Денис Клещев

Девятые Врата стандартной Математики

NUNC SCIO TENEBRIS LUX
(с лат. «*Отныне научен свету из тени*»)
Гравюра «Девятые врата» из кинофильма Романа Поланского
по мотивам романа Артуро Перес-Реверте «*El club Dumas*»,
при помощи которой заключался договор с дьяволом

Denis Kleschev

The Ninth Gate of standard Mathematics

π: *…Помните, что ваш термин уже не обозначает более того,*
для обозначения чего он был выдуман,
что наивное понимание исчезло и что теперь он употребляется…
β: *…Для более общего, исправленного понятия!*
θ: *Нет! Для совершенно отличного, нового понятия.*
σ: *Я думаю, что ваши взгляды парадоксальны!*
π: *Если под парадоксальным вы понимаете «мнение пока еще не общепризнанное»,*
и возможно несовместимое с некоторыми из ваших укоренившихся наивных идей,
то не беспокойтесь: вам только придется заменить ваши наивные идеи парадоксальными.

Имре Лакатос. Доказательства и опровержения (Как доказываются теоремы)

Как известно, дьявол кроется в мелочах, а математический дьявол – в определении бесконечно малых величин. После споров с математиками и специалистами по математической логике возникло ощущение, что за несколько сотен лет наша математика из строгой науки, гармонизирующей хаотичный мир, незаметно превратилась в логово разврата и насилия над самим человеческим разумом, над самой способностью человека выносить какие бы то ни было суждения. Подобно тому, как в триптихе Иеронима Босха «*Сад земных наслаждений*» первозданный рай, где обитают наделенные разумом Адам и Ева, где цветет древо жизни и древо познания, неуловимо переходит в мир плотских утех, в игру со стихиями и силами природы, в царство земных наслаждений, необузданного полета фантазии, за которым вдруг наступает картина безумия, смерти всего живого, деградации, инфернальных страданий, мировых войн, всепоглощающей безысходности.

Для того, чтобы понять причины вырождения научной парадигмы, нужно заглянуть в отдаленное прошлое. Первый кризис оснований математики постиг античную науку, когда математики-пифагорейцы обнаружили явление «*несоизмеримых величин*». Древнее пифагорейское изречение гласило, что «*зло есть свойство беспредельного, а добро – определенного*».[1] После обнаружения «*несоизмеримости*» стороны и диагонали квадрата в целых числах (что вполне естественно, если учесть, что диагональ квадрата выражается через дробь), пифагорейцы осознали, что избежать бесконечных процессов в математике невозможно. Более того, у некоторых античных «*логистиков*» стали возникать еретические с точки зрения античной науки мысли, будто бы единицу можно делить и рассматривать получаемые дроби как вещественные (действительные) числа.

[1] Зубов В.П. Николай Орем и его математико-астрономический трактат «О соизмеримости или несоизмеримости движений неба» // Н.Орем. О соизмеримости или несоизмеримости движений неба. В.П.Зубов. Трактат Брадвардина «О континууме». М., 2004. С.11

О строгости соблюдения в Афинской акадэмии аксиомы неделимости единицы можно судить по следующим словам Платона из трактата «Государство»: «*Если ты захочешь делить единицу, то ученые математики высмеют тебя и не позволят тебе это делать; если же ты размениваешь единицу на мелкие деньги, то они полагают ее обращенной во множество и остерегаются рассматривать единицу не как единое, но состоящее из многих частей*».[2] Религиозный ужас, который древние математики испытывали перед бесконечными процессами, хорошо показан в легенде об одном математике, который, вопреки запретам, стал исследовать проблему несоизмеримости и, потерпев кораблекрушение, утонул в море. Мистики-пифагорейцы восприняли эту трагедию как знак свыше: «*"все иррациональное* (αλογον) *и лишенное вида* (ανειδεον) *любит скрываться" и тому, кто только коснется и откроет его, суждено погрузиться в "пучину возникновения" и быть омываемым ее волнами, не знающими покоя*».[3]

Пророчество пифагорейцев сбылось, так как весь ход развития науки показал, что иррациональное (бесконечное) и лишенное вида (бесконечно малое) еще не раз погружали науку в пучину глубочайших кризисов. Наиболее остро проблема обоснования бесконечно малых величин проявила себя в период формирования новоевропейской науки, когда вычисление производных функций потребовало определения мгновенной скорости. При этом пройденное физическими телами «*нулевое*» расстояние необходимо было делить на «*нулевое*» же время, что давало не имеющее математического смысла выражение *0/0*. В решении данного затруднения существовало два подхода: сэр Исаак Ньютон категорически возражал против употребления «*неделимых в пределе*», выступая за представление бесконечно малых в качестве бесконечно убывающих величин; Готфид Вильгельм Лейбниц настаивал на том, что, бесконечно убывая, величины могут достигать неких особых «*бесконечно малых значений*». Эти значения Лейбниц определял как отношение *dy*/*dx*, удовлетворяющее некоему строгому тождеству, ибо ошибка в этом случае будет «*меньше любой конечной величины*».[4]

Далее математика продолжила развивать абстрактно-логический подход Лейбница, применяя введенный им *принцип непрерывности*: «*Если переменная на всех промежуточных этапах обладает некоторым свойством, то и ее предел будет обладать тем же свойством*».[5] Хотя этот принцип «*не был (и ныне не является) математической аксиомой*»,[6] но он оказался очень удобным для обоснования математического анализа. Математикам не нужно было задумываться над решением, отыскивая конкретные бесконечно малые величины. Таким образом, был построен практически весь математический анализ – по принципу удобства. По таким же соображениям удобства Г.Кантор в XIX веке сделал анализ еще более абстрактным и ввел очень удобные (на первый взгляд) актуально-бесконечные величины, при этом предполагалось, что принцип непрерывности Лейбница сохранит свою силу при *качественном переходе* от финитных (конечных) объектов к трансфинитным (актуально-бесконечным) объектам. Но эти ожидания не оправдались. Попытки мыслить бесконечность неким конечным объектом привели к появлению логических ошибок. Разразился очередной кризис, в результате которого специалисты из различных областей математики постепенно перестали понимать друг друга, а здание математики стало строиться по принципу вавилонской башни, без общих понятий, для чего, что и как нужно строить.[7]

Вместо того, чтобы одуматься, оглянуться назад, критически осмыслить историю математики и общепризнанные теории, ученые мужи не допускают и мысли о том, что основания стандартной математики, возникшие на более ранних этапах развития математической науки, могут содержать грубые логические ошибки. Математикам удобно пользоваться негласными договорами, которые были заключены ранее, несмотря на то, что эти договоры (или конвенции) объявляют очевидной истиной то, что как раз очевидной истиной не является, а иногда признают в качестве истины заведомую ложь, что можно рассматривать как самый настоящий договор, заключенный с дьяволом. Если Готфрид Вильгельм Лейбниц понимал, что бесконечно малые величины в виде *dy*/*dx* введены лишь на том условии, что возникающая ошибка пренебрежимо мала, то в наши дни математики оперируют символами и обозначениями, не задумываясь над их содержанием.

Например, рассмотрим содержание выражения *0/0*, «*не имеющего математического смысла*», и покажем, что смысл у данного выражения все-таки может быть. Для этого потребуется вспомнить правило перевода бесконечных десятичных дробей в обыкновенные: *чтобы записать бесконечную десятичную дробь в виде отношения m/n, нужно в числителе записать число, стоящее до начала периода десятичной дроби, вычесть из него число, стоящее перед разделительной запятой, а в знаменателе поставить столько девяток, сколько знаков содержит период десятичной дроби*. В самом деле, пусть дана десятичная дробь *3,(0)*, которой обозначается целое число *3*, тогда ее можно представить в виде *(30–3)/9=27/9=3*. То же самое можно проделать с десятичной дробью *0,(0)*, для которой правило перевода десятичных дробей в обыкновенные даст нам выражение *(00–0)/9=0*, где числом *00* обозначено множество, в котором нет ни десятков, ни единиц.

Бесконечное приближение к пустому множеству *0,(0)* осуществимо на числовой прямой самыми разными способами. Поскольку нулевая точка отсчета делит числовую прямую на положительную и отрицательную области, достаточно рассмотреть несколько приближений с избытком на положительной части прямой, а также с недостатком на отрицательной. Пусть *0,000…1; 0,000…2; 0,000…3* – приближения с избытком; а *–0,000…1; –0,000…2; –0,000…3* – приближения с недостатком. Очевидно, что правило перевода десятичных дробей в обыкновенные сохраняет силу при рассмотрении и тех, и других приближений.

