С.Л. Василенко

Марево золотых миражей

Мозг – мой второй любимый орган
Вуди Аллен

Вспоминается извечная ещё с детства сказочно-заманчивая мечта – внезапно разбогатеть, найдя клад с золотом. Хоть раз в жизни отыскать прикопанный ржавый сундук с золотыми монетами, ювелирными украшениями или другими сокровищами.

Или, на худой конец, кошелек с десяткой на мороженое!

Ведь прятали ж ценности. Причём во все времена.

Зарывали в землю. Укрывали в тайных подвалах и склепах.

Хранили в катакомбах и подземельях.

Не зря поговаривают: подальше положишь, поближе возьмешь.

Однако не всё золото, что блестит. Найденный металл, например, может запросто оказаться малоценными отходами производства.

Нечто похожее частенько происходит и в довольно узкой области математики, связанной с золотым сечением (ЗС).

Феномен ЗС, словно ностальгия ушедших ребяческих грёз о кладах, не даёт покоя многим поколениям убелённых сединой учёных и любителей-исследователей.

В глубину познания он не очень-то и податливый. В виду относительной узости применения. Да и математическое описание тривиально.

Зато в ширину, с учётом смежных областей, – что называется, на разные лады.

Достаточно обратиться, например, к представительному обзору [1], в котором упомянуты многочисленные примеры описания различных процессов и явлений с попыткой употребления ЗС.

Непредвзятый анализ показывает: подобные модели, к сожалению, в своём большинстве сходны в одном.

Они в основном подпадают под определения квазиЗС или псевдоЗС по классификации, принятой в работе [2]:

*квази*ЗС – модель, в основе которой лежит вполне конкретное число, близкое, к золотой пропорции, но принципиально отличное от неё;

псевдоЗС – модель, в основу которой намерено искусственно, но бездоказательно внедрена золотая пропорция.

Понятно, что адекватность таких модельных конструкций не выше правдоподобия исходных гипотез при самом грубом уровне их значимости.

Более того, статическая или функционально-аналитическая обоснованность проверяемых гипотез относительно ЗС практически никогда не проводится.

Частные случаи-фрагменты обыкновенно малоинформативные.

Безуспешно пытаться формулировать частные гипотезы, не представляя объект в целом хотя бы на уровне общих предположений.

В противном случае, как правило, порождаются нежизненные "клоны" ЗС, которых в реальности нет, но шум от них распространяется со скоростью интернета.

Так или иначе, но, по нашему мнению, идея о всеобщей гармонизации мира исключительно на основе золотой пропорции наносила и продолжает наносить непоправимый ущерб становлению её действительной роли в мироздании.

"Золотая лихорадка" в разной мере поразила многих специалистов.

Мы – не исключение.

Достаточно посмотреть наши первые работы, например про обобщенные "золотые" *pk*-пропорции (сечения) [3].

Благо тогда хватило ума слово "золотые" взять в кавычки, хоть как-то оттеняя условный аллегорический смысл определения, а не его строгое терминологическое значение.

В результате золотоносного ажиотажа, «что ни возьми, будь-то отношение лапок муравья к осиной талии или земной меридиан к длине границы Гондурас, – во всем и везде сплошная вереница открытий ЗС» [2]. Но это даже не смешно.

В статье [4] мы уже изучали похожую проблематику на примере так называемого серебреного сечения – отголоска и "младшего брата" ЗС.

Целью настоящей работы является уточнение ряда положений, связанных с обобщением задачи ЗС и установлением границ её расширения в широком смысле.

Априори исходные рубежи. Формальным поводом к настоящим размышлениям-исследованиям явились два взаимосвязанных обстоятельства:

– общая благозвучная атмосфера семинара, проводимого на страницах АТ[1] в рамках гармонизации математики, что настраивает на общую тональность-направленность по упорядочению и приведению в надлежащее состояние золотоносной сферы;

– воспроизведение-напоминание на страницах АТ, можно сказать, по своему "культовой" работы [5], которая впервые была напечатана семь лет назад в украинском математическом журнале.

