С.Л. Василенко

Рациональность иррациональных систем счисления

Вычисляй и властвуй[1]

Настоящая статья содержит некоторые соображения-зарисовки вокруг необычных позиционных систем счисления (СС) с иррациональными основаниями.

Дело даже не в их полезности, которая пока просматривается не очень отчётливо.

Можно даже сказать, с большим трудом.

Оно и не мудрено. Эти «системы счисления ... считают, прямо скажем, не очень. Семь потов сойдет, пока одно действие закончишь… Область применения этих систем – не вычисления, а контрольные, регистрирующие и сравнительные функции. И технологические. Проверить, выбрать, сдвинуть, изменить, передать и принять с наименьшими потерями, … вот для чего эти системы. Для них число не результат вычислений, а только предмет обработки» [1].

Тем не менее, здесь видится нечто иное и более масштабное, выходящее за привычные рамки рационального или *ratio*[2], означающего в самом широком смысле разумность и осмысленность. Как-то, система ценностей, эмпирическая адекватность, способность содержательного знания к росту и т.п.

Во-первых, к таким системам счисления пришли через число золотого сечения Ф, с которым иногда связывают некую гармонию или возможную связность мироздания.

Во-вторых, оказалось, что любое целое положительное число в Ф-коде можно записать в виде конечной суммы степеней основания Φ^k ($k = \pm1, \pm2\ldots$), что весьма символично.

Подобное завораживающее свойство представления натуральных чисел через своих иррациональных собратьев пленяет в наибольшей мере своей невероятной экзотикой.

Весьма также необычно, что основы системы были созданы Дж. Бергманом (1957) в совсем юном возрасте 12 лет. Всё началось с очевидного равенства $\Phi^2 - \Phi^1 = \Phi^{-2} + \Phi^{-1} = 1$.

Большим популяризатором системы счисления Бергмана в последующем стал профессор А. Стахов. Он же предложил использовать в качестве иррациональных оснований другие числа – вещественные корни $1 < \lambda_p < 2$ полинома $x^p - x^{p-1} - 1$.

Основываясь на результатах работы [2], у нас возникли определённые сомнения [3] в *сходимости* λ_p-кодов – способности позиционной СС точно представлять каждое целое число в виде конечного разложения в символической записи. Тем более что данное положение его автор теоретически пока не обосновал.

Правда, не всё вышло гладко. В реплике [4] вполне справедливо обращено внимание на один дефект в нашем частном примере. Хотя нужно сказать, он и занимает-то ровным счётом две строчки текста и совершенно не отражает общую канву статьи [3] в части систем счисления. Узловые моменты остались за кадром. А критический взор устремился на демонстрационный пример, ровным счётом ничего незначащий для общего содержания.

Напомним также: «Сам метод науки – это метод проб и ошибок. Ошибки – её неотъемлемая часть. Ученый имеет право на ошибку... Можно видеть, я думаю, не менее 80–90 % работ, гипотез и обобщений... не вошедших в сложившуюся систему научных представлений, то есть формально – ошибочных» [5]. «Ученый может ошибаться, но лжеученый настаивает на своих ошибках», – это вывод академика П. Капицы.

Хорошо если из современных описаний, моделей, предположений и других исследований в области золотого сечения со временем останутся 5–10 % безошибочных положений и выводов.

От ошибок никто не застрахован. Ничего неприглядного в этом нет.

---

[1] Наш вариант перефразировки от формулы «разделяй и властвуй» (автор неизвестен) с переориентацией на позитивный смысл. Именно точные вычисления становятся основой научно-технического прогресса.

[2] Разум, рассудок, основание, причина, довод, смысл, способ, мотив.

Главное, это вовремя их признавать и двигаться дальше. Что мы и делаем. И пока сосредоточим внимание на том, что вопрос сходимости λ_p-кодов остаётся открытым...

Выбранный нами стиль настоящего изложения больше тяготеет к научно-популярной форме эссе. Поэтому вполне допустимо позволить себе провести некоторые условно параллельные линии освещения темы.

Или, как говорится, немного отвлечёмся от главной темы...

Мучение – орт учения. Путь ученья тернист. С годами гранит науки только крепчает. А зубы изнашиваются.

Ученический труд в своём проявлении обычно мучителен. В любом возрасте.

С каждым днём, как на дрожжах, увеличивается объём знаний человека.

Все более возрастают требования к повышению умственной способности людей и скорости освоения знаний.

Одновременно расширяется круг новых понятий, терминов и названий.

