Олег Черепанов

АРИФМОМЕТРИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

Урок третий: свежие факты, как гнутые гвозди, кажутся ненужными. Золотое созвездие, трисекция квадрата, алмазный ключ, квадроединица.

Как в алгебре нет отдельного подхода к «золотой» пропорции, так в геометрии нет ясной интерпретации «золотого» сечения. Да их и не может быть. Однако пропорция, как сопоставление чисел, и сечение, как сверка образов, привлекают внимание не своей исключительностью или отличием от других констант математики. Интерес к ним поддерживает фактология «золотых» отношений, превращённая в мифологию невозможностью (конечно же, временной) построить систему, организующую намытый за века «золотой» песок. Но погоню за золотыми бликами может отменить только неопределённое, но достаточное количество фактов. При этом факты не слипаются в критическую массу и не похожи на самородки или золотые слитки, а служат более или менее прочными звеньями цепей, удерживающих от распада совокупность парадоксов естественно-научной парадигмы, закомуфлированных под аксиомы. Но даже под сомнительной парадигмой лежат факты, масштабность которых неоценима до тех пор, пока их множество не оформится в работоспособную теорию.

Ниже представлены ранее неизвестные факты, дополняющие фактологию «золотых» отношений до объёма, превышающего достаточный для того, чтобы понять – математическая модель, утверждающая гармонию мира посредством чисел Фибоначчи и Люка, генерируемых тождествами Бине из степеней числа Фидия, подобна надводной части айсберга, тогда как основные сведения, касающиеся математического устройства физической реальности, принадлежат системе с условным названием «крипто-арифметика» [1]. *Её азбука неполна и представлена всего несколькими буквами, чистое звучание которых даёт надежду на их включение в алфавит языка, которым пользуется наука.*

Итак, числа $c < 1$ и $d < 1$ в виде гипер-дробей $c = \frac{1-d}{1+d}$ и $d = \frac{1-c}{1+c}$ образуют ряд бинарных элементов $(c, d)_p$, пронумерованных индексами $p = 1, 2, \ldots$ Ясно, что скаляры $c_1, c_2, \ldots, c_p$ при условии $c_p \in (1,0)$ в паре с вычисленными значениями $d_p = \frac{1-c_p}{1+c_p}$ при ограничении $p_{max} = \mathrm{N}$ дают N-ое число бинаров, геометрически привязанных к головной дуге кривой с уравнением $y = \frac{1-x}{1+x}$, известной как гиперболическая (дробно-линейная) функция.

Иначе говоря, в случае дискретности x как переменной величины, функция $y = f(x)$, принимая последовательные или случайные значения, становится квази-функцией $y' = \frac{1-x'}{1+x'}$, значения y_p которой в паре с x_p образуют элемент $(x, y)_p$ счётного множества D_p. То есть, аргумент $x_p < 1$ и значение $y_p < 1$ квази-функции объединяются в двумерную точку-бинар, приналежащую головной части равнобочной гиперболы. Эту часть, отличающуюся симметрией, назовем дугой конверсии и построим её по пунктам A′, P и T, включённым в «золотое» созвездие.

Конверсию ($\varphi \leftrightarrow \varphi^3$) первой и третьей степеней числа φ визуализируем пунктом A′(φ^3, φ), зафиксированным в осях координатной системы (x', y'). Пусть φ^3 будет абсциссой, а φ^1 ординатой точки-звёздочки A′. Ясно, что соседняя «звезда» P находится на оси симметрии дуги D и имеет координаты $x' = 2^{0,5} - 1$ и $y' = 2^{0,5} - 1$ в поле квадрата 1×1, стороны которого нормируют ортогональные прямые разметкой на интервалы единичной длины . При этом положение точки T, общей для ТОП-схода и СТЭП-спуска, задано числами-расстояниями $x' = 5^{-0,5} = (2 + \varphi^3)^{-1}$ и $y' = \varphi^2$, подчиняющимися конверсии ($\varphi^{+2} \leftrightarrow 5^{-0,5}$), такой же, как ($\varphi \leftrightarrow \varphi^3$).

Как видно, при $c_p = \varphi$ аргумент $d = \frac{1-\varphi}{1+\varphi}$ квази-функции $c_p = \frac{1-d_p}{1+d_p}$ равен φ^3. При этом в осях x и y координаты точек P и T на единицу больше их координат в осях x' и y', где дуга конверсии D вписана в квадрат 1×1 и проходит через точку A′ ($x' = \varphi^3$, $y' = \varphi$), координаты которой сохраняют «золотую» принадлежность и после увеличения на 1: A′ ($x = 2\varphi$, $y = \varphi^{-1}$).

D–дуга конверсии

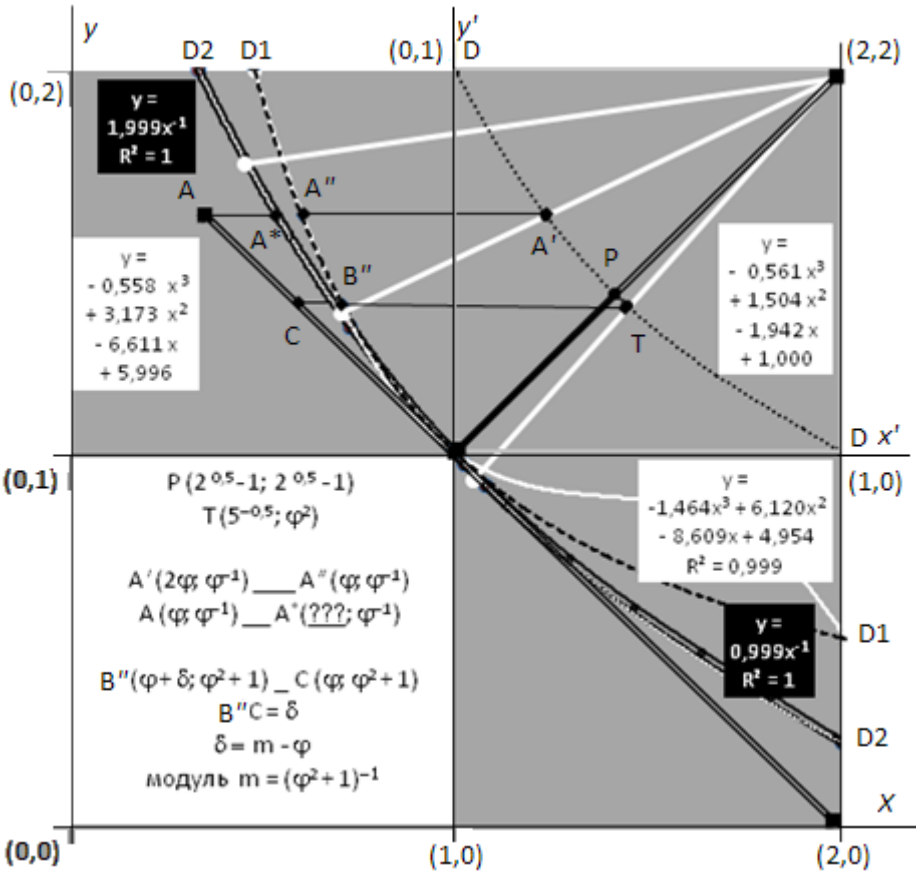
квадрат 1 × 1 в системе (x',y')		
н	0,001	0,999
A′	0,236	0,618
P	0,414	0,414
T	0,447	0,382
о	0,999	0,001

