С.Л. Василенко, В.С. Белянин

Золотоносные наносы
(сокрытие тайны "экстремальной" энтропии)

Ваяли кубический шар,
а вышел шаровой куб.
Вещь стоящая,
жаль бесполезная…

На сегодня выявлено большое количество математических констант разного уровня значимости. Все они служат человеку во благо науки.

Так, число "пи" – абориген и почётный житель числовой оси. Его следы можно обнаружить везде, даже в области целых чисел.

Однако нет ни одного закона, специально ему посвящённого. Окружность не в счёт.

А вот с золотым сечением (ЗС) просто наваждение.

Многим оно не дает покоя, прямо как будто неиссякаемый кладезь будущего науки.

Законы так и сыплются, словно из рога изобилия... Штурм высоты ЗС продолжается непрерывно. Бумаг всё терпит.

И это, в конечном счёте, радует, несмотря на известные издержки. Ибо количество имеет свойство иногда преображаться в новое качество.

Из последних исследований нас заинтересовала работа [1], в которой прослеживается желание двух учёных – докторов технических наук – внести особый вклад в область знаний, связанную с золотым сечением.

Отсюда и броское название с эффектным подзаголовком « ...раскрыта еще одна тайна золотого сечения». – Что и говорить, впечатляет!

Нужно отдать должное большому старанию авторов [1], поскольку поднято сразу несколько проблемных вопросов. Среди них анонсирована энтропия, которая могла бы стать предметом самостоятельного расширенного (а не поверхностного) исследования.

Мы не ставим целью анализировать все тонкости-детали этой статьи.

Остановимся лишь на некоторых её спорных моментах и, на наш взгляд, существенных неточностях-погрешностях.

Их дальнейшее тиражирование считаем крайне нежелательным, поскольку уязвимое и никем не защищаемое поле ЗС и так изрядно проутюжено тяжёлой "бронетехникой".

В определённом смысле наше исследование является своеобразной рецензией, хотя и постфактум. Проведено оно, в том числе по просьбе ряда инициативных членов Академии Тринитаризма.

Одновременно мы поставили задачу донести до читателя собственное видение некоторых положений, касающихся ЗС. Пока в основном фрагментарно, но как нам представляется, достаточно системно.

Общая панорама. В аннотации [1] вводится новое понятие «*гармонического золотого сечения*», частным случаем которого выставляется «*классическое золотое сечение*». – Признаться, несколько неожиданный терминологический ракурс. Вместо математически выверенного единственного золотого сечения, в очередной раз обнародуется сомнительная идея о множестве ЗС. Уже сама по себе эта мысль способна отпугнуть часть заинтересованной аудитории. К тому же в русскоязычной практике для ЗС часто используется альтернативный термин "гармоническая пропорция"[1], поэтому в последующем возможна излишняя нежелательная путаница.

---

[1] Соврем. толковый сл. – http://ss1v.narod.ru/d4p670.html; энциклопед. сл. – http://www.edudic.ru/bes/13286/.

По установившимся правилам образования понятий, терминов и определений, если произносится "классическое ЗС", сразу подразумевается антипод "неклассического ЗС".

На "гармоническое ЗС" напрашивается возможность альтернативного существования некого "негармонического ЗС".

Но разве они существуют? И не много ли довесок для одной фундаментальной математической константы? – Налицо алогичность и математическое противоречие

Параллельно в аннотации озвучивается, заинтриговывая своим названием, «*энтропия суммы двух слагаемых разностного уравнения* (*иначе: системы, синтезированной из двух элементов*)».

Поскольку со «слагаемыми уравнения» не всё понятно, то второе разъяснение (синтез системы из двух элементов) сразу навеивает ассоциации, связанные с бинарным кодом.

Хотя, как потом окажется, это вовсе не так. Но всё по порядку...

1

Определение – отец учения. Несколько ключевых положений сгруппированы в отдельный блок определений. К ним есть замечания.

[1, **п. 1.1**] – «*Золотая пропорция – равенство отношений…Число Фидия* Ф=(1+√5)/2≈1,618 *в современной науке называется* "*золотой пропорцией*"».[2] – Нам не приходилось, кроме цитируемой статьи, встречать, чтобы число Ф называли "золотой пропорцией", видимо, потому, что число и пропорция – разные математические понятия. К тому же к Фидию это число имеет весьма отдалённое отношение.

«*До* 2010 *года для случая деления целого на две неравные части была известна лишь одна пропорция* – "*золотая*", *и слово* "*пропорция*" *утеряло первоначальный смысл* (*равенство двух отношений*)». – Слово "пропорция" – устоявшееся со времён Древней Греции математическое понятие, которое никогда не теряло первоначальный смысл и не может приобрести новый. А древние вавилоняне и позднее пифагорейцы уже знали теорему на пропорцию, которую сегодня помнит разве что редкий выпускник средней школы,

«из двух чисел a и b одно относится к их среднему арифметическому так, как их среднее гармоническое относится к другому числу» [2, с. 307]

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b\,.$$

Утверждение, что «*до* 2010 *года для случая деления целого на две неравные части была известна лишь одна пропорция*» говорит о неосведомленности авторов.

