С.Л. Василенко

От шедевра до абсурда один шаг

Математики берут лопаты
и идут извлекать корни...

«Поучайте лучше ваших паучат...» (Буратино). Следует всегда отдавать себе отчёт и различать, когда полезно порицать строго, а когда напрасно делать даже небольшие замечания.

Все люди разные. Не только в сути воззрений, но и в отношении критики.

Мы же сами не всегда принимаем нравоучения. Зачастую возникает естественно-защитная человеческая реакция: «Нечего указывать. Без тебя знаю, что делать. Не суй свой нос, куда не просят. Умник нашелся». Ну, и так далее.

Эта тема по-особому хорошо раскрывается в Библии: «Поучающий кощунника наживет себе бесславие, и обличающий нечестивого – пятно себе. Не обличай кощунника, чтобы он не возненавидел тебя; обличай мудрого, и он возлюбит тебя; *дай наставление мудрому, и он будет еще мудрее; научи правдивого, и он приумножит знание*» (Притчи 9:7-9).

Так что в своих устремлениях остаётся уповать на людей мудрых и правдивых.

Обдумав, они могут и способны размышлять, приумножая знания.

Иначе нет смысла затевать разговор.

Разрушим до основанья, а затем? Видимо, окрылённый одобрительными отзывами на свои некоторые работы, Д. Клещев выступил с активным обличением, по его мнению «глубокой патологии современной математики» [1]. На этот раз он решил низвергнуть одну теорему (об иррациональности корня из двух), истинность которой не вызывала сомнений у математиков более двух тысяч лет. Более того, она до сих пор служит хрестоматийным примером доказательства от противного. – Мощного математического метода, восходящего к величайшим мыслителям Древней Греции.

Можно было и не уделять особого внимания данной заметке.

На наш взгляд, она дерзкая по форме и одновременно лишена значимого смысла по содержанию. Плюс вызывающая претензия на оригинальность.

Словно свидетельствует, что бог математики пойман за бороду.

Профессор А.П. Стахов, на правах председателя проходящего семинара[1] АТ, выразил пожелание-просьбу: «*Очень хотелось бы, чтобы кто-либо из известных математиков нашёл ошибки в рассуждениях Дениса Клещева. А иначе, действительно...*» [2].

Последуем его предложению.

Но, оказывается, чтобы разобраться в хитросплетениях [1], достаточно немногим 3–10 минут. И здесь совсем не обязательно участие великих математических умов.

Всё на виду. Достаточно просто. Можно даже сказать, почти тривиально.

Да и действо вполне понятно. Математический шедевр-изюминку, коей более двух тысячелетий, пытаются, походя, низвести до абсурда.

В один шаг... Что называется, от великого до смешного.

Итак, решаем небольшое домашнее задание из трёх частей...

Часть 1 (визави – Адольф Юшкевич, *заочно*).

Несколько слов о доказательстве иррациональности √2, приведенном на страницах монографии А. Юшкевича [3, с. 73].

Понятно, в своих формулировках на историческую тематику он исходил из пифагорейских традиций и трактовок отдалённого прошлого. Его интересовала не столько абсолютная строгость рассуждений, сколько отражение атмосферы прошлых лет.

---

[1] http://www.trinitas.ru/rus/000/a0000001.htm.

С позиций современной терминологии в изложение допустимо внести некоторые поправки-уточнения, хотя они принципиально не влияют на достоверность результатов.

а) Так, отношение диагонали и его стороны сопоставляется [3] с отношением двух *целых* чисел m/n. – Конечно, более корректно нужно говорить об отношении двух положительных целых или натуральных чисел.

Кстати, отрицательные числа ввёл в математический обиход в средние века, М. Штифель в книге «Полная арифметика» (1544). Древние греки про них и не слыхивали.

Целые числа включают натуральные n, числа вида $-n$ (отрицательные) и число 0.

б) «Предполагается, что числа m и n не являются оба чётными, иначе дробь можно было бы сократить на два». – Тоже слабое утверждение. Почему бы теперь по аналогии не говорить дополнительно о кратности на 3, 5 или 13? – В нынешних доказательствах обычно говорят о несократимой дроби m/n. И всё.

Это следует из определения: *рациональное число* (лат. *ratio* отношение, деление, дробь) – число, которое представимо несократимой обыкновенной дробью m/n, где m – целое число, n – натуральное число. То есть m и n – взаимно простые числа.

Часть 2 (визави – Дмитрий Клещев).

В монографии [4, с. 300] есть такая малоприметная сноска-примечание: «*наилучший классический пример рассуждения от противного в математике – это доказательство иррациональности для √2, о котором несколько раз упоминает Аристотель...*».

Д. Клещев неожиданно "нападает" на эту цитату, снисходительно переиначивая французских математиков и называя иронически пример «*наилучшим*» из всех доказательств.

Хотя в приведенной выдержке чётко указывается на наилучший классический пример рассуждения от противного. И не более того. Причём образец классический, восходящий к глубокой античности. Кроме рассуждений от противного, в математике существуют иные способы доказательств, среди которых, имеются не менее интересные образцы математического творчества.

