С.Л. Василенко

Математические начала гармонии: русская матрешка в геометрических образах гармонической пропорции

Там царь Кащей над златом чахнет:
Там русский дух... там Русью пахнет!
А.С. Пушкин. Руслан и Людмила

Превратности судьбы или особенности национальных культур. Русская матрешка[1] широко известна во всем мире и стала полюбившимся истинно российским сувениром.

Но далеко не каждый знает, что она стала своеобразным национальным символом совсем недавно.

В действительности же это восточное изобретение, а ее родиной является страна восходящего солнца – Япония.

Следует отметить, что подобное взаимопроникновение культур вовсе не уникально. Похожие заимствования народных традиций с их видоизменением согласно собственным привычкам и обычаям совсем не чужды многовековой истории. Достаточно вспомнить совсем свежие события минувших дней на примере той же Японии.

Так, в последнее время большое распространение получила занимательная числовая игра-головоломка Судоку. У нее множество поклонников и огромная популярность среди людей во всем мире [1]. На языке математики она представляет собой латинский квадрат размером $n \times n$, в котором каждый из $n = 9$ символов появляется ровно один раз в любой строке или столбце, а также выполняется дополнительное условие: эти 9 символов уникальны в каждом из девяти блоков 3×3.

Наиболее распространенная версия головоломки создана, вероятно, Р. Гарнсом и впервые опубликована в 1979 г. под названием "Number Place" (место числа)[2].

Задача была существенно усовершенствована путем добавления блоков размером 3×3, что сделало ее более интересной и увлекательной.

Название "Sudoku"[3] этой головоломке уже дало японское издательство Nicoli в 1984 г. как сокращение фразы "Suuji wa dokushin ni kagiru", что в переводе означает "число должно быть единственным". Издатели не только придумали звучное имя, но и впервые в заданиях для своих головоломок ввели симметрию. Последнее означает, что заполненные клетки задачи образуют либо осе-, либо центрально-симметричную фигуру.

Можно сказать, головоломка в 80-х стала популярной именно в Японии, буквально попав на благодатную почву. Все дело в том, что в японском языке используются иероглифы, поэтому в нем занимательные игры типа кроссвордов невозможны.

Но японцы изобретательны. И не без содействия европейцев они развивают адекватные головоломки, но уже с цифрами. И уже в начале 21 века данная головоломка снова вернулась в США, появилась в Европе, после чего ее шествие началось по всему миру.

Поэтому, вопреки распространенному мнению, Судоку – вовсе не японская игра.

Так и фигурка матрешки стала популярной в России только в конце XIX века, а ее прообразом послужило разукрашенное яйцо – символ единого универсума на Востоке.

---

[1] *МАТРЕШКА* – полуовальная полая разнимающая посередине деревянная расписная кукла (обычно фигура, воспроизводящая человеческое тело), в которую вставляются <по очереди> другие такие же куклы меньшего размера // Словарь Ожегова. – http://www.edudic.ru/oje/21992.

[2] http://www.playsudoku.ru/history.html.

[3] Дословный перевод с японского: одинокие или холостые числа.

Это безумно простая ... сложность. Русские матрешки не так тривиальны, как может показаться на первый взгляд.

Реальная сборка матрешек содержит $2n+1$ деталей: n разрезанных и полых, одной цельной и самой маленькой.

Величина n практически ограничивается лишь некоторым пределом по условиям реального изготовления–сборки либо эзотерическими соображениями типа использования числа 7. Теоретически число n – сколь угодно большое.

Методологически вложенные куклы представляют многоуровневую, иерархически выстроенную, самоподобную[4] фрактальную модель.

Поэтому очень часто фрактальные структуры вполне резонно сравнивают именно с матрешками, вложенными друг в друга. Такой емкий и запоминающийся образ помогает нам не только понять, но и принять необычную природу фрактальных объектов (рис. 1).

