Черепанов О.А.

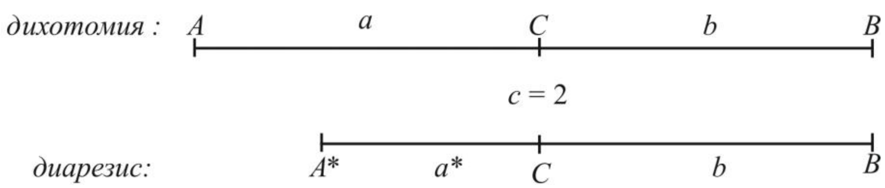
ДИХОТОМИЯ И ДИАРЕЗИС: АРИФМОМЕТРИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ЧИСЕЛ 1 И 2

Тем, кто интересуется физикой и небесной механикой, известно, что теория тяготения Ньютона успешно решает задачу двух гравитирующих тел и сталкивается с невероятными трудностями при попытке распространить силовую модель на взаимодействие трех. То есть, бинарная задача решается легко, а система из трех масс сложна для описания языком математики. И виновата в этом математика, опирающаяся на гипотезу континуума, приписывающую числовой оси сплошность, распространенную на действительные числа, представленные воображаемыми точками. Но предпринятая геометризация чисел предполагает неделимость числовой прямой на единичные отрезки, что делает невозможным масштабирование осей координат. Докажем это.

Допустим, что отрезок *AB* в середине содержит точку *C*. И если считать точку *A* нулевой, а точку *B* отождествить с числом 2, то пункт *C* должен соответствовать единице. Но в сумме *AC* + *CB* = *AB* слагаемые отрезки равны только при исключении точки *C* из состава *AB* = 2, что сокращает длину $c = 2$ на одну точку. То есть, в геометрии масштаб измерения длины нельзя ввести дихотомией без допущений, противоречащих логике.

Более того, если, как принято, связать геометрический образ-точку с арифметическим элементом-числом (целым, рациональным или иррациональным?), то отрезок $c = 2$ вообще нельзя разделить на равные части a и b с присвоением им единичного значения. Убедимся в этом.

Точку *C*, как середину дистанции $AB = c = 2$, отметим числом 1. При этом допустим, что $AC = a = 1$ и $CB = b = 1$. Но если $a \subseteq [0,1]$ и $b \subseteq [1,2]$, то $[a+b] > 2$, поскольку точка-число $C = 1$ входит в сумму $AC + CB$ дважды. Напротив, если $a \subseteq [0,1)$ и $b \subseteq (1,2]$, то $[a+b] < 2$, так как отмеченная точка исключена из отрезка $c = 2$. А когда $a \subseteq [0,1]$ и $b \subseteq (1,2]$ или, наоборот, $a \subseteq [0,1)$ и $b \subseteq [1,2]$, то $a \neq b$. И кроме того, геометрические образы a и b нельзя складывать по семантике.



Таким образом, дихотомия отрезка $c = 2$ невозможна в принципе. А это значит, что арифметизация геометрии условна: аксиома непрерывности и отождествление точек и чисел противоречивы и не позволяют установить масштаб длины, удовлетворяющий арифметическому постулату $2 = 1 + 1$. Поэтому неопределенность принадлежности точки *C* к частям a и b отрезка *c*, проигнорированная геометрией, является ее непреодолимым недостатком. И это недоразумение распространяется на диарезис любого геометрического образа, будь то отрезок, площадь или объем. То есть, их деление на равные (дихотомия) или неравные (диарезис) части a и b является условным из-за парадокса континуума.