дублёр D1

1,5 × 1,5 в (x,y)		
н	0,499	1,999
A″	0,618	1,618
B″	0,723	1,382
ц	1	1
о	1,999	0,499

дублёр D2 в (x,y)

$(1+2^{-0,5}) \times (1+2^{-0,5})$		
н	0,999	1,999
A″	1,236	1,618
P	1,414	1,414
T	1,447	1,382
о	1,999	0,999



Таким образом, пять точек (0,1), A′ (φ^3, φ), P, T и (1,0) обозначают дугу конверсии D, а совместное увеличение абсцисс и ординат членов пятёрки на единицу переносит её образ в систему (x, y). Но если новые координаты связать линией тренда, пользуясь апроксимацией, предлагаемой *Excel*, то программа объединит их кривой D2 с уравнением $y = 1{,}999\,x^{-1}$. Причём каждый из пяти пунктов линии D делит дистанцию между маяком (2, 2) и сопряжённой точкой

дуги D2 на части, отношение которых равно отношению расстояний *a* и *b* от пункта P а) до центра (1, 1) квадрата 2 × 2 с одной стороны и б) до маяка с другой.

Подобие дуг D и D2 означает, что луч от маяка «высвечивает» их точки, связанные инвариантом $\frac{a}{b}=\frac{2-\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. А кроме него инвариантами служат отношения $\frac{a}{a+b}=\sqrt{2}-1=a_*$ и $\frac{b}{a+b}=2-\sqrt{2}=b_*$, сравнение $\frac{a_*}{b_*}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}$ которых численно равняется основному инварианту $\frac{a}{b}=\frac{2-\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и при этом как структурно, так и операционно связано с ним, например, удвоением знаменателя после инверсии $\left(\frac{a_*}{b_*}\right)^{-1}$. Причём тождество *) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ допускает радикализацию единицы, после чего $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, а возведение равенства (*) в квадрат избавляет его части от иррациональности и даёт образ 1^2, отвечающий понятию квадроединицы, которое не является лишним и получит несколько определений по ходу изложения.

Итак, инвариантами поворота луча от маяка (2, 2) в пределах, ограниченных сторонами квадрата $(1 + 2^{0,5})\times(1 + 2^{0,5})$, диагональ которого тетивой стягивает головную дугу D2 кривой $y = 2\,x^{-1}$, выступают выражения, содержащие единицу и двойку в степенях 0,5 и 1.

Заметим, что в поле квадрата 2 × 2 есть ещё один дублёр дуги конверсии. Это головной (симметричный) участок D1 гиперболы $y = 0{,}999\,x^{-1}$, заключённый в квадрат 1,5 × 1,5 и соединяющий концы его диагонали, отмеченные точками (0.5, 2) и (2, 0.5) системы (*x*, *y*). При этом любая точка дуги-дублёра D1 служит серединой отрезка, соединяющего точку дуги D с её проекцией на ось ординат. Ясно, что каждый такой отрезок по длине равен абсциссе точки, намеченной на дуге D в осях *x* и *y*. Например, одноуровневые пункты A′ и A″, ординаты которых одинаковы и равняются φ^{-1}, разделяет дистанция, равная половине *x*-координаты точки A′. А так как половина *x*-кооординаты пункта A′$(2\varphi,\ \varphi^{-1})$ равна φ, то пункт A″ имеет взаимно-обратные координаты $x = \varphi^{+1}$ и $y = \varphi^{-1}$, такие, что $xy = 1$, тогда как $x + y = 2 + \varphi^3 = 5^{0,5}$. Кроме того точку A $(\varphi^2,\ \varphi^{-1})$ диагонали квадрата 2 × 2, а также её пункт C $(\varphi,\ \varphi^2+ 1)$ следует включить в «золотой» набор объектов, созвездие которых дополняют точки A″ и B″ дуги D1, принадлежащие уровням $y_A = \varphi^{-1}$ и $y_B = \varphi^2 + 1$ соответственно. При этом абсциссы звёзд A″ и B″ «золотого» контента, разнесённого по трём дугам, найдём отдельно.

Дуги D1 и D2, численно сопряжённые с дугой конверсии D, обозначим отрезками-хордами белого цвета, соединяющими «золотые» звёзды кривых $y=\frac{1}{x}$ и $y=2x^{-1}=\left(\frac{x}{2}\right)^{-1}$, имеющих одну общую точку – центр (1, 1) квадрата 2 × 2. Но «золотое» созвездие, основанное на целых (не выше третьей) степенях числа Фидия, скрывает факты, выходящие за рамки геометрии как основной дисциплины элементарной математики. И оказывается, что без отказа от геометрии не выйти на путь дальнейшего развития формальных средств описания природных процессов, из которых важнейшим является движение-взаимодействие вселенского вещества, обычно моделируемое

методом координат, по сути геометрическим. Убедимся, что старый метод, объединяющий рисованные образы с числами, не уступающими фигурам по степени абстрагирования от действительности, пасует перед фактами, которые свидетельствуют в пользу арифмометрии [2, 3].