Факт деления отрезка на две неравные части не в золотой пропорции зафиксирован в работах средневековых арабских учёных. Подобные задачи были предметом рассмотрения и математиков эпохи Возрождения, среди которых отметим Кавальери (1598–1647) и Гетальди (1566–1627). Последний мастерски решал задачи на построение и рассмотрел, в частности, такую нетривиальную задачу [3]: разделить данный отрезок так, чтобы прямоугольник, построенный на частях, равнялся квадрату, построенному на разности частей. При этом нахождение точки сечения отрезка длиной a сводилось к решению геометрической пропорции $(a-x)x = (a-2x)^2$.

Кстати, не имея прямого отношения к ЗС, ответ здесь, тем не менее, содержит число ЗС:

$$x_{1,2} = \frac{a}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \;\Rightarrow\; \frac{a}{2+\Phi},\; \frac{a}{2-\phi}\,.$$

Площади прямоугольника и квадрата равны $a^2/5$.

---

[2] Текст авторов [1] здесь и далее выделен курсивом.

Затрагивая историю пропорции, напомним, как один из соавторов в своей статье когда-то наставлял: «*Как можно писать статью по истории "Золотого Сечения", не познакомившись с современной математической литературой по данному вопросу... Ведь это элементарное требование для любого научного работника: если о чем-то хочешь сказать, познакомься вначале с тем, что по этому поводу до тебя сказали другие*» [4].

Что ж, видимо, поучать других намного легче, чем самому штудировать груды книг в библиотеках. Если трудно осваивать научные издания далеких веков, то для ликвидации прорех в знании истории математики авторам [1] можно порекомендовать ознакомиться хотя бы с начальным курсом деления отрезков в различных пропорциональных отношениях, изложенным в легком для понимания "Приложении…" [5].

В обозримой ретро-перспективе (до 2010 г.) можно найти огромное количество самых разных видов пропорции (помимо золотого аналога) с делением целого на две части, включая, квадратное уравнение общего вида (*Tm*-гармоники), *p*-сечения и другие.

[1, **п. 1.2–1.3**] – Чтобы как-то заретушировать непоследовательность своих дальнейших операций, авторы прибегают к едва заметной мистификации: сначала определяют «*гармоническое среднее*», а затем «*гармоническую пропорцию*».

Древние греки были мудрыми математиками и начинали с определения свободной от числовых коэффициентов гармонической пропорции $(a-h):a$ = $(h-b):b$, в которой величина h была "скрепой". Аналогично выписывали арифметическую и геометрическую пропорции. Решали эти пропорции и получали три средние величины. Пропорции в своих определениях никаких числовых коэффициентов не содержали и не должны содержать.

В работе [1] даётся необычное определение гармонической пропорции (отличное от устоявшегося тысячелетиями аналога) с коэффициентом 0,5 $(a+b):b = b:(b-0{,}5h)$ и заявляют, что она обращается «*в тождество при любых положительных значениях a* и *b*». Ввиду того, что по их определению $h = h(a, b)$, которое предшествовало определению пропорции, то это и есть тождество, а не пропорция, которую надо решать.

Так можно договориться, что и очевидное тождество $1/a = a/a^2$ тоже будет пропорцией.

[1**, п. 1.4**] – Уравнение вида $z_{n+1} = mz_n + qz_{n-1}$ неверно представляется как «уравнение с переменными коэффициентами» m, q. Возможность их априорного назначения вовсе не означает переменность, поскольку в процессе образования рекурсии они строго неизменны. Поэтому в математике это возвратное уравнение с постоянными (!) коэффициентами.

[1, **п. 1.7**] – «*Аттрактор рекурсии, или просто – аттрактор* (*от англ.* attract – *привлекать, притягивать*) – *таким коротким термином теперь всё чаще называют максимальный по модулю корень характеристического уравнения рекурсии*». – Понятие аттрактора в рекуррентных последовательностях впервые стало использоваться в работах С. Василенко. Пока о широком распространении говорить не приходится. Поэтому на данном этапе употребления (а их в [1] около 80) явно не достаёт ссылки.

Авторы упоминают теорему Бернулли. Однако неясно как она сформулирована и когда была опубликована. Мимоходом упоминать имена великих людей в научной литературе не принято.

[1, **п. 1.10**] – «*Экстремальные виды сечения* – это "*бисекция*" $a = b$; $d = b - a = 0$ и "*редукция*" $d = h$; $b = (1+\sqrt{2})a$». – Редукция в логике и математике – логико-методологический приём сведения сложного к простому (лат. *reductio* возвращение, приведение обратно). Но значение "обратно" имеет смысл направления назад, как отражения. Например, запись числа цифрами в обратном порядке. В этом смысле $1/x$ – это не редукция x.

[1, **п. 1.11**] – «*Гармоническое золотое сечение – деление отрезка произвольной длины на части* a и $b = a\Phi$... *Классическое золотое сечение – частный случай гармонического золотого сечения, для которого... $a = \Phi$*». – Никакого различия не наблюдается. И то и другое представляет собой обычное ЗС. Несмотря на весьма туманную и неотчётливую терминологию вокруг слов "гармоническое" и "классическое".

Следуя логике образования терминов, по всей видимости, читателей в скором времени ожидает появление «арифметического ЗС» и «геометрического ЗС».

Во всяком случае, к этому подводит и одновременно поражает глубина мысли в предложении: «*Для гармонического золотого сечения соблюдается золотая пропорция*».[3]

Общее замечание ко всему подразделу п. 1. Заявлено, что «*основная цель данной работы: объяснить широчайшее распространение золотого сечения в природе, связав его с понятием энтропии*». Однако понятие "энтропии" в определения не вошло, как не попала и дефиниция "информации", с которой связывается энтропия. Как будет видно из дальнейшего изложения это не случайно, так как в данных вопросах в работе [1] наблюдается путаница.