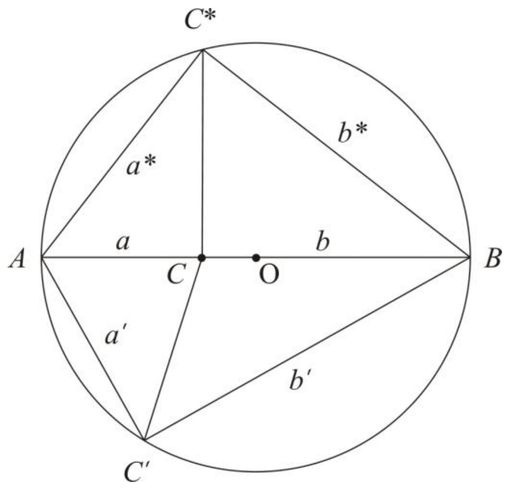
Отказываясь от геометрической интерпретации чисел a и b из интервала от 0 до 2 = a + b, установим между ними отношение порядка $0<a\le b<2$, не исключающее равенства $a=b=1$, невозможного в геометрии. При этом слагаемые a и b будут ограничены значениями $a=1-d$ и $b=1+d$, контрсимметричными относительно единицы как половины числа 2. То есть, $a\in[1,0)$ и $b\in[1,2)$, а число-отклонение $d\in[0,1)$ равняется $\frac{b-a}{2}$ при том, что $\frac{a+b}{2}=1$, где единица является не только половиной постулированного числа 2, но и средним арифметическим контрсимметричных скаляров $a<1$ и $b>1$. И кроме того, что *а*) 2 = a + b, имеем *б*) 2 = $a(1 + c^{-1})$ и *в*) 2 = $b(1 + c)$, где $c=\frac{a}{b}=\frac{1-d}{1+d}$ – число-отношение. Причем числа c и d взаимозаменимы или, иначе говоря, конверсивны: $\frac{1-d}{1+d}=c\Leftrightarrow d=\frac{1-c}{1+c}$.

Как видно, дроби $a\in(1,0)$, $b\in(1,2)$, $c\in(1,0)$ и $d\in(0,1)$ вместе с целыми 1 и 2 образуют секстетную структуру ✧1 \ a \ b \ c \ d \ 2✧, шесть членов которой связаны арифметическими операциями – сложением-адицией, вычитанием-субстракцией, умножением-мультипликацией и делением-дивизией. При этом a и b контрсимметричны, а c и d объединены конверсией.

Адитивно-мультипликативные выражения (*б*) и (*в*) двойки представим как $1=\frac{2}{1-d}-c^{-1}$ и $1=\frac{2}{1+d}-c^{+1}$, откуда сразу следует двойственность числа 1: при d = 0 единица определена дихотомией 2 = 1 + 1, а при $d\to 1$, когда $a\to 0$ и $b\to 2$, предельная единица $\underline{1}=\infty-\infty$ из (*в*) является сингулярной.

Рассматривая число 2 как объект для исследования, покажем, что эта константа не единственна и есть необходимость семантически выделить несколько двоек. Доказательство этого построим на геометрии, не забывая про парадокс континуума, свойственный ей изначально.

Геометрии с постулированной непрерывностью ее объектов противостоит арифметика, где элементы-числа, условно тождественные точкам, не сливаются в континуум. При этом недопустимая арифметизация геометрии выбором единицы длины не однозначна хотя бы по показателю степени принятого масштаба.

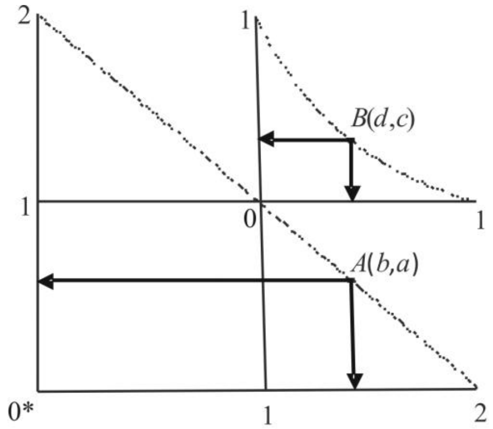


Диаметр $AB=2$ условно разделим точкой C на части a и b с отношением $\frac{a}{b}=c<1$ и на окружности с центром O отметим точки C' и C*, расстояния $AC'=a'$, $BC'=b'$ и $AC{*}=a{*}$, $BC{*}=b{*}$ от которых до концов A и B удовлетворяют пропорции $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{(a*)^2}{(b*)^2}\in(1,0]$. При этом отрезок CC' будет биссектрисой прямого угла $AC'B$, а отрезок CC* является высотой прямоугольного треугольника ABC*. Таким образом, коллинеарные отрезки a и

