

## Обобщение результатов наблюдений и золотое сечение

Институт проблем освоения Севера СО РАН

При изучении наук примеры важнее правил.

Исаак Ньютон

Эффективным способом обобщения результатов наблюдений за параметрами различных систем является приведение их к относительному (безразмерному, абстрактному) виду с помощью формулы:

$$j = (x - x_{\min}) / (x_{\max} - x_{\min}), \quad (1)$$

где  $x$ ,  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$  – текущее, максимальное и минимальное размерное значение наблюдаемого показателя, причем часто  $x_{\min} \approx 0$ ;  $j$  - его текущее значение в относительном виде.

При таком обобщении (нормировании по 1) все множество возможных показателей заключается в наглядно представимый интервал  $0 \dots 1$ . Это резко сокращает объем фактических данных, необходимый для установления количественных связей между ними и, что особенно важно, позволяет корректно сравнивать разнородные и разноразмерные величины и делает решение, полученное для каких-нибудь одних условий, универсальным, пригодным для всех. При описании процессов и явлений в обобщенных переменных раскрываются общие закономерности, присущие всем системам.

Этот способ широко применяется в технических дисциплинах, в частности, в теплофизике и механике твердого тела. Но при этом нормируются по 1 только ординаты (функции), абсциссы (аргументы) обычно обобщаются путем группирования их в специальные безразмерные критерии или числа подобия, которые могут изменяться от нуля до бесконечности. В приведенных ниже примерах показана практическая полезность нормирования по 1 и функции и аргумента. Кроме того, как показал анализ, эта простая операция выводит на фундаментальный результат – закон Золотого Сечения.

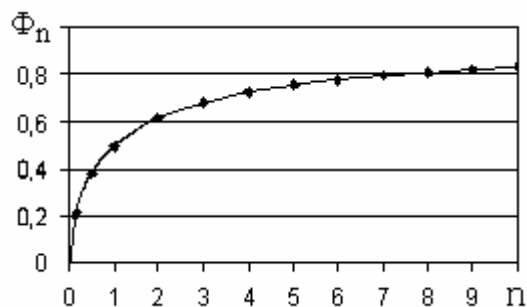
Любая система существует в режиме борьбы и единства противоположностей: совокупности ее вещественных частиц ( $X^n$ , где  $n$  - количество частиц) и “пустоты” ( $Y$ ), необходимой для нормального функционирования системы.

Гармония системы и сопутствующие ей максимумы прочности, устойчивости и продуктивности достигаются, когда противоположности уравновешены:  $Y=X=\Phi$ . С учетом этого формула Золотого Сечения имеет вид:

$$\Phi + \Phi^n = 1, \quad (2)$$

Ряд, составленный из величин  $\Phi$  при разных целочисленных  $n \geq 1$ : 1) 0,5; 2) 0,618; 3) 0,682... называется Обобщенным Золотым Сечением (ОЗС), а собственно Золотое Сечение (ЗС) - это решение (2) при  $n=2$ :  $\Phi=0,618$  или  $\phi=1/\Phi=1,618$ .

На рис.1 показана зависимость  $\Phi=\Phi_n$  от  $n$  для первых десяти членов ряда ОЗС, включая все множество промежуточных (дробных) значений  $n$ , в том числе и меньших 1, рассчитанная с помощью (2).



**Рис.1.** Зависимость  $\Phi_n$  от  $n$

Для  $0,33 < n < 10$  формула (2) упрощается:

$$\Phi = 0,5 + 0,16 \ln(1/n) \quad (3)$$

Проявления ОЗС в различных системах, взаимодействие компонентов которых описывается непосредственно уравнением (2), широко известны [10, 11]. Здесь приведем только один характерный пример этого рода, из области механики твердого тела, который ранее не рассматривался.

Таблица 1.

Соотношения скорости поперечных и продольных волн, их соотношений и модулей упругости в твердых телах, а также в земной коре на разных глубинах ( $h$ , км).