Порой слишком вольно. Не отвечая установившимся стандартам и правилам языка.

В этих условиях как никогда необходимо бережное отношение к уже принятой или вновь вводимой терминологии. Определяйте значения слов, – говорил Рене Декарт, – и вы избавите человечество от половины его заблуждений.

Конечно, допустимы определённые несогласованности. В своём понятийном становлении, как говорил А. Лосев, «*неясность и путаница отдельных терминов является делом вполне естественным*» [6, с. 141].

Но это вовсе не означает бросить словотворчество на самотёк в объятия научно-лингвистической анархии[3]. На словесный произвол и нигилизм.

Тем более, нельзя усугублять положение. А наоборот, следует самым тщательным и скрупулезным образом вырисовывать терминологические изолинии [3].

Гармонизация знаний. Нечто похожее на «терминологические изоклины» происходит и в такой сфере, как гармонизация накопленных знаний.

Ситуация здесь такова, что многие вещи при их рассмотрении с высоты "птичьего полёта" представляются иначе, чем они виделись в суете дословного прочтения.

Что называется, через лупу.

Действительно, не столь уж важно, что первой работой, где прозвучало понятие «математизация гармонии», стала наша публикация [7]. А уже с неё потом пошли заголовки других статей или название международного семинара «Математизация гармонии и гармонизация математики...» [8].

Тем более введение нового понятие не являлось самоцелью.

Оно было применено по аналогии с широко известной идиомой «математизация науки», – альтернативным звучанием к словесной конструкции «математика гармонии», на наш взгляд, с некорректным проявлением и нарушением унисонно-слаженного звучания данного симбиоза [9].

Вот уже и другие участники семинара отмечают [10]: «понятие гармонии по отношению к математике не представляется полностью корректным... Гармония не есть нечто, существующее само по себе... В широком понимании – это отношение между... предметами или понятиями... Кроме того, данный термин противопоставляет математику с "золотым" началом существующей системе математических знаний... как бы, отмежевываясь от традиционной математики».

В самом деле, ноты (знаки, символы) у всех математиков, учёных и специалистов одинаковые.

И если музыка получается разная или порой похожа на какофонию, то это беда не нот, а уровня знаний нотной грамоты и развития музыкального слуха.

Будь-то гармонь, бандура или трембита...

---

[3] «Аффтарский текст», «албанский язык», « лингвистическая анархия», «падонкаффский язык» – это названия нового стиля, новых слов, употребляемых в сети Интернет, в обиходе и др.

Но и здесь должна быть мера, помноженная на здравый смысл.

Так что, почему бы нам и не присоединиться к пожеланию: «не будем увлекаться пока формулировками, а будем аргументировано говорить о том содержании, которое мы вкладываем в то или иное наименование» [4].

Итак, перейдём от формы к содержанию.

Математические миражи. В буквальном значении мираж – *видимость* предметов, которые при обычных условиях скрыты от наблюдения. Некая особая *игра* <световых лучей>.

Свет распространяется прямолинейно только в однородной среде.

При разностях температур лучи в атмосфере преломляются.

Вблизи земли они дополнительно отражаются.

У поверхности воздух становится словно зеркалом. За счёт чего и возникают миражи-иллюзии.

В математике тоже бывают свои "миражи".

Некое утверждение, можно проверить на частных примерах тысячу раз.

Но в один прекрасный момент на "1001 ночь" оно способно дать сбой-осечку.

То, что казалось практически уже очевидным, неожиданно претерпевает фиаско.

Чтобы не возникали подобные разочарования, доказывают теоремы.

А недоказанные стопроцентно утверждения в математике принято называть гипотезами.

Некоторые из них могут пребывать в таком статусе столетиями.

Кое-каким положениям со временем повезёт больше, и они станут доказанными.

Другим, увы, никогда не дано познать метаморфозу гусеницы или гадкого утёнка.

Но это не беда. Как правило, рассеяние математических "миражей" сопровождается новыми достижениями, разделами и теориями. Что уже немаловажно.

Напомним один весьма показательный случай, связанный с решением диофантового уравнения $[n,\ k,\ m]$

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = y_1^n + y_2^n + \dots + y_m^n .$$

Гипотеза Эйлера [4] утверждает, что для любого натурального числа $n > 2$ никакую n-ю степень натурального числа нельзя представить в виде $(n - 1)$ суммы n-х степеней других натуральных чисел.