b, как и ортогональные координаты a' и b', a^* и b^*, определяют положение точек C, C' и C^* относительно концов диаметра $AB = 2$, а число $c < 1$, как отношение и расстояний $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'} = c$ и площадей $\dfrac{(a^*)^2}{(b^*)^2} = c$ как по теореме Пифагора, является дуальным. А отсюда следует, что при $a = b = 1$, $a' = b' = 1'$ и $(a^*)^2 = (b^*)^2 = 1^*$, когда точки C, C' и C^* принадлежат вертикальному диаметру длиной 2, его условная дихотомия $2 = 1 + 1$ точкой C, совпадающей с центром О, допускает выражения $2' = 1' + 1'$ и $2^* = 1^2 + 1^2$, где единицы $1'$ и 1^2 не тождественны семантически, как и двойки $2'$ и 2^*. И это при том, что единичные радиусы AО и ОB геометрически отличаются от равных катетов одинаковых треугольников $AC'B$ и AC^*B в $\sqrt{2}$ раз.

А теперь при посредстве числа-отношения $c \in [1,0)$ найдем диаметр AB окружности с центром О. Ясно, что его длина равняется $1 + c = 1 + \dfrac{a}{b} = 1' + \dfrac{a'}{b'} = 1^* + \dfrac{(a^*)^2}{(b^*)^2} \in (1,2]$ в долях $1 \equiv b$, $1' \equiv b'$ и $1^* \equiv (b^*)^2$. При этом единицы 1, $1'$ и 1^* не равны геометрически, хотя скаляр $1 + c$ численно выражает длину AB. Причем единичные морфизмы $1'$ и 1^* отличаются степенями по отношению к единице длины, то есть неодинаковы по семантике. И в общем случае, когда $c \neq 1$, диаметр AB равен числу 2, если слагаемые выражения $1 + c$ пронормировать их полусуммой.

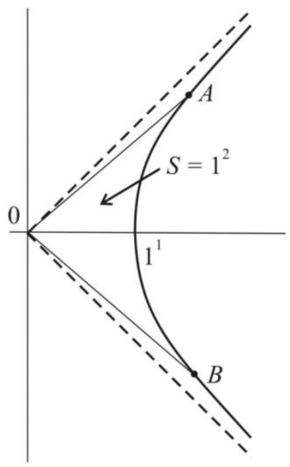
Заметим, что парные скаляры $a \in (1,0)$ и $b \in (1,2)$ как отрезки a и b, a' и b' или a^* и b^*, связанные числом-отношением $c = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{(a^*)^2}{(b^*)^2} \in (1,0]$, контрсимметричны ($a = 1 - d$ и $b = 1 + d$) относительно виртуальной единицы (их среднего арифметического), а число-отклонение d принадлежит полуинтервалу от 0 до 1: $d \in [0,1)$. И поскольку $c = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1-d}{1+d}$ и $d = \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{1-c}{1+c}$, то скаляры c и d, как взаимосвязанные координаты точки $B(d, c)$ симметричной дуги равнобочной гиперболы $y = x^{-1}$,