И если проводить параллели с фракталами, то невольно напрашивается сравнение русской души с особой человеческой метрикой в виде дробной нецелочисленной размерности, весьма специфической и отличной на фоне остальных.

В широком смысле под фракталами понимают множества точек в евклидовом пространстве, имеющие дробную метрическую размерность (в смысле Хаусдорфа[5]), либо метрическую размерность, строго большую топологической [2, 3].

Рис. 1. Русские матрешки – аналог фракталов

Фракталами в математике называются геометрически самоподобные структуры.

Это математическая теория форм, имеющих дробную размерность.

Частный случай фрактала – пропорция, которая всегда остается постоянной [4].

Главная особенность фракталов – это их подобие в различных масштабах.

И в этом контексте их действительно можно и весьма удобно сравнить с русскими матрешками как простым аналогом фракталов, если вложение уменьшающихся фигур продолжить условно до бесконечности.

«В русской традиции матрешка обрела свой неповторимый лик, подобно тому, как Бог в православной традиции – это Личность» [5]. Именно в России принцип самоподобия микро- и макрокосмов был уловлен с наибольшей адекватностью через воплощение в округло-сборной фигурке матрешки идеи универсума и синергетической концепции бытия.

Матрешка примечательна именно тем, что наглядно иллюстрирует главный фрактальный принцип "все в одном" посредством многообразия своих ликов, в идеале составляющих бесконечность.

Матрешка – это «Совершенное в Совершенном, Подобное в Подобном, Одно во Всех и Все в Одном – полное соподчинение и единообразие. В этом красота, смысл и спасение человека» [6].

Вышесказанное фактически имеет прямое отношение к гармонии мироустройства и фрактальной геометрии, развивающей идеи о подобиях и множествах Гастона Жюлиа.

---

[4] Самоподобный означает подобный сам себе. Принцип матрешки – это, по сути, фрактальный принцип, согласно которому хаотическая система структурируется и обретает устойчивость.

[5] *Размерность Хаусдорфа* (РХ) – естественная размерность множества в метрическом пространстве. РХ согласуется с нашими обычными представлениями о размерности. Так, в трехмерном евклидовом пространстве размерность Х. конечного множества равна 0, гладкой кривой – 1, гладкой поверхности – 2, множества ненулевого объема – 3. Для фрактальных множеств РХ, как правило, принимает дробные значения. – http://ru.wikipedia.org.

Фрактально-треугольная "золотоносная" структура. Принято считать, что основным "поставщиком" золотого сечения (ЗС) среди геометрических плоских фигур является правильный пятиугольник или 10-угольник, а также прямоугольный треугольник с катетами в отношении $1:2$.

Не менее, а может и более интересной фигурой в этом плане оказывается равносторонний (правильный) треугольник. И это неспроста. В математическом смысле фракталом (по Мандельброту) называется множество, для которого дробная размерность Хаусдорфа-Безикевича D строго больше его топологической размерности $\tilde{D}$, выражающейся целым числом.

В этой связи характерной является эволюция размерностей [7]:

$k=1$ — точка — $D_1=0$, $\tilde{D}_1=0$;

$k=2$ — прямая линия (вертикальный отрезок) — $D_2=1$, $\tilde{D}_2=1$;

$k=3$ — треугольник (салфетка Серпинского) — $D_3=1{,}59$, $\tilde{D}_3=1$;

$k=4$ — квадрат, заполняющий плоскость, — $\boxed{D_4=2}$, $\tilde{D}_4=2$;

$k\geq 5$ — k-угольники, — $D_k\leq D_8\approx 1{,}7$, $\tilde{D}_k=1$;

$k\to\infty$ — окружность, — $D_\infty=1$, $\tilde{D}=1$.

Пятиугольник, как совершенный многоугольник, который буквально «нашпигован золотыми сечениями», является своеобразным переходным мостиком от заполняющего плоскость квадрата с топологической размерностью $\tilde{D}_4=2$ – к линии $\left(\tilde{D}=1\right)$.