То есть, уравнения вида $[n,\ 1,\ n-1]$ якобы не имеют решений в натуральных числах:

$$x^3 = y_1^3 + y_2^3, \qquad x^4 = y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 \dots$$

Данное предположение было высказано в 1769 г. как обобщение великой теоремы Ферма, которая соответствует частному случаю $n = 3$.

Почти 200 лет эту гипотезу не могли ни доказать, ни опровергнуть.

И только в 1966 г. *Lander–Parkin* нашли первый контрпример для [5, 1, 4]

$$144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5.$$

В 1986 г. *Noam Elkies* обнаружил первое решение для случая [4, 1, 3]

$$20615673^4 = 2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4.$$

Чуть позже *Roger Frye* усовершенствованным методом перебора открыл на суперкомпьютерах SUN наименьшие числа для [4, 1, 3]

$$422\,481^4 = 95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4.$$

Это вызвало настоящую сенсацию в мировой математике.

[4] Гипотеза Эйлера // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=37509580.

Кроме мощности вычислительных комплексов в этом вопросе росли так же и методы поиска в решении подобных задач. Ибо простой перебор потребовал бы целых тысячелетий.

На сегодня для задачи $[4, 1, 3]$ известно около 30 решений (http://euler413.narod.ru/).

Пока лидирующее положение занимает разложение числа $8\,813\,425\,670\,440\,240^4$.

Для $n = 6$ гипотеза Эйлера по-прежнему остается открытой проблемой.

Какой здесь напрашивается главный вывод? – На основе ограниченных данных наблюдения либо интуитивно можно создавать самые разные формулировки.

Если же ни утверждение, ни его отрицание не доказано, оно так и остаётся гипотезой-догадкой, за исключением аксиом. Но никак не леммой или теоремой.

Я придумал теорему. Теорема вот про что... Эта считалочка-двустишие – не ирония. Найти и доказать новую теорему может практически каждый.

Вроде своеобразного вдохновения, инспирированного полётом души-фантазии.

Всё равно как писать стихи, рисовать либо создавать скульптуры или писать музыку.

Очень многие потенциально умеют. Просто никогда не задумывались об этом всерьёз. Предполагают, что это удел только избранных. Отнюдь... Во всяком случае, так говорит известный крупный математик Акияму из Страны восходящего солнца.

Как-то маленький мальчик спросил его, бывают ли теоремы о рыбках? – Специально для него учёный придумал такую теорему:

из бумажной головы тунца в форме пирамидки можно вырезать пятиугольное суши, похожее на план японского деревенского дома; но суши в виде *правильного пятиугольника* не вырежешь, как ни старайся [11].

Вроде бы такая себе теорема-игрушка. Но из неё, будет уместным обратить внимание, логически вырастает прообраз условий для формирования золотого сечения.

Для этого достаточно включить ассоциативное мышление.

А теперь вернёмся к нашей основной теме или "Revenons a nos moutons"...

Гипотеза и факты. В реплике [4] как бы мимоходом отмечено, что в англоязычной книге [12] сформулирована и доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. Любое натуральное число N может быть представлено в виде конечной суммы степеней p-пропорции λ_p^i $(p = 1, 2, 3...;\ i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2...)$, то есть сумма $N = \sum_i a_i \lambda_p^i$ конечна для любого натурального числа N.

Здесь величина $1 < \lambda_p < 2$ – основание системы счисления (СС), равное положительному вещественному корню полинома $x^p - x^{p-1} - 1$;

целые числа $a_i = \{0,\ 1\}$ – цифры СС; степени λ_p^i – весовые коэффициенты разряда.

Всегда трудно судить со слов. Лучше один раз увидеть... Да и нет уверенности в полной справедливости приведенного утверждения.

На это есть ряд веских причин:

1. Данное утверждение довольно часто звучало во многих работах, со ссылкой на доказательство в статье [13]. Но там его попросту не оказалось.

2. Теперь читателю учтиво рекомендуют обратиться к монографии [12]. Однако проверить что-либо по этой работе затруднительно, ввиду её недоступности.

Но даже не это главное.

Применяемые ранее методы доказательства утверждений, в том числе конкретно по рассматриваемому вопросу, вызывали обоснованное замечание.

Они лишь проверялись на 3–5 частных случаях, после чего обычно завершались подобным образом:

– «Продолжая этот процесс, можно получить "золотые" представления всех натуральных чисел в $<\lambda_2$-коде$>$. Это означает, что мы доказали теорему» [14].