Материал	$v_{сд}$ , М / с	$v_{пр}$ , М / с	$v_{пр,н}$ , М / с	$v_{сд} / v_{пр}$	$G/E$	$v_{сд} / v_{пр,н}$
Лед	1990	3280	3980	<b>0,61</b>	<b>0,37</b>	<b>0,5</b>
Железо	3230	5170	5850	<b>0,62</b>	<b>0,38</b>	<b>0,55</b>
Медь	2260	3710	4700	<b>0,61</b>	<b>0,37</b>	<b>0,48</b>
Никель	2960	4785	5630	<b>0,62</b>	<b>0,38</b>	<b>0,52</b>
Олово	1670	2730	3320	<b>0,61</b>	<b>0,37</b>	<b>0,5</b>
Цинк	2410	3810	4170	<b>0,63</b>	<b>0,40</b>	<b>0,58</b>
Земля, $h=33$ км	8180	-	4630	-	-	<b>0,57</b>
То же, 200 км	8290	-	4630	-	-	<b>0,55</b>
То же, 2000 км	12790	-	6930	-	-	<b>0,54</b>

Основными показателями упругих свойств твердых материалов являются модули продольной и поперечной (сдвиговой) деформации –  $E$  и  $G$ . Их величины напрямую связаны со скоростью

продольных волн в стержнях –  $v_{пр} = (E / \rho)^{0,5}$  и поперечных (сдвиговых) волн в неограниченной среде  $v_{сд} = (G / \rho)^{0,5}$  (где  $\rho$  – плотность материала), возникающих при динамических нагрузках и распространяющихся со скоростью звука. Из сравнения формул этих скоростей получаем выражение отношения  $G/E = (v_{сд} / v_{пр})^2$ .

В сейсмологии упругость земной коры оценивается по скорости продольных и поперечных волн в неограниченной среде –  $v_{пр.н}$  и  $v_{сд}$ .

В табл.1 приведены значения  $v_{сд}$  и  $v_{пр}$  для твердых тел, взятые по справочнику [8], а также величины отношений  $v_{сд} / v_{пр}$ ,  $G/E$  и  $v_{сд} / v_{пр.н}$ . Табл. 1 показывает, что отношения  $v_{сд} / v_{пр}$  и  $G/E$  очень близки к пропорциям ОЗС при  $n=2$  ( $\Phi=0,62$  и  $1-\Phi=0,38$ ), а  $v_{сд} / v_{пр.н}$  близки к таковым при  $n=1$  ( $\Phi=0,5$  и  $1-\Phi=0,5$ ). При необходимости величины  $n$  можно определить точнее. Например, у железа  $v_{сд} / v_{пр.н} = \Phi=0,55$ ; тогда с помощью формулы (2) или (3) находим, что это значение  $\Phi$  соответствует числу  $n=1,35$ .

Как будет показано ниже, в результатах обобщения параметров систем с помощью формулы (1) закон ЗС проявляется иначе. Не прямо, как в только что приведенном примере, когда пропорциям ЗС соответствуют непосредственно параметры системы, а через посредство численных коэффициентов уравнений, которыми описывается взаимодействие параметров.

Продемонстрируем сказанное на примерах обобщения монотонно изменяющихся параметров принципиально разных систем, представляющих живую и неживую природу – древесной растительности и нагруженного мерзлого тела,.

**Зеленая масса и диаметр деревьев.** К.С. Бобкова и др. [2] установили количественный вид зависимости массы ( $m$ ) древесной зелени (хвои и не одревеневших побегов) и отдельно хвои сосны обыкновенной (*Pinus Sylvestris*) от ее диаметра ( $d$ ) в северной и средней тайге на территории Республики Коми для всех встречающихся в ней типов леса. Это весьма репрезентативное исследование, базирующееся на обобщении сотен определений характеристик деревьев. Для выражения результатов в размерном виде авторам [2] понадобилось более десятка формул.

Покажем, как весь этот обширный материал обобщить одной формулой.

Максимальные и минимальные значения размерных параметров по их данным, необходимые для расчетов по формуле (1) сведены в табл.2

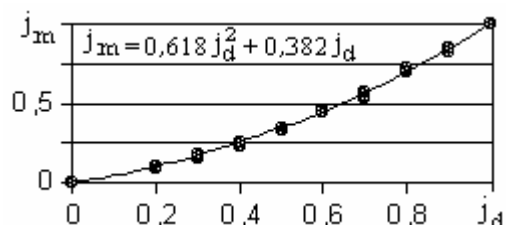
Таблица 2

Подзона	$d_{min}$	$m_{min}$	$d_{max}$ (з)	$m_{max}$ (з)	$d_{max}$ (х)	$m_{max}$ (х)
Сев. тайга -1	0	0	40	91	40	63
Ср. тайга -2	0	0	40	76	40	46

