Олег Черепанов

ОТ «ЗОЛОТОГО» СЕЧЕНИЯ К «БРИЛЛИАНТОВОМУ» КЛЮЧУ

Уникальность чисел Фидия $\varphi = 0.618...$ и $\Phi = 1.618...$ заключается в том, что они принадлежат множеству $\{\varphi^n\}$, которое при $n = \pm1, \pm2, \pm3, ...$ состоит из членов геометрической прогрессии. То есть, ряд $\{\varphi^n\}$ строится мультипликативно, но при этом обладает аддитивным свойством рекурсии: $\varphi^n = \varphi^{n+1} + \varphi^{n+2}$. Причем единичный морфизм данного ряда не является диофантовым, если из рассмотрения исключить нулевые степени «золотых» оснований φ и Φ. Однако при этом возникает проблема выбора единицы «золотой» арифметики из нескольких выражений: $1 = \varphi \cdot \Phi$, $1 = \Phi - \varphi$, $1 = \Phi^2 - \Phi$, $1 = \varphi + \varphi^2$, $1 = 2\varphi - \varphi^3$ и $1 = 2\varphi^2 + \varphi^3$. Для ее решения требуется найти формальный источник видимого разнообразия представлений единицы Фидиевыми скалярами – «большим» Ф и «малым» φ. Но прежде необходимо утвердить безупречный способ определения самих чисел Ф и φ, выступающих в качестве первоосновы.

В геометрии значения Ф и φ приписывают определенным отрезкам при назначении одного из них масштабом. При этом в [1] показано, что арифметика и геометрия не имеют общей единицы. Поэтому будем исходить из аддитивно-мультипликативной связи целых степеней чисел Ф и φ, предполагающей, что «малый Фидий» определяют свойства $q^{n+1} = q^n \cdot q$ и $q^n = q^{n+1} + q^{n+2}$ основания q геометрической прогрессии при натуральных показателях n = N. Тогда решение $q = \varphi$ получается как первый корень квадратного уравнения $1 = q + q^2$. А его вторым корнем является «большой Фидий» Ф со знаком «минус». При этом множество действительных корней X_N уравнения А) $x + x^N = 1$ и первых решений Y_{N-1} уравнения Б) $y - y^{1-N} = 1$ известные авторы [2,3] считают *s*- и, соответственно, *p*-обобщениями «золотой» пропорции, получаемой из (А) и (Б) при натуральном $N = 2$. И хотя есть несколько способов инициации чисел Ф и φ из множеств $\{s\}$ и $\{p\}$, в сравнении с другими их членами свойства «золотой» пропорции просто уникальны.

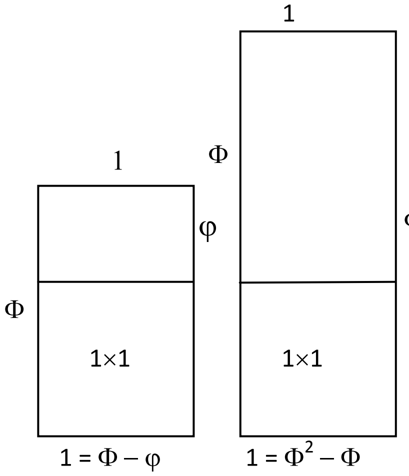
Перемножим тождества А′) $1 = X_N + X_N^N$ и Б′) $1 = Y_{N-1} - Y_{N-1}^{1-N}$. В результате с учетом $X_N \cdot Y_{N-1} = 1$ получим равенство $X_N^{N-1} - X_N^N = X_N^{2N-1}$, члены которого имеют степени $N-1$, N и $2N-1$, связанные рекурсией: $(N-1) + N = 2N-1$. А при $N = 1,2,3,4,...$, когда $X_1 = 0.5 = d$, $X_2 = 0.618... = \varphi$, $X_3 = 0.682... = e$, $X_4 = 0.725... = f$ и т. д. полученное равенство порождает ряд бинарных форм $d^0 - d^1 = d^1$, $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$, $e^2 - e^3 = e^5$, $f^3 - f^4 = f^7$ и т. д., где разность членов слева от знака равенства равняется их произведению. При этом показатели степени данных членов складываются в показатель степени члена справа. Но в форме $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$ эти показатели не только рекурсивны ($1 + 2 = 3$), но и последовательны. А ее уникальные свойства позволяют считать данную форму «бриллиантовым» ключом от «золотой» пропорции.