D-дуга конверсии

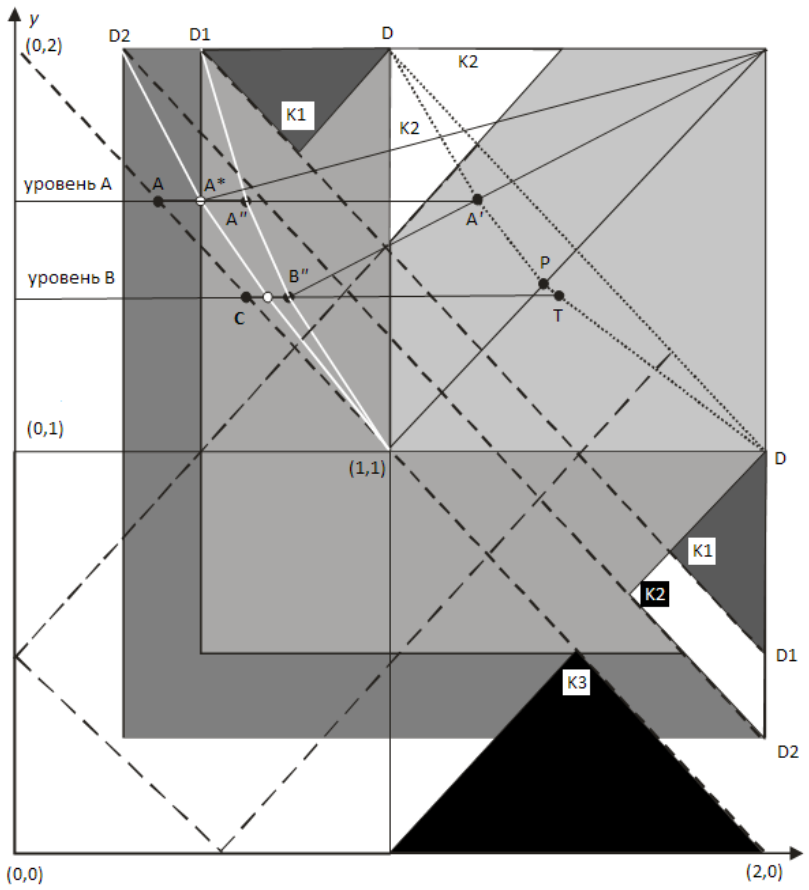
квадрат 1×1 в (x',y')		
Н	0	1
А′	φ^3	φ
Р	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-1$
Т	$1/(2+\varphi^3)$	φ^2
о	1	0

дублёр D1

1,5 × 1,5 в (x,y)		
н	0,5	2
А″	φ^{+1}	φ^{-1}
В″	$1/(\varphi^2+1)$	φ^2+1
ц	1	1
о	2	0,5

дублёр D2 в (x,y)

$(1+2^{-0,5}) \times (1+2^{-0,5})$		
н	1	2
А″	2φ	φ^{-1}
Р	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
Т	$1 + 1/\sqrt{5}$	φ^2+1
о	2	1



От построенных *Excel* дуг D, D1 и D2 оставим хорды, как белые секущие дуг D1, D2 и точечные отрезки в поле дуги D. Заметим, что большие хорды трёх кривых как штриховые диагонали квадратов 1×1, $1{,}5 \times 1{,}5$ и $(1+2^{-0,5}) \times (1+2^{-0,5})$, отличающихся заливкой оттенками серого, по длине равны $2^{0,5}$ (у дуги конверсии), $2^{0,5}+2K_1$ (у дублёра D1), $2^{0,5}+2K_2$ (у дублёра D2) и $2^{0,5}+2K_3$ у диагонали квадрата 2×2, где $K_1 = 2^{0,5}/4$, $K_2 = 0{,}5$ и $K_3 = 2^{0,5}/2$ – длины катетов равнобедренных прямоугольных треугольников с гипотенузами 0.5, $2^{0,5}/2$ и 1 соответственно. А это сообщает скаляру 2 и его радикалу роль, равную роли числа φ как основного элемента в построениях, не выходящих за рамки геометрии. При этом абсцисса пункта A^*, принадлежащего гиперболе $y = 2x^{-1}$, должна отличаться от абсциссы одноуровневой с ним точки $A''(\varphi^{+1}, \varphi^{-1})$ кривой $y = x^{-1}$ в два раза. Этого требуют уравнения $y = \frac{1}{x}$ и $y = 2x^{-1} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-1}$ и это есть у звёзд-точек А′ и А″, но отсутствует в паре A^* и А″. Хотя отношение интервалов AA^* и AA'', равное 1 : 2, намекает на свойство точек линии $y = 2x^{-1} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-1}$ занимать среднее положение между точками диагонали квадрата 2×2 и одноуровневыми им точками кривой $y = \frac{1}{x}$.

И действительно, точки A(φ^2, φ^{-1}) и C(φ, φ^2+1) диагонали квадрата 2×2, абсциссы и ординаты которых в сумме равные 2, служат началами отрезков AA″ = φ^3 и CB″ = δ, середины которых имеют x-координаты $\varphi^2 + \varphi^3/2$ и $\varphi + \delta/2$.

И оказывается, что любой пункт линии D2 делит интервал между точками диагонали квадрата 2×2 и одноуровневыми точками дуги-дублёра D1 пополам. При этом дихотомии (делению пополам) альтернативен диарезис – деление на неравные части расстояния от маяка (2, 2) до точки пересечения лучом дуги D1. Ясно, что часть a его длины $s = a + b$, находящаяся между луче-сопряжёнными точками (например, A′ и B″ или P и (1, 1)) дуг D и D1 растёт (как и часть b) по мере отклонения луча в ту или иную сторону от диагонали квадрата 1×1, соединяющей маяк с центральным пунктом (1, 1) квадрата 2×2. Но в любом случае точка пересечения луча с дугой D делит расстояние между маяком и сопряжённой точкой дуги D1 на две части с отношением a : b, выступающим инвариантом поворотного процесса.