---

[2] ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. М., 1959. С.161
[3] Зубов В.П. Николай Орем и его математико-астрономический трактат «О соизмеримости или несоизмеримости движений неба» // Н.Орем. О соизмеримости или несоизмеримости движений неба. В.П.Зубов. Трактат Брадвардина «О континууме». М., 2004. С.11
[4] Клайн М. Математика. Утрата определенности / Под ред. И.М. Яглома. М., 1984. С.162
[5] Там же, С.163
[6] Клайн М. Математика. Утрата определенности / Под ред. И.М. Яглома. М., 1984. С.164
[7] Яглом И.М. Герман Вейль. М., 1967. С.5

Так, для приближения *0,000…1*, состоящего из ряда *0,1; 0,01; 0,001* и т.д., выполняется правило *(00+1–(0+1))/9=0*. Для приближения *0,000…2*, состоящего из ряда *0,2; 0,02; 0,002* и т.д., выполняется правило *(00+2–(0+2))/9=0*. Для приближения *0,000…3*, состоящего из ряда *0,3; 0,03; 0,003* и т.д., выполняется правило *(00+3–(0+3))/9=0*. То же правило перевода десятичных дробей в обыкновенные выполняется для приближений с недостатком, для *–0,000…1* имеем *(00–1–(0–1))/9=0*. Соответственно, для *–0,000…2* имеем *(00–2–(0–2))/9=0*, для *–0,000…3* имеем *(00–3–(0–3))/9=0*. Во всех этих различных способах приближения к нулевой точке мы приходим к одному и тому же равенству *0/9=0*. Все эти приближения через правила перевода десятичных дробей в обыкновенные становятся эквивалентными, поэтому, если обозначить приближения с избытком через *+N*, а бесконечные приближения с недостатком через *–N*, мы получим вместо одного значения *0,(0)* бесконечно много различных инфинитно-малых значений.

Как утверждает стандартный анализ, в различении всех этих инфинитно-малых значений нет особой надобности, ибо все они «*меньше любой конечной величины*». Но в этом вопросе можно занять позицию сэра Исаака Ньютона, которая заключена в том, что бесконечно малые величины играют не просто важную, а исключительно важную роль как для оснований математики, так для фундаментальных физических теорий. Действительно, если математик может назвать выражение *0/0* не имеющим смысла, то для физика, различение инфинитно-малых позволяет находить соотношения, без которых нельзя решить проблемы физической науки. Если один из нулей в выражении *0/0* окажется бесконечным приближением *0,000…1*, а другой *0,000…2*, то соотношение их запишется как *0,000…1/ 0,000…2=0,5*, что является, пускай бесконечно малым, но все же вполне определенным результатом.

Пренебрежение к бесконечно малым величинам – лишь часть конвенции, заключенной между математиками. Другая часть договора касается периодических десятичных дробей с периодом *(9)*. Казалось бы, раз десятичные дроби с периодом *(9)* признаются периодическими десятичными дробями, то математики должны признавать такие числа рациональными, как любые другие периодические десятичные дроби. Однако в учебниках по математике о периодических десятичных дробях с периодом *(9)* можно прочитать буквально следующее: «*Любое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби, период которой отличен от 9. Верно и обратное утверждение: любая бесконечная периодическая дробь с периодом, отличным от 9, является рациональным числом*».[8]

Таким образом, десятичные дроби с периодом *(9)* в стандартной математике не признаются рациональными числами! Тогда мы вправе задать неудобный вопрос – какими же числами являются эти периодические десятичные дроби? Ответ обычно звучит так: «*Какая тебе разница, какими числами они являются – все равно от любого числа с периодом (9) можно легко избавиться, заменив его числом с периодом (0)*». В учебниках по математическому анализу при обозначении рациональных чисел можно найти сколь угодно много оговорок такого типа: «*Множество всех бесконечных десятичных дробей, для которых выполняются арифметические операции в Q, обозначим за R, для удобства исключив из рассмотрения бесконечные десятичные дроби с периодом (9)*». То есть, несмотря на то, что для бесконечных десятичных дробей с периодом *(9)* выполнимы операции, соответствующие рациональным числам, «*для удобства*» все эти дроби… просто не рассматриваются!

В старых пособиях содержалось честное признание профессиональных советских математиков, что представление любой конечной десятичной дроби в виде дроби с периодом *(0)* и с периодом *(9)* «*затрудняет изложение теории бесконечных периодических десятичных дробей. Вот почему в дальнейшем мы условимся совсем не говорить о периодических десятичных дробях с периодом 9, каждый раз заменяя их соответствующими периодическими дробями с периодом 0*».[9] Но если заглянуть в самые «*продвинутые*» современные учебные пособия, то наряду с обычными для математики двойными стандартами, которые оправдываются «*удобством*», можно встретить самые настоящие факты псевдонаучного произвола. Например, российским «*гимназистам*» преподносится такое вот определение действительных чисел: «*Положительным действительным числом a называют бесконечную периодическую десятичную дробь N, $n_1,n_2…n_k…$, не оканчивающуюся последовательностью девяток, где N – произвольное натуральное число или ноль, а $n_1,n_2…n_k…$ принимают значения 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9*». Иначе говоря, тенденция современного математического образования такова, что не далек час, когда десятичные дроби с периодом *(9)* окончательно вычеркнут из списка действительных чисел.

Далее обычно с «*гимназистами*» (а на самом деле – обычными школьниками, среди которых очень много неглупых ребят) не церемонятся и сразу предлагают доказать несчетность множества всех действительных чисел диагональным методом Георга Кантора. Стоит ли здесь упоминать о том, что перед началом этого доказательства тоже необходимо договориться (для удобства или для простоты – кому как нравится) не рассматривать десятичные дроби с периодом *(9)*? Ведь этот знаменитейший метод основан на популярном среди канторианцев утверждении о том, что каждому действительному числу можно поставить в соответствие одну и только одну запись в виде последовательности десятичной дроби. А вот если мы возьмем десятичные дроби с периодом *(9)*, таких записей для многих чисел окажется две, а если вспомнить о том, что за десятичной дробью с периодом *(9)* стоит бесконечное множество инфинитно-малых приближений с недостатком *–N*, то таких записей для одного действительного числа может оказаться уже бесконечно много. Но это нисколько не смущает схоластов, преподносящих азы теории бесконечных множеств, не так ли? Их нисколько не смущает то, что азы стандартной теории множеств, претендующей на то, чтобы стать фундаментом для всей современной математики, начинаются с подтасовки фактов и обмана доверчивых школьников.

Потому что это очень удобно, когда для всех выражений вида $(^2\sqrt{2})^2$, $(^3\sqrt{2})^3$ и т.д. существует один универсальный ответ: $(^2\sqrt{2})^2=2$, $(^3\sqrt{2})^3=2$ и т.д. Зачем забивать голову изучением реальных десятичных последовательностей, когда можно просто взять и договориться записывать: $1,414…^2=1,(9)=2$, так же, как $1,259…^3=1,(9)=2$? Зачем вообще над чем-то задумываться, если «*для*

[8] Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра и элементарные функции. Ч.I., М., 1966. С.85
[9] Там же, С.86

удобства» можно ни о чем не думать? Тем не менее, если мы начнем думать, задавать *неудобные* вопросы и рассматривать реальные десятичные последовательности, получаемые при возвышении в квадрат дроби $1{,}414\ldots$ и возвышении в куб дроби $1{,}259\ldots$, то заметим разительные отличия в способах приближения к одному и тому же числовому значению 2.

Для десятичной дроби $\sqrt[2]{2}=1{,}414\ldots$мы будем получать такие значения:

$1{,}4^2=1{,}\mathbf{9}6;$

$1{,}41^2=1{,}9\mathbf{9}81;$

$1{,}414^2=1{,}99\mathbf{9}396;$

$1{,}4142^2 = 1{,}999\mathbf{9}6164$;

$1{,}41421^2 = 1{,}9999\mathbf{8}99241$;

$1{,}414213^2 = 1{,}99999\mathbf{8}409369$;

$1{,}4142135^2 = 1{,}999999\mathbf{8}2358225$;

$1{,}41421356^2 = 1{,}9999999\mathbf{9}32878736$ и т.д.

В этих приближениях четко прослеживается разрядность $\mathbf{1,}\ b_1\ b_2\ b_k\ \mathbf{8}\ a_1\ a_2\ a_3\ a_{k+1}$, где b_k обозначает количество девяток, a_{k+1} – количество цифр, среди которых стоят не только девятки.