Выше отмечено, что члены φ^N геометрического ряда, получаемые мультипликацией, то есть умножением «золотого» основания, кроме того рекурсивны. Ведь $\varphi^N = \varphi^{N+1} + \varphi^{N+2}$ и, значит, старший член равен сумме двух предъидуших. Причем свойство рекурсивной аддитивности элементов множества $\{\varphi^N\}$ распространяется на отрицательные показатели степени. А принимая числа Фидия постулатом «золотой» арифметики можно сообщить им метрические свойства как аксиомам, порождающим единицы и двойки со смыслом площадей разного знака, что придает «бриллиантовому» ключу геометрическую интерпретацию.

Равенство $\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$ разделим на φ^2, а нормированную единицу $1 = \Phi - \varphi$ умножим на 1. Тогда произведение $1 \times 1 = (\Phi \times 1) - (\varphi \times 1)$ приобретает смысл единичного квадрата, вычитание которого из прямоугольника $\Phi \times 1$ дает прямоугольник площадью $\varphi \times 1$. (*Рис*. 1.)

Теперь пронормируем «бриллиантовый» ключ по φ^3 и единицу $1 = \Phi^2 - \Phi$ также умножим на 1. Тогда вычитание единичного квадрата 1×1 из площади $\Phi^2 \times 1$ оставит от нее площадь $\Phi \times 1$. И выходит, что площади φ и Φ^2 одинаково (на -1^2 и на $+1^2$ соответственно) отличаются от площади Φ, то есть контрсимметричны относительно нее. При этом выделяются две единицы: положительная $[+1] = \Phi^2 - \Phi$ и отрицательная $[-1] = \Phi - \varphi$.

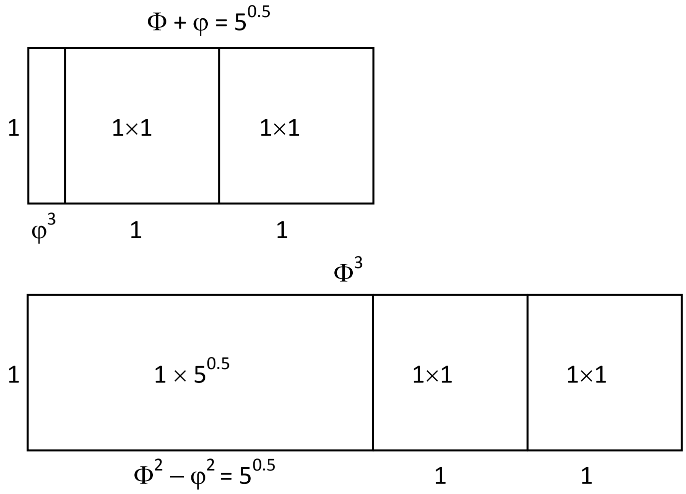
Заметим, что двойки [−2] и [+2] со смыслом площади получаются как слагаемые чисел $\varphi^3 = 5^{0.5} - 2$ и $\Phi^3 = 5^{0.5} + 2$, таких, что $\Phi^3 - \varphi^3 = 2^2$, и представляют собой отклонения разного знака от иррационального числа $5^{0.5} = \varphi + \Phi = \Phi^2 - \varphi^2$. При этом взаимно обратные скаляры φ^3 и Φ^3, как и числа 2 и $5^{0.5}$, имеют смысл площади. (*Рис*. 2.)



контрсимметрия

$$\varphi + [-1] = \Phi^2 - [+1] = \Phi$$

Рис. 1.



контрсимметрия

$$\varphi^3 + [-2] = \Phi^3 - [+2] = \Phi + \varphi = \Phi^2 - \varphi^2$$

Рис. 2.