Но если дуга D2 такова, что любая её точка по горизонтали равноотстоит и от диагонали квадрата 2 x 2 и от дублёра D1, то пункт A^* будет серединой отрезка AA″, длина которого равна $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$. А так как звезда A^* имеет ординату φ^{-1} по уровню и координату 0,5 по оси x, то абсциссы одноуровневых точек A и A″ контр-симметричны относительно числа 0,5. И в самом деле, при A(φ^2, φ^{-1}) и A″(φ^{+1}, φ^{-1}) x-координата φ^2 звезды A равна $0{,}5 - \varphi^3/2$, тогда как x-координата звезды A″ равна $0{,}5 + \varphi^3/2$.

Покажем, что расстановку «золотых» звёзд на квадратных площадях с дугами и прямыми в плоских координатах можно не считать геометрической. Ведь в данном случае геометрия не работает, а служит вспомогательным средством визуализации «золотого» контента в его основной части. А эту часть составляют дуги D, D1 и D2.

Заметим, что дублёры D1 и D2 имеют общую точку (1, 1), где различие уравнений $y=\frac{1}{x}$ и $y=2x^{-1}=\left(\frac{x}{2}\right)^{-1}$ предполагает неравенство x-координат вершин дуг D1 и D2 при $y = 1$, не осуществимое в одной точке. А это предполагает отказ от геометрического взгляда на расклад звёзд. К тому же невозможно геометрически интерпретировать следующие факты.

Очевидно, что произведение $(\varphi^1+\delta)(1+\varphi^2) = 1$ осевых x- и y-координат точки B″ даёт $\delta = (1+\varphi^2)^{-1} - \varphi^1 = 0{,}105572... = 0{,}1 + 10^{-1}\varphi^6$, откуда $10\delta = 1 + \varphi^6 = 1{,}05572\ldots$ И то же значение $\delta = (2\varphi^{-3}+1)^{-1}$ следует из равенства $2(\varphi + \delta) = 1 + 5^{-0,5}$, отвечающего дихотомии x-координаты пункта B″. Но кроме того $(\varphi^1 + \varphi^4)(1+\varphi^2) = 1{,}0557280\ldots$, а $\varphi^1 + \varphi^3 + \varphi^4 + \varphi^6 = 10\delta$.

Ясно, что $B''C = \delta = m\varphi^4$ и $\delta = m - \varphi^1$, откуда $\varphi^1 = m(1 - \varphi^4)$. Это определяет модуль $m = \frac{\varphi^1}{1-\varphi^4} = \frac{1}{\varphi^{-1}-\varphi^3} = \frac{1}{2-(\varphi^2+\varphi^3)} = \frac{1}{1+\varphi^2}$, такой, что $m = 0{,}7 + \varphi^3/10$ или $10m = 7 + \varphi^3$, $5m = \varphi^{-2} + 1$,

$m^2 = 0{,}5 + \varphi^3/10$ или $10m^2 = 5 + \varphi^3$, $5m^2 = \varphi^{-1} + 1 = \varphi^{-2}$, где $m = m^2 + 5^{-1}$. Причем $2m = (1 + 5^{-0{,}5})$ и $\frac{m+m^2}{m-m^2} = 6 + \varphi^3 = 2^2 + 5^{0.5}$, а $(2m)^2 - 2m = 2n$, где $n = 2m - 0{,}8$. А так как $3m - m^2 - n = 1$, то $m - m^2 = 5^{-1}$.

	A	B	C	D
***	0.2360679775...	10m - 7	$1 - 2\varphi^2 = \varphi^3$	$2\varphi^{-2} - 5$
I	$10 \times 0.72360... - 6$	10m - 6	$1 + \varphi^3$	$2\varphi^{-2} - 4$
II	2m / n	10m - 5	$2 + \varphi^3$	$2\varphi^{-2} - 3$
III	5 n	10m - 4	$3 + \varphi^3$	$2\varphi^{-2} - 2$
IV	средняя позиция	10m - 3	$4 + \varphi^3$	$2\varphi^{-2} - 1$
V	$10\ m^2$	10m - 2	$5 + \varphi^3$	$2\varphi^{-2}$
VI	$(m+m^2)/(m - m^2)$	10m - 1	$6 + \varphi^3$	$2\varphi^{-2} + 1$
VII	10 m	10m	$7 + \varphi^3$	$2\varphi^{-2} + 2$
	$5m = \varphi^{-2} + 1$	инварианты приравнивания		
	в двухмодульном	B = C	C = D	D = A
	определении	$10m - \varphi^3$	$2\varphi^{-2} - \varphi^3$	$10m - 2\varphi^{-2}$
	целых от 1 до 7	= 7	= 5	= 2
	нет φ^1, φ^{-1}, φ^2 и φ^{-3}	$2 = (1 + \varphi^3)/\varphi = (1 - \varphi^3)/\varphi^2 = 2$		

	E	F	H
1	$= 2\varphi^2 + \varphi^3$	$\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$	
	$= \varphi^{-3} - 2\varphi^{-1}$		
	$= \varphi^1 + \varphi^2$	$1 = \varphi^{-1} - \varphi^{+1}$	$\varphi^1 + \varphi^2 = 1$
2	$= 1^{+1} + 1^{-1}$	$2 = 1^{-1} + 1^{+1}$	$\varphi^{-1} + \varphi^2 = 2$
	$= \varphi^{-1} + \varphi^2$	$\varphi^2 = \varphi^1 - \varphi^3$	
	$= 5\varphi^2 + \varphi^5$	$\varphi^{-2} = \varphi^{-3} - \varphi^{-1}$	$\varphi^{-2} - \varphi^1 = 2$
3	$= \varphi^{-2} + \varphi^2$	$\varphi^3 = \varphi^1 - \varphi^2$	
	$= 2\varphi^{-1} - \varphi^3$	$\varphi^4 = 2 - 3\varphi^1$	$\varphi^3 = \varphi^1 - \varphi^2$
	$= \varphi^{-3} - 2\varphi^1$	$\varphi^4 = 3\varphi^2 - 1$	$\varphi^3 = (\varphi^2)^1 - (\varphi^2)^2$
4	$= \varphi^{-3} - \varphi^3$	$4\varphi^3 = 1 - \varphi^6$	$\varphi^3 = 1 - \varphi^3(3 + \varphi^3)$
			$\varphi^{-3}(1 - \varphi^3) = 2 + (1 + \varphi^3)$