Для десятичной дроби $\sqrt[3]{2}=1{,}259\ldots$мы будем наблюдать другую закономерность, связанную с разрядностью:

$1{,}2^3=1{,}728;$

$1{,}25^3=1{,}9\mathbf{5}3125;$

$1{,}259^3=1{,}99\mathbf{5}616979;$

$1{,}2599^3=1{,}999\mathbf{8}99757799;$

$1{,}25992^3=1{,}9999\mathbf{9}5000191488;$

$1{,}259921^3=1{,}99999\mathbf{9}762390486961;$

$1{,}\ 2599210^3=1{,}99999\mathbf{9}762390486961000;$

$1{,}25992104^3=1{,}999999\mathbf{9}52878604157540864$ и т.д.

Первый шаг приближения не дает после разделительной запятой ни одной девятки, а разрядность других приближений дает на каждом шаге девятки, как в первом случае, но последовательность $a_1\ a_2\ a_3\ a_{k+1}$ после девяток (та, которая может состоять из прочих цифр от 0 до 9) оказывается длиннее, чем в первом случае. Это означает, что при рассмотрении выражений вида $(\sqrt[2]{2})^2$, $(\sqrt[3]{2})^3$ и т.д. мы сталкиваемся с приближением к числу 2 с помощью различных бесконечно малых величин. Различие это вытекает из разных условий для решения задачи. Так, в первом примере нам требуется отыскать сторону некоторого *квадрата*, а во втором – сторону некоторого *куба*. Разумеется, сторона для удвоенного квадрата в первом примере не может быть равна целому числу, точно так же во втором примере сторона для удвоенного куба не может выражаться целым числом, так как число 2 не является ни «*квадратным*», ни «*кубическим*» числом. Но из этих верных утверждений отнюдь не следует, что стороны для удвоенного квадрата и куба нельзя выразить посредством периодических десятичных значений.

Напротив, четкая закономерность в разрядности вышеприведенных приближений указывает на то, что периодические десятичные значения для $\sqrt[2]{2}$ и $\sqrt[3]{2}$ в этих примерах не только возможны, но являются более естественным предложением, чем предложение об отсутствии периодов, так как, если принять десятичные значения $\sqrt[2]{2}=1{,}414\ldots$ и $\sqrt[3]{2}=1{,}259\ldots$ за эффективно неупорядоченные последовательности, то мы имели бы право ожидать, что получаемые через них приближения к числу 2 тоже будут неупорядоченными. Но факт в том, что порядок существует. Если бы математиков интересовала истина, а не сохранение в неизменном виде своих теорий, то они бы наверняка проявили некоторый интерес к десятичным дробям с периодом (9), хотя бы потому, что во многом именно эти дроби обеспечивают в математике непрерывность числовой прямой.

Для простоты и удобства можно принять все, что угодно. Можно даже принять, что солнце движется вокруг плоской земли, которая находится в самом центре вселенной. Можно даже принять, что человек – это всего лишь бесхвостая обезьяна, которая, тыкая в буквы на клавиатуре, тоже может напечатать романы «Война и мир», «Преступление и наказание», а заодно «Мастер и Маргарита». Можно даже принять, что луна – это очень большой ломоть сыра. Но для точной науки такой подход неприемлем. Если есть такое явление, как упорядоченная разрядность приближений, то его следует объяснить, а не вводить в подражание пифагорейцам вездесущие запреты на изучение неудобных дробей с периодом (9). Нарушение этих запретов может испугать разве что только младших научных сотрудников, мечтающих угодить старшим научным сотрудникам, мечтающих угодить зарубежным светилам науки или академикам РАН, чтобы добиться продвижения по карьерной лестнице. Тем более бессмысленно притворяться и делать вид, что никаких дробей с периодом (9) не существует.

Для квадратного корня из 2 выполняется брауэрово разбиение квадрата $ABCD$ на элементы одинаковой размерности. При этом площадь диагонального квадрата $ACEF$, построенного по диагонали квадрата $ABCD$, будет находиться по формуле: $S(ACEF) = 2S(ABCD)–(2n–1)$ или $2n^2–(2n–1)$, где n – число элементов стороны квадрата $ABCD$. Воспользовавшись этой формулой для нахождения площади квадрата $ACEF$, построенного по диагонали десятичных квадратов: 10^2, 100^2, 1000^2 и т.д., мы будем получать значения:

$2 \cdot 10^2 – (2 \cdot 10 – 1) = 181;\ 2 \cdot 100^2 – (2 \cdot 100 – 1) = 19801;\ 2 \cdot 1000^2 – (2 \cdot 1000 – 1) = 1998001$ и т.д.

Извлекая квадратные корни из площадей данных диагональных квадратов, мы будем приближаться к десятичному значению числа $\sqrt[2]{2}= 1{,}4142\ldots$:

$\sqrt[2]{181} = 13{,}453624\ldots$; $\sqrt[2]{19801} = 140{,}716026\ldots$; $\sqrt[2]{1998001} = 1413{,}506632\ldots$ и т.д.

Сравнивая эти приближения с дробью $^2\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$, можно установить, что на каждом шаге остаток приближается к значению десятичной дроби $^2\sqrt{2}/2 = 0{,}7071\ldots$:

14,142135… – 13,453624… = 0,688511…; *141,421356… – 140,716026… = 0,705330…*; *1414,213562… – 1413,506632… = 0,707242…* и т.д.

Если соединить найденные значения, переместив разделительную запятую целых частей в положение после первой единицы, и сравнить их с дробным значением $^2\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$, можно убедиться, что десятичный остаток второго порядка будет также приближаться к значению десятичной дроби $^2\sqrt{2}/2 = 0{,}7071\ldots$:

*1,4142135623730950488016887242097… – 1,3453624**688511**… = 0,0**688510**…* ;

*1,4142135623730950488016887242097… – 1,40716026**705330**… = 0,00**705329**…* ;

*1,4142135623730950488016887242097… – 1,413506632**707242**… = 0,000**707240**…* и т.д.

То есть разрядность в последовательности ***1,*** b_1 b_2 b_k ***8*** a_1 a_2 a_3 a_{k+1}, действительно, связана с приближением к диагональному квадрату, состоящему из целого числа элементов *S(ACEF) =199_800_1=1414_²*, в этом случае дробь $^2\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$ оказывается, пусть невообразимо большой, но периодической десятичной дробью. После значения *1414_*, стоящим до начала периода, в дроби *1,4142…* следует первый период *707_* (где подчеркивание _ обозначает недостающие члены конечной последовательности), затем второй, третий, четвертый и так до бесконечности, как в любой другой периодической десятичной дроби: *1,414_707_707_(707_)*. Тогда по правилам перевода десятичных дробей в обыкновенные диагональ квадрата выразится отношением двух целых чисел $m/n,\ n \neq 0$:

$$\frac{1414\_707\_-1414\_}{999\_000\_}=1{,}414\_\ 707\_707\_(707\_) \qquad [1]$$

Рассмотрим квадраты чисел, образующихся в числителе дроби *1414_707_ −1414_*:

$147 - 14=133,\ 133^2=\mathbf{17}689$;

$14170 - 141=14029,\ 14029^2=\mathbf{196}812841$;

$1414707 - 1414=1413293,\ 1413293^2=\mathbf{1997}397103849$;

$141427071 - 14142=141412929,\ 141412929^2=\mathbf{19997}616488359041$;

$14142170710 - 141421=14142029289,\ 14142029289^2=\mathbf{199996}992410933845521$ и т.д.

Разрядность этих приближений совпадает с разрядностью значения *199_700000_1000_*, к которому стремится квадрат числителя дроби [1]:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{(1414\_707\_-1414\_)^2}{999\_000\_^2}=\frac{199\_700000\_1000\_}{99\_800\_1000000\_}=2{,}00\_1. \qquad [2]$$

Теперь выполним брауэрово разбиение для кубического корня из *2* на элементы той же размерности по аналогии с тем, как выполняли разбиение для квадрата. Объем для удвоенного куба выразится формулой: $2n^3-(2n^2-1)$, где n – число элементов стороны базового куба. Разумеется, так же, как в случае с удвоением квадрата, мы будем получать одни только последовательные приближения к удвоенному кубу. Невозможность решения задачи по удвоению куба в целых числах была давно доказана. Но нам и не требуется решение в целых числах, нас интересуют только приближения в целых числах для удвоенного куба по десятичным кубам 10^3, 100^3, 1000^3 и т.д., которые позволяют получить число, стоящее до начала периода в десятичной дроби. Итак, мы получаем следующие объемы:

$2 \cdot 10^3 - (2 \cdot 10^2 - 1) = 1801$; $2 \cdot 100^3 - (2 \cdot 100^2 - 1) = 1980001$; $2 \cdot 1000^3 - (2 \cdot 1000^2 - 1) = 1998000001$ и т.д.