Итак, тождества $[-1] = \Phi - \varphi$ и $[+1] = \Phi^2 - \Phi$ с контрсимметрией чисел φ и Φ^2 относительно скаляра Φ получаются нормировкой равенства $\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$ по φ^2 и по φ^3 соответственно. А выражения $[-2] = \varphi^3 - (\Phi^2 - \varphi^2)$ и $[+2] = \Phi^3 - (\varphi + \Phi)$ сводятся к $\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$ подстановками $2 + \varphi$ вместо Φ^2 и $4 + \varphi^3$ вместо Φ^3.

Таким образом, первые три степени Фидиевых скаляров φ и Φ образуют твердое ядро «золотой» арифметики с основанием в виде «бриллиантового» ключа $\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$. А так как $\varphi^3 = 1 - 2\varphi^2$ и $\varphi^3 = 2\varphi - 1$, откуда $\varphi^2 = \dfrac{1-\varphi^3}{2}$ и $\varphi = \dfrac{1+\varphi^3}{2}$, то $\varphi = \dfrac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3}$, где φ и φ^3 связаны конверсией $\dfrac{1-\varphi}{1+\varphi} = \varphi^3 \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3}$, то есть взаимозаменяемы в рамках дробей с контрсимметричными числителем и знаменателем. Кроме того, $2 = (1+\varphi)(1+\varphi^3) = (\Phi + 1)(1-\varphi^3)$ и $2 = (\dfrac{5^{0.5}}{2} + 1)(1 - \varphi^6)$. И еще $\varphi^3 = 5^{0.5} - 2$ и $\varphi^{-3} = \Phi^3 = 5^{0.5} + 2$, что выше интерпретировано геометрически.

Таковы уникальные связи первых трех степеней «золотой» пропорции, представленной взаимно обратными числами Фидия. Обобщим их понятием гармонического секстета.

Определение. *Гармонический секстет* общего вида – это шесть положительных чисел 1, *d*, *x*, *y*, *z* и 2, структурированных математически:

а) бинарными операциями $x + d = y - d = 1$ и $x + y = (1+z)(1+d) = 2$ с общим членом 2;

б) порядком $x < y$ и отношением $\dfrac{x}{y} = z < 1$ дробных элементов – первого $x < 1$ и второго $y > 1$;

в) их контрсимметрией $x = 1 - d$ и $y = 1 + d$, т. е. равным, но противоположным отличием от единицы;

г) конверсией $\dfrac{1-d}{1+d} = z \Leftrightarrow d = \dfrac{1-z}{1+z}$ или взаимной перестановкой числа-отношения $z = \dfrac{x}{y}$ и числа-отклонения $d = \dfrac{y-x}{2}$ в конвертируемой дроби с контрсимметрией числителя и знаменателя.

Заметим, что конверсия выглядит пятой арифметической операцией после действий сложения, вычитания, умножения и деления, осуществляемых с числами 1, d, x, y, z и 2.

Структурные связи (*а*), (*б*), (*в*) и (*г*) шести элементов *гармонического секстета* $\circ 1\backslash d\backslash x\backslash y\backslash z\backslash 2\circ$ общего вида проиллюстрируем графически. (*Рис.* 3.)

По определению дробно-линейной функции $z=\dfrac{1-d}{1+d}$ с аргументом $0<d<1$ точка (d,z) принадлежит дуге равнобочной гиперболы между пунктами (0,1) и (1,0) декартовых осей с началом 0. И этим обусловлены конверсия (*г*) и бинарная операция $(1+z)(1+d)=2$ по (*а*). А совпадение проекций точек (d,z) и (x,y) на отрезок 0*2 горизонтальной оси декартовой системы с началом 0* обеспечивает контрсимметрию (*в*) координат $x=1-d$ и $y=1+d$ точки (x,y) и их бинарную связь $x+y=2$ по (*а*). При этом $d\in(0{,}1)$, $x\in(1{,}0)$, $y\in(1{,}2)$ и $z\in(1{,}0)$ по условиям (*а*), (*б*), (*в*) и (*г*), определяющим *гармонический секстет* $\circ 1\backslash d\backslash x\backslash y\backslash z\backslash 2\circ$ общего вида.