- - - * - - -

Далее идёт «Постановка[4] проблемы». – Трудно сказать, что имеется в виду, когда утверждается, что «*требуется глобальная* (?) *переоценка роли золотого сечения*», «*золотое сечение остается величайшей* (?) *загадкой природы*», если ЗС – исключительно математический объект. Весь как на ладони. С давно определённым статусом.

Зато приведена довольно любопытная ссылка на большую англоязычную монографию (жаль, без указания страниц) [6], якобы «*экспериментальные данные показывают, если две части целого* (*элементы системы*) *находятся в соотношении золотого сечения, то они обеспечивают структурно-функциональную целостность и устойчивость этого целого (системы) при взаимодействии с внешней средой*».

Неподдельный интерес вызывает не столько текст о структурной устойчивости, что на уровне гипотезы можно встретить и в других литературных источниках, сколько подтверждение некими экспериментальными данными. Экспериментальные сведения – это данные научно поставленного опыта. О каких опытах идет речь?

... И есть ли примеры об обратном, то есть нарушении целостности, если две части целого (элементы системы) не находятся в соотношении ЗС? – На наш взгляд, подобные опытные данные в стократ превышают значимость всех вместе взятых гипотетических разговоров об энтропии ЗС.

Наконец, зачем-то цитируется весьма спорное высказывание А. Ивануса, которое заканчивается странным вопросом: «*самое главное здесь – это ответить "всего лишь" на один маленький вопрос*: *ПОЧЕМУ оно <ЗС> существует*? *Пока однозначного ответа нет*».

Такой «маленький вопрос» задавать всё равно, что спрашивать, почему существует число "пи" и отчего оно не равно трём? – И «самое главное» всю жизнь ждать откуда-то "маленького" ответа.

2

От заблуждения до истины один шаг. Затем авторы всерьёз намереваются «*исправить устоявшиеся веками добросовестные* (?) *заблуждения в теории возвратных последовательностей*». – Звучит довольно смело, особенно "устоявшиеся веками". Ну, и потом это больше математическая проблема, которую осветить на пальцах, а тем более исправить (даже если есть повод) весьма проблематично.

Поэтому представляет безусловный смысл проанализировать авторское видение этих самых заблуждений.

Тем более что они становятся базовым лейтмотивом всех дальнейших исследований.

---

[3] Почти как на уроке зоологии: «Слон – это хобот, уши и бегемот».

[4] По ходу статьи больше подходило формулирование проблемы и постановка решаемых задач.

1) «*Первое заблуждение*: *деление на неравные части в произвольном отношении пропорцию не образует... Это заблуждение мешало развитию теории золотого сечения в приложении к системному синтезу*».

Подобного заблуждения в теории пропорции никогда не было (см. наш комментарий к п. 1.1). Это заблуждение можно встретить там, где не умеют составлять элементарные пропорции. Допустим, надо разделить единичный отрезок на неравные части a и b в пропорции m к n. Составляем пропорцию: $a/(1-a) = m/n$. Откуда $a = m/(m+n)$, $b = n/(m+n)$. Пропорции более сложного вида рассмотрены, в частности, в работе [7][5] на примере характеристического уравнения $x^2 - mx - q = 0$ (рис. 1).

На теорию ЗС (со своей уникальной частной систематикой) это абсолютно не влияет.

К тому же один из авторов [1] в своих работах более 30 лет изучает p-сечения Пойа–Фибоначчи с прекрасной и наглядной пропорцией.

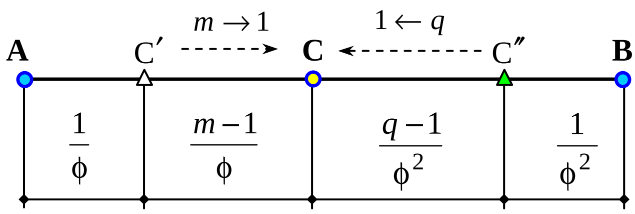

Рис. 1. Деление отрезка AB обобщенным сечением: $m \geq 1$, $q \geq 1$

2) «*Еще одно добросовестное* (?) *заблуждение состоит в том, что коэффициенты рекуррентного и характеристического уравнений должны быть постоянными*».

Это не заблуждение, а исходное допущение, например, для возможности аналитического разрешения задачи. При этом переменность коэффициентов подразумевает их изменчивость в динамике (обычно во времени), то есть в процессе применения рекуррентного соотношения.

То, что потом предлагается авторами не имеет ровно никакого отношения к вопросу о переменных коэффициентах.

Решается задача в общем виде с постоянными параметрами (в буквенном виде), значения которых перед началом счёта могут назначаться довольно произвольно.

Подобным образом работает абсолютное большинство физических и математических формул, зависящих от параметров.

Таким образом, авторская антитеза с претензией на новизну фактически сводится к нечёткости выражения и собственной (не самой лучшей) трактовке "переменных коэффициентов", – в противовес единодушному пониманию данного вопроса в математике ...

Здесь мы также видим истоки частого использования "среднегармонического значения": «*само название термина "гармоническое среднее" подсказывало возможность использования его в теоретическом исследовании золотого сечения, как неиссякаемого источника вселенской гармонии*».