Разрядность этих приближений в целых совпадает с разрядностью, получаемой на каждом шаге приближения дроби $^3\sqrt{2}=1{,}259\ldots$: на первом шаге для дробных *1,728*, а для целых *1801*. На втором шаге для дробных *1,953125*, а для целых *1980001*. На третьем шаге для дробных *1,995616979*, а для целых *1998000001* и т.д. Извлекая кубические корни из объемов данных приближений в целых, мы будем приближаться к последовательности десятичного значения числа $^3\sqrt{2}=1{,}259\ldots$:

$^3\sqrt{1801}=12{,}166656\ldots$; $^3\sqrt{1980001}=125{,}570744\ldots$; $^3\sqrt{1998000001}=1259{,}500936\ldots$ и т.д.

Сравнив эти приближения с дробью $^3\sqrt{2}=1{,}259\ldots$, можно установить, что на каждом шаге остаток будет приближаться к значению десятичной дроби $^3\sqrt{2}/3 = 0{,}419973\ldots$:

12,166656… – 12,599210… = 0,432554…; *125,992104… – 125,570744… = 0,42136098…*; *1259,9210498… – 1259,500936… = 0,420113898…* и т.д.

Если соединить найденные значения, переместив разделительную запятую целых частей в положение после первой единицы, и сравнить их с дробным значением $^3\sqrt{2}=1{,}259\ldots$, то можно убедиться, что десятичный остаток второго порядка будет также приближаться к значению десятичной дроби $^3\sqrt{2}/3 = 0{,}419973\ldots$:

*1,2599210498948731647672106069871…–1,2166656**432554**…=0,0**432554**…*;

*1,2599210498948731647672106069871…–1,25570744**421360**…=0,00**421360**…*;

*1,2599210498948731647672106069871…–1,259500936**420113**…=0,000**420113**…* и т.д.

В отличие от теории бесконечных множеств, которая манипулирует символами трансфинитных чисел, так, что при этом далеко не всегда выполняются элементарные арифметические законы (например, в обычных трансфинитных операциях $\aleph_0+1=\aleph_0$, $2\aleph_0=\aleph_0$, $\aleph_0^n=\aleph_0$ можно говорить о несоблюдении переместительного и распределительного законов арифметики),[10] мы получаем все данные значения, не нарушая никаких арифметических законов. При этом из разрядностей приближений к целым

[10] Арнольд И.В. Теоретическая арифметика. М., 1938. С.25, 75

выводятся десятичные значения, которые совпадают по разрядности с приближениями к дробям ${}^2\sqrt{2}=1{,}414\ldots$ и ${}^3\sqrt{2}=1{,}259\ldots$, что, в свою очередь, позволяет говорить о том, что закономерности в разрядностях в этих и многих других случаях можно объяснить существованием периодов у рассматриваемых десятичных дробей. Для кубического корня из *2* после значения *1259_*, стоящим до начала периода, в дроби *1,259…* следует первый период *432_*, затем второй, третий, четвертый и так до бесконечности: *1,259_432_432_(432_)*. Тогда по правилам перевода десятичных дробей в обыкновенные для данной десятичной дроби можно записать отношение двух целых чисел m/n, $n \neq 0$:

$$\frac{1259\_432\_-1259\_}{999\_000\_}=1{,}259\_432\_432\_(432\_) \qquad [3]$$

Действительно, рассмотрим квадраты чисел, образующихся в числителе дроби *1259_432_ −1259_*:

$124-12=112,\ \ 112^3=\mathbf{14}04928$;

$12543-125=12418,\ \ 12418^3=\mathbf{191}4939098632$;

$1259432-1259=1258173,\ \ 1258173^3=\mathbf{1991}686975673223717$;

$125994325-12599=125981726,\ \ 125981726^3=\mathbf{19995}05772150868325325176$;

$12599243255-125992=12599117263,\ \ 12599117263^3=\mathbf{199995}5599475642451792610510447$ и т.д.

Разрядность получаемых в числителе приближений совпадает с разрядностью значения *199_4105698_299900000*, к которому стремится куб дроби [3]:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3=\frac{(1259\_432\_-1259\_)^3}{999\_000\_^3}=\frac{199\_410569\ 8\_29990000\ 0}{99\_700\_299\ 9000000000}=2{,}000\_1. \qquad [4]$$

На что следует обратить внимание, так это на то, что в выражениях [2] и [4], значение для квадратного корня (*2,00_1*) по разрядности отличается от значения для кубического корня (*2,000_1*). Различия эти задают разницу в записях $({}^2\sqrt{2})^2=2$, $({}^3\sqrt{2})^3=2$. Эта разница никак не учитывается в стандартной математике. Поэтому, если судить по стандартным формулам, то можно прийти к ошибочному умозаключению, что между пространствами различных размерностей существует непрерывный переход, так как все несводимые к целым числам корни из числа *2* кажутся в таких записях равными одной и той же десятичной дроби с периодом *(9)*: ${}^2\sqrt{2^2}=1{,}99(9)=2$; ${}^3\sqrt{2^3}=1{,}99(9)=2$ и т.д. Именно поэтому Г.Кантор, выбрасывавший из рассмотрения все дроби с периодом *(9)* получил знаменитое «*доказательство*», согласно которому сторона квадрата (одномерное пространство) и его площадь (двухмерное пространство) равны по числу точек (равномощны).

Однако Л.Брауэр доказал, что не существует непрерывного отображения, связывающего пространства E^a и E^b при $a \neq b$. Из этого доказательства следует не только вывод о некорректности доказательства Г.Кантора о равномощности точек стороны и площади квадрата, но и вывод о некорректности так называемой аксиомы Г.Кантора о двух стягивающихся в общую точку (нульмерный объект) вложенных друг в друга отрезках (двухмерных объектов). Непрерывного перехода, при помощи которого отрезки могли бы «*стянутся*» в нульмерную точку не существует, как не существует актуальной (конечной) бесконечности. Все действительные величины могут лишь сколь угодно близко приближаться к нулевому значению, но никогда полностью его не достигают. Указанное выше различие в разрядностях приближений прослеживается в пространствах любых размерностей, не исключая нульмерное, поскольку любое действительное число x в таком пространстве равно не нулю, а единице $x^o=1$.

Таким образом, философия интуиционизма гораздо точнее отображает действительность, чем философия формализма. Если в кармане лежало яблоко, а затем это яблоко из кармана вынули и съели, то формалист будет наивно утверждать, что $1-1=0$, то есть он будет доказывать, что абсолютно никакого яблока больше нет. Тогда как интуиционист укажет на то, что, хотя объекта в виде целого яблока нет, но остались его различные частицы, некоторые из которых могут быть очень и очень малы, но мы можем их ощущать в виде оставшегося в воздухе аромата яблока. Интуиционист исходит из положения *ex nihilo nihil fit* (с лат. «*из ничего становится ничто*»), а формалист в упрощениях и договорах с дьяволом исходит в математике из положения *ex nihilo omnia fit* (с лат. «*из ничего становится все*»). Первый придерживается принципа *omnia mutantur, nihil interit* (с лат. «*все изменяется, ничто не исчезает*»), провозглашает вечное обновление жизни, ее совершенствование, эволюцию, а формалист утверждает *omnibus hominibus moriendum est, sed nihilo perpetuum* (с лат. «*все человеческое смертно, но ничто – постоянно*»). В какой бы области себя ни проявил формализм, всюду он провозглашает верховенство пустоты, неизбежной смерти, разрушения, стремится доказать бессмысленность человеческого разума, возвышенных порывов, любви, красоты, гармонии.

Опустошающее воздействие философии формализма на сознание очень точно описал К.Циолковский в своем эссе «Нирвана», доказав в рамках стандартной математики, что сумма всех эмоций, мыслей, чувств, благородных устремлений человека равна нулю, ибо смерть обнуляет всю радость, счастье, добрые дела человека, сколько бы их ни было в его жизни.[11]

---

[11] Циолковский К. Нирвана. Калуга, 1914. Интуиционисткое понимание «*пустоты*», а потому и религиозно-философского термина «*нирвана*» (от санкр.निर्वाण «прекращение» «угасание», «исчезнувший»), разительно отличается от формалистского понимания, которому К.Циолковский постарался противопоставить «*деятельную нирвану*». Поскольку интуиционист исходит из того, что абсолютной пустоты не существует, то европеизированное «*состояние нирваны*» в интуиционизме воспринимается именно в изначальном, ведическом смысле этого слова, обозначающим бесконечный *процесс* избавления от страданий и от ошибок, то есть такой процесс, в котором разум начинает обладать свойством невозрастания энтропии. Если для формалиста «*нирвана*» есть слияние с абсолютной пустотой, полная потеря энергии системой, скачек энтропии, за которым следует хаос, то для интуициониста это есть слияние с естеством, полное обретение системой энергии, установление непреложного порядка. Если бы древние проповедовали формалистское понимание «*нирваны*» как полную потерю энергии, то высшие сущности ведических верований, такие как бог Вишну, например, не могли бы проявляться в низших материальных мирах для спасения людей и установления в этих низших мирах порядка.