Таким образом, несколько точек декартовой плоскости, составляющих «золотой» контент с числом φ, связанным с целыми 5, 6 = 1 + 2 + 3 и 7, объединены константами δ и m как его проформами. Тем самым математическая система, называемая «золотой» арифметикой, минимизирована по количеству нужных целых, что видно из таблицы, где элементы столбцов B, C и D построчно равны. Но, например, тождество $10m - 3 = 4 + \varphi^3 = 2\varphi^{-2} - 1$ бинарных элементов строки «средняя позиция» содержит члены $10m$, φ^3 и $2\varphi^{-2}$, инвариантные относительно выбора вычитаемого (3 и 1) или слагаемого (4) из ряда от 1 до 7 в соответствии с номером (I, …, VII) строки. При этом бинарные выражения отличаются целыми членами от 1 до 7 (в столбцах B и C) и вычитаемыми от 1 до 5 в столбце D. А столбец E содержит бинарные разложения чисел 1, 2, 3, и 4, как не связанные с модулем $m = \frac{1}{1+\varphi^2} = 0{,}7236.....$, но содержащие число φ в степенях ±1, ±2 и ±3.

И во многих случаях тождественные преобразования форм E дают равенство $\varphi^3 = \varphi^1 - \varphi^2$, дополняемое модификациями $\varphi^3 = (\varphi^2)^1 - (\varphi^2)^2$ и $\varphi^{-3} = \varphi^{-2} + \varphi^{-1}$. Причем первая из них отличается квадратичностью основания φ^2 степеней 1 и 2, а вторая получается из проформы реверсом сигнатуры. При этом выделяются выражения $1 = \varphi^{-1} - \varphi^{+1}$, $2 = 1^{-1} + 1^{+1}$, $3 = \varphi^{-2} + \varphi^{+2}$, $4 = \varphi^{-3} - \varphi^{+3}$, …, $L_p = \varphi^{-p} + (-1)^k \varphi^{+p}$, обобщенные формулой Бине для p-го члена ряда $\{L_p\}$. А взаимно обратные (инверсные) составляющие скаляра L_p связаны адицией («+») или субстракцией («–») в зависимости от чётности или нечётности целых $k = 1, 2$ и $p = 1, 2, \ldots$

Допустим, что «золоченые» единица $1 = \varphi^{-1} - \varphi^{+1} = \varphi^1 + \varphi^2$ и двойка $2 = \varphi^{-1} + \varphi^2 = \varphi^{-2} - \varphi^1$ не предшествуют, а следуют из формы $\varphi^3 = \varphi^1 - \varphi^2$, где константы φ^1 и φ^3 в составе гипер-дроби $\varphi^1 = \frac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3}$ связаны конверсией $\varphi^1 \leftrightarrow \varphi^3$, формализованной в триплетных связях φ с числами 1 и 2. При этом $1{,}618\ldots = (1:2)^{+1} + [1 + (1:2)^{+2}]^{1:2}$ и $(1{,}618\ldots)^3 = (1:2)^{-1} + [1 + (1:2)^{-2}]^{1:2}$

как скаляры, обратные φ^1 и φ^3, объединяет формула $\varrho^{\pm 1} + (1 + \varrho^{\pm 2})^{\varrho}$, где ϱ – не число, а символ отношения единицы к двойке, тогда как «+» и «–» - это не символы арифметичеких действий, а сигнатурные знаки при показателе степени ±1 и ±2 важного понятия $\varrho = 1 : 2$, которому приписана инверсия, различающая φ^1 и φ^3 и обозначающая разницу между $1 = \varphi^{+1} + \varphi^{+2}$ и $2 = \varphi^{-1} + \varphi^{+2}$. При этом крайние части равенства $\varphi^{-1} + \varphi^{+2} = 2 = \varphi^{-2} - \varphi^{+1}$ связывает и разделяет полная смена сигнатуры, не лишенной смысла арифметических операций. И здесь отчетливо видна двойственность как целого числа 2, так и скаляра φ^3, левое и правое выражения $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3 = (\varphi^2)^1 - (\varphi^2)^2$ которого не одинаковы из-за различия основания (?φ^1 или φ^2?) степеней 1 и 2. Причём $\varphi^1\,\varphi^2 = \varphi^3$, тогда как $(\varphi^1)^2\,(\varphi^2)^2 = \varphi^6$.

Вспомним, что $1 = \varphi^3(4 + \varphi^3)$, $1 = \varphi^{-1} - \varphi^{+1}$, $1 = \varphi^1 + \varphi^2$, $1 = \varphi^{-2} - \varphi^{-1}$, $1 = \varphi^{-3} - 2\varphi^{-1}$, $1 = 2\varphi^{-} - \varphi^{-3}$, $1 = 2\varphi^1 + \varphi^3$, $1 = 2\varphi^2 + \varphi^3$.

Как видно, единица имеет ряд представлений через степени ±1, ±2 и ±3 «золотого» основания φ. Поэтому, считая единицей сторону квадрата, можно ввести в арифметику единицу, интерпретируемую геометрически как площадь 1×1. Но «золотая» арифметика включает квадроединицу 1^2, не ассоциируемую с площадью. Убедимся в этом.