– «Продолжая этот процесс до бесконечности, можно получить "золотые" представления всех натуральных чисел в системе Бергмана, что дает основание сформулировать теорему: Теорема 1: любое натуральное число в системе Бергмана представляется в виде конечной суммы степеней золотой пропорции» [15].

Разумеется, в подобном ключе теоремы не доказываются.

Цепочка умозаключений должна иметь логическое завершение, а не предлагать читателю «продолжать процесс до бесконечности».

Мы уже отмечали подобные факты в работе [16]. Там же, кстати, в качестве примера приведено доказательство сходимости Ф-кода, где $\Phi = \lambda_2 = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ – золотое сечение.

Если идти по пути от частного к общему, то, как минимум, нужно подключить метод математический индукции. Часто он довольно эффективен.

Возможны и другие способы: доказательные вычисления, доказательство от противного, иные логические построения.

3. Наконец, у нас нет причин не доверять статье [2], в которой приведены математически выверенные материалы для широкого круга полиномов. Однако p-пропорции и λ_p-коды ($p > 2$), основанные на полиноме $x^p - x^{p-1} - 1$, в этот круг не попали. Возможно, не столько из-за сходимости, сколько по причине затруднений составить простой алгоритм преобразований. Что ещё больше повышает интерес к развитию теории.

Не мытьём, так катаньем. Данная поговорка несёт позитивно-оптимистический контекст и пошла от шерстобитов, выделывающих валенки.

При этом промысле шерсть, идущую на валенки, *мыли*, парили, валяли и "*катали*".

Подобное действо выполняли и прачки, которые "*катали*" на скалке накручивающееся бельё, после чего можно было и не гладить. Так что можно добиться нужного результата или хотя бы впечатления, взяв «*не мытьем, так катаньем*».

Если глубоко разобраться, то исследуемый нами вопрос отнюдь не праздный. Несмотря на вуаль принятого изложения.

В определённой степени он очень принципиален, требуя надёжного правомерного решения, поскольку далее идёт речь о геометрии натуральных чисел. Здесь же автоматически подключается и проблематика бесконечности с выходом на основополагающие принципы всей математики. Да и неловко как-то, говоря о гармонизации–математизации знаний, изначально нарушать гармоничную подоснову для новых исследований.

Что же делать... И как удостовериться в правомерности утверждений?

Тут как нельзя, кстати, приходит на помощь *хватка шерстобитов и прачек* начала прошлого века: пытаться решать проблему разными способами.

Для начала мы решили воспользоваться советом, высказанным персонально в наш адрес: «убедиться, что таким путём можно получить все представления натуральных чисел от 1 до бесконечности» [4]. – Нам вполне понятна выразительная и содержательная форма аллегории. И всё же стоит попробовать... Может, и вправду λ_p-коды сходятся?

Эх, дубинушка, ухнем. В адекватной формулировке задача ставится очень просто.

Целое число N нужно представить в виде конечной суммы без нулевого разряда.

Это означает, что нулевой разряд свободен и готов для принятия новой единицы $\lambda_p^0 = 1$, а значит, число $N + 1$ также можно выразить конечной суммой.

Если от нулевого разряда избавиться принципиально нельзя, то число $N + 1$ не выражается конечной суммой в p-коде.

Ограничимся моделью третьего порядка ($p = 3$) $x^3 - x^2 - 1$.

Она не такая обременительно-сложная. Да и корень выражается аналитически

$$\lambda_3 = \frac{c + c^{-1} + 1}{3} \approx 1{,}4656\,; \quad c = \frac{\sqrt[3]{116 + 12\sqrt{93}}}{2}\,.$$

Согласно разностной форме $f_n = f_{n-1} + f_{n-3}$ в разрядной записи-строке числа имеет место кодировка с адекватной заменой: $10z0 \longleftrightarrow 01z1$.

Она распадается на две формы, соответственно для $z = 0$ и $z = 1$.

Кстати, наш ранний просчёт состоял в упущении приемлемой формы: $1010 \leftrightarrow 0111$.

Кроме того, верна формула $f_n = f_{n-1} + f_{n-3} = f_{n-2} + f_{n-4} + f_{n-3}$, которая даёт ещё одну полезную равнозначную форму.

В результате имеем, можно сказать, базовый набор-кодировку:

$$\begin{pmatrix} 1000 & \Leftrightarrow & 0101 \\ 1010 & \Leftrightarrow & 0111 \\ 10000 & \Leftrightarrow & 00111 \end{pmatrix}.$$

А вот и первые результаты выполненных преобразований.