К слову, тема упомянутого семинара «Математизация гармонии и гармонизация математики...», равно как и одной из статей с таким же названием, терминологически выстроены на двух публикациях двухлетней давности:

– "*математизация гармонии*" – «собственное имя» нашей статьи [6], ранее нигде не употребляемое;

– "*гармонизация математики*" – термин-понятие В.Бунина [7].

Репродукция [5] воспроизведена с журнала по просьбе доцента Сумского университета С. Якушко. Собственно, почему бы и нет? – Даже если без этого её содержание хорошо известно читателю, поскольку неоднократно отражалось в других публикациях на этом же электронном ресурсе.

Пусть не прибавилось новизны.

Зато возвращает нас к истокам и даёт неформальный повод ещё раз проанализировать и осмыслить полученные ранее результаты, которые в разных транскрипциях позже освещались во многих материалах по математическим основам гармонии.

Статья [5] пришлась, как нельзя, кстати, в том числе дополняя материал [8, 9].

Поэтому остановимся лишь на трёх моментах.

На наш взгляд, наиболее важных по форме и содержательных по существу, – именно в разрезе гармонизации отношений в сфере математических знаний.

1. Исторические изохроны[2].

Даже боги не могут изменить прошлое (Агафон). А люди могут.

Любая история чаще всего так и пишется.

Хотя, по словам Гегеля, она учит лишь тому, что никогда ничему не научила народы.

Но история повторяется. Это один из её недостатков (К. Дарроу).

Ибо если слова принадлежат лишь веку, то мысли – векам

В нашем случае слова касаются прошлого века, породившего понятие p-сечений целого на две неравные части. Эти пропорциональные деления соотносятся с вещественными корнями $\lambda_p > 1$ алгебраического уравнения[3] $x^p = x^{p-1} + 1$.

---

[1] Международный *online* семинар по математике гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16909, 23.10.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321235.htm.

[2] *Изохроны* соотносятся с движением во времени t.

Ему адекватно соответствует линейное разностное уравнение $f_n = f_{n-1} + f_{n-p}$, приводящее к p-последовательностям Фибоначчи с дискретно-временным параметром n.

Осталось прикинуть, хотя бы укрупнённо, насколько эти мысли «принадлежат векам». Другими словами, оценить их значимость и вклад в копилку научных знаний.

Естественно, начать с истории их появления на изохронно-исторической линии.

Однозначность ответа на вопрос возникновения идеи построения таких числовых рядов долгое время оставалась предметом полемики.

В конце концов, один из авторов – проф. А. Стахов сам пришёл к заключению-признанию в части синтеза-описания p-чисел Фибоначчи: «Первым это сделал выдающийся математик, почетный профессор Стенфордского университета (США) Джордж Пойа» [10].

Нечто похожее можно найти и в других местах:

– «к их открытию <p-чисел Фибоначчи> пришли независимо друг от друга несколько математиков... Первым это сделал, несомненно, американский математик Пойа» [11];

– «к p-числам Фибоначчи раньше меня пришли математики-фибоначчисты (в частности, Вернер Хоггатт) при исследовании диагональных сумм треугольника Паскаля» [12].

Нужно отдать должное тому, что проф. А. Стахов пошёл дальше и выполнил следующий важный этап в этой области, придав геометрический смысл корням уравнения τ_p в привязке деления отрезка AB точкой C в соотношении $\dfrac{CB}{AC} = \left(\dfrac{AB}{CB}\right)^{p-1}$.

Далее он описал вышеприведенную связь между алгебраическим и разностным уравнением, которое рекурсивно даёт p-последовательности Фибоначчи.

Правда, на то время это был уже известный математический факт, следующий из теории возвратных (разностных) уравнений [13]. Который, в свою очередь, восходит к работе Д. Бернулли «Замечания о рекуррентных последовательностях» (1732), где он изложил рекуррентный метод решения алгебраических уравнений.

Собственно здесь всё достаточно просто.