То есть в данном случае золотое сечение символизирует, если так можно выразиться, условную пропорцию между плоскостью и линией (рис. 2)

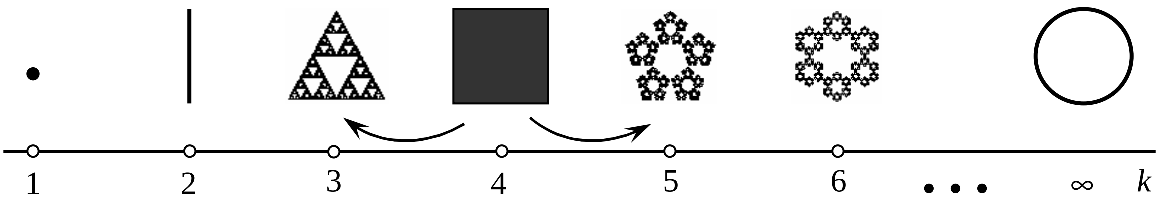

Рис. 2. Переходные формы и эволюция фрактальных структур

И если в Евклидовом пространстве такая пропорциональность лишена физического смысла, то на языке фрактальной геометрии вполне допустима.

Нечто подобное происходит в обратном направлении: при переходе от прямой $\left(D_2=\tilde{D}_2=1\right)$ через "треугольную" фрактальную линию $\left(D_3\approx 1{,}59\right)$ к плоскости $\left(D_4=\tilde{D}_4=2\right)$. Поэтому не случайны особые свойства треугольника: в отличие от других многоугольников, он – единственная жесткая (несжимаемая) геометрическая фигура, – в смысле попытки изменения внутренних углов при сохранении общего вида конструкции.

Другими словами, с точки зрения фрактальной геометрии в ее единицах измерениях:

– треугольник своей конструктивной жесткостью становится прообразом плоскости;

– пятиугольник, в силу своих особенностей пропорционального разбиения целого на части, первым из всех правильных многоугольников наоборот осуществляет пропорциональное разделение (сопоставление) плоскости линией с фрактальной размерностью $D_5=\ln 5\ /\ \ln(1+\Phi)$.

"Золотоносное" решение в равносторонних треугольниках. Итак, строим ΔABC, описываем вокруг него окружность и вписываем равносторонний треугольник $\Delta A_1B_1C_1$, стороны которого продляем до пересечения с проведенной окружностью в точках: A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3 (рис. 3).

Мы получаем целое множество ЗС.

Покажем это на языке алгебраической геометрии.

Пусть $a = 2$ – сторона равностороннего треугольника ΔABC.

Радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей равны:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6}a, \quad R = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

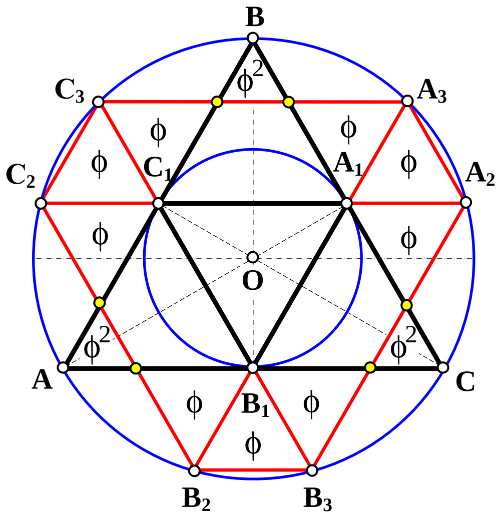

Рис. 3. Первооснова фрактальной структуры "золотоносных" равносторонних треугольников

Высота треугольника BB_1 равна $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Длина хорды (в описанной окружности), проходящей через середины сторон треугольника, определяется по теореме Пифагора:

$$c = 2\sqrt{R^2 - d^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a = (2\phi + 1)\frac{a}{2},$$

где $d = R - \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ – расстояние (по перпендикуляру) от хорды до центра окружности;

$\phi = \Phi^{-1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $\Phi = \phi^{-1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ – числа золотого сечения.

Равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ (со сторонами $a/2$) – по сути, является вписанным в ΔABC. Продолжая его стороны (красными линиями) до пересечения с описанной окружностью, получаем три равносторонних треугольника, стороны которых имеют длину Φ и к тому же делятся в соотношении золотого сечения

$$\frac{C_1A_1}{A_1A_2} = \frac{A_1C_1}{C_1C_2} = \frac{CB}{BK} \dots = \frac{a/2}{a\phi/2} = \Phi.$$

Каждая сторона исходного треугольника ΔABC также делится золотым сечением, причем дважды (на каждой половине в желто-окрашенных точках): $\phi/\Phi^{-2} = \Phi$.

Длину хорды CB_3 можно определить из треугольника по теореме косинусов:

$$l = \sqrt{\phi^2 + \phi^4 - 2\phi^3\cos(2\pi/3)} = \phi\sqrt{1 + \phi^2 + \phi} = \phi\sqrt{2},$$

где $\cos(2\pi/3) = \cos(120^\circ) = -0{,}5$; $\phi^2 + \phi = 1$.

Тогда отношение двух соседних неравных хорд равно: $CB_3/B_2B_3 = \phi\sqrt{2}/\phi = \sqrt{2}$.

Треугольная фрактализация. Процесс вписывания друг в друга равносторонних треугольников бесконечен в сторону увеличения, равно как и уменьшения геометрических размеров. Так мы приходим к треугольной фрактализации по принципу вложенных геометрических матрешек (гео-матрешек) с многократным проявлением гармонической пропорции на всех иерархических уровнях (рис. 4).

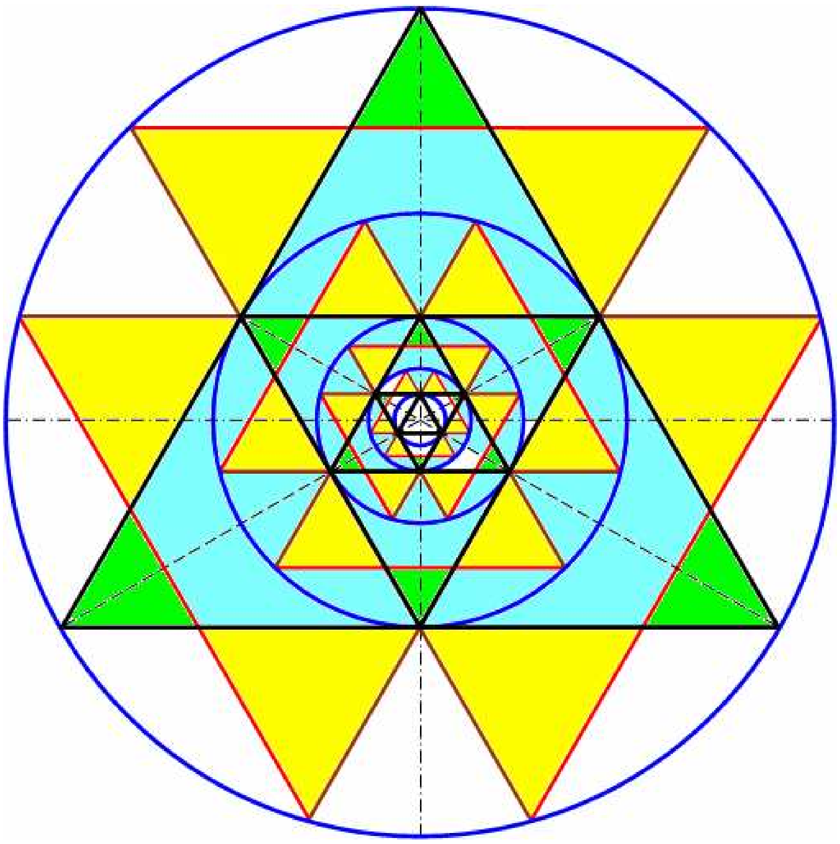

Рис. 4. Фрактальная мозаика треугольных гармоничных гео-матрешек

Изложенное построение допускает сколь угодно большое вложение самоподобных треугольников с явными признаками в них числовых характеристик золотого сечения (ЗС).