Заметим, что упомянутый термин не имеет столь близкого отношения к гармонии. Речь идет главным образом о гармоническом или частотном анализе [8] при разложении исходной функции на элементарные составляющие – гармонические колебания $e^{i\omega x}$ с разными частотами ω (преобразование Фурье).

[5] Термин и сама идеология «обобщения золотого сечения» нами позже были признаны неправильными.

В крайнем случае, можно провести отдалённые аналогии с теорией музыки в контексте частотных характеристик звуков через сложение обратных величин. Так, если длину струны уменьшить вдвое, то тон повысится на одну октаву. Уменьшение в отношении 3:2 или 4:3 соответствует музыкальным интервалам квинты или кварты.

То есть "гармоническое среднее" нескольких величин связано с понятием гармонии в её широком смысле не больше чем среднеарифметическое, среднегеометрическое или будь какое-иное <статистическое> оценивание выборки вещественных чисел. Никаких преференций среднегармоническое для гармонии не имеет.

Обычная игра слов-омонимов – одинаковых по написанию единицы языка. Без связи и без взаимного смысла-пересечения. Исключительно по форме образования, – через обратные величины.

Если уже и говорить о средних значениях действительных величин (по Колмогорову) [9], то к золотому сечению ближе всего *среднегеометрическое* значение [10]:

длина большего отрезка x есть среднее геометрическое, или, как часто говорят, среднее пропорциональное двух длин: всего отрезка c и его меньшей части $x = \sqrt{c(c-x)}$.

3) «*Третье заблуждение: геометрическая прогрессия – это только рекуррентное уравнение* (*возвратная последовательность*) 1-*го порядка вида* $f_{n+1} = a \cdot f_n$. *Это показал, например, ещё в* 1950 *году А.Маркушевич* [11, с. 6]».

Здесь отражено не заблуждение, а классическое определение геометрической прогрессии. Маркушевич тут не причём. Он просто привёл пример, однако, не утверждал, что это единственное представление!

А то, что геометрическую прогрессию можно дополнительно выразить иными способами, – отдельный вопрос. Пожалуйста... Только причём здесь заблуждение?

Напомним, что своё название прогрессия получила из-за очевидного свойства $z_n = \sqrt{z_{n-1} z_{n+1}}$, согласно которому каждый положительный член равен среднегеометрическому своих соседей.

Но это нисколько не мешает, представить геометрическую прогрессию, что называется "на ходу", в виде двучленно-аддитивной рекурсии второго порядка (путем элементарного сложения двух самоочевидных равенств):

$$z_{n+1} = g z_n, \quad z_n = g z_{n-1} \quad \Rightarrow \quad z_{n+1} = (g-1) z_n + g z_{n-1}. \tag{1}$$

Весь вопрос: а зачем? – В крайнем случае, следует показать имеющиеся преимущества такой модели – числового генератора.

4) «*Четвертое заблуждение: рекуррентное уравнение золотого сечения* 2-*го порядка – это единственное уравнение вида* $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, *о чём можно прочитать в любой* (?) *публикации, посвященной золотому сечению*».

То есть заблуждением считается единственность возвратного уравнения ЗС аддитивной формы (по Фибоначчи). – Довольно категоричное утверждение, и вдобавок ошибочное. Можно порекомендовать для ознакомления работу [12].

Цитируемое уравнение второго порядка действительно одно, когда речь идёт о целочисленных коэффициентах, не считая их масштабирования типа $f_{n+2} = k f_{n+1} + k f_n$.

Именно поэтому оно чаще других приводится в литературе, особенно в теории чисел, изучающей целые числа.

Но без всяких заблуждений становится очевидным, что любое характеристическое квадратное уравнение вида $(x+\lambda)(x-\Phi) = 0,\ |\lambda| < \Phi$ приводит к эквивалентному рекуррентному уравнению второго порядка $x_{n+1} = (\Phi - \lambda) x_n + \lambda \Phi x_{n-1}$, которое предельным отношением x_{n+1}/x_n также сходится к числу ЗС.

Подводя итог четырём анонсированным "заблуждениям", можно сказать, что всё обстоит как раз наоборот. Сдаётся, что сами авторы [1] вольно или невольно оказались в силках собственных фантазий.

Похоже, не они вытаскивают теорию возвратных последовательностей из заблуждений, а самих авторов необходимо выводить из царства-лабиринта сладких "золотых" грёз.

3

Исходные предпосылки учёных [1] весьма неоднозначны, местами противоречивы. Это не могло не отразиться на ходе последующего изложения.

Прямым следствием "борьбы с заблуждениями" стала нетвердая расстановка акцентов и приоритетов, когда освещение энтропии и тем более раскрытие её тайны как-то незаметно оказались на втором плане, а само упоминание о них – ближе к тезисному изложению.

Завершающим результатом такого подхода стала слабо обоснованная теза о «золотоносной максимизации энтропии».

a) Авторы утверждают [1, п. 3.1]: «*О золотой пропорции сейчас пишут в школьных учебных пособиях и математических справочниках большинства стран мира*». – Такие широковещательные заявления желательно подтверждать. В России, например, ни в одном школьном учебном пособии о ЗС не говорится ни слова. – Жаль, конечно. Но это так.

b) Далее записывается [1, п. 3.1] очевидное тождество $\frac{a+b}{b}=\frac{b}{b-h/2}$, где $h=\frac{2ab}{a+b}$. Оно называется гармонической пропорцией на том основании, якобы при $b-h/2=a$ или $d=h/2$ образуется золотая пропорция.