Разделив разностное уравнение (рекурсию) $f_n = f_{n-1} + f_{n-p}$ почленно на f_{n-1} и перейдя к пределу при $n \to \infty$, получаем:

$$x = \frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-p}}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-p}}{f_{n-1}}\frac{f_{n-2}}{f_{n-2}}\cdots\frac{f_{n-p+1}}{f_{n-p+1}} = \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}\frac{f_{n-3}}{f_{n-2}}\cdots\frac{f_{n-p}}{f_{n-p+1}} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} 1 + \frac{1}{x^{p-1}}.$$

Или в другой адекватной записи:

$$x^p = x^{p-1} + 1 \quad \leftrightarrow \quad f_{n+p} = f_{n+p-1} + f_n.$$

Хорошо виден взаимный формальный переход между верхними степенями и нижними индексами с добавлением дискретного времени n.

Подобное действо справедливо для любой пары: линейного разностного уравнения и соответствующего ему характеристического алгебраического уравнения.

2. Терминологические изотермы[4].

«Терминологическая неясность для науки все равно, что туман для мореплавателя; она тем более опасна, что обычно в ней вовсе не отдают себе отчета» (Х. Шухардт).

Или как учил почти 400 лет назад философ Рене Декарт: определяйте значения слов, и вы избавите человечество от половины его заблуждений.

---

[3] Используется также эквивалентная запись $x^{p+1} = x^p + 1$.

[4] *Изотермы* характеризуют температурный градус-накал t^o дебатов вокруг терминологических неурядиц.

Понимайте значение слов, – вторил ему Лейбниц, – и мир будет избавлен от множества ошибок.

Как видно из приведенных высказываний, терминологические неточности-неясности в случае их живучести являются не столь уж безобидным явлением, насколько это может показаться на первый взгляд.

Они часто становятся источником многих недоразумений, порождая двусмысленности.

Со временем перерастают в методологическую путаницу, что в итоге даёт весьма смутные картины миропонимания и требует десятки бесполезных лет на уяснение-состыковку позиций.

В последующем учёные невольно оказываются в ситуации, когда возникает необходимость в новых концепциях.

Однако всё труднее найти согласие по тому или иному термину-понятию, который был бы востребован в исследованиях своей ясной и однозначной трактовкой.

Оно и понятно. Наш язык несовершенен и часто искажает результаты размышлений.

Либо напротив, изначально правильная в своей основе мысль из-за неурядиц в качественном отображении может доходить до нас в сильно искажённом виде.

Такова цена терминологических погрешностей.

Но откуда это всё идёт? – Научно-описательный язык невольно порождает многочисленные семантические и терминологические противоречия и неясности, связанные с проблемами идентификации, что вполне объяснимо как «издержки роста».

Поэтому языковые и терминологические проблемы – важнейшая тема любой науки.

Запутанность в терминах невольно порождает неадекватное понимание излагаемого материала, и даже чувство его неприятия или полного отторжения.

Правда, иногда случается и наоборот. То, что сегодня кажется непривычным, со временем войдёт в обиход. Например «религиозная экология». – Почему бы и нет?

Как оптические иллюзии (см. приложение) могут очень часто вносить существенные ошибки в повседневные научные наблюдения. Так и логические построения с разными оценочными шкалами способны приводить к прямо противоположным результатам.

Здесь могут быть также не столько терминологические, сколько теоретические казусы, когда учёные нередко возводят не то, что желают. Либо наоборот желают не то, что возводится на самом деле. Отсюда и взаимное недопонимание

Так, до сих пор продолжается терминологическая нестыковка, вызванная неполной ситуативной стабилизацией вокруг собственно задачи ЗС и её возможными расширениями, приводящими уже к иным пропорциям и закономерностям

Например, словосочетание «обобщённых золотых сечений» (ОЗС) или «золотых p-пропорций» применяется к корням алгебраического тринома $x^p - x^{p-1} - 1$.

Причём названия обосновывают тем, что при $p = 2$ они сводятся к классическому золотому сечению. Вытекающее отсюда уравнение $x^p = x^{p-1} + 1$ провозглашается золотым алгебраическим уравнением. Ну, и так далее. Аналогичным образом ко всем производным математическим конструкциям "пришивается" золотоносная атрибутика.