Последовательный формалист всегда стоит в одном шаге от того, чтобы признать, что нравственные и духовные категории не имеют никакого объективного значения, что неважно, каким является человек, добрым или злым, альтруистом или эгоистом, преступником, вором, убийцей или художником, ученым, святым. Потому что в философии формализма смерть все обнуляет, а интуиционизм признает, что после смерти дела человека, физическая и метафизическая память о нем, причинно-следственные связи с ним в человеческом обществе продолжают объективно существовать и воздействовать на мир, поэтому воздействия ученых и воров в законе продолжают оставаться различными в этих представлениях даже после их физической смерти. Убежденный формалист видит смысл всей своей жизни единственно только в служении философии формализма, которую он полагает незыблемой истиной, тогда как интуиционист, утверждая обновление и эволюцию, всегда стремится выйти за рамки формализма, ибо только за этими рамками возможно обретение более полного знания.

Не так давно появились формалисты, которые набросились на автора данной статьи со всякого рода разоблачениями. Для убедительности они опубликовали доказательство «*несоизмеримости*» $\sqrt{2}$ без применения метода «*reductio ad absurdum*», упомянув проф. А.И.Щетникова, который задолго до них уже давал аналогичное доказательство и который хорошо знает о существовании в античной арифметике аксиомы неделимости единицы. Но этого им было мало. Чтобы опорочить мое имя, они взялись распространять антинаучный бред, согласно которому автор якобы вознамерился произвести «*революцию*», доказывая, что «*все целые числа − четные*»!

Нести подобную ахинею может только очень ленивый фальсификатор, который не соблаговолил даже как следует ознакомиться с фальсифицируемой им теорией. Либо больной человек, который не в состоянии понять, что на протяжении многих лет в моих статьях как раз критикуется, а не защищается Пифагорова арифметика, где действовали непривычные для нас аксиомы, которая не отличалась особой строгостью, потому что числа *1,414…* и *1* в такой арифметике могли приниматься за «*четные*» числа (это допущение мы и находим в классическом пифагорейском доказательстве несоизмеримости стороны и диагонали квадрата). Кроме того, как уже было замечено выше, любые нечетные числа в такой своеобразной арифметике можно было по критерию, введенному для единицы, принять в качестве «*и четных, и нечетных*» чисел.

Что мы подумали бы о человеке, который стал бы клятвенно уверять, что Томас Брадвардин еще в XIV веке сумел доказать в своем трактате «О континууме» гипотезу континуума Г.Кантора, не пользуясь трансфинитными числами и не имея о них представления? Наверное, мы бы усомнились в таком утверждении, захотели бы его перепроверить. Но в наши дни до сих пор господствует убеждение, что математики-пифагорейцы сумели привести некое строгое доказательство непериодичности десятичной дроби $\sqrt[2]{2}=1,414\ldots$ (и целого класса других подобных дробей), не пользуясь ни десятичными, ни обыкновенными дробями, а на тех, кто перепроверяет их доказательство, и показывает, что, пользуясь аксиомами пифагорейцев, можно даже доказать «*несоизмеримость*» целого числа *2*, устраивается травля.

Чтобы избавить себя от необходимости писать каждый раз ответы на вздорные заметки, направляемые в мой адрес, привожу ниже тривиальное конструктивное доказательство несоизмеримости $\sqrt[2]{2}$, основанное на правилах перевода десятичных дробей в обыкновенные.

Теорема (1): десятичная дробь $\sqrt[2]{2}=1,414\ldots$ несоизмерима в целых числах p и q.

Доказательство. Рассмотрим числа p и q, такие что $p^2=2q^2$. Так как любое рациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби, а при переводе из десятичных дробей в обыкновенные в знаменателе мы получаем конечную последовательность из девяток, то запись целых чисел $p^2/q^2=2$ будет иметь такой вид $p^2/999\_^2=2$, откуда $p^2=2\cdot 999\_^2=199\_600\_2$. Как видим, число *199_600_2* оканчивается на *2*. Получить такую последовательность в десятичной системе счисления можно лишь возвышением в квадрат некоторого целого числа, на конце которого стоит одно из целых чисел от *0* до *9*, которое при возвышении в квадрат на конце образуемой последовательности дает число *2*. Перебором целых чисел от *0* до *9*, возведенных в квадрат, легко установить, что ни одно из них не дает на конце число *2*:

$0^2=\mathbf{0};\ 1^2=\mathbf{1};\ 2^2=\mathbf{4};\ 3^2=\mathbf{9};\ 4^2=1\mathbf{6};\ 5^2=2\mathbf{5};\ 6^2=3\mathbf{6};\ 7^2=4\mathbf{9};\ 8^2\text{-}6\mathbf{4};\ 9^2=8\mathbf{1}.$

Следовательно, искомого таким способом целого числа p – не существует. Но не будем делать скороспелые выводы о непериодичности бесконечной десятичной дроби $\sqrt[2]{2}=1,414\ldots$ Так как число *2* – целое и не является «*квадратным*» целым числом (как числа *4, 9, 16, 25* и т.д.), для которых только и выполняется извлечение квадратного корня в целых числах с получением соизмеримых отношений p^2/q^2 (соответственно $2^2/1^2=4$, $3^2/1^2=9$; $4^2/1^2=16$, $5^2/1^2=25$ и т.д.), то можно привести сколь угодно много доказательств несоизмеримости $\sqrt[2]{2}$. Однако все эти тривиальные доказательства несоизмеримости в целых числах ошибочно ассоциируется с доказательством иррациональности $\sqrt[2]{2}$. Хотя на самом деле эти доказательства – не одно и то же, потому что в них применяются различные наборы арифметических аксиом.

Когда мы вводим в рассмотрение бесконечные десятичные дроби, для всех целых чисел появляется сразу несколько эквивалентных записей − как минимум две, с периодом *(9)* и с периодом *(0)*. Причем в стандартной математике запись дроби с периодом *(9)* автоматически выбрасывается (исключительно из соображений простоты) и заменяется записью с периодом *(0)*, а период *(0)*, начинаясь в таких дробях сразу после разделительной запятой, означает, что это уже не дробное, а целое число. То есть вместе с введением десятичных дробей появляется конвенция о том, что *1,(9)=2*, хотя число *1,(9)* – бесконечная десятичная *дробь*, а *2 – целое* число. Другими словами, в современной арифметике действует любопытная аксиома, которая нигде явно не прописана, но которая *de facto* признает, что в определенных случаях десятичная дробь *(нецелое бесконечное приближение к целому)* эквивалентна *целому* числу! Введение такой аксиомы эквивалентности имеет свои последствия, над которыми многие математики не склонны задумываться.

Так, когда нужно доказать иррациональность $^2\sqrt{2}$ применяется такая система арифметических аксиом, в которой нет никаких аксиом эквивалентности дроби и целого числа, поэтому такие доказательства правильнее называть доказательствами несоизмеримости в целых числах. А когда нужно доказать равенство $(^2\sqrt{2})^2=1,(9)=2$, такая аксиома эквивалентности дроби и целого вдруг начинает активно применяться, и это уже трудно не заметить (имеющий глаза да увидит). Применение двойных стандартов в математике вошло в такую устойчивую привычку, что никто не пытается работать при выполнении арифметической операции возведения в квадрат значения $^2\sqrt{2}$ в какой-то одной системе аксиом. Математики метаются между разными наборами аксиом, потому что, допустив однажды равенство между *дробью* и *целым* числом, для доказательства иррациональности (а точнее, непериодичности той или иной бесконечной десятичной дроби) уже недостаточно показать одну только тривиальную несоизмеримость в целых числах. Возникает потребность в доказательстве того, что невозможно подобрать и такого дробного приближения, которое можно было бы принять за эквивалентное целому числу. Что для этого нужно сделать?