а) Разбираться глубоко в деталях-буковках, нет особой надобности.

На самом деле всё довольно просто.

В доказательстве иррациональности числа $\sqrt{2}$ действительно используется следующее изречение от противного: допустим, корень $\sqrt{2}$ рационален, то есть он представляется в виде рациональной несократимой дроби m/n.

Понятно, что здесь $n \geq 2$. Ибо то, что $\sqrt{2}$ – не является натуральным, решается простым перебором: $1^2 = 1$ и $2^2 = 4$. То есть, нет такого целого, квадрат которого равен 2.

Другими словами, априори известно, что $\sqrt{\mathbf{2}}$ – некоторое число, заключённое в интервале (1, 2): $1 < \sqrt{\mathbf{2}} < 2$.

Поэтому знаменатель n несократимой дроби алогично приравнивать единице, как тривиально ошибается Д. Клещев в своих рассуждениях.

Ибо это переводит задачу из области рациональных в область целых чисел, в которых нерешаемость задачи (непредставимость корня из двух) совершенно очевидна.

Именно поэтому в доказательстве принимается $\boldsymbol{n \geq 2}$.

В большинстве публикаций это свойство не фигурирует явно, поскольку считается абсолютно естественным. – Поэтому для корня из двух доказывается невозможность рациональности, а не целостности. В работе [1] понятия допустимой (от противного) рациональности и целостности числа $\sqrt{2}$ смешиваются, отсюда и проистекают неверные выводы.

Принятие в несократимой дроби **знаменателя не равным 1** настолько очевидно, что даже праотцы математики оставляли этот факт за скобками своего изложения.

А далее следует [1]: «Оказывается, число $n = 1$ – четное число... 1/2 – целое число! ... оказывается, число $m = 1{,}414\ldots$ – тоже четное число... Это утверждают самые авторитетные трактаты по математике (Н. Бурбаки) и монографии по истории математики (А.П. Юшкевич)». – Ничего подобного данные трактаты не утверждают.

Это собственные видения Д. Клещева.

б) Вторая часть, можно сказать, не лучше. Приведём из неё краткие выдержки [1]:

- «Пусть даны два отрезка $AC = 2$ и $AB = 1\ldots$ Допустим, что… их отношение равно отношению двух целых чисел: $AC/AB = m/n$». – Воистину чудные обозначения.
- «Очевидно, что $4(t^2/4)$ можно записать как $2(t^2/4)/2$». – Не то что очевидно, но с вероятностью до наоборот, невероятно.

Ибо **четыре равно произведению 2·2, а не частному 2/2**.

- «Мы без зазрения совести можем приравнять выражение $(t^2/4)/2$ к некоторому числу $k\ldots$ Тогда можно сказать, что число $2k$ – четное». – Совершенно не так. Зазрение совести не помешало бы и могло выручить. Потому как число k – в общем случае дробное, а значит, $2k$ – не обязательно чётное.

Мало того, что обилие ошибок. Так, ещё и собственный ход неверных рассуждений алогично Д. Клещев называет: "*классическим*" в школе Николя Бурбаки.

Ничего такого у французских математиков нет и в помине. Они просто отмечали "классичность" рассуждений. Ибо она восходит ещё к Евклиду! И не более того.

Действительно, используя доказательство от противного, Евклид сумел доказать существование иррациональных чисел в конце X книги [5, с. 503–505]!

Это одна из жемчужин человеческого гения в абстрактном мышлении, несмотря на чьи-либо "пыхтелки-нехотелки".

Триумфальное открытие несоизмеримости отрезков означало, что целых чисел и их отношений оказывается недостаточно для количественного выражения сопоставимости любых двух отрезков. То есть с помощью одних только рациональных чисел нельзя строить метрическую геометрию [3].

в) Сказанное выше, можно сказать, чистой воды математика. Она сама способна постоять за себя, отделив зёрна от плевел. Но есть в заметке [1] и другая неприятность-некорректность. – Морально-этического характера.

Её корни, по-видимому, произрастают при чрезмерном общении с компьютером, когда люди порой начинают теряться в границах виртуальности-действительности интернетовской сети со своей спецификой общения.

Более-менее приемлемый разговорно-сленговый стиль на различных форумах или по электронной почте становится недопустимым в статейном изложении.

Фамильярно-развязное обращение [1] к своему соотечественнику – выдающемуся российскому математику современности Григорию Перельману не делает никому чести.

Ни г-ну Клещеву, ни академии и редакции АТ, ни всем нам – коллегам по общей творческой мастерской.

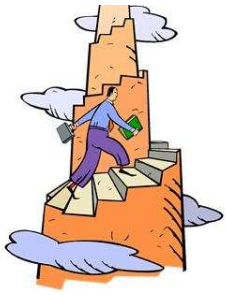
Подобная бесцеремонность снижает общую академическую планку.