На наш взгляд, использование понятия ОЗС неудачно.

Как минимум, оно препятствует не только математическому и междисциплинарному сотрудничеству, но и повышению эффективности результатов в сфере ЗС.

А в итоге, к явно выраженной разнородности в формировании теоретико-математических основ гармонии.

Но в терминологических разночтениях есть и позитив.

Он вскрывает недочеты при определении понятий.

Так, золотым сечением называется процесс деления и одновременно результат этого деления в виде конкретного числа.

Терминологическая неясность как раз и усугубляется тем, что объединяет оба этих различных соображения. При этом явно претендует на большее, обозначая не только процесс деления и результат этого деления в виде конкретной числовой константы, но и остальные дочерние дефиниции-образования.

Во избежание такого двоемыслия, сформированного переоценкой изначального естественнонаучного подхода к подбору подходящих терминов, мы волей-неволей вынуждены прибегнуть к исходным устойчивым понятиям.

А таковым в математике давно является "золотое сечение" в единственном числе.

Здесь нет ничего предосудительного. **Ибо в своём терминологическом становлении, как говорил А. Лосев, «неясность и путаница отдельных терминов является делом вполне естественным»** [14, с. 141] и даже закономерным.

Терминологические казусы-издержки неизбежны и простительны.

Однако рано или поздно понятийные разночтения-расхождения необходимо снимать, устранять и пытаться приводить в порядок.

Сначала хотя бы поверхностно, чтобы далее не углублять пропасть недопонимания.

Использование укороченного не золотосодержащего термина «p-сечений» вместо ОЗС нисколько не понижает планку проводимых исследований.

Даже наоборот. Показывает различные пути усложнения модели, отталкиваясь от ЗС.

А здесь могут быть самые различные варианты:

– повышение степени характеристического алгебраического уравнения;
– варьирование количеством слагаемых (элементов);
– изменение численных значений коэффициентов, включая их знаки;
– введение в рекурсии неоднородностей $g(n)$ типа $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + g(n)$ и проч.

Мы не будем упрямо настаивать на отказе от золотоносной терминологии, подобной ОЗС, хотя и считаем её некорректной. Пусть каждый придёт к этому своим путём, выбирая его по собственному разумению.

Выскажем только личную точку зрения.

Золотое сечение – это одновременно собственное имя константы. А константы не обобщаются. А вот задача ЗС может расширяться, видоизменяться и модифицироваться.

Кроме того, любые алгебраические уравнения общего вида $x^p = a_1x^{p-1} + ... + a_{p-1}x + 1$ содержат в себе частным случаем квадратное уравнение золотого сечения $x^2 = x + 1$.

Ну, и что с того? Не могут же теперь по этой причине все уравнения быть золотыми? – Дескать, любое алгебраическое уравнение якобы даёт ЗС, а потому является ОЗС.

Это идёт в разрез с формальной логикой, да и просто здравым смыслом.

А вот об усложнении, расширении или обобщении самой задачи ЗС, безусловно, можно говорить. Как это верно делается в одной из последних работ [15]: «*обобщение задачи о золотом сечении*». – Вопросы есть? – Вопросов нет.

Никакой вам запутанности и предмета для ненужной полемики.

3. Системотехнические изобары[5]**.** В теории систем счисления известно, что для любого действительного числа $\lambda > 1$ можно построить позиционную систему счисления с основанием λ. Здесь нет ничего неожиданного.

Весь вопрос в точности представления вещественных чисел в λ-коде – взвешеннной сумме целочисленных степеней λ^i. А также битовой длине машинного слова.

Безусловный интерес представляют не все подряд λ-коды, но те из них, которые позволяют представить любое натуральное число N конечным набором степеней λ^i.

[5] *Изобары* символизируют давление p, как прообраза основания систем счисления.

Назовём это свойство сходимостью λ-кода.

То есть под "сходимостью" позиционной системы счисления мы подразумеваем её возможность точно представлять каждое целое число в виде конечного разложения.

