И.В. Ерохов

Преобразования числового ряда Фибоначчи

Числовой ряд, полученный по аддитивной производящей формуле (1)

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad (n = 3, 4, \ldots) \qquad (1)$$

при начальных условиях $\{F_1 = 0, F_2 = 1\}$, называется рядом Фибоначчи. Приведенная выше формула используется обычно для вычисления следующего члена ряда, но возможен обратный порядок ее применения. Покажем это на примере.

Применим производящую формулу для определения 9-го члена ряда по значениям двух предыдущих с номерами 8, 7. Как видно из выражения (2), формула (1) применяется к 8-му, 7-му и другим членам ряда с целью последовательно раскрыть выражение. В результате получаем, что 9-тый член ряда вычисляется как сумма предыдущих элементов ряда Фибоначчи, начиная с 7-го. Отдельно добавляется член ряда F_2:

$$F_9 = F_7 + F_8 = F_7 + (F_6 + F_7) = F_7 + F_6 + F_5 + \ldots + F_1 + F_2. \qquad (2)$$

Последовательную редукцию членов ряда (2) представим как вариант производящей формулы, отличающейся от (1):

$$F_n = 1 + \sum_{i=2}^{n-2} F_i\,. \qquad (3)$$

Заметим, что $F_1 = 0$, поэтому суммирование в формуле (3) начинается с цифры 2, кроме того, член ряда F_2 заменен его значением. Формулу (3) можно проверить на отрезке ряда Фибоначчи, приведенном в таблице 1.

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_i	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711

24	25	26	27	28	29	30	31
28657	46368	75025	121393	196418	317811	514229	532040

В качестве примера найдем элемент ряда с номером $n=11$:

$$F_{11}=F_2+F_2+...+F_9= \\ =1+1+1+2+3+5+8+13+21=55.$$

В работе [1] числовой ряд Фибоначчи преобразован следующим образом:

«Исходная идея очень простая. Раз отношение соседних чисел Фибоначчи – 1/2, 2/3, 3/5, 5/8 и т.д. – гармонично, то и отношение удаленных должно быть пусть меньшей, но все-таки гармонией».

В соответствие с предложенным алгоритмом найдем значения членов нового числового ряда, которые фактически определяются как отношения следующих элементов исходного ряда (Табл.1):

$$\frac{F_3}{F_2},\frac{F_5}{F_3},\frac{F_7}{F_4},\frac{F_9}{F_5},...,\frac{F_{31}}{F_{16}}.$$

Запишем общую формулу для получения приведенных выше отношений:

$$R_n=\frac{F_{2n+1}}{F_{n+1}}, \qquad n=1,2,3,... \tag{4}$$

Отметим, что числитель формулы (4) содержит только те члены ряда Фибоначчи, которые имеют нечетный номер.

Результаты вычислений по формуле (4) сведем в таблицу 2:

Таблица 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
R_i	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364

Значения членов нового ряда (Табл. 2) автор статьи [1] считает гармониками более сложной функции и сопоставляет их величины с периодами обращения планет Солнечной системы. Никаких объяснений по сути представленного преобразования статья не содержит, т.к. значения пропорций (4) определить «несложно даже в уме, без калькулятора».

Найдем значения следующих соотношений членов ряда Фибоначчи:

$$\begin{aligned}
\frac{F_{25}}{F_{26}} &= \frac{46368}{75025} = 0,61803398 \Rightarrow \phi \\
\frac{F_{24}}{F_{26}} &= \frac{28657}{75025} = 0,38208059 \Rightarrow \phi^2 \\
\frac{F_{23}}{F_{26}} &= \frac{17711}{75025} = 0,23606797 \Rightarrow \phi^3 \\
\frac{F_{22}}{F_{26}} &= \frac{10946}{75025} = 0,14589803 \Rightarrow \phi^4 \\
\frac{F_{21}}{F_{26}} &= \frac{6765}{75025} = 0,09016994 \Rightarrow \phi^5
\end{aligned} \qquad (5)$$

Очевидно, что соотношения (5) представляют собой (приближенно) разные степени числа, получившего название «золотого сечения». Обратные отношения тех же чисел ряда Фибоначчи дают (приближенно) разные степени числа Фидия.