Действительно, элементарные тождественные преобразования дают

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b(a+b)}{b^2+ab-ab} = \frac{b}{b-\dfrac{ab}{a+b}} = \frac{b}{b-h/2}.$$

Данное равенство тождественно выполняется на всём множестве значений входящих в него переменных. Оно верно при любых величинах переменных: положительных или отрицательных, действительных или комплексных.

То есть пропорция отражает обычное тождество!

Подобных соотношений можно составить невообразимое количество, например

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{a+b}{1}, \qquad \frac{a+b}{1}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}.$$

Они ничего не решают, а лишь уравнивают адекватно-эквивалентное представления очевидных алгебраических отношений.

Что-то вроде простого равенства чисел, например, 3:6 = 1:2.

«*Назовем новую пропорцию* (4) *гармонической, так как в нее входит гармоническое среднее* h. *Отметим универсальность гармонической пропорции, которая справедлива при любых* $b \ge a > 0$». – Если в какую-либо пропорцию ввести арифметическое или геометрическое среднее, то она не станет от этого ни арифметической, ни геометрической. И в чём выражается «*универсальность гармонической пропорции*», если на неё наложено достаточно сильное ограничение $b \ge a > 0$?

c) Авторы делают допущение [1, п. 4.1]: «*Гармоническое среднее* h *двух аттракторов будем считать постоянной величиной, разность* d *– случайной переменной величиной*». – В их обозначениях $h = 2ab/(a+b)$, $d = b-a$. Из постоянства величины h следует $1/a + 1/b =$

const, и непонятно, как должно выполняться это равенство при случайных (!) переменных величинах a и b.

d) «*Золотое сечение обеспечивает равновесие аддитивных и мультипликативных свойств ... на примере ряда Фибоначчи*». – Ничего подобного в рекурсиях нет. Пример трёх начальных чисел Фибоначчи (1, 2, 3) не показателен. Достаточно изменить начальные условия, в частности, перейти на числа Люка, и приращения уже не дают арифметической прогрессии даже на стартовом отрезке образования чисел. Вообще здесь явно прослеживается типичная погрешность в тождественности рассмотрения золотого сечения и последовательностей Фибоначчи, хотя это совершенно разные математические конструкции.

e) «*Любая возвратная последовательность 2-го порядка с аттрактором* $a \neq 1$ *способна генерировать геометрическую прогрессию, если начальные условия приведены к степеням аттрактора*». – Только одних начальных условий мало. Необходим также соответствующий вид возвратного уравнения и значения его коэффициентов.

f) Примечательны противопоставления с подменой смыслов. Так, приводится ссылка на А. Маркушевича [11, с. 6]: «…*геометрическая прогрессия является возвратной последовательностью первого порядка, … арифметическая прогрессия является возвратной последовательностью второго порядка*».

Далее следует ортодоксальное умозаключение «*Однако пример* 4 *показал, что, если начальные условия* f_0 *и* f_1 *приведены к целым последовательным степеням аттрактора, возвратная последовательность* 2*-го порядка* $f_{n+2} = 1{,}854 f_{n+1} - 0{,}382 f_n$ *также генерирует геометрическую прогрессию*».

Этим ставится под сомнение утверждение А. Маркушевича. Хотя здесь не должно быть никаких "но" или "однако", поскольку его утверждения абсолютно точные. Ведь он не говорит, что геометрическая прогрессия является только и исключительно только возвратной последовательностью первого порядка.

g) «*Если считать золотым такое сечение, которое подчиняется золотой пропорции, то любому значению гармонического среднего* h *соответствует* <u>*свое золотое сечение*</u> *с разностью аттракторов* $d = 0{,}5h$ *и соотношением аттракторов* $b/a = \Phi$».

Вольно или невольно, но здесь обнаруживается ложный посыл на множество золотых сечений, хотя в действительности оно одно-единственное. При золотом сечении единичного отрезка $a + b = 1$ величина $h = 2b(1-b) = 2\phi^3$ строго фиксирована, и любое гармоническое среднее h не может образовать любое ЗС!

Так происходит передёргивание акцентов и смыслов. Якобы отрезки разной длины (именно это вытекает из "любого значения" h) имеют своё золотое сечение (?).

h) Авторы мучаются над решением задачи, «*на какие части следует разделить отрезок длиной в* 9 *единиц, чтобы получить золотое сечение*», хотя ответ, что называется, на поверхности: $a = 9\phi,\ b = 9\phi^2,\ \phi = \Phi^{-1} = \left(\sqrt{5}-1\right)/2$.

i) «*Энтропия суммы двух слагаемых разностного уравнения*» (с. 1), «*Гармоническому золотому сечению соответствует золотая пропорция*» (с. 5), «*Постоянное противоборство аддитивных и мультипликативных свойств ряда Фибоначчи*» (с. 16), «*Аддитивные свойства, символизирующие Хаос*» (с. 21), «*Разгадка тайны золотого сечения*» (с. 21). – Подобные выражения противоречивы, математически некорректны, потому комментарии излишни. Равно как и заключительная фраза: «*в своем поведении будем стремиться к максимальной энтропии*» (с. 21). – Удачи!

Отдельно об энтропии. Понятие энтропии довольно тонкое. Его применение в каждом конкретном случае требует подробного пояснения. Что подразумевают авторы [1] под энтропией какого-либо уравнения или деления отрезка на две части, неизвестно.