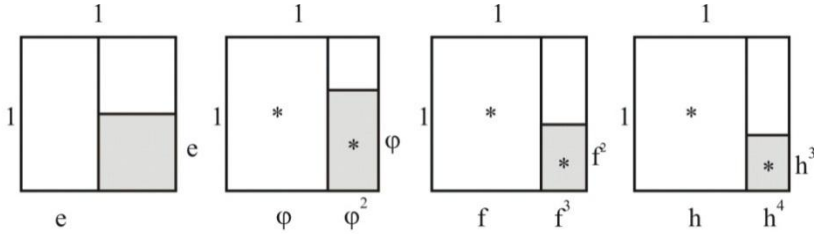
Вернёмся к дуге конверсии как фрагменту равнобочной гиперболы, участок которой при $0 < x' < 1$ описывает дробно-линейная функция $y' = \dfrac{1 - x'}{1 + x'}$, принимающая значение φ^2 в точке Т с абсциссой $5^{-0.5}$, тогда как $x_\text{Т} = 1 + 5^{-0.5}$ и $y_\text{Т} = 1 + \varphi^2$ в параллельных осях x и y. При этом на гиперболе $y = \dfrac{1}{x}$ есть пункт В″ с абсциссой $1 - \varphi^2 = x_\text{В}$, контрсимметричной ординате $1 + \varphi^2 = y_\text{В}$.

Заметим, что если $x_\text{Т}\,y_\text{Т} = 2$, то $x_\text{В}\,y_\text{В} \neq 1$. Причём $(1_г - \varphi^2)(1_г + \varphi^2) = 1_г^2 - \varphi^4$ (где $1_г$ – сторона единичного квадрата) на φ^4 больше арифметической единицы при обратной пропорциональности координат $x > 0$ и $y > 0$ любой точки кривой $y = \dfrac{1}{x}$, включая пункт В″.

Таким образом, в выражение $x_\text{В}\,y_\text{В} = 1_a$, востребованном геометрией, заложен конфликт единиц 1_a и $1_г$ – арифметической и геометрической, отсутствующий при обратной пропорции x и y вида $x\,y = 2$. А устранить юнитную коллизию можно, отказываясь от графической интерпретации формальных зависимостей $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = \dfrac{2}{x}$, обычно понимаемых как уравнения двух гипербол в одних осях. При этом формальное различие тождеств $x\,y = 1$ и $x\,y = 2$ и сходство их графических образов объединяет понятие квадроединицы 1^2, новое для арифметики и нужное в арифмометрии. Это понятие в виде 1^2 появляется при перемножении контрсимметричных координат $1 - \varphi^2 = x_\text{В}$ и $1 + \varphi^2 = y_\text{В}$ точки $\text{В}''(x_\text{В}, y_\text{В})$ с результатом $1^2 - \varphi^2\,\varphi^2$ и, не будучи каким-то масштабом, вдвое превышает привычную единицу $1 = x\,y$ элементарной математики.

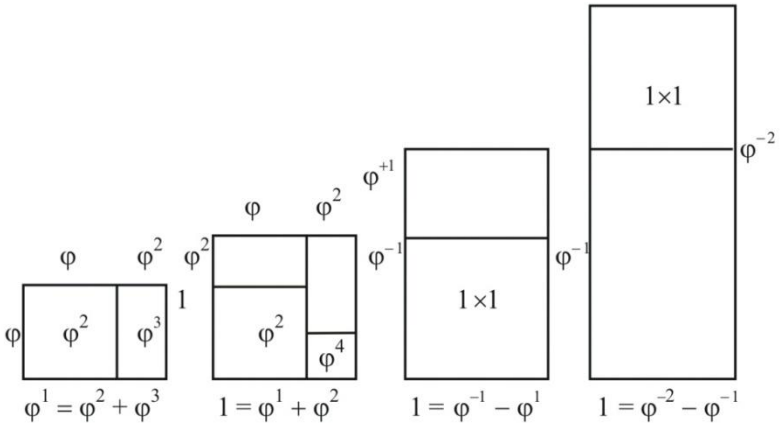
Ясно, что указанный приём снимает юнитную коллизию, формально соединяя гиперболы $x\,y = 1$ и $x\,y = 2$ в один образ тем, что $x\,y = 1^2 = 2$.

Покажем, что тринарные формы в столбце крестообразной таблицы (*см. Урок второй*), ряд которых соответствует последовательности системных скаляров e, φ, f, h, … s_N, …, отвечают трисекции единичного квадрата, а гиперболическая прогрессия $\{\varphi^N\}$ с основанием φ и аддитивностью членов вида $\varphi^N = \varphi^{N+1} + \varphi^{N+2}$ с ключем-субстракцией $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$, допускающем «второй поворот» $\varphi^3 = (\varphi^1)^2 - (\varphi^2)^2$, играет важную роль в оценке площадей, отличающихся вдвое.



Разбиение площади 1×1 по значениям $e = 0{,}5$, $\varphi = 0{,}618...$, $f = 0{,}682...$, $h = 0{,}725...$ и т. д. характерно тем, что прямоугольники внутри квадрата, отмеченные звездочкой, подобны. А так как затененные прямоугольники с площадями e^2, φ^3, f^5, h^7 и т. д. получаются вычитанием из единичного квадрата площадей, подобных затененным, а также площадей, расположенных над ними, то для всех системных чисел последовательности $\{s_N\}$ выполняется равенство $1\times1 = (1\times e)+(e\times e)+(e\times e) = (1\times\varphi)+(\varphi^2\times\varphi)+[\varphi^2\times(1-\varphi)] = (1\times f)+(f^3\times f^2)+[f^3\times(1-f^2)] = (1\times h)+(h^4\times h^3)+[h^4\times(1-h^3)] = \ldots = A_1+A_2+A_3$. А поскольку суммируются площади $A_1 = s_N$, $A_2 = s_N^{2N-1}$ и $A_3 = s_N^N - s_N^{2N-1}$, то трисекции единичного квадрата отвечает тождество $s^1 + s^N = 1$ и, значит, системные числа s = 0,5; 0,618…; …; s_N; … можно назвать «скверными» от англ. *square* – площадь. При этом бинарная арифметика приобретает смысл исчисления площадей.