Как в связи с этим ведут себя λ_p-коды, основанные на положительных корнях уравнения $x^p = x^{p-1} + 1$? – Для этого дословно процитируем отдельные фрагменты из работ проф. А. Стахова.

«Наиболее неожиданным результатом теории систем счисления с иррациональными основаниями является установление следующего математического факта, доказанного в [5]: любое натуральное число является "конструктивным". То есть всегда может быть представлено в системе счисления Бергмана и коде золотой *p*-пропорции в виде конечной суммы степеней золотой пропорции, то есть каждому натуральному числу *N* соответствует некоторый полином, представляющий собой конечную сумму степеней золотой *p*-пропорции! Это означает, что любое натуральное число *N* может быть представлено в виде: $N = \sum_i a_i \lambda_p^i$, где a_i – двоичные коэффициенты, причем число членов в полиноме является конечным для любого натурального *N*... Такой подход сразу же вызывает к жизни новую теорию чисел, основанную на золотых *p*-пропорциях» [16].

«Системы счисления с иррациональными основаниями обладают, действительно, рядом уникальных математических свойств, установленных в статье [5]. Если рассмотреть представление натуральных чисел в виде $N = \sum_i a_i \lambda_p^i$, то обнаруживается, что все эти суммы конечны. То есть, любое натуральное число представляется в виде конечной суммы степеней золотой *p*-пропорции» [17]. – Здесь $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра *i*-го разряда системы счисления, $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \ldots$;

«Любое натуральное число *N* в системе Бергмана и вообще в любом коде золотой *p*-пропорции всегда представляется в виде конечной суммы степеней золотой пропорции τ^i или степеней золотой *p*-пропорции λ_i^p» [18].

Мы специально привели несколько выдержек из разных публикаций с тем, чтобы подчеркнуть, что имеют место не случайные записи-оговорки, а вполне осознанные текстовые вставки, носящие систематический и целенаправленный характер.

Итак, автор утверждает, что λ_p-числа составляют позиционные системы с базисами, образующими геометрическую прогрессию λ_p^i с иррациональным основанием λ_p.

Причём натуральные числа представимы в виде конечного набора. То есть λ_p-коды якобы сходятся.

И это будто бы показано в работе [5].

Но так ли это на самом деле? – Буквальное сравнение с текстом [5] обнаруживает явную нестыковку.

В этой статье нет ни слова о конечном представлении натуральных чисел в системе счисления λ_p-кодов.

И откуда взята такая информация, неизвестно.

Так, всё-таки, сходятся λ_p-коды или нет? Строгого доказательства утверждения об их сходимости до сих пор нигде не приведено.

Мы провели собственное исследование. Частично оно изложено в работе [10].

Оказалось, что данный вопрос в математике изучен уже достаточно хорошо.

А именно, *каждое целое число имеет **конечное** разложение*, если основание системы счисления является доминирующим (максимальным по модулю) корнем многочлена (числом Пизо[6]) [19]:

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_n, \quad \text{где } a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge 1 \text{ – целые числа,}$$

или многочлена

$$x^{m+1} - (t_1+1)x^m + (t_1 - t_2)x^{m-1} + \ldots + (t_{m+1} - t_m), \quad \text{где } t_1 \ge t_2 \ge \ldots \ge t_{m+1} \ge 1 \text{ – целые числа.}$$

В случае тринома-многочлена старших степеней $x^p - x^{p-1} - 1$ данное утверждение выполняется лишь в частном случае квадратного уравнения $x^2 - x - 1$.

То есть оно справедливо только для его корня $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ – золотого сечения или Ф-кода. Что впрочем, известно ещё с начала 60-х годов прошлого века.

Но уже в следующем полиноме $x^3 - x^2 - 0 \cdot x - 1$ один из коэффициентов равен нулю. Этим самым нарушается необходимое условие $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge 1$.

Следовательно, *p*-сечения в общем случае не образуют сходящуюся позиционную систему счисления с основанием λ_p.