N	λ^i	λ^{-i}	λ^i	λ^{-i}	N+1
1	**0**	101	1	101	2
2	1**0**	0011	11	0011	3
3	1**0**	1110001	11	1110001	4
4	100**0**	0110001	1001	0110001	5
5	101**0**	0010001	1011	0010001	6
6	110**0**	0011011	1101	0011011	7
7	111**0**	0001000001	1111	0001000001	8
8	111**0**	1011000001	1111	1011000001	9
9	1100**0**	1011000001	11001	1011000001	10
10	1101**0**	1000001001	11011	1000001001	11
11	1110**0**	1010001001	11101	1010001001	12
12	1111**0**	0011001001	11111	0011001001	13
13	11000**0**	1011111101101	110001	1011111101101	14
14	11010**0**	0001011101101	110101	0001011101101	15
15	11100**0**	0001011101101	111001	0001011101101	16
16	11100**0**	1011011101101	111001	1011011101101	17
17	11101**0**	1001001001101	111011	1001001001101	18
18	11110**0**	1011001001101	111101	1011001001101	19
19	101100**0**	1011001001101	1011001	1011001001101	20
20	101101**0**	10000110000011	1011011	10000110000011	21

Надо сказать, что выполнение построений оказалось непростой задачей.

Нечто похожее на вычурные ассоциации из серии: «Не надо лохматить бабушку[5]».

Или всё происходит так, ... как оно происходит.

И дело даже не в бесконечности. Она-то как раз не пугает. Ибо если прослеживаются некие механизмы-закономерности, то далее, как говорится, дело техники. Или чем дальше в лес, тем больше дров.

Но в том-то и дело, что чёткие контуры алгоритма и правил преобразований практически не просматриваются. Лес не структурируется, всё больше напоминая заросли.

Поиск приемлемой записи от числа к числу идёт, что называется «в штыковую атаку».

Можно сказать, почти вслепую, методом проб и ошибок.

Так что до бесконечности, как до рая Кантора. Далековато. И тем не менее...

Постепенно складывается впечатление, что система видимо-таки сходится. Во всяком случае, многое об этом говорит. Хотя бы начинает работать интуиция.

Но, как говорится, истина ещё дороже.

[5] Возможное авторство Михаила Задорного.

Даже если мы дойдем аналогичным образом до $N = 1\,000$, всё равно пройденный путь не станет веским доказательством. Разве что он ещё больше нас воодушевит в правильности сформулированной гипотезы. Но не более того.

Остаётся за малым. – За внятным, вразумительным и лаконично-формализованным доказательством.

Размышления. Что хотелось бы дополнительно отметить?

Выписывание цепочки-ленточки чисел в λ_p-коде больше напоминает головоломку или разгадывание ребусов.

Общие правила-закономерности просматриваются с трудом.

В простой операции-записи целого числа нужно выполнить множество различных промежуточных преобразований. Их количество возрастает в геометрической прогрессии.

Процесс, надо сказать довольно трудоёмкий и где-то мучительный. Точно не для слабонервных.

Конечно, нужен чёткий и простой алгоритм, который в этой системе счисления позволяет, сходу и долго не раздумывая, записать, например, число $123\,456\,789$.

И потом... Характерной особенностью кодов с иррациональными основаниями является неоднозначность представления цифровой величины. Такое свойство кодов обеспечивается рекуррентной связью между младшими и более старшими величинами весов разрядов.

Для перевода конкретной записи в форму с минимальным количеством единиц или нулей нужны отдельные программные и/или аппаратурные средства. И естественно дополнительное время.

Вместо заключения. В рамках выполненного небольшого исследования-изложения какие-то важные выводы особо не просматриваются. Поэтому выскажем только некоторые соображения.

Представляется, что, проводя изыскания в симбиозе математики и гармонии, нужно исходить, прежде всего, из гармоничного изложения результатов самих исследований.

Так, вместо многолетних разговоров о возможной сходимости (в целых числах) тех же λ_p-кодов, нужно просто доказать соответствующие теоремы.

В данном случае можно было бы свободно выставить на обозрение одну страничку с доказательством теоремы из монографии [12].

Сегодня это не проблема. И английский язык математике не помеха.

Если теорема доказана, вопрос снимается. И можно в своих устремлениях идти дальше.

Хотя не исключено, что понадобятся дополнительные уточнения-доказательства.

Достаточно вспомнить выдающегося математика Григория Перельмана, доказавшего гипотезу Пуанкаре. Его статья многими изучалась и проверялась не один год. Понятно, там были другие ставки.