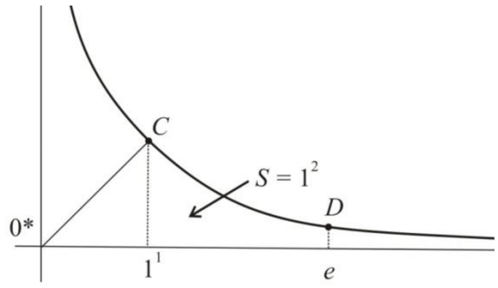


обладают свойством конверсии: $\dfrac{1-d}{1+d} = c \Leftrightarrow d = \dfrac{1-c}{1+c}$. При этом числа a и b геометрически являются ординатой и абсциссой точки $A(b, a)$ отрезка 02 в осях, смещенных относительно осей, пересекающих гиперболу в точках (1,0) и (0,1). Причем дуальность числа-отношения $c \in [1,0)$, когда с одной стороны $c = \dfrac{a'}{b'}$ имеет первую степень, а с другой $c = \left(\dfrac{a^*}{b^*}\right)^2$, дополняют и поясняют остепененные единицы 1^1 и 1^2, явно присутствующие в тригонометрии.

Как известно, аргументом функции 1) $\mathrm{ch}^2 X - \mathrm{sh}^2 X = 1^2$ служит площадь $X = S_{0AB}$ между отрезками $0A$, $0B$ и симметричной дугой AB равнобочной гиперболы с асимптотами-биссектрисами первого и четвертого квадрантов декартовых координат, а гипербола 2) $y = x^{-1}$ при положительных x и y после сокращения абсцисс и ординат всех ее точек в $\sqrt{2}$ раз графически совпадает с кривой (1). При этом площади между линиями (1), (2) и их асимптотами беспредельны, но не равны потому, что кривую (1) переводит в линию (2) растяжение осей в $\sqrt{2}$ раз и поворот на половину прямого угла против часовой стрелки.

гипербола 1

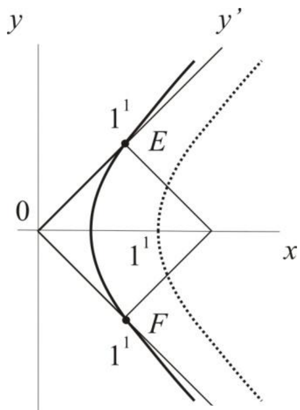




гипербола 2

Таким образом, на графиках равнобочных гипербол (1) и (2) выделяются две единицы – первостепенная 1^1 (как масштаб координатных осей) и второстепенная 1^2 (как масштаб площади).

Квадроединицу 1^2 в (1) представим в виде $1^2 = (\operatorname{ch} X + \operatorname{sh} X)(\operatorname{ch} X - \operatorname{sh} X)$ и заметим, что $\dfrac{\operatorname{ch} X - \operatorname{sh} X}{\operatorname{ch} X + \operatorname{sh} X} = \dfrac{1 - \operatorname{th} X}{1 + \operatorname{th} X} = e^{-2X}$, откуда $\operatorname{th} X = \dfrac{1 - e^{-2X}}{1 + e^{-2X}}$, что надо понимать как конверсивную связь $\dfrac{1 - \operatorname{th} X}{1 + \operatorname{th} X} = e^{-2X} \Leftrightarrow \operatorname{th} X = \dfrac{1 - e^{-2X}}{1 + e^{-2X}}$ чисел $e^{-2X} \in [1^2, 0)$ и $\operatorname{th} X \in [0, 1^*)$ для всех $X \geq 0$. При этом $(\operatorname{ch} X - \operatorname{sh} X)^{-1} = \operatorname{ch} X + \operatorname{sh} X$, что означает взаимную обратность (инверсивность) сомножителей квадроединицы 1^2, после деления на $\operatorname{ch} X$ принимающих значения $a = 1^2 - \operatorname{th} X = 1^2 - d$ и $b = 1^2 + \operatorname{th} X = 1^2 + d$, равноотстоящие (контрсимметричные) от 1^2 по числу-отклонению $\mp d \in [0, 1^*)$. Как видно, скаляры $a \in [1^2, 0)$, $b \in [1^2, 2^*)$, $c \in [1^*, 0)$ и d квадратичны и могут быть названы ареальными числами (от англ. *area* – площадь), включая особое число 2*.



гипербола 3

Асимптоты линии (1) примем осями x' и y' координат и сдвигом (1) влево на $2 - \sqrt{2}$ получим равнобочную гиперболу (3), пересекающую новые оси в точках $E(0, 1^1)$ и $F(1^1, 0)$.