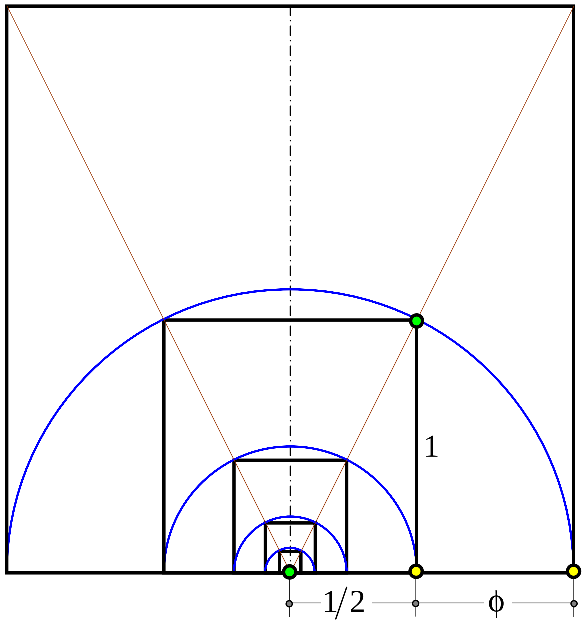

Рис. 5. Фрактальное наращивание прямоугольных гармоничных гео-матрешек

Подобные фрактальные построения осуществляются и для квадратов (рис. 5) при реализации альтернативного геометрического решения предложения 2.11 Евклида [8].

Мы не обсуждаем вопрос важности или незначительности феномена самого ЗС.

Для нас здесь главное то, что гармоническая пропорция присутствует де-факто, причем во взаимном сопоставлении практически любой пары треугольников через линейные параметры их сторон.

Это по-новому проливает свет на планиметрическую интерпретацию ЗС и оригинально структурирует "золотые фигуры" в их фрактальном проявлении по принципу "от большего – к малому" и наоборот.

Также довольно отчетливо прослеживается генетическая связь «треугольники – матрешки – фракталы – золотое сечение», которая может стать прообразом развития новых идей триалектики и математических конструкций при формализации гармонии.

Литература.

1. *Судоку* – суперпопулярные головоломки // Наука и жизнь. – 2006. – № 10. – http://www.nkj.ru/archive/articles/7666/.

2. *Божокин С.В.*, *Паршин Д.А.* Фракталы и мультифракталы: Учеб. пособ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.

3. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ. – М .: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

4. *Когда капля воды заменит флэшку*? // Инфосфера. –17.09.2007. – № 35. – http://infosfera.sfo.ru/a/index.php.

5. *Кирбаба Ю.В.* Генезис синергетической парадигмы: культурологические аспекты Специальность: 24.00.01 – Теория и история культуры. Диссертация на соискание ученой степени кандидата культурологи. – Саратов: СГТУ, 2004. – http://www.disserstation.ru/DISS2005/17-6.htm.

6. *Кононов А.Н.* Духовный смысл современной и народной игрушки: кн. для родительских размышлений. – 2-е изд., доп. и перераб. – Киров: Кустодия, 2003. – 114 с.

7. *Василенко С.Л.* Фрактальные многоугольники и "золотое" сечение // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15108, 21.02.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321095.htm.

8. *Василенко С.Л.* "Золотой разговор" с Евклидом // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15649, 12.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161575.htm.