Максимальные и минимальные размерные величины диаметра ствола -  $d_{max}$ ,  $d_{min}$  (см), массы зелени (з) и хвои (х) сосны -  $m_{max}$ ,  $m_{min}$  (кг / дерево)

На **рис. 2** приведены построенные по этим данным графики зависимости безразмерной массы древесной зелени и хвои  $j_m = m / m_{\max}$  сосны от безразмерного диаметра ствола  $j_d = d / d_{\max}$  в северной и средней тайге и найдены их аппроксимации:

$$j_m = A \cdot j_d^2 + B \cdot j_d \quad (4)$$



**Рис 2.** График зависимости  $j_m (j_d)$  и формула кривой (значки – экспериментальные точки)

Значения коэффициентов А и В в (4) для массы зелени и хвои в северной (1з, 1х) и средней (2з, 2х) тайге, а также номера этих вариантов даны в табл.3.

Таблица 3

Значения коэффициентов в формуле (4)

Индекс и №	1з – I	1х – II	2з – III	2х – IV	3С – V
A	0,610	0,648	0,651	0,673	0,618
B	0,393	0,357	0,340	0,329	0,382

Достоверность аппроксимации для всех вариантов высокая -  $R^2 \geq 0,998$ . Экспериментальные точки на рис.2 при всех вариантах условий практически сливаются друг с другом, т.е. зависимость  $j_m (j_d)$  инвариантна. Входящие в формулу (2)  $j_d^2$  и  $j_d$  – это безразмерные (относительные) площадь ствольного круга и длина окружности (коры), существующие в режиме единства и оппозиции друг к другу (кора защищает ствол, но и сдерживает его радиальный рост). Численные коэффициенты перед ними, отражающие уровень их взаимодействия, в сумме примерно равны 1. Обращает на себя внимание близость их соотношения к пропорции 3С (см. последний столбец в табл.3).

В табл.4, детализирующей рис.2, приведены результаты расчетов  $j_m$  по формуле (4) для выделенных в табл.3 пяти вариантов:  $j_I \dots j_V$ . Из нее видно, что при всех  $j_d$  получаются близкие величины  $J_m$ , примерно равные (разница не превышает 3 %), рассчитанной по (4) при значениях  $A=0,618$  и  $B=0,382$ , соответствующих 3С (пятый вариант - шестой столбец).

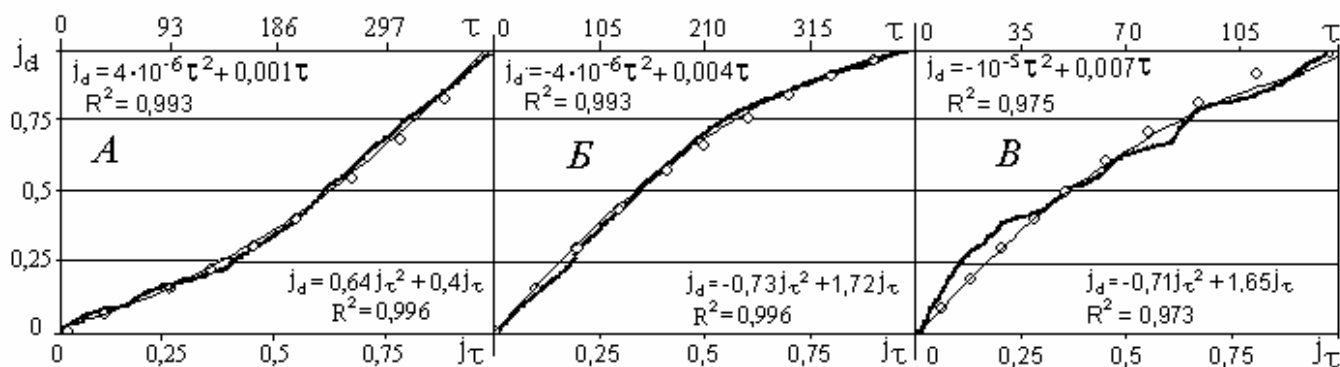
Таблица 4  
Зависимость  $j_m$  от  $j_d$