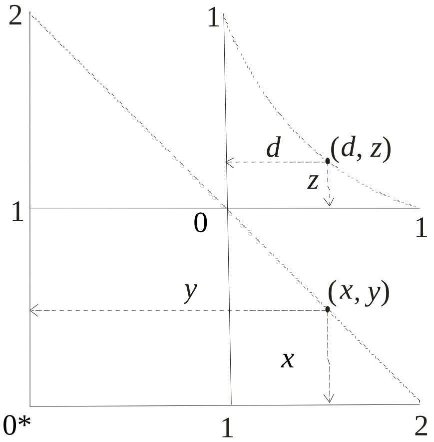


Рис. 3.

В [4] показано, что *гармонические секстеты* выделяются в устройстве рекурсивных рядов Фибоначчи 1, 1, 2, …, F_n, … и Люка 1, 3, 4, …, L_n, …, связанных между собой перекрестной рекурсией $L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$. При этом $F_n=5^{-0,5}[\Phi^n-(-1)^k\varphi^n]$ и $L_n=\Phi^n+(-1)^k\varphi^n$ по формулам Бине. А дискретные (зависимые от n = 1,2,3,…) значения элементов d, x, y, и z, определяемые арифметическими комбинациями чисел Фибоначчи, Люка и Фидия, приведены в таблице 1, где $k=1$ при нечетном n и $k=2$ при четном.

Таблица 1

Единичный морфизм	Число-отклонение	Первый элемент	Второй элемент	Число-отношение	Общий член
1	d	x	y	z	2
1	$\dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$	$\dfrac{F_n}{F_{n+1}}=1-\dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$	$\dfrac{L_n}{F_{n+1}}=1-\dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$	$\dfrac{F_n}{L_n}$	2
1	$(-1)^k\dfrac{\varphi^n}{\Phi^n}=(-1)^k\varphi^{2n}$	$\dfrac{F_n\sqrt{5}}{\Phi^n}=1-(-1)^k\varphi^{2n}$	$\dfrac{L_n}{\Phi^n}=1+(-1)^k\varphi^{2n}$	$\dfrac{F_n\sqrt{5}}{L_n}$	2

Заметим, что целые степени «большого» Фидия Φ = 1.618… от –3 до +3 гармонизированы в структуры $\oplus 1\backslash\Phi\backslash\Phi^{-1}\backslash\Phi^2\backslash\Phi^{-3}\backslash 2\oplus$ и $\otimes 2\backslash\sqrt{5}\backslash\Phi^{-3}\backslash\Phi^3\backslash\Phi^{-6}\backslash 2^2\otimes$, элементы которых в порядке, задаваемом членами *гармонического секстета* общего вида представлены в двух нижних строках таблицы 2 как выдающиеся (*совершенные*) значения переменных d, x, y, и z.

Таблица 2

Виртуальный масштаб	Число-отклонение	Малый элемент	Большой элемент	Число-отношение	Общий член
1	d	x	y	z	2
1	Φ	$\Phi-1=\Phi^{-1}$	$\Phi+1=\Phi^2$	$\dfrac{\Phi^{-1}}{\Phi^2}=\Phi^{-3}$	2
2	$\sqrt{5}=\Phi^2-\Phi^{-2}$	$\sqrt{5}-2=\Phi^{-3}$	$\sqrt{5}+2=\Phi^3$	$\dfrac{\Phi^{-3}}{\Phi^3}=\Phi^{-6}$	2^2

Как видно, «большой» Фидий в степенях от –3 до +3 удовлетворяет математической структуре, названной *гармоническим секстетом*.

Заметим, что виртуальный масштаб в последней строке таблицы 2, имеющий смысл площади, вдвое превышает единицу в предыдущей строке. Причем в метрологическом смысле можно говорить о единицах, отличающихся в два раза. И такие единицы сосуществуют в «золотой» арифметике, включающей многообразие чисел Фибоначчи и Люка, а также обобщенные *s*- и *p*-пропорции. Покажем, что квадроединицу 1^2, формально отличающуюся от диофантова морфизма $\underline{1}$ так, что $1^2 = 2 \cdot \underline{1}$, порождает арифметическая сингулярность.