Таким образом, нет ничего неожиданного в том, что свойства ряда из работы [1], напоминают свойства ряда Фибоначчи. Даже производящая формула (1) справедлива для определения членов нового числового ряда. Например,

$$R_{15} = R_{13} + R_{14} = 521 + 843 = 1364.$$

Кроме того, соотношение соседних членов ряда в пределе также стремится к значению «золотого сечения»:

$$\Phi_p^{(15)} = \frac{R_{15}}{R_{14}} = \frac{1364}{843} = 1,6180308422.$$

Сравним с подобным отношением членов ряда Фибоначчи:

$$\Phi_f^{(31)} = \frac{F_{31}}{F_{30}} = \frac{832040}{514229} = 1{,}6180339887.$$

Отметим, что выражение (1) фактически представляет собой итерационную формулу, которую применяют многократно при вычислении последовательности чисел, обладающих некоторым самоподобием [2].

Чтобы выявить это свойство ряда, следует сначала представить числа Фибоначчи в двоичной форме. Например, для начала ряда:

0, 1, 1, 10, 11, 101, 1000, …

Затем, цифры этих чисел суммируются по модулю 2, что называется извлечением «цифровых корней»:

$$0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, \ldots \qquad (6)$$

В результате этих преобразований получается числовой ряд (6), который называется последовательностью Морса-Туэ (МТ).

Графически эта последовательность предстает сигнум (sign)-функцией, у которой амплитуды принимают значения 0 или 1. Далее к этой функции применяется преобразования Фурье, в результате чего получаем данные, необходимые для построения амплитудного спектра. Значения амплитудно-частотной характеристики сигнум-функции (МТ) могут быть сопоставлены с элементами исходного числового ряда. В спектре функции наблюдаются ярко выраженные пики на определенных дискретных частотах $(\phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \ldots)$, эти амплитуды соответствуют самым мощным гармоникам [2].

МТ-последовательность можно получить, итерируя отображения:

$$\begin{array}{l} 0 \to 01 \\ 1 \to 10 \end{array}.$$

Начнем с нуля, заменяя символы их отображениями:

0
01
0110
01101001

и т.д.

Последовательность, полученная итерированием отображения нуля и единицы, инвариантна относительно этого отображения. Другими словами, МТ-последовательность самоподобна, т.е. представляет собой фрактал [2].

Понятие фрактала вошло в теорию, прежде всего, как агломерат самоподобных геометрических фигур, хотя уже простое повторение формулы (1) при построении ряда Фибоначчи является безотказным источником самоподобия. Приведем геометрическое построение, соответствующее началу ряда Фибоначчи [3], рис.1.

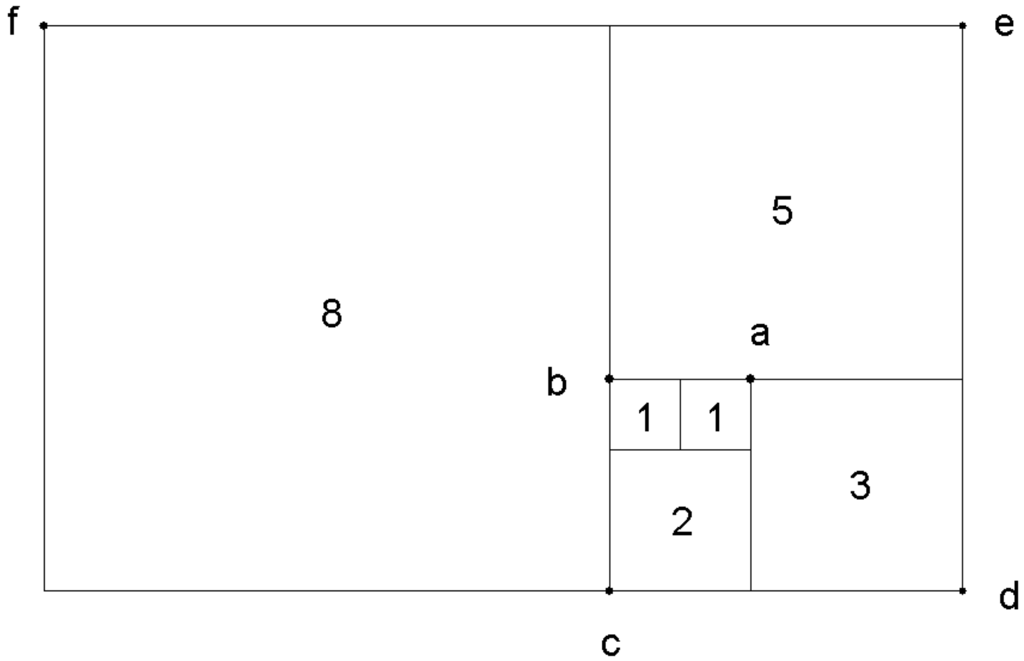

Рис. 1. Самоподобные квадраты.