$j_d$	$j_I$	$j_{II}$	$j_{III}$	$j_{IV}$	$j_V$
0	0	0	0	0	0
0,2	0,08	0,09	0,09	0,09	0,1
0,4	0,25	0,24	0,24	0,23	0,25
0,6	0,46	0,45	0,46	0,45	0,45
0,8	0,71	0,69	0,72	0,72	0,70
1	1	1	1	1	1

Пример реализации метода: определить массу хвои у сосен с диаметром ствола **1)** 0,2 м и **2)** 0,3 м в северной тайге. Используя данные табл.2, определяем безразмерные диаметры: **1)**  $j_d = 0,2/0,4=0,5$ ; **2)**  $j_d = 0,3/0,4=0,75$ . По формуле (4) при  $A=0,618$  и  $B=0,382$  или по графику на рис.2 находим безразмерную массу хвои: **1)**  $j_m = 0,618 \cdot 0,25 + 0,382 \cdot 0,5 = 0,346$ ; **2)**  $j_m = 0,618 \cdot 0,56 + 0,382 \cdot 0,75 = 0,633$ , а затем и размерную: **1)**  $40 \cdot 0,346 = 13,8$  кг; **2)**  $40 \cdot 0,633 = 25,3$  кг.

График на рис.2 и формулу (4) можно рекомендовать для приближенного определения обобщенной массы древесной зелени хвойных деревьев в пределах всей таежной зоны. Порода дерева и условия произрастания отражаются в величинах соответственных пар  $d_{max}$  и  $m_{max}$ .

Полученные формулы зависимости зеленой массы от диаметра в относительном виде справедливы как для крупных биосистем - леса, биома, подзоны..., так и для отдельных деревьев, для продуктивности которых большое значение имеет возраст.



**Рис. 3.** Зависимость  $j_d$  от  $j_t$  для пихты на Аляске (А) и сосны в Нумто (Б) и Караганде (В)

**Диаметр ствола и возраст.** На графиках рис.3 приведены примеры зависимости безразмерного диаметра  $j_d$  от безразмерного возраста  $j_t = \tau / \tau_{max}$  ( $\tau$  - текущее время, годы;  $\tau_{max}$  - возраст дерева на период наблюдений) в двух возможных вариантах формы кривой этой зависимости: вогнутой и выпуклой. Первый вариант представлен теневыносливой пихтой на Аляске [5], второй - теплолюбивой сосной на севере (пос. Нумто) и юге (пос. Караганда) Тюменской области (по наблюдениям С.П.Арефьева) [7]. Величины безразмерного диаметра

отложены на оси ординат, безразмерного времени – на оси абсцисс, размерного времени – на верхней горизонтальной оси. Начало отсчета на графике А – 1578 год, на графике Б – 1579 год, на графике В – 1777 год. Кривыми показан многолетний ход  $j_d$  по данным наблюдений – толстые линии, и его аппроксимации – тонкие линии. Из-за высокой достоверности аппроксимирующих формул –  $R^2 > 0,99$  и те и другие почти сливаются. Как и в выражениях зависимости  $j_m$  от  $j_d$ , коэффициенты перед слагаемыми в выражении функции  $j_d(j_\tau)$  в сумме примерно равны единице и делят ее в пропорции, близкой к ЗС. Кружками на рис.3 А обозначены  $j_d$ , вычисленные по формуле (5) – на рис. 3А, и по формуле (6) – на рис. 3 Б и В, коэффициенты которых соответствуют пропорции ЗС.

$$j_d = 0,618 (j_\tau)^2 + 0,382 j_\tau, \quad (5)$$

$$j_d = -0,618 (j_\tau)^2 + 1,618 j_\tau, \quad (6)$$

Несмотря на то, что численные коэффициенты в аппроксимирующих формулах и в формулах (5) и (6) несколько отличаются, на величину  $j_d$  это почти не влияет – вычисленные значения  $j_d$  практически ложатся на кривую, построенную по фактическим данным.

В этом примере численные коэффициенты перед вторым слагаемым полинома имеют смысл скорости, а перед первым – ускорения (замедления), т.е. скорость и ускорение (равномерность и неравномерность) – две противоположности также существуют в режиме дихотомии, составляя некое единство.

Анализ показал, что полиномиальные (квадратичные) формулы (5) и (6) с приемлемой погрешностью можно заменить степенными с показателями степени: 1,618 для вогнутых кривых, отображающих “ускоряющийся” характер связи, или 0,618 для выпуклых, отображающих “замедляющийся” характер связи :

$$j_d = j_\tau^{1,618} \quad (7)$$

$$j_d = j_\tau^{0,618} \quad (8)$$

Хорошая сходимость результатов, вычисленных по формулам (5), (6) и (7), (8) подтверждается рис.4.