Для этого необходимо обратиться к принципу эквивалентности, который был описан при рассмотрении бесконечных приближений с избытком и недостатком к числу *0,(0)*. Для числа *2* дробь *1,(9)* соответствует бесконечному приближению с недостатком, симметричное ему бесконечное приближение с избытком задано бесконечным приближением *2,00…1*. В самом деле, имеют место следующие эквивалентные равенства, получаемые по правилам перевода периодических десятичных дробей в обыкновенные:

$2,(0)=1,(9)=(20–1–(2–1))/9=18/9=2$

$2,(0)=2,000…1=(20+1–(2+1))/9=18/9=2.$

Из этих записей следует, что каждое значение $-\mu_n$ (от греч. μονάς, «один», «единица») бесконечного ряда *1,9; 1,99; 1,999* и т.д., а также значение $+\mu_n$ бесконечного ряда *2,1; 2,01; 2,001* и т.д. является конечным десятичным приближением к целому числу *2* и к соответствующей точке на числовой прямой. Если дробь *1,414…* имеет некоторый период, который при возвышении данной дроби в квадрат, дает решение Δ^2 в бесконечных десятичных значениях, эквивалентных целому числу *2*, то среди конечных последовательностей дроби *1,414…*, записанной с помощью правил перевода десятичных дробей в обыкновенные, должно содержаться решение δ^2, удовлетворяющее какому-то одному конечному значению $-\mu$, $+\mu$ из приближений $-M$, $+M$ (с недостатком или избытком) к целому числу *2*.

В этом случае уже нельзя делать категорических заявлений, будто в бесконечной десятичной дроби *1,414…* не может содержаться ни одного конечного решения δ^2, из которого можно получить конечное приближение $-\mu, +\mu \in -M, +M \rightarrow \Delta^2$. Потому что конечные числа вида *1414_707_ – 1414_*, получаемые в числителе обыкновенной дроби, после возведения в квадрат будут давать такие приближения, которые по разрядности соответствуют числу *199_700000_1000_*. После сокращения нулей (со знаменателем дроби 99_800_1000000_) мы получим число вида *199_700000_1*, которое оканчивается на *1*. Получить единицу на конце такой последовательности уже можно, например, при возведении в квадрат конечной последовательности, оканчивающейся либо на единицу (*_1²=**1***)**,** либо на девятку (*_9²=8**1***). Другими словами, число вида *199_600_2*, которое мы ввели в тривиальном доказательстве несоизмеримости в целых без аксиомы эквивалентности, оказывается не единственным искомым целым числом в арифметике, где такая аксиома эквивалентности применяется. А в арифметике, где используются формальные записи вида $(^2\sqrt{2})^2=1,(9)=2$, такая аксиома эквивалентности применяется.

Таким образом, любые тривиальные доказательства **Теоремы (1)** с учетом аксиомы эквивалентности, сплошь и рядом используемой в современной арифметике, когда дроби с периодом *(9)* приравниваются целым числам, теряют прежнюю силу. Здесь мы сталкиваемся с числовыми последовательностями, которые нельзя уместить в памяти стандартного калькулятора, которыми довольно сложно манипулировать, заменяя их отвлеченными символами. Это лишь вершина айсберга, о который разбиваются оговорки, упрощенные доказательства и практика двойных стандартов в математике, все целые числа которой умещаются на панели 32-битного инженерного калькулятора. Далеко не случайно, что именно на этом этапе против «*софиста Д.Клещева*» был поднят гвалт фальсификаторов, доводы которых работают только в построениях, содержащих обычные оговорки по поводу дробей с периодом *(9)* и явные аксиоматические противоречия.

В XX веке метаматематики и металогики вывели сотни самых различных аксиом, создав даже такие аксиоматические миры, в которых неистинны любые позитивные определения вида «*это А*». Например, так называемый *иррефлективный* мир, где истинны только утверждения вида «*это не-А*», где классические противоречия вида «*это А и не-А*» оказываются непротиворечивыми. Вся стандартная математика может быть признана непротиворечивой только в таком иррефлективном мире, где утверждение «*математическая бесконечность – это актуальная (завершенная) бесконечность и потенциальная (ни на коком этапе не завершаемая) бесконечность*» будет признано не содержащим противоречия.

На фоне подобных теорий, с помощью которых можно «*объяснить*» любые внутренние противоречия математики, ничего по существу не объясняя, нападки на «*софиста*», посмевшего раскритиковать пифагорейские аксиомы арифметики, а также «*классические*» доказательства, полученные в рамках этой системы аксиом, кажутся нелепыми. Но это лишь на первый взгляд. Ведь на кого еще можно наброситься с критикой, если так хочется покритиковать, – на Г.Кантора, что ли? На этого подлинного софиста, который ввел в математическую науку внутренне противоречивое понятие «*конечной бесконечности*»? Что вы, за этим последует такая волна негодования сотен других софистов и апологетов актуальной бесконечности, что любого критика просто в клочья разорвут. Безопаснее нападать на того, у кого сторонников почти нет. Но мне нет дела до критиков, которые цепляются за наивные представления о целых числах, которыми пользовались во времена Пифагора. Так что пускай математики-пустомножцы отыскивают все новые и новые доказательства несоизмеримости $^2\sqrt{2}$. Пусть они живут в своем мире пустого множества, думают пустые мысли, ходят по пустому пространству и строят на планете пустого множества вавилонские башни из алефов, пустых множеств, квадратичных иррациональностей, полагая, что эти башни никогда не развалятся.

Дискуссии с математиками-пустомножцами не отличаются оригинальностью и напоминают смешную войну между тупоконечниками и остроконечниками, описанную Дж.Свифтом в «Путешествиях Гулливера». Была традиция, по которой яйцо разбивали с тупой стороны (приравнивали к целым числам только бесконечные приближения с недостатком). Затем кто-то обнаружил, что разбивать яйцо можно и с острой стороны (приравнивать к целым числам и бесконечные приближения с избытком). И вот «*тупоконечники*» хотят представить автора этой статьи «*остроконечником*», который стал возмутителем спокойствия Лилипутии и решил организовать затяжную войну между двумя партиями, хотя автору этой статьи не так уж и важно, с какой стороны разбивать яйцо, ибо даже основной догмат великого пророка Люстрога в пятьдесят четвертой главе Блундекраля гласит: «*Все истинно верующие да разбивают яйца с того конца, с какого удобнее*».[12]

Если пустомножцам удобно приравнивать десятичные дроби с периодом *(9)* к целым числам, ничего не объясняя и никак не обосновывая это парадоксальное равенство дроби и целого, не вводя никаких внятных определений для периодических десятичных дробей с периодом *(9)*, то пускай они остаются при своих убеждениях и дальше. Но есть и те, кто не разделяет веру пустомножцев, кто придерживается философии интуиционизма, кому гораздо удобнее обосновать равенство дроби и целого с помощью правил перевода десятичных дробей в обыкновенные и приравнивать через это правило к целым числам бесконечные приближения с избытком и недостатком. Почему с точки зрения интуиционизма это гораздо удобнее? Да хотя бы потому, что расширение аксиомы эквивалентности, позволяющее охватывать бесконечные приближения с избытком, ведет к разрешению фундаментального противоречия между понятием дискретного арифметического числа и непрерывной геометрической величины, существующего в математике со времен Пифагора и Аристотеля, устранение которого выдающийся основатель стандартной математики А.Френкель считал «*одной из главных – пожалуй, даже самой главной – проблемой оснований математики*».[13]

М.Я.Выгодский писал по поводу подразделения соизмеримых и несоизмеримых отрезков в Евклидовой геометрии следующее: «*Тягостность этого подразделения хорошо известна всем изучавшим геометрию и преподававшим ее. Создавая видимость строгости, оно не дает ни логического, ни эстетического удовлетворения. Его искусственность усугубляется тем, что соизмеримые и несоизмеримые отрезки геометрически совершенно равноправны*».[14] Действительно, поскольку числовое значение единичного отрезка присваивается в геометрии произвольно, поскольку в ней действует равноправие систем отсчета, то никакого труда не составляет обозначить диагональ квадрата $AC=1,414\ldots$ в некоторой новой системе отсчета за единичный отрезок и получить в общем виде следующее «*нестандартное*» выражение $\sqrt[2]{2}\rightarrow 1$. Арифметика с расширенной аксиомой эквивалентности снимает это «*тягостное*» затруднение, показывая, что числовые последовательности несоизмеримого в целых и целого числа могут быть выражены через общее представление о периодических десятичных дробях, что принципиального расхождения в понятии данных чисел не содержится.