Построение на рис.1 начинается с квадрата, обладающего единичными сторонами, одна из вершин которого обозначена буквой **a,** слева к нему пристраивается другой единичный квадрат. Затем следуют квадраты со сторонами: 2, 3, 5, 8. Процесс построения можно продолжить, например, расположив внизу квадрат со стороной равной 13. Через точки, обозначенные на рис.1 буквами, можно провести логарифмическую спираль, которая называется «завитком Фибоначчи». Таким образом, очевидно, что квадраты рис.1 самоподобны, т.е. отличаются только масштабом.

Преобразование ряд Фибоначчи можно продолжить по формуле, аналогичной (4). Формулу изменяем так, чтобы в числителе выражения были только те члены ряда, которые имеют четный номер:

$$R'_n = \frac{F_{2n}}{F_{n+1}}. \qquad (5)$$

Результаты вычислений членов элементов ряда по формуле (5) сведем в таблицу 3:

Таблица 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R'_i	1	2	2,5	4,333	6,8	11,125	17,923	29,047	46,97

10	11	12	13	14	15
76,018	122,988	199,006	321,995	521,002	842,998

Полученный числовой ряд (Таб. 3) обладает свойствами, аналогичными свойствам ряда Фибоначчи, даже традиционная производящая формула дает достаточно точный результат с ростом номера члена нового ряда, например: $R'_{13} + R'_{14} = R'_{15} = 321{,}995 + 521{,}002 = 842{,}997$. Кроме того, соотношение соседних членов ряда стремится к числу Фидия:

$$\Phi_{r'}^{(15)} = \frac{R'_{15}}{R'_{14}} = \frac{842{,}997}{521{,}002} = 1{,}6180321764.$$

Итак, численных рядов, обладающих некоторыми свойствами ряда Фибоначчи, можно построить много. Иногда достаточно изменить начальные условия для формулы (1) [4], [7], иногда – внести небольшие изменения в уравнение золотой пропорции [5]. Используя разные приемы, можно даже получать ряды, которые слабо напоминают «золотой» ряд, поэтому они заслужили приставку к своему названию: квази- или псевдо- [6].

В работе [7] отмечается, что «золотая пропорция» возникает в природе за счет простого повторения некоторых «квантов» роста, которые возникают на структурах ближайших соседей. Другими словами, итерирование возникает естественным путем. В качестве примера приводится итерационная формула для получения членов числового ряда, аналогичная по структуре формуле (1):

$$A(n) = A(n-1) + A(n-2)\,. \qquad (6)$$

Начальные условия назначаются произвольно при соблюдении следующих неравенств:

$$A(1) \geq 0,$$
$$A(2) > 0.$$

Интересно, что с ростом номера членов ряда (6), при значениях $n > 10$, величина каждого нового элемента ряда (6) все более приближается к соответствующему члену ряда Фибоначчи.

Итерационные формулы производят самоподобные числовые последовательности. При численном интегрировании такие формулы используются для решения конкретных задач. Различают сходящиеся и расходящиеся итерационные процессы. В первом случае, элементы вектора невязки в процессе итерации уменьшаются по модулю, во втором случае – возрастают. Результаты применения формулы (1) при построении ряда Фибоначчи можно определить как расходящийся итерационный процесс, т.е. устремляя номер члена ряда в бесконечность, получаем безграничный рост приращения величины каждого нового члена ряда. Это есть еще одно доказательство того, что ряд является фрактальной последовательностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пахомов С. Гармоники золотой пропорции в строении Солнечной системы// «Академия Тринитаризма», М., Эл№77-6567, публ.16139, 06.11.2010.

2. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 528с.

3. Газале М. ГНОМОН. От фараонов до фракталов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 272с.

4. Василенко С.Л. «Золотые ряды» Фибоначчи с произвольными начальными условиями// «Академия Тринитаризма», М., Эл№77-6567, публ.15295, 19.05.2009.

5. Василенко С.Л. Квазизолотые сечения// «Акадлемия Тринитаризма», М., Эл№77-6567, публ.15605, 18.10.2009.

6. Василенко С.Л. Клоны золотого сечения// «Академия Тринитаризма», М., Эл№77-6567, публ.15641, 09.11.2009.

7. Харитонов А.С. Откуда возникает золотая пропорция в природе?// «Академия Тринитаризма», М., Эл№77-6567, публ.15043, 15.01.2009.