То есть в λ_p-кодах целые числа не имеют конечное разложение.

Данные коды "расходятся" из-за нарушения главного условия для формирующих коэффициентов: они не должны быть менее 1, в частности, нулями!

Например, для уравнения $x^3 = x^2 + 1$ или $1 = x^{-1} + x^{-3}$ верна кодировка 1000 ↔ 0101. Единица запишется как 1 = 1.000 = 0.101. Двойка 2 = 1.101. Собственно и всё.

Мы не можем далее освободить нулевой разряд для "приёма" следующей единицы.

Все попытки высвободить нулевой разряд от 1 заканчиваются неудачей.

Уже тройку не удаётся записать конечным числом разрядов.

В то же время доминирующие корни полинома *m*-боначчи $x^m - x^{m-1} - x^{m-2} - \ldots - 1$ образуют сходящиеся системы счисления: целые числа имеют конечное разложение.

Итак, λ_p-коды не создают сходящуюся систему счисления. В этом контексте они мало чем отличаются от любых других действительных чисел $\lambda > 1$.

Поэтому никаких оснований для их преференций тоже нет.

А значит, мы не можем любое целое число выразить точно геометрически.

Аналитически можем. На компьютере – с любой степенью точности.

Геометрически – нет! Разве что только очень ограниченный круг чисел типа степеней самого иррационального основания λ_p.

Но последнее утверждение настолько очевидно, что и говорить об этом не приходится.

Примерно, если в качестве единицы измерения выбрать длину *d* произвольной спички, а потом из таких спичек выкладывать конкретные расстояния $k{\cdot}d$. Только такие, и не иначе.

То есть цельность «подхода к геометрическому определению числа» согласно [5] выходит, увы, несостоятельной.

За исключением давно известной системы Бергмана на основе Ф-кода.

В то же время можно легко показать, что сходятся: Ф-код, Φ^2-код, t_m-коды (трибоначчи и др.) на основе положительных корней алгебраического уравнения *m*-боначчи $x^m = x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + 1$.

Существует множество других достаточно простых сходящихся систем счисления.

---

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Pisot%E2%80%93Vijayaraghavan_number.

Так, в работе [20] строятся сходящиеся системы с иррациональными основаниями, равными положительным корням уравнения $x^2 = kx - 1$, где $k \geq 3$ – натуральное число.

Одно дополнение. Возвращаясь к рассмотренным выше "терминологическим изолиниям", наши рассуждения добавляются ещё одним весомым аргументом.

Упомянутые двоичные позиционные представления $N = \sum_i a_i \lambda_p^i$ называются их автором «кодами золотой p-пропорции». Фактически золотая терминология в чистом виде здесь прослеживается только в одном единственном квадратичном случае $p = 2$.

Поскольку Ф-код сходится, а λ_p-код нет, то они генетически разные, а значит, естественным образом пропадает мотив в терминологическом золочении последнего.

Во всяком случае, появляются очень веские основания, чтобы об этом подумать.

Продолжение следует… Итак, мы рассмотрели основные позиции вокруг чрезвычайно интересного понятия p-пропорций Пойа–Стахова, связанных с триномом двух старших степеней $x^p - x^{p-1} - 1$.

Правда, не все надежды-ожидания на их применимость оправдались. В частности, λ_p-коды в позиционных системах счисления оказались расходящимися. То есть любое натуральное число не получается представить в виде конечной суммы степеней λ_p-кода.

Но тем увлекательнее становятся последующие исследования.

Например, следует более внимательно присмотреться ко второму наименьшему числу Пизо $\lambda_4 \approx 1{,}380$ – корню полинома $x^4 - x^3 - 1$.

Весьма любопытно наличие аналитического решения для уравнения **пятой** степени $x^5 - x^4 - 1 = 0$: $\lambda_5 = \dfrac{c}{6} + \dfrac{2}{c} \approx 1{,}325$, где $c = \sqrt[3]{12 \cdot (9 + \sqrt{69})}$.