Отметим, что $1^1 \times 1^1 = 1^2$ и заметим, что координаты точек симметричной дуги EF связаны дробно-линейной зависимостью $y' = \dfrac{1 - x'}{1 + x'}$ и конверсивны при $0 \leq x' < 1$ и $0 < y' \leq 1$, а числитель и знаменатель контрсимметричны. Но конверсии $\dfrac{1^1 - x'}{1^1 + x'} = y' \Leftrightarrow x' = \dfrac{1^1 - y'}{1^1 + y'}$ и $\dfrac{1^2 - d}{1^2 + d} = c \Leftrightarrow d = \dfrac{1^2 - c}{1^2 + c}$ различны по степени единиц, что делает масштабы 1^1 и 1^2 семантически разными.

Считая единицы 1^1 и 1^2 с разным геометрическим смыслом неразличимыми арифметически и зная, что вершина гиперболы (3) находится на расстоянии $\sqrt{2}-1$ от пересечения 0 координатных осей x' и y', а дистанция между вершиной линии (2) и точкой 0* равна $\sqrt{2}$, заметим, что данные отрезки отличаются в $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ раз. А теперь умножим $\sqrt{2}-1$ на $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ и получим тождество $\dfrac{2^*-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1^*}=\sqrt{2}$ с тремя радикалами, где единица и двойка могут иметь квадратичный характер, отмеченный звездочками. Но отсюда следуют два равенства: $2' = 1^1 + 1^1$ и $2^* = 1^2 + 1^2$. Назовем их юнитными (от англ. *unit* – единица) дихотомиями, связывающими арифмометрические скаляры 1 и 2. Однако дихотомическая связь остепененных единиц и особых двоек не является единственной.

Заметим, что число 2, как делитель всех четных чисел, составляющих половину натуральных, наряду с единицей входит в тождество *) $\sqrt{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{\sqrt{2}\pm1}$, где связь между единицей и двойкой безразлична к смене знака «+» на «–» в числителе и в знаменателе, к перемножению дробей с оппозитным их расположением и к возведению в квадрат обеих частей. И есть основание считать, что двойка не принадлежит к числам, кажущимся основой натурального ряда и называемым простыми. Такое мнение возникает при инициации простых чисел способом вычеркивания составных, меньших назначенного нечетного числа из последовательности нечетных, начинающейся с единицы [1].

Кроме того, сложность числа 2 доказывают его аддитивное *а*) $2 = a + b$ и аддитивно-мультипликативные *б*) $2 = a(1 + c^{-1})$ и *в*) $2 = b(1 + c)$ представления, где $c=\dfrac{a}{b}=\dfrac{1-d}{1+d}$ – число-отношение. Причем скаляры $a\in(1{,}0)$ и $b\in(1{,}2)$ контрсимметричны ($a=1-d$ и $b=1+d$), а числа $c\in(1{,}0)$ и $d\in(0{,}1)$ связаны конверсией $\dfrac{1-d}{1+d}=c\Leftrightarrow d=\dfrac{1-c}{1+c}$.

Тождество (*) приведем к виду $1=\dfrac{\sqrt{2}\pm1}{\sqrt{2}\pm1}$ и заметим, что число $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}<1$ в сумме с обратным ему скаляром $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}>1$ дает число $6 = 1 + 2 + 3 = 1\cdot2\cdot3$. Тем самым утверждается связь целых чисел 1, 2 и 3 с дробно-иррациональными скалярами, произведение которых равно 1^2.