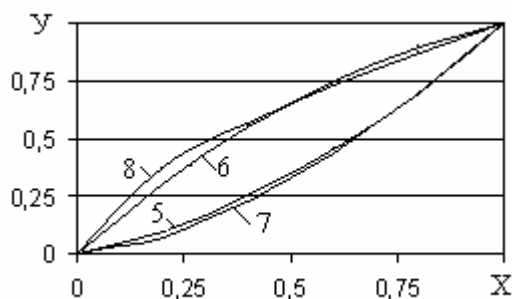


Рис.4. Графики полиномиальной (квадратичной) и степенной зависимости произвольной функции У от аргумента Х (5, 6, 7 и 8 - номера формул в тексте).

Степенные формулы по точности несколько уступают полиномиальным аналогам, зато в них в качестве исходных размерных величин можно использовать любую пару соответственных значений аргумента и функции, необязательно максимальных. Распишем, например, формулу (6) согласно (1) для определения размерных диаметров  $d_1$  и  $d_2$  в возрасте, соответственно,  $\tau_1$  и  $\tau_2$  :

$$\begin{aligned} d_1/d_{\max} &= (\tau_1/\tau_{\max})^{1,618} \\ d_2/d_{\max} &= (\tau_2/\tau_{\max})^{1,618} \end{aligned}$$

Разделив их друг на друга, получаем:

$$J_{d1,2} = j_{\tau1,2}^{1,618}$$

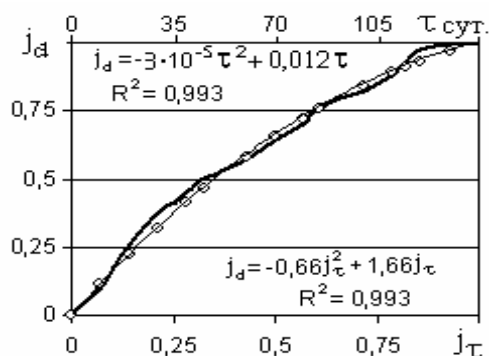
где  $j_{d1,2} = d_1/d_2$  ;  $j_{\tau1,2} = \tau_1/\tau_2$

Сравнивая логарифмы этого выражения и исходной формулы (6), находим, что

$$\ln(j_{d,i}) / \ln(j_{\tau,i}) = \ln(j_d) / \ln(j_\tau) = 1,618 = \text{const}$$

Постоянство обоих отношений и означает, что в качестве базовых (исходных) значений  $d$  и  $\tau$  (или других параметров, между которыми определяются связи) можно использовать любую соответственную пару их известных значений.

**Сезонный ход толщины дерева.** На рис.5 приведен график роста относительного диаметра ( $j_d$ ) сосны в Московской области в теплый период года, построенный по данным [3]. Сглаженная кривая (тонкая) на графике – аппроксимация функций  $j_d(j_\tau)$  и  $j_d(\tau)$ , кружками обозначены  $j_d$ , вычисленные по (3). Как видим, и в сезонном ходе значения  $j_d$ , рассчитанные по формуле ЗС



практически ложатся на кривую фактических данных.

**Рис. 5.** Зависимость  $j_d$  от  $j_\tau$  и  $\tau$

**Удельная продуктивность и возраст.** В табл. 5 приведена удельная продуктивность сосны ( $P$ , %) в разном возрасте в Приангарье по [1]. Удельная продуктивность дерева (или древостоя) – это ежегодный прирост объема одного кубометра ствола (или древостоя).

Таблица 5

Удельная продуктивность сосны (P, %) в разном возрасте (τ, лет)

τ, лет	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
P, %	8,6	7,6	6,1	4,8	3,9	3,2	2,5	1,9	1,4	1,1	0,8

Величина P со временем убывает. Возрастает износ дерева i – параметр, обратный продуктивности, равный разнице между ее максимальным и текущим значениями:  $i = 8,6 - P$ . Максимум i, согласно таблице, соответствует возрасту 115 лет, минимум – 15 лет.