Итак, триплет $\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$ в центральной ячейке крестообразной таблицы является ключом двух бинарных рядов, из которых вертикальный ряд отображает трисекцию квадрата 1×1, а горизонтальный основан на аддитивном свойстве $\varphi^{N-1} = \varphi^N + \varphi^{N+1}$ членов геометрической прогрессии $\{\varphi^N\}$. Причем нормировка «алмазного» ключа $\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$ второй степенью числа φ дает единичную форму 1) $1 = \Phi - \varphi$, тогда как другая единичная форма 2) $1 = \Phi^2 - \Phi$ получается его делением на φ^3. А при нормировке по φ^1 «ключ» примет вид 3) $1 = \varphi^1 + \varphi^2$. Причем у равенств $1 = \varphi^1 + \varphi^2$, $1 = \varphi^{-1} - \varphi^{+1}$, $1 = \varphi^{-2} - \varphi^{-1}$ тоже есть «скверная» интерпретация.

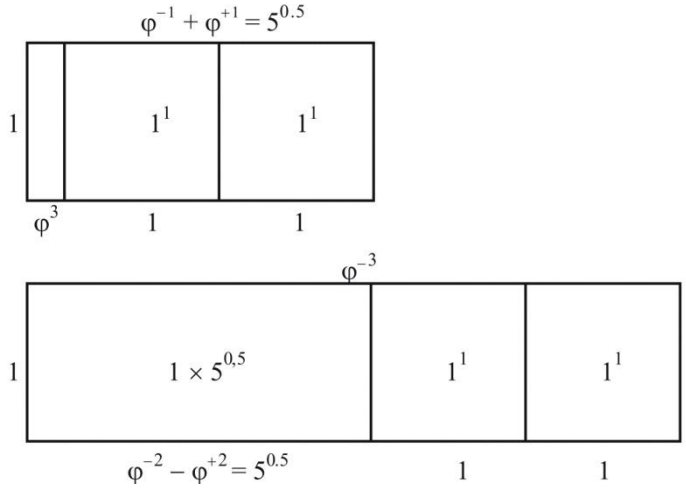


Пусть перемножение двух единиц определяет площадь 1×1, встроенную в «золотой» прямоугольник $1\times\varphi^{-1}$ или пристроенную к таковому снаружи, а сумма $1\times\varphi^{1}+1\times\varphi^{2}$ отображает бисекцию квадрата 1×1 на фигуры, подобные $1\times\varphi^{-1}$ и $1\times\varphi^{-2}$. При этом площадки $1\times\varphi^{1}=(1\times\varphi^{-1})-(1\times1)$ и $1\times\varphi^{-2}=(1\times\varphi^{-1})+(1\times1)$ контрсимметричны относительно площади $1\times\varphi^{-1}$, то есть отличаются от нее на $-(1\times1)$ и на $+(1\times1)$ соответственно.

Площадь 1×1, как показатель контрсимметрии площадок, определяемых «скверными» числами φ^{-2} и φ^{+1}, отличающимися от φ^{-1} на единицу, обозначим как 1^1. И убедимся, что «золотая» арифметика содержит число $1^2=2\cdot1^1$, интерпретируемое как удвоенная площадь 1^1. С этой целью покажем, что «алмазный» ключ $\varphi^1=\varphi^2+\varphi^3$ представляет структуру с единичным элементом, значение которого вдвое больше 1^1.

Вспомним о понятии секстетной структуры и представим контрсимметрию чисел-площадей $\varphi=\Phi-1^1$ и $\Phi^2=\Phi+1^1$ после деления на $\Phi=1.618...$ как $\square1^1\setminus\varphi^2\setminus\varphi^{-1}\setminus\varphi^3\setminus\varphi^{+1}\setminus2^1\square$, где $\varphi^3=\dfrac{\Phi-1^1}{\Phi+1^1}=\dfrac{1^1-\varphi^{+1}}{1^1+\varphi^{+1}}$ – число-отношение. При этом $2^1=\Phi^2-\varphi=(\Phi+1^1)(1^1-\varphi^3)$ и $\varphi^1=\dfrac{1^1-\varphi^3}{1^1+\varphi^3}$ по свойству конверсии. А так как $2^1=(\Phi^2-\varphi^2)-\varphi^3=5^{0.5}-\varphi^3$, откуда $\varphi^1=\varphi^2+\varphi^3$, то особое число $2^1 = 1^1 + 1^1 = 2\cdot1^1$, как и число-отклонение 1^1, является скрытым целым «алмазного» ключа.

А теперь сформируем квадратичный секстет на основе контрсимметричных скаляров $\varphi^{-2}-1^1$ и $\varphi^{-2}+1^1$ с числом-отношением $(\varphi^{-2}-\varphi^2)^{-1}=5^{-0,5}=\dfrac{1^1-\varphi^2}{1^1+\varphi^2}$ и другими элементами, вид которого $\square\square1^2\setminus1^2-\varphi^2\setminus1^2+\varphi^2\setminus\dfrac{1^2-\varphi^2}{1^2+\varphi^2}\setminus\varphi^2\setminus2^*\square\square$. Причем $2^*=(\varphi^{-2}+1^1)-\varphi^{-1}=(\varphi^{-2}+1^1)(1^1-5^{-0,5})$. При этом из $2^*=\varphi^{-3}-(\varphi^{-1}+\varphi^{+1})=\varphi^{-3}-5^{0.5}$ следует $\varphi^1=\varphi^2+\varphi^3$ и, значит, «алмазный» ключ скрывает контрсимметрию $5^{0,5}-2^*=\varphi^3$ и $5^{0,5}+2^*=\varphi^{-3}$ чисел φ^3 и φ^{-3}, являющихся корнями $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{5}=-2\pm(2+\varphi^3)$ уравнения $x^2+4x-(1^2)^2=0$, такими, что $x_1=\varphi^3$ и $x_2=-\varphi^{-3}$. При этом $\varphi^{-3}-\varphi^3=2^2$, где $2^2=(5^{0,5}+2^1)(1^1-\varphi^6)$. И число-отклонение $2^*=1^1+1^1$ в «скверной» интерпретации предстаёт двумя квадратами единичной площади.