Д.Гильберт ввел в геометрию аксиомы порядка. Первая аксиома порядка была им сформулирована так: «*Если A,B,C – точки одной прямой, и B лежит между A и C, то B лежит также между C и A*».[15] В системе Гильберта такая аксиома порядка необходима, чтобы дать определение понятию «*между*», а в геометрии Евклида понятие «*между*» считается как бы очевидным логическим понятием. М.Я.Выгодский показывает, что в геометрии нет особой надобности вводить гильбертово определение понятия «*между*» и оговаривать, что фраза «*B лежит между A и C*» равносильна фразе «*B лежит между C и A*». В геометрии такая конкретизация кажется тавтологией, простой инверсией уже данного определения. Но в арифметике «*очевидность*» уже не столь очевидна, как в геометрии. Если ввести арифметические обозначения для точек *A,B,C*, лежащими на одной прямой, через целые числа *1,2,3*, то окажется, что в стандартной математике, оперирующей одним только бесконечным приближением с недостатком, непрерывный переход от *A* к *B* будет задан десятичной дробью *1,(9)*, а непрерывный переход от *C* к *B* никак не задается! Его в стандартной математике просто не существует, поэтому фраза «*B лежит между A и C*» в переводе на язык общепринятой арифметики неравносильна фразе «*B лежит между C и A*». Расширение аксиомы эквивалентности и введение бесконечных приближений с избытком позволяет достичь в этом вопросе единого для геометрии и арифметики представления.

После того, как стандартным математикам было предложено начать дискуссию о том, чьи представления имеют право на существование, с доказательства непротиворечивости стандартной математики со всеми ее оговорками и противоречивым определением математической бесконечности, то вместо соответствующего доказательства был получен очередной изворот, что мол, К.Гедель доказал, что «*сие невозможно-с*». Действительно, «*невозможно-с*», потому что стандартная математика изобилует противоречиями, как бы их ни пытались ретушировать и скрывать за фасадом «*общепринятых*» символов.

В статье «О принципе *tertium non datur*» А.Н.Колмогоров назвал стандартную математику, содержащую немало противоречий, псевдоматематикой,[16] все выводы которой можно принять на том условии, что для них выполняется свойство псевдоистинности. Подобно тому, как теория теплорода, давно признанная неверной, способна давать те же формулы, что оказываются верными с точки зрения современной теории, стандартная математика во многих случаях дает те же формулы, что верны в интуиционистской математике. Но интуиционистская математика ставит своей целью приближение к истине, а не обеспечение комфорта, поэтому в ней отвергаются умозрительные условности, введенные в стандартной математике ради простоты. Развивая эти мысли А.Н.Колмогорова, выдающийся логик Г.Чейтин указал на существование предела для каждой

---

[12] Свифт Дж. Путешествия Гулливера. М., 1947. С.84
[13] Виленкин Н.Я. В поисках бесконечности. М.,1983.С.12
[14] Выгодский М.Я. «Начала» Евклида // Историко-математические исследования. Москва-Ленинград, Вып. 1, 1948. С.283
[15] Выгодский М.Я. «Начала» Евклида // Историко-математические исследования. Москва-Ленинград, Вып. 1, 1948. С.267
[16] Колмогоров А.Н. О принципе tertium non datur // Матем. сб., 32:4 (1925), 646–667

достаточно богатой теории, не позволяющий вывести для объекта *x*, обладающего колмогоровской сложностью (самой малой длиной совокупности знаков, задающей данный объект) универсальный алгоритм, адекватно отражающий всю совокупность знаков для полного описания данного объекта.

В отличие от стандартной математики, которая для описания бесконечной последовательности десятичной дроби *²√2=1,414…* считает достаточной запись *(²√2)²=1,(9)=2*, в которой содержится нетривиальное утверждение о непериодичности дроби *1,414…* и столь же нетривиальное утверждение о равенстве дроби и целого числа, в интуиционистской математике такой записи соответствует более подробный разбор приближений и аксиом, в котором, между прочим, находит подтверждение теорема Э.Цермело о возможности упорядочения любого бесконечного множества с применением аксиомы выбора Леви-Цермело, не зависящей от системы аксиом стандартной математики. Иначе говоря, такой подробный разбор приближений обнаруживает для объекта *x* (в нашем случае это может быть дробь *1,414…* или дробь *1,259…*) новое свойство упорядоченности, которое нельзя обнаружить в стандартных записях. Предел Чейтина, заложенный в философии интуиционизма, намного выше предела Чейтина стандартной математики, потому что философия интуиционизма, опираясь на понятие потенциальной (нескончаемой) бесконечности, позволяет выходить за рамки любых конечных записей, содержит возможность превзойти любую формальную теорию, то есть выходить по уровню сложности даже за рамки науки.

В этом смысле философия интуиционизма гораздо терпимее относится к религии, чем философия формализма, и воспринимает символы религиозной парадигмы как семантику, применяемую человеком во всех феноменах культуры, поэтому, в частности, выдающийся математик-интуиционист Л.Брауэр проявлял определенный интерес к мистике. Но и религиозная парадигма, выражаемая знаками того или иного священного писания для передачи религиозной истины, тоже не есть некий предел Чейтина для интуиционизма, который позволяет разуму свободно приходить к принципиально новым представлениям, которые более точно описывают явления, интересующие конкретного человека или человеческое общество.

Интуиционизм есть естественная среда разума, информационное поле, которое разум возделывает, видоизменяет, но и которое само воздействует на разум и совершенствует его, поэтому интуиционизм не отвергает голословно те или иные символы, описывающие истину, по неким формальным признакам. Философия интуиционизма не является при этом застывшей теорией, которой можно только «*служить*» (так, например, в интуиционизме Л.Брауэра не содержится никаких утверждений о периодичности десятичной дроби *1,414…*, о которых сказано выше). В христианстве эта возможность совместного «*служения*» и «*направления*», характерная для интуиционизма, перекликается с символом знания, которое открывает апокалипсический Агнец, берущий книгу, написанную внутри и отвне, из десницы Сидящего на престоле, так что тетраморф и двадцать четыре старца нарекают себя «*царями и священниками Богу нашему*» (Откр. 5, 10). Возможность одного только «*служения*» связывается в христианстве с образом сатаны и образом Зверя, имеющего рога, подобные агнчим, который «*заставляет всю землю и живущих на ней поклониться первому зверю, у которого смертельная рана исцелела*» (Откр. 13, 12). Другой аспект противостояния философии интуиционизма и формализма, содержащий аналог в религиозной парадигме христианства, состоит в том, что интуиционизм, критикующий некорректное применение принципа *tertium non datur* (с лат. «*третьего не дано*»), позволяет составить *триединое представление* целого числа, такое, которому эквивалентны бесконечные приближения как с недостатком, так с избытком. Именно такое триединое представление всячески пытается изгнать философия формализма, заключившая по этому поводу своеобразный «*договор с отцом лжи*».

За сотни лет развития стандартной математики произошло немало искажений и фальсификаций истории математической науки. Например, при изучении Евклидовой геометрии перестали упоминать о том, что в основе «Элементов Евклида» лежал трактат о доказательстве существования пяти и только пяти правильных многогранников (Платоновых тел).[17] Г.Кантор, желая обосновать введение понятия актуальной бесконечности, сумел убедить всех математиков, что иррациональные числа были приняты «*согласно их природе*» еще во времена Пифагора и Платона.[18] Хотя на самом деле иррациональные числа не могли быть приняты «*согласно их природе*» в древнегреческой математике хотя бы потому, что иррациональные числа – это дроби, а среди аксиом арифметики того времени содержалась аксиома неделимости единицы, не позволявшая рассматривать любые дробные числа. Выдающийся советский историк и философ математики С.А.Яновская указала еще на одно странное недоразумение в истории математики, связанное с понятием бесконечно малых величин и теоремой Мишеля Ролля.

Вот что сообщает по этому поводу С.А.Яновская: «*Всякий обучающийся теперь дифференциальному исчислению уже на первых шагах обучения сталкивается с теоремой Ролля. Но лишь немногим известно, что Ролль был горячим противником того самого дифференциального исчисления, успеху которого он содействовал не только своей теоремой, но и своими выступлениями против анализа бесконечно малых*».[19] Попытки Мишеля Ролля подвергнуть критике методы, ставшие стандартными методами анализа, были связаны с обозначением бесконечно малых величин. Мишель Ролль считал, что «*мы впадаем в противоречие, приписывая протяженность бесконечно малым dx и dy. И это противоречие становится тем большим, чем больше увеличиваем мы эту протяженность. Ибо, если мы берем, например, 4 вместо бесконечно малого dy, тогда равенство dy=θ изменится в 4=θ, и это противоречие станет бесконечно малым, если вместо 4 мы подставим бесконечно малую величину*».[20]

Мишель Ролль лукавил, когда вместо бесконечного малого значения брал число *4*, поэтому на его критику сейчас не принято обращать внимания: увеличение в бесконечно малых для *dy* не приводит к появлению сколь-нибудь ощутимой ошибки.