Связанные с этим вопросы в статье не поднимаются. Но без ответа на них разговор получается малопродуктивным.

Даже если не задавать многие напрашивающиеся вопросы, а просто формально посмотреть на декларируемые утверждения, то и в этом случае обнаруживаются существенные погрешности.

Выпишем для конкретности некоторые утверждения [1], как и раньше курсивом, и проанализируем их.

«*Нас далее будет интересовать только ИНФОРМАЦИОННАЯ энтропия, которую иначе называют энтропией Шеннона*».

Обратившись к основополагающим работам К.Шеннона [13], можно увидеть, что в теории связи он использует два определения понятия "информации".

Одно из них связано с энтропией Больцмана и является мерой неопределенности при статистическом описании систем. Второе выражается через разность значений безусловной и условной энтропий. Какой-либо конкретизации как в тексте [1], так и в начальных определениях не даётся.

Если бы применительно к рассматриваемому вопросу они изначально конкретизировали смысл весьма пространных понятий "вероятности", "информации" и "энтропии", то их текст был бы другим или, возможно, совсем бы не появился на свет.

Им пришлось бы объяснять, на каком основании и по какой логической цепочке они применяют эти представления к отрезку, разделенному по ЗС.

«*Гармоническое золотое сечение обеспечивает максимум энтропии рекурсии*».

Энтропия – мера беспорядка или неопределенности в системе.

Напротив, информация – мера порядка, мерило структурной определенности.

Максимальной энтропии соответствует состояние, близкое к хаосу, и практически исчезающая информация.

Другими словами, если принять авторскую точку зрения о том, что «*гармоническое золотое сечение*» имеет максимум энтропии, то в таком случае оно практически не несёт информации.

Получается некая бесполезная "пустышка" с информационной точки зрения.

«*Замкнутая система с максимальной энтропией обладает динамической устойчивостью* (2*-й закон термодинамики*)*, что и объясняет широкую распространенность золотого сечения в природе и творениях человека*».

Учитывая вышеизложенное, роль «*замкнутой системы с максимальной энтропией*» (читай ЗС) для человека в информационном плане наоборот ничтожна.

«*Согласно второму закону термодинамики, энтропия системы монотонно возрастает до установления равновесного состояния*».

Декларация термодинамических истин никоим образом не проясняет связь между информацией, энтропией и ЗС отрезка. Вопрос, как определена энтропия, которая возрастает при делении отрезка, авторы оставляют без ответа.

«*Скорее всего, золотое сечение было известно еще до Пифагора*». – Чтение подобных, ни к чему не обязывающих фраз, навевают воздушно-заоблачные мысли.

Не хватает сил, чтоб удержаться и не написать: скорее всего, до того, как Земля стала круглой, она была квадратной.

А теперь несколько слов о математических преобразованиях авторов.

После несложной замены или масштабирования параметров пропорции $(a, b) \Rightarrow (h, d) = \left(\frac{2ab}{a+b},\ |a-b|\right)$ возвратное уравнение второго порядка, приводящее к большему аттрактору a, приобретает вид

$$f_{n+1} = (h-d)f_n + 0{,}5hd \cdot f_{n-1}.$$

Слагаемые в правой части умножаются и делятся на h

$$f_{n+1} = \left(1 - \frac{d}{h}\right)hf_n + \frac{d}{h}0{,}5h^2 f_{n-1},$$

или

$$f_{n+1} = p_1(hf_n) + p_2\left(0{,}5h^2 f_{n-1}\right), \qquad (1)$$

где $p_2 = d/h,\ p_1 = 1 - p_2$.

<u>А сейчас, – внимание, – самый главный математический "трюк"</u>.

Правая часть рассматривается как «*сумма двух слагаемых с априорными вероятностями* p_1 и p_2 "*участия*" *которых в синтезе переменны и выражены через отношение* d/h». Равенство вероятностей $p_1 = p_2 = 0{,}5$ в информационной системе соответствует максимальной энтропии. Но к этому равенству приводит и условие ЗС $h = 2d$.

Отсюда делается вывод, что «*золотому сечению соответствует максимум энтропии*».

Отменно!

Правда, в своих окружных числовых манипуляциях авторы упустили из виду, что вероятности теперь "пристёгнуты" не к событиям f, а к совершенно иным величинам $hf_n,\ 0{,}5h^2 f_{n-1}$ с неотчётливым физическим содержанием.

Использование соотношения "Информация" = $f(p)$ допустимо только в том случае, когда величина p имеет смысл термодинамической вероятности! Ибо только в этом случае единица энтропии может найти применение для оценки-измерения информации.

Преобразования авторов, не утруждающих себя пояснениями термодинамических вопросов, не могут не удивлять.

Стóит в (1) вместо h подставить $2d$, и от псевдовероятностей не остаётся и следа:

$$f_{n+1} = 0{,}5(2df_n) + 0{,}5\left(0{,}5 \cdot 4d^2 f_{n-1}\right) = df_n + d^2 f_{n-1}.$$

И потом, <u>сложение вероятностей</u> $p_1 + p_2 = 1$ по классической аксиоматике Колмогорова <u>имеет смысл для непересекающихся множеств</u> (событий), хотя f_n и f_{n-1} таковыми не являются, будучи функционально связанными рекурсией.

Остаётся поздравить авторов с хорошо составленной тавтологически-круговой[6] манипуляционной задачей. Возможно, в будущем она найдёт своё место в задачнике по математике с тезой «Найди ошибку».