Как известно, уравнения $x + x^{\mathrm{N}} = 1$ и $y - y^{1-\mathrm{N}} = 1$, где $\mathrm{N} = 1,2,3,\ldots$, имеют действительные корни $\mathrm{X}_1 = 0.5$ и $\mathrm{Y}_0 = 2$, $\mathrm{X}_2 = 0.618\ldots$ и $\mathrm{Y}_1 = 1.618\ldots$, …, $\mathrm{X}_\mathrm{N} = 0.999\ldots$ и $\mathrm{Y}_{\mathrm{N}-1} = 1.000\ldots$, …, взаимно обратные ($\mathrm{X}_\mathrm{N} \cdot \mathrm{Y}_{\mathrm{N}-1} = 1$) по определению. То есть, числа X_N и $\mathrm{Y}_{\mathrm{N}-1}$ обращают данные уравнения в тождества $\underline{1} = \mathrm{X}_\mathrm{N} + \mathrm{X}_\mathrm{N}^\mathrm{N}$ и $\underline{1} = \mathrm{Y}_{\mathrm{N}-1} - \mathrm{Y}_{\mathrm{N}-1}^{1-\mathrm{N}}$ относительно единицы $\underline{1}$. Причем $\mathrm{X}_\mathrm{N} \to 1$ и $\mathrm{Y}_{\mathrm{N}-1} \to 1$ при $\mathrm{N} \to \infty$. Но при $\mathrm{N} = \infty$ тождественность единиц 1 и $\underline{1}$ нарушается, поскольку $\underline{1} = 1 + 1^{\infty}$ и $\underline{1} = 1 - 1^{-\infty}$, что противоречит обычной арифметике. И чтобы убрать очевидное неравенство диофантову единицу $\underline{1}$ в первом выражении надо удвоить, а во втором выражении обнулить $\underline{1}$ или удвоить первый член разности справа.

Далее допустим, что в равенстве $\mathrm{X}_\mathrm{N} \cdot \mathrm{Y}_{\mathrm{N}-1} = \underline{1}$ взаимно обратные числа X_N и $\mathrm{Y}_{\mathrm{N}-1}$ при $\mathrm{N} = \infty$ принимают единичные значения. Тогда $1 \cdot 1 = 1^2 = 2 \cdot \underline{1}$, поскольку бинарные формы $\underline{1} = \mathrm{X}_\mathrm{N} + \mathrm{X}_\mathrm{N}^\mathrm{N}$ и $\underline{1} = \mathrm{Y}_{\mathrm{N}-1} - \mathrm{Y}_{\mathrm{N}-1}^{1-\mathrm{N}}$ при $\mathrm{N} = \infty$ требуют удвоить диофантов морфизм $\underline{1}$. Тем самым в «золотой» арифметике проявляется сингулярная квадроединица 1^2, формально превышающая $\underline{1}$ вдвое. А это соответствует отношению виртуальных масштабов в первом столбце таблицы 2.

Основные результаты.

1. Предложено определение «золотой» арифметики как математической системы, структурированной гармоническими секстетами, формализующими операционные связи чисел Фибоначчи и Люка между собой и с Фидиевыми скалярами.

2. В ряду бинарных форм $\mathrm{X}_\mathrm{N}^{\mathrm{N}-1} - \mathrm{X}_\mathrm{N}^\mathrm{N} = \mathrm{X}_\mathrm{N}^{2\mathrm{N}-1}$ выделена тринарная структура $\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$ из 1,2,3-степеней «малого» Фидия, названная «бриллиантовым» ключом от «золотой» пропорции.

3. Показано, что «бриллиантовый» ключ скрывает две контрсимметрии – относительно Ф и относительно $\sqrt{5}$ с двузначными (+ и –) масштабами 1 и 2 соответственно.

4. Аналогичные единицы, отличающиеся вдвое, выделены сингулярным удвоением единичного морфизма традиционной арифметики. Тем самым «золотая» арифметика выведена за рамки диофантовой системы.

1. Черепанов О.А. Принцип виртуального масштаба и система единиц арифмометрической теории относительного движения. (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/1722-chr.pdf)
2. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. – М.: «Радио и связь», 1984. – 152 с.
3. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. – Минск: «Наука и техника», 1984. – 264 с.
4. Черепанов О.А. Структуры «золотой» арифметики. (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321092.htm)