Как и раньше, с помощью формулы (1) и табл. 5, определены обобщенные значения относительного удельного износа  $j_i = 1 - [(P - 0,8) / (8,6 - 0,8)]$  и возраста  $j_\tau = (\tau - 15) / (115 - 15)$  и построен график зависимости  $j_i(j_\tau)$  – рис. 5, из которого видно, что она хорошо описывается полиномиальной и степенной формулами с коэффициентами близкими к ЗС. Это свидетельствует о ее устойчивости. Выражения возрастной зависимости относительного износа и диаметра ствола практически совпадают (ср. с рис. 3Б и В), т.е. с увеличением размеров дерева его относительная продуктивность уменьшается, а относительный износ увеличивается.

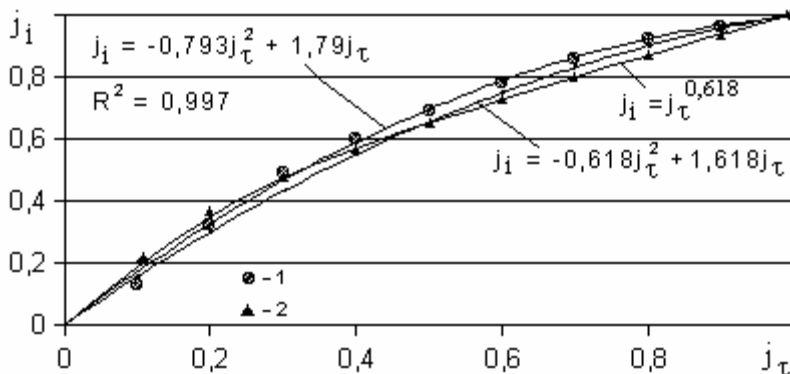
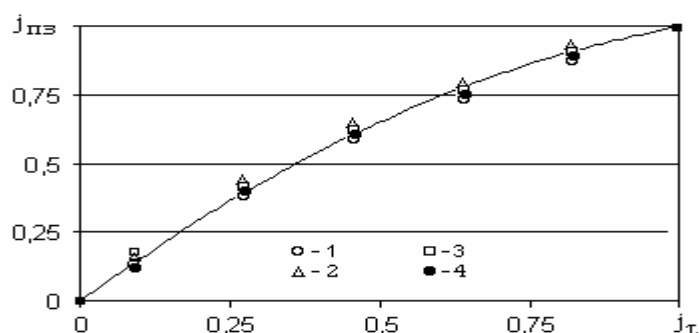


Рис. 6. Графики и формулы зависимости  $j_i$  от  $j_\tau$  (1- фактические данные, 2- расчет по степенной формуле)

**Деформация и прочность мерзлых грунтов.** Теперь приведем примеры обобщения параметров системы совсем другой природы – мерзлых грунтов, деформирующихся под нагрузкой. Исходные данные для построения графиков хода деформации во времени - результаты испытаний мерзлой супеси на одноосное сжатие при разных температурах (t, °C) и давлениях (P, МПа):  $t = -20$ ,  $P_1 = 6,8$ ,  $P_2 = 6$  в варианте **a** [4] и  $t = -4,5$ ,  $P_3 = 0,7$ ,  $P_4 = 0,6$  в варианте **б** [9]. Максимумы и минимумы деформации ( $j_\tau$ , доли ед), которые подставлялись в формулу (1) приняты по фактическим данным: **1)**  $12,5 \cdot 10^{-2}$  и  $7,4 \cdot 10^{-2}$  – при  $P_1 = 6,8$  МПа (серия 1); **2)**  $8 \cdot 10^{-2}$  и  $4,8 \cdot 10^{-2}$  – при  $P_2 = 6$  МПа (серия 2); **3)**  $2,48 \cdot 10^{-3}$  и  $1,9 \cdot 10^{-3}$  – при  $P_3 = 0,7$  МПа (серия 3); **4)**  $1,8 \cdot 10^{-3}$  и  $1,5 \cdot 10^{-3}$  – при  $P_4 = 0,6$  МПа (серия 4); максимум и минимум времени (τ, час) - 12 и 1. Таким образом, все опыты разбиты на перечисленные четыре серии: 1, 2 в варианте **a** и 3, 4 в варианте **б**.