Одновременно бросает тень на остальные публикации, низводя их косвенно до низкопробной второсортицы.

Представляется, что и без показывания пальцем вполне угадываемо, кто на самом деле оказался «в полном ауте» по выражению [1].

Часть 3 (визави – Алексей Стахов).

В процессе прохождения семинара по симбиозу математики и гармонии уважаемый профессор А.П. Стахов немало сил и энергии отдаёт написанию ремарок на различные статьи. В том числе и наши скромные работы. За что отдельное спасибо.



На основательные рецензии они похожи мало, ибо практически не ставят задачу глубокого анализа исследуемых материалов. Их направленность в основном имеет смысл одобрения и поддержания «боевого и морального духа» авторов. Что тоже, кстати, немаловажно.

Тем не менее, его заметки оформлены в виде «печатного слова».

Их читают. Из них черпают некие сведения.

Они несут в себе предначертанные посылы в развитии знаний, включая связь математики и гармонии.

Следовательно, здесь должны соблюдаться определённые правила.

И как минимум, точность изложения информации.

Поэтому позволим себе внести некоторые уточнения-поправки.

- А.П. Стахов отмечает [2]: «*Предметом критики Дениса Клещева является «метод доказательства от противного», широко используемый в математике.* ***Он показывает, что, используя этот метод, можно доказать несоизмеримость целых чисел*!»**

1) Конечно, преждевременно об этом говорить, ибо Д. Клещев не "*показывает*", а лишь *пытается* (*пробует*) *что-то показать*. – Безусловно, это две большие разницы. Он может заблуждаться, и де-факто ошибается.

2) «*несоизмеримость целых чисел*» (?) – в математике не бывает, потому что ... не бывает. Можно говорить о несоизмеримости отрезков, в частности стороны и диагонали квадрата, но только не чисел. Сами числа не измеряются.

Соизмеримость можно искать во многих вещах, но только не в числах!

Зато их можно сравнивать между собой.

Для этого используются равенства, неравенства и другие математические формы.

- «*На основании этого "наилучшего" доказательства была построена вся современная теория иррациональных чисел, которую подверг критике Л.Кронекер, а также вся теория бесконечных множеств Георга Кантора*» [2].

1) Немецкий математик Леопольд Кронекер так давно жил и творил (1823–1891), что даже гипотетически не мог подвергнуть критике современную (!) теорию иррациональных чисел. Хотя в своё время и высказывал острые замечания.

2) Взятие в кавычки слова *"наилучшего"* в данном случае имеет иронический оттенок. Хотя это действительно прекрасный классический образец математического доказательства (творчества). Без каких-либо преувеличений. Его превосходно знали ещё учёные античности.

3) Отдельное упоминание теории бесконечных множеств Георга Кантора здесь, по нашему мнению, вообще алогично. Нам знакомо отношение отдельных учёных к этому великому математику.

Но здесь, что называется, "заело". Метод доказательства от противного пронизывает практически всю математику. Сдаётся, со своей теорией множеств Г. Кантор просто попал "под раздачу" и отчасти походит на одного из персонажей И.Крылова: «Ты виноват уж тем, что хочется мне кушать».

Ну, и воспроизводить-множить амикошонство г-на Д. Клещева в адрес Григория Перельмана вовсе не обязательно. Это никому не делает чести.

Нечто зеркально схожее уже отмечалось совсем недавно в одном письме [6].

Хорошо бы по затронутым вопросам раз и навсегда поставить жирную точку.

Это только у знаменитого сатирика «алкоголь в малых дозах безвреден в любом количестве» (М. Жванецкий). Нечто не совсем потребное в малых дозах, но в возрастающем количестве, вовсе не безопасно, как может показаться на первый взгляд.

Не будем далее копаться-разбираться, кто там "в ауте", "отдыхает" или в игре.

Ответ, сдаётся, и так хорошо просматривается.

Видящий, да увидит...

Главное, попытаться всем сделать верный выбор.

А потому не грех повторить ещё раз библейскую истину: «Дай наставление мудрому, и он будет еще мудрее; научи правдивого, и он приумножит знание».

Домашнее задание выполнено с оценкой:
плохо, удовлетворительно, хорошо, отлично
(*нужное подчеркнуть*)

Литература:

1. *Клещев Д*. Reductio ad absurdum // Академия Тринитаризма. – М., Эл. № 77-6567, публ.17055, 04.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161907.htm.

2. *Стахов А.П*. Реплика по поводу публикаций... // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17060, 06.12.201. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322063.htm.

3. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А.П. Юшкевича: В 3-х томах. Том первый. – М.: Наука, 1970. – 354 с.

4. *Бурбаки Н*. Теория множеств: Пер. с фр. – М.: Мир, 1965. – 232 с.

5. *Начала Евклида*. Книги VII–X: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. – 512 с.

6. *Алферов С.А*. До свидания, «АТ» // Академия Тринитаризма. – М., Эл № 77-6567, публ.17045, 01.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0021/001a/00211133.htm.

© ВаСиЛенко, 2011