Но главными всё равно оставались математическая суть и правомерность.

Это, так сказать живучесть и строгость любой теории.

Но есть и практическая сторона.

О ней буквально несколько слов, в телеграфном изложении.

Для чего нужны системы счисления? – Чтобы исчислять или записывать числа удобным образом. Ну, а потом, конечно, и считать. Это главное.

Считать просто, эффективно и быстро.

Если речь идёт о некоем специальном усложнении таких систем, то это ближе к области защиты информации.

Если мы создаём заведомо избыточную систему, то это из сферы помехозащищённого кодирования данных. Например, в линиях связи.

Использование λ_p-кодов в компьютерах пока похоже на фантастику. Если подобное вообще рационально и возможно. Да, и знать бы зачем?

Во всяком случае, много лет никакого развития-продолжения. Жаль...

Наконец, нет «каких-либо достаточно убедительных оценок быстродействия, помехоустойчивости, аппаратурных затрат для <подобных> микропроцессоров... А для того, чтобы рекомендовать новую технику для производства, такие оценки необходимы» [17].

Ну, и наверно немаловажно ответить на интегрированный вопрос: сколько рационального в иррациональных системах счисления? – Чтобы, в конце концов, не получилась «бессмысленная, иррациональная по своим целям рациональность» [18].

И всё-таки, **эти системы счисления нам нравятся**!

Даже такие, какие они на сегодня есть.

Иначе бы на это просто не тратили время. Ни своё, ни читателя.

А что не получается в настоящем, возможно, получится в скором будущем.

Обилие вопросов? – Так они и задаются, чтобы на них отвечать.

Хуже, когда вопросов нет. Значит, никто ничего не понял...

Как верно подмечает-иронизирует Н. Александров: «Это моё мнение, и я не опущусь до его обоснования».

Литература:

1. *Никитин А.А.* Системы счисления. Часть 2 // Мысли умные... и не очень. – http://andrejnikitin.narod.ru/matematika2.htm.

2. *Frougny C.* How to write Integers in Non-Integer Base // LATIN'92: 1st Latin American Symposium on Theoretical Informatics, São Paulo, Brazil, 1992. – p. 154–164. – http://books.google.com/books?id=I3fC6batwokC&lpg=PA154&pg=PA154#v=onepage&q&f=false.

3. *Василенко С.Л.* Марево золотых миражей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17036, 28.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322054.htm.

4. *Стахов А.П.* Реплика по поводу статьи С.Л. Василенко «Марево золотых миражей» // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17040, 29.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322056.htm.

5. *Абелев Г.И.* Об истоках псевдонауки // Здравый смысл. – 2002. – № 1. – С. 8–9.

6. *Лосев А.Ф.* История античной эстетики. Том VII. – М.: Искусство, 1988.

7. *Василенко С.Л.* Математизация гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15492, 27.08.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161533.htm.

8. *Международный online* семинар // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16909, 23.10.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321235.htm.

9. *Василенко С.Л.* Симбиоз математики и гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16227, 16.12.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161742.htm.

10. *Черепанов О.* Арифметические факты и арифмометрические аргументы за канонизацию «золотой пропорции» прикладной математикой // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17032, 27.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322051.htm.

11. *Математический шоу-марафон* Джина Акиямы // Компьютерра. – 2006. – №36. – http://offline.computerra.ru/2006/656/288776/.

12. *Stakhov A.P.* The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. – New Jersey. London. Singapore. Hong Kong: World Scientific, 2009.

13. *Стахов А.П.* Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17008, 21.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322039.htm / Украинский математический журнал. – 2004. – Т. 56, № 8. – С. 1143–1150.

14. *Стахов А.П.* Система счисления Бергмана и новые свойства натуральных чисел // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14298, 20.03.2007. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321068.htm.

15. *Стахов А.П.* Системы счисления с иррациональными основаниями и новые свойства натуральных чисел // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16778, 24.08.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321216.htm.

16. *Василенко С.Л.* Научная балда // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 04.09.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11333.html // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=48&sm=2.

17. *Борисенко А.А.* Реплика по поводу микропроцессоров Фибоначчи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16805, 01.09.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321223.htm.

18. Рациональность как предмет философского исследования. – М.: Ин-т философии, 1995. – 225 с. – http://gzvon.pyramid.volia.ua/biblioteka/kafedra_filosofii/libph/sb/rational/rationality.html#5.