрезок служит инструментом расстановки символов, читаемых как целые числа.

Но выбирая места целых, надо твёрдо знать, что масштаб расстояний не эквивалентен единице счета, с которой начинается арифметика. То есть, единица, обеспечивающая координатные оси разбивкой на единичные отрезки, и счётная единица принадлежат к разным парадигмам. Причём образ числовой прямой делится на единичные элементы при условии, что у отрезка длиной 2 есть середина в виде точки. А поскольку середина неопределима, то нельзя утверждать, что геометрический образ имеет единичные половины. Но это значит, что гипотезой континуума не предусмотрен твёрдый масштаб пространственных или временных измерений.