Жаль только, что погрешность уже транспонирована учёными и возведена в ранг закона. Немного поторопились.

Можно также добавить, что положительные числа, похожие на вероятности наличием суммы $p_1 + p_2 = 1$, можно выудить или наоборот внедрить в практически любые возвратные уравнения простым преобразованием.

[6] Тавтология (в математической логике) – то же самое, что тождественно-истинные высказывания.

Например, двучленно-аддитивная модель общего вида после элементарного масштабирования коэффициентов m, q приобретает вид:

$$z_{n+1} = mz_n + qz_{n-1} = p_1(m'z_n) + p_2(q'z_{n-1}),$$

где $m' = m/p_1$, $q' = q/p_2$, $p_2 = 1 - p_1$.

Следуя самобытной логике наших авторов, получается вероятностное суммирование.

Хотя таковым не является. Ибо числа p_1, p_2 не имеют здесь реального вероятностного смысла (содержания).

Простой вопрос «вероятности чего?», – остаётся без ответа.

На страницах [1] приводится русская пословица: «Мешай дело с бездельем, проживешь век с весельем». Не менее поучительно звучит её более полный вариант: «Не умеешь делать дело, займись бездельем, проживешь век с весельем».

О множестве гармонических ЗС. Если угодно оперировать категориями и понятиями теории множеств, то в принципе вполне допустимо говорить о множестве гармонических ЗС. Большой ошибки не будет. Единственное уточнение: это множество состоит из одного единственно элемента, равного числу Φ.

Понятно, ни о каком обобщении ЗС как числа говорить не приходится.

Так, число π одинаково работает для всех мыслимых окружностей. В определённом смысле оно универсализирует общую закономерность, увязывая величину прямолинейного диаметра и длину криволинейной окружности.

Но никто не называет его за это обобщённым или гармоничным.

Так и число ЗС – одно на все отрезки конечной длины. Однако не так, что для каждого отрезка своё ЗС. Каждому отрезку – конкретная точка ЗС, но по единому правилу, в основе которого лежит число Φ. И в этом контексте фундаментальные константы π и Φ похожи.

Заключительные положения. Следует отметить особую изобретательность исследователей при внедрении максимальной энтропии в ЗС.

Отдельные алогизмы запрятаны так глубоко, что их сразу не распознаешь. Потому к работе [1] возникает дополнительный неподдельный интерес.

Что можно выделить особо?

1. Прежде всего, отметим ошибочность исходной предпосылки о существовании преемственной связи между *гармонией* и *гармоническим средним*.

Орфографическая идентичность и родственные корни родословной этих понятий, как мы видим, способны сыграть недобрую шутку, по сути, ориентируя поиски-исследования в неверном направлении.

На математическом языке гармоническое среднее h и разность d двух числовых величин a и b – это тривиальная замена-масштабирование параметров $(a, b) \Rightarrow (h, d)$, что не привносит никаких преимуществ.

Нет ни одного утверждения основанного на свойствах (h, d), которое нельзя сформулировать на языке параметров (a, b) и наоборот.

2. Красной нитью через работу [1] проходит мысль, что аддитивная последовательность способна генерировать геометрическую прогрессию.

В целом изложение довольно запутано с неотчётливой конечной целью.

Зачем-то используются величины a и b, особые начальные условия, нецелочисленные (в общем случае) коэффициенты, приводятся неубедительные примеры и т.п.

Хотя задача решается очень просто (с одним начальным числом z_0 и знаменателем прогрессии g): $z_{n+1} = (g-1)z_n + gz_{n-1}, \quad z_1 = gz_0$. Например, степенной ряд 2^n генерируется с помощью суммирующей рекурсии ($g = 2,\ z_0 = 2^0 = 1$): $z_{n+1} = z_n + 2z_{n-1}$.

Более любопытным здесь становится не столько сама аддитивная форма (это элементарно), сколько раскрытие закономерностей, как такое суммирование (именно суммирование!) приводит к целому набору уникальных свойств, например:

z_{n-1} – наименьшее число, имеющее n делителей;

$z_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$ – сумма чисел в n–й строке треугольника Паскаля; сумма коэффициентов в разложении $(x+1)^n$;

$z_n = kz_{n-1} + (4-2k)z_{n-2}$ для любого натурального k;

z_n – число перестановок из $1 \div n$, в частности $2^4 = 8$: 1234, 1243, 1324, 1342 и их реверсы;

z_n – наименьшее число, не являющееся суммой любого количества различных предшествующих членов ряда;

$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = 2$ и другие.

3. Конечно, можно попытаться найти связующие линии между золотым сечением и энтропией. Так, если энтропия – мера беспорядка системы, то аддитивно-двучленное возвратное уравнение дает абсолютно точные сведения о каждом члене последовательности. Значит, неопределённости нет, энтропия минимальна и равна нулю.

Геометрически золотое сечение – единственно, не считая его "зеркального" отражения.

Его местоположение целиком обусловлено и известно с бесконечно большой точностью. Никакой недосказанности нет. Полная информационная определённость. Следовательно, энтропия нулевая.

Более того, рассматривая метрическую энтропию, описывающую хаотичность динамики в системе с совершенно произвольным (случайным) набором начальных условий (F_0, F_1) в модели $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, мы всегда, независимо от первоначальной сумбурности траектории, рано или поздно выходим на единственный и абсолютно ожидаемый аттрактор – число золотого сечения.