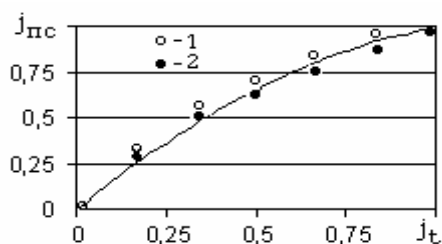
Результаты расчетов представлены на рис.7 в виде графиков хода относительной деформации (ползучести)  $j_{пч} = (j - j_{min}) / (j_{max} - j_{min})$  в относительном времени  $j_{\tau} = (\tau - \tau_{min}) / (\tau_{max} - \tau_{min})$ . Значки – экспериментальные данные, кривая – расчет по формуле ЗС (6).



**Рис. 7.** Ход относительной деформации мерзлой супеси при одноосном сжатии  $j_c$  в относительном времени  $j_{\tau}$  при разных температурах и давлениях, 1...4 – обозначения серий опытов (пояснения в тексте),

График показывает хорошую сходимость фактических и вычисленных значений  $j_{пч}$ .

В книге С.С.Вялова [4] помещен объединенный график зависимости длительной прочности смерзания глинистых пылеватых грунтов с фундаментом от температуры, в диапазоне ее изменения от 0 до -6 °С, по результатам экспериментов российских и американских исследователей, выполненных в разных условиях (разные грунты, температуры, материал фундамента). Все экспериментальные точки на графике располагаются достаточно тесно. При этом наиболее удалены друг от друга данные американских ученых Зангера и Крори; данные российских ученых - С.С.Вялова, И.Н.Вотякова и др. располагаются строго между ними. На рис.8 приведен график зависимости крайних (американских) значений относительной длительной прочности смерзания  $j_{пс}$  от относительной температуры  $j_{t}$ . Значения  $j_{пс}$  и  $j_{t}$  вычислены по формуле (1); 1 – данные Зангера, 2 – данные Крори; кривая построена по формуле (6).



**Рис. 8.** Зависимость прочности смерзания глинистых грунтов  $j_{пс}$  от температуры  $j_{t}$  в безразмерном виде (пояснения в тексте)

Как видим, безразмерные формулы рассмотренных зависимостей практически идентичны. Их специфика в полной мере отражается в величинах любых соответственных парам функции и аргумента ( $j_{пч}$  и  $j_{\tau}$  или  $j_{пс}$  и  $j_{t}$ ). В этой, механической системе характер связей между параметрами

такой же, как у выше рассмотренных биологических систем. Таким образом, можно говорить об универсальности формулы (1) и достаточно общих закономерностях устойчивых взаимосвязей параметров систем разной природы, проявляющихся через Золотое Сечение.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артемьева А.В., Бузыкин А.И., Исмагилов А.М., Кофман.Г.Б. Оценка продуктивности древостоя // Факторы продуктивности леса. Новосибирск: Наука, 1989. С. 129-146.
2. Бобкова К.С., Тужилкина В.В., Робакидзе Е.А. Ресурсная характеристика древесной зелени *Pinus Silvestris (Pinaceae)* в лесах северо-востока европейской России // Растит. ресурсы, 2008 Т.44, вып.1. С. 51-59
3. Ваганов Е.А., Шашкин А.В., Свицерская И.В., Высоцкая Л.Г. Гистометрический анализ роста древесных растений. Новосибирск: Наука, 1985. 102 с.
4. Вялов С.С. Реология мерзлых грунтов. М.: Стройиздат, 2000, 464 с.
5. Карлстром Т.В. История оледенения Аляски и ее значение для теории палеоклимата // Солнечная активность и изменения климата. Л.: Гидрометеоздат, 1966. С. 119-177.
6. Коновалов А.А., Иванов С.Н. Климат, фитопродуктивность и палиноспектры: связи, распределение и методика палеорекопструкций. Новосибирск: Гео, 2007, 130 с.
7. Коновалов А.А., Арефьев С.П. О деформационной модели развития геосистем (на примере радиального роста древесных растений) // Вестн. экологии, лесоведения и ландшафтоведения. 2008. Вып. 9. С. 18-36.
8. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. М.: Наука, 1974, 255 с.
9. Роман Л.Т. Мерзлые торфяные грунты как основания инженерных сооружений. Новосибирск: Наука, 1987. 193 с.
10. Сороко Э.М. Структурная гармония систем, Минск: Наука и техника, 1984, 265 с.
11. Стахов А.П. Роль «Золотого Сечения» и «Математики Гармонии» в преодолении «стратегических ошибок» в развитии математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14688, 12.01.2008