[17] Начала Евклида / Пер. с греч. и комм. Д.Д. Мордухай-Болтовского, ред. уч. М.Я. Выгодского, И.П. Веселовского. Москва-Ленинград, Т.III, 1950. С.309
[18] Кантор Г. К учению о трансфинитном // Новые идеи в математике. Сборник шестой под. ред. А.В.Васильева. СПб, 1914. С.99
[19] Яновская С.А. Методологические проблемы науки. М., 1972. С.76
[20] Там же, С.96

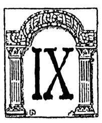
Но Ролль хотел обратить внимание, что некоторое противоречие все же возникает. Под обозначением θ алгебраист Ролль понимал абсолютное «*ничто*», которое получается в выражении *1–1=0*. Здесь он хотел оставаться формалистом и получать в бесконечно малых некие точные значения, как в арифметике целых чисел, но математика XVII века и даже методы самого Ролля уже содержали в скрытом виде аксиому эквивалентности *дроби* и *целого* числа. Ролль, похоже, интуитивно ее отвергал, но хотел каким-то образом углубить анализ, а основатели дифференциального исчисления столь же интуитивно ее принимали, находясь на более прогрессивных позициях, но при этом продолжали мыслить наборы аксиом арифметики как неизменные, инвариантные законы. Математическая истина, как установил Л.Брауэр, находится где-то посередине.

Непонятное для современного математика обозначение θ вместо привычного нуля, которое использовал Ролль, скорее всего, имело своим происхождением некое «*абсолютное равенство*», которое средневековые математики могли установить для десятичных дробей с периодом *(9)* и с периодом *(0)*, так как числом θ в древнегреческой алфавитной записи чисел обозначалось именно число *9*.[21] Как показывают правила перевода бесконечных десятичных дробей в обыкновенные, такое равенство (не как «*абсолютное*», а как одно из аксиоматических утверждений, следующих из употребления десятичных дробей), имеет место. Но дифференциальное исчисление, как Ньютоновское, так Лейбницевское, изначально учитывало, что различение понятий *целого числа* и *бесконечного приближения к целому* тоже имеет место, поэтому у таких критиков, как Ролль, конечно же, не было никаких шансов одержать победу. Иначе, в конечном счете, пришлось бы полностью отказаться от десятичных дробей и вернуться к той математике, которая существовала у древних греков.

Так как для развития анализа более предпочтительными оказались Лейбницевские представления (на том этапе развития они были единственно возможными), то более детальное изучение приращений и разрядностей различных бесконечно малых приближений было отнесено к области, не представляющей для математиков никакого интереса. В своем «Дифференциальном исчислении» Л.Эйлер это решение математиков «*забыть*» о приращениях бесконечно малых величин объяснял тем, что «*никаких глубоких таинств, как полагают обычно, что и делает исчисление бесконечно малых для многих чрезвычайно подозрительным, здесь не скрывается*».[22] Забвение оказалось продолжительным и достаточно плодотворным, без малейших сомнений на то, что когда-нибудь оно может привести к противоречиям, пока в XIX веке Р.Дедекинд, а вслед за ним Г.Кантор, не озаботились созданием единой аксиоматической базы для рассмотрения множества действительных чисел, которая бы учла существование как рациональных, так иррациональных чисел (чего, к их удивлению, в стандартной математике не было сделано).

Р.Дедекинд предложил ввести произвольное сечение для рассмотрения множества из рациональных и иррациональных чисел, а Г.Кантор пошел иным путем. Так как математики в XIX веке порядком подзабыли, что бесконечно малые величины могут обладать различной разрядностью приближений, он предложил аксиому о двух стягивающихся к нулевой точке отрезков. Основанием для такого предложения могло быть только допущение, что разрядности бесконечно малых приближений, вообще говоря, равны для пространств различных размерностей. Как следствие из этого некорректного допущения в канторовской теории бесконечных множеств тут же обнаружились апории (софизмы) актуальной бесконечности – по сути своей, те же самые апории Зенона, известные еще во времена античности. Потребовалось несколько десятилетий, чтобы Л.Брауэр доказал некорректность канторовской аксиомы, вновь поставив перед математиками вопрос о бесконечно малых величинах и их свойствах. Оказалось, что, вопреки убеждениям Л.Эйлера, в бесконечно малых величинах, к которым стандартная математика привыкла относиться с пренебрежением, все-таки содержатся некие «*глубокие таинства*».

Ответ на вопрос, что это за «*таинства*», позволяет получить перенос основных интуиционистских идей Л.Брауэра из топологии в арифметику, в результате чего становится возможно эффективное упорядочение таких последовательностей, которые возникают в достаточно большом классе бесконечных десятичных дробей, рассматриваемых в стандартной математике в качестве эффективно неупорядоченных последовательностей, а также обнаружить математический «*ключ Давида*» к негативному решению второй проблемы Д.Гильберта о содержании в стандартной арифметике аксиоматических противоречий – проблемы, которая, как доказал К.Гедель, не может быть разрешена в рамках стандартной математики.



Девятка как символическое обозначение Иисуса Христа,
употреблявшееся Рыцарями Христа и Храма Соломона

---

[21] С.А.Яновская по этому поводу оставляет заметку, что это нововведение Ролля, состоявшее в обозначении θ вместо нуля «*не было простой причудой: не хотел ли он подчеркнуть им, что рассматривает нуль не в его поместном значении, а именно как число? <…> Вряд ли это обозначение принято во избежание смешения нуля с буквой. Скорее наоборот: чтобы подчеркнуть оперативное сходство с ней*» (Яновская С.А. Методологические проблемы науки. М., 1972. С.81). Далее С.А.Яновская ссылается на трактат «Intérmediaire des mathématiciens», vol.II, 1895, где Г.Энештрём упоминает, что «*слово тета в смысле ничто встречается уже в одной работе, относящейся к 1503 году и озаглавленной "Opusculum de praxi-numerorum", которая ему кажется совпадающей с известным "Algorismus Sacrobosco"*».

Высокий уровень мистицизма средневековой и ренессансной математики, действительно, позволяет связать обозначение θ вместо нуля с получением дробей с периодом *(9)*. Тета (девятка) вместо «*ничто*» могла пониматься в те времена в том смысле, что «*ничто не отличает десятичные дроби с периодом (9) от целых чисел*», хотя средневековые мистики, ознакомившись с восточной математикой, уже имевшей некоторое понятие о десятичных дробях (упоминание о них содержится в трактате X века «Книга об индийской арифметике» Абу-л-Хасана Ахмада), судя по всему, наделяли это равенство и число *9* тайным смыслом, который мы встречаем, например, у рыцарей тамплиеров и масонов.

[22] Яновская С.А. Методологические проблемы науки. М., 1972. С.101

Список литературы

1. А. Перес-Реверте. Клуб Дюма или Тень Ришелье. М., 2003.
2. И. Лакатос. Доказательства и опровержения (Как доказываются теоремы). М.,2008.
3. В.П. Зубов. Николай Орем и его математико-астрономический трактат «О соизмеримости или несоизмеримости движений неба» // Н.Орем. О соизмеримости или несоизмеримости движений неба. В.П.Зубов. Трактат Брадвардина «О континууме». М., 2004.
4. Б.Л. ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. М., 1959.
5. М.Клайн. Математика. Утрата определенности / Под ред. И.М. Яглома. М., 1984.
6. И.М. Яглом. Герман Вейль. М., 1967.
7. Е.С.Кочетков, Е.С. Кочеткова. Алгебра и элементарные функции. Ч.I., М., 1966.
8. И.В. Арнольд. Теоретическая арифметика. М., 1938.
9. К. Циолковский. Нирвана. Калуга, 1914.
10. Дж. Свифт. Путешествия Гулливера. М., 1947.
11. Н.Я. Виленкин. В поисках бесконечности. М.,1983.
12. М.Я. Выгодский. «Начала» Евклида // Историко-математические исследования. Москва-Ленинград, Вып. 1, 1948.
13. А.Н. Колмогоров. О принципе tertium non datur // Матем. сб., 32:4 (1925), 646–667
14. Начала Евклида / Пер. с греч. и комм. Д.Д. Мордухай-Болтовского, ред. уч. М.Я.Выгодского, И.П.Веселовского. Москва-Ленинград, Т.III, 1950.
15. Г. Кантор. К учению о трансфинитном // Новые идеи в математике. Сборник шестой под. ред. А.В.Васильева. СПб, 1914.
16. С.А. Яновская. Методологические проблемы науки. М., 1972.