Только в одном единственном случае мы не сможем достичь золотого аттрактора. Если из множества точек бесконечной плоскости (в общем случае точек мнимых чисел), произвольно выбирая начальные условия, случайно попадём в начало или координатный центр $F_0 = 0$ и повторно наудачу снова попадём в эту же нулевую точку $F_1 = 0$.

О какой максимальной энтропии можно здесь говорить? – Даже, если бы вместо нас метал кости всесильный бог (по Эйнштейну), то и он вышел бы за пределы двух нулей. Чему есть теологическое подтверждение в виде существования мироздания.

Чем руководствовались авторы работы [1] в своих окончательных выводах, нам не ведомо. Одно только понятно, что в отношении «ЗС – энтропия» прослеживается не максимум, а минимум последней.

Золотое число Ф – единственное число, проявление свойств которого требует своего абсолютного числового выражения через корень из пяти без сколь-нибудь мельчайшей погрешности. Иначе происходят самопроизвольные бифуркации [14].

В подобных ситуациях всегда хочется понять, существует ли вообще нетривиальный взгляд на число Ф и его привязку к энтропии?

Есть ли в этом взгляде какой-то потенциал, перспектива? – На наш взгляд, что-то есть.

Достаточно воспроизвести соображения на счёт абсолютной строгости ЗС. Когда вследствие его идеальности ничего не остаётся для системных связей и, достигнув точки "золотоносного" совершенства, система самопроизвольно распадается.

Причём не обязательно разрушается. Могут возникнуть совершенно иные состояния типа "гусеница – бабочка", появление новых объектов в результате деления клетки и т.п.

Так что исследование энтропии как меры беспорядка и функции состояния системы, состоящей из многих элементов, здесь вполне допустимо.

Если уже и пытаться как-то устанавливать генетическую связь в отношении «ЗС – энтропия», то в первом приближении мы бы её сформулировали следующим образом:

Двучленно-аддитивная рекурсия с единичными коэффициентами обеспечивает минимум метрической и динамической энтропии в достижении золотого сечения независимо от случайного выбора начальных условий.

С точки зрения предельного отношения соседних элементов в формирующихся рекуррентных последовательностях любой опыт (испытание) имеет одинаковый исход – в виде числа ЗС. Следовательно, мера его неопределённости – нулевая.

При этом *метрическая энтропия* описывает хаотичность динамической системы с инвариантной мерой для случайного выбора начального условия по этой мере.

Топологическая энтропия характеризует хаотичность динамики без предположения о законе выбора начальной точки.

Другой существенный момент связан с причинно-следственной обусловленностью:

не последовательности Фибоначчи как таковые (с разными начальными условиями) приводят к единственному аттрактору – золотому сечению, а п р о ц е д у р а.

В частности, такая процедура может служить моделью динамической системы, алгоритмом структурирования и т.п.

Вместо окончания. Что ни говори, а золотоносные истоки как на виду: надёжны, вразумительны, достоверны...

Но дальше по течению вода становится всё полноводнее и мутнее.

"Золото" постепенно исчезает в пучине волн... Оставляя нам своё зазеркалье в виде золотоносных наносов.

Потому отыскать заветные крупицы становится всё более проблематичным.

Вот и анонсированное раскрытие тайны нашими уважаемыми визави обернулось хлопком радужно-воздушного шарика, как в художественном, так и в научном понимании.

Так бывает. Ничего неприглядного в этом нет.

От ошибок никто не застрахован.

Нужно быть только чуть внимательнее. Искренне любить своего читателя.

Выдвижению серьёзных положений-заключений должен предшествовать не менее обстоятельный самокритичный анализ.

Что касается информационной сущности ЗС и связанной с этим энтропией, то проблематика остаётся открытой.

Во всяком случае, утверждать обратное на сегодня оснований нет.

Все шлагбаумы к тайнам по-прежнему отворены.

Осталось за малым: наудачу верно определить направление движения...

Литература:

1. *Владимиров В.Л.*, *Стахов А.П.* Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16523, 22.05.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321199.htm.
2. *Депман И.Я.* История арифметики: 2-е изд., испр. – М.: Просвещение, 1965. – 416 с.
3. *Ghetaldi.* De resolution et compositione mathematica, libri quinque. Opus posthumum, Rome, 1630.
4. *Стахов А.П.* Еще раз о математической истории Золотого Сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13714, 25.08.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321029.htm.
5. *Приложенiе* алгебры къ геометрiи для среднихъ учебныхъ заведенiй // Составилъ Я. Блюмбергъ. – СПб.: 1882.
6. *Stakhov A.* Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. – N.Y.: World Scientific, 2009. – 694 p.
7. *Василенко С.Л.* Аналитика "золотых" пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.
8. *Гельфанд И.М.*, *Виленкин Н.Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 472 с.
9. *Колмогоров А.Н.* Математика и механика // Избранные труды. – М.: Наука, 1985. – Т. 1. – С. 136–138.
10. *Бендукидзе А.Д.* Золотое сечение // Квант. – 1973. – № 8. – С. 22–27.
11. *Маркушевич А.И.* Возвратные последовательности. Серия «Популярные лекции по математике». – М.: Гостехиздат, 1950. – 48 с.
12. *Василенко С.Л.* Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.
13. *Шеннон К.Э.* Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 830 с.
14. *Василенко С.Л.* Бифуркации в нелинейной динамической модели, основанной на "золотой" пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15232, 14.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322037.htm.