Таким образом, кроме дихотомии $2 = 1 + 1$ есть еще одна связь единицы с двойкой под знаком радикала, которую дополним равенством $1^2 = 2\cdot1^1$, казалось бы невозможным с точки зрения обычной арифметики, не учитывающей существование остепененных единиц 1^2 и 1^1, формально отличающихся вдвое. С этой целью воспользуемся понятием множества, содержащего подмножества $s = 0.5;\ 0.618\ldots;\ \ldots;\ s_N;\ \ldots$ и $S = 2;\ 1.618\ldots;\ \ldots;\ S_N;\ \ldots$ чисел-оснований s и S из тождества $s^1+s^N=S^1-s^{N-1}=S^N-S^{N-1}=1$, где число $s = S^{-1}$, а N = 1, 2, 3, … в показателе степени совпадает с номером парных скаляров s_N и S_N, ряды $\{s_N\}$ и $\{S_N\}$ которых назовем системными.

СИСТЕМНЫЕ ЧИСЛА ДЛЯ N = 1 ÷ 7

N	1	2	3	4	5	6	7	…	∞
s_N	0.5	0.618…	0.682…	0.725…	0.778…	0.797…	0.812…	…	$\underline{1}$
S_N	2	1.618…	1.465…	1.380…	1.324…	1.285…	1.255…	…	$\underline{1}$

Ясно, что системные скаляры $s < 1$ и $S > 1$ принадлежат множеству (0,2] и при $N \to \infty$ приближаются к единице $\underline{1}$ соответственно снизу и сверху. Но если ряды $\{s_N\}$ и $\{S_N\}$ дополнить конечным элементом $\underline{1}$, то последний будет сингулярным, поскольку равенства $s^1 + s^N = 1^1$, $S^1 - s^{N-1} = 1^1$ и $S^N - S^{N-1} = 1^1$ при $N = \infty$ сохраняют арифметический смысл только в случае удвоения определенных членов, выглядящих как единицы. При этом дихотомии $1^1 = 0.5 + 0.5$ и $2 = \underline{1} + \underline{1}$ определяют единицы 1^1 и $\underline{1}$, формально отличающиеся вдвое: $\underline{1} = 2 \cdot 1^1$.

К дихотомическому определению единицы и двойки присоединим их диарезисные представления $1 = \varphi^{+1} + \varphi^{+2}$ и $2 = \varphi^{-1} + \varphi^{+2}$, отличающиеся знаком единицы-показателя степени числа $\varphi = 0.618\ldots$, называемого «золотой» пропорцией и второго в ряду $s = 0.5; 0.618\ldots; \ldots; s_N; \ldots$

И обобщая все представленные факты, отметим, что скаляр 2 играет особую роль среди чисел, называемых натуральными. Но кроме того известно, что число 2 в степени N, записанное в десятичной системе счисления, в двоичной системе выглядит максимально просто [2]. То есть,

$$2_{10}^N = \underset{\textit{число единиц} = N}{\underline{111...1_2}} + 1_2 = \underset{\textit{число нулей} = N}{\underline{100...0_2}}.$$

Возможно, что кроме дихотомической и диарезисной есть и другие формы особых скаляров 1 и 2, хотя указанных выше вполне достаточно для понимания того, что помимо теории действительных чисел возможна арифмометрическая теория чисел, элементы которой уложены в интервал от 0 до 2 и структурно связаны контрсимметрией и конверсией, являющимися первичными понятиями секстетного исчисления.

Выше изложенное в целом требует ревизии оснований математики, начиная с аксиом арифметики и геометрии, у которых есть альтернатива, опирающаяся на арифмометрию как способ решения первых задач физики (задачи об упругом ударе, задачи о свободном падении, задачи о сложении инерциальных скоростей, задачи о распространении света в прозрачных телах и в вакууме и т.д.) на основе секстетного исчисления [3].

С с ы л к и

1. Черепанов О.А. Инициация простых чисел в *Excel* и не только. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.18463, 23.01.2014
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/2254-chr.pdf

2. Узбеков Т.Б., Байрамгулов С.Ю. Особенности записи числа 2 в двоичной системе счисления.
http://project.1september.ru/work.php?id=574346

3. Черепанов О.А. Где начало того конца?... Геометрия и Арифмометрия // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567,публ.18194, 13.09.2013.
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0009/001a/1092-chr.pdf