Итак, есть две контрсимметрии $5^{0.5} - 1 = 2\varphi^{+1}$, $5^{0.5} + 1 = 2\varphi^{-1}$ и $5^{0.5} - 2 = \varphi^{+3}$, $5^{0.5} + 2 = \varphi^{-3}$ относительно одиозного числа $5^{0.5}$. При этом $-\varphi^{-3}$ и φ^{+3} - корни уравнения $\delta^2 + 4\delta - 1^2 = 0$, получаемого из алгебраической формы $a^2 + ab = b^2$ подстановкой $a = 1 - \delta$ и $b = 1 + \delta$, тогда как при $a = 1$ или $b = 1$ из $a^2 + a \cdot 1 = 1^2$ и $1^2 + 1 \cdot b = b^2$ следует $a_1 = \varphi^{+1}$, $a_2 = -\varphi^{-1}$ и $b_1 = \varphi^{-1}$, $b_2 = -\varphi^{+1}$.

Но кроме того существует пара чисел $1^2 - \delta^2$ и $1^2 + \delta^2$, контрсимметричных относительно квадроединицы 1^2, подстановка которых в $a^2 + ab = b^2$ дает $\delta^4 + 4\delta^2 - 1^4 = 0$ или $x^2 + 4x - (1^2)^2 = 0$, откуда $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5} = -2 \pm (2 + \varphi^3)$, где $x_1 = \varphi^3$ и $x_2 = -\varphi^{-3}$.

Таким образом, $x_1 = \delta_1$ и $x_2 = \delta_2$. А так как $x = \delta^2$, то корни δ_1 и δ_2 равнозначны (идемпотентны) своим квадратам.

Заметим, что из многозвенного равенства $5^{0.5} = 2\varphi^{+1} + 1 = 2\varphi^{-1} - 1 = \varphi^{+3} + 2 = \varphi^{-3} - 2$ следует $\frac{2\varphi^{+1}}{2\varphi^{-1}} = \frac{\varphi^{+3} + 1}{\varphi^{-3} - 1} = \varphi^{+3}\frac{1 + \varphi^{+3}}{1 - \varphi^{+3}} = \varphi^{+2}$, откуда $\varphi^{+1}\frac{1 + \varphi^{+3}}{1 - \varphi^{+3}} = 1^2$, а отсюда с учетом $\frac{1 + \varphi^{+3}}{1 - \varphi^{+3}} = \varphi^{-1}$ будет $\varphi^{+1} \cdot \varphi^{-1} = 1^2$, что некорректно, так как подразумевает $\varphi^0 = 1$ при том, что нуль, как и бесконечность, чужды «золотой» арифметике. А корректным является отношение $\frac{\varphi^{+1}}{\varphi^{-1}} = \varphi^2$, где $\varphi^2 = \varphi^1 - \varphi^3$ входит в $\varphi^3 = (\varphi^2)^1 - (\varphi^2)^2$ как основание степеней 1 и 2. При этом $\varphi^2 = \frac{1 + \varphi^{+3}}{3 + \varphi^{+3}} = \frac{1 - 5^{-0,5}}{1 + 5^{-0,5}}$.

Таким образом, скаляр φ^3 обслуживает две неслучайные субстракции $\varphi^1 - \varphi^2$ и $(\varphi\varphi)^1 - (\varphi\varphi)^2$ и, значит, не имеет однозначного определения. А его двойственность не позволяет завершить вычислительный процесс, в результате чего бинарную арифметику чисел Фидия надо как-то ограничить. Сделаем это, зная, что φ^1 и φ^3 связаны конверсией $\frac{1 - \varphi^3}{1 + \varphi^3} = \varphi^1 \leftrightarrow \varphi^3 = \frac{1 - \varphi^1}{1 + \varphi^1}$, объединяющей числа-антиподы в определенной секстетной структуре. Например, выше обозначен секстет □$1^2 \backslash \varphi^2 \backslash \varphi^{-1} \backslash \varphi^3 \backslash \varphi^{+1} \backslash 2^*$□, где единицей является площадь $1^2 + 1^2 = 2^*$, удвоенная по сравнению с площадью единичного квадрата 1×1. При этом $2^* = \varphi^{-1} + \varphi^2$ и мы имеем диарезисное представление особой двойки слагаемыми, которые являются целыми степенями числа φ. Но в секстетной структуре \□\ место числа-отношения занимает скаляр φ^3, тогда как числом-отклонением служит φ^1. И если их поменять местами, то получится структура ◇$1^1 \backslash 2\varphi^2 \backslash 2\varphi^{+1} \backslash \varphi^{+1} \backslash \varphi^3 \backslash 2^1$◇ с единицей $1^1 = \varphi^{+1} + \varphi^2$, вдвое меньше 1^2. Следовательно, $1^2 = 2 \cdot 1^1$.

Как видно, секстеты \□\ и \◇\, содержащие «золотое» число φ = 0,618… в степени не выше третьей, отвечают диарезисным выражениям единицы $1^1 = \varphi^1 + \varphi^2$ и двойки $2^* = \varphi^{-1} + \varphi^2$, соответствующим дихотомиям 1 = 0,5 + 0,5 и 2 = 1 + 1, отличающимся вдвое согласно бифуркации $1^* = 2 \cdot 1^1$. При этом вычисление $1 = \varphi^1 + \varphi^2$ по секстету \◇\ отличается от определения

$2 = \varphi^{-1} + \varphi^2$ по структуре \ □ \ инверсией первого слагаемого, что является одной операцией по распознаванию целых 1 и 2.

Результаты.

1. Значительно дополнена фактология «золотых» отношений.
2. Ранее неизвестными сведениями обоснована «золотая» арифметика.
3. Обозначено направление отхода от сложившихся представлений «золотой» тематики.
4. Обнаружено модульное строение чисел от 1 до 7 с выделением скаляров 2 и 5.
5. Определено понятие квадроединицы, востребованное крипто-арифметикой.

Ссылки:

[1] http://www.setbook.ru/books/4069046.html

[2] http://www.setbook.ru/books/3732807.html

[3] http://www.bookler.ru/bookisbn/9783659744150.shtml

http://www.setbook.ru/books/3732807.html

http://www.bookler.ru/bookisbn/9783659744150.shtml