Соответствующая рекуррентная числовая последовательность $f_n = f_{n-1} + f_{n-5}$ с единичными начальными условиями имеет вид (http://oeis.org/A003520):

1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 15, 20, 26, 34, 45, 60, 80, 106, 140, 185, 245, 325, 431, 571...

Её генерирующая функция равна $\left(1 - x - x^5\right)^{-1}$. Числовой ряд можно представить также в виде суммы биномиальных коэффициентов $f_n = \sum_{k=0}^{n/5} C_{n-4k}^k$.

Кроме того, значение f_n равно верхнему левому элементу (1, 1) матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_n} & f_{n-1} & f_{n-2} & f_{n-3} & f_{n-4} \\ f_{n-4} & f_{n-5} & f_{n-6} & f_{n-7} & f_{n-8} \\ f_{n-3} & f_{n-4} & f_{n-5} & f_{n-6} & f_{n-7} \\ f_{n-2} & f_{n-3} & f_{n-4} & f_{n-5} & f_{n-6} \\ f_{n-1} & f_{n-3} & f_{n-3} & f_{n-4} & f_{n-5} \end{pmatrix}.$$

Но что самое интересное, корень λ_5 равен наименьшему элементу множества чисел Пизо, то есть положительному корню уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ (пластической[7] константе).

Таким образом, два наименьших числа Пизо порождены p-пропорциями λ_4, λ_5.

[7] В отличие от названия золотого сечения, слово "*пластический*" не имело отношения к веществу, а относилось к тому, что этому можно придать трехмерную форму, как следствие кубического уравнения.

Напомним, целое алгебраическое число $\alpha > 1$ называется числом Пизо [21, с. 162], если все его сопряжённые, отличные от самого α, лежат внутри круга $|z| < 1$ на комплексной плоскости, то есть по абсолютной величине строго меньше единицы.

В частности, если α – целое рациональное, то у него нет никаких сопряжённых чисел, и потому оно есть число Пизо.

Числа Пизо обладают одним удивительным свойством: их степени "почти целые" [22]. Именно эта особенность делает их удобными кандидатами в качестве иррациональных оснований систем счисления. Наименьшее целое число, большее 1, равно 2. Оно занимает выделенное положение с точки зрения чисел Пизо. Это *первая точка*, около которой находится бесконечно много точек накопления чисел Пизо!

Многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1, называется *многочленом Пизо*, если один из его корней α > 1, а остальные корни не равны нулю и по модулю меньше единицы [22].

Для 2-й степени – это многочлен $x^2 - kx - 1$, где k – натуральное число. Один из его корней α лежит в интервале (k, k+1), второй корень отрицателен и по модулю меньше 1.

Для 3-й степени это многочлен $x^3 - x - 1$, имеющий корень в интервале (1, 2), и многочлен $x^3 - (k+1)x^2 + 1$ при натуральном $k \geq 2$ для промежутка (k, k + 1).

Наконец, для произвольной степени p это многочлен $x^p - x^{p-1} - ... - 1$ в промежутке (1, 2) и многочлен $x^p - (k+1)x^{p-1} + 1$ в интервале (k, k+1).

Все перечисленные многочлены неприводимы и являются многочленами Пизо.

Наименьшее не целое число Пизо – это корень полинома $x^3 - x - 1$ или $\underline{x^5 - x^4 - 1}$.

Выводы:

1. Различные математические конструкции с такими обозначениями как p-коды, p-пропорции и т.п. можно называть именем Пойа–Стахова.

Математик Д. Пойа впервые описал p-числа Фибоначчи.

Профессор А. Стахов дал геометрическое толкование p-сечениям единичного отрезка в рамках развития классической задачи о золотом сечении целого.

2. Терминология «обобщённых золотых сечений» с золочением во множественном числе имеет существенные недостатки. Основной изъян вытекает из того, что золотым сечением в математике принято называть не только деление отрезка как действо, но и конкретное иррациональное число $\Phi \approx 1{,}618$. Но константы не обобщаются в принципе.

Очень точно выразил эту мысль В. Шенягин [23]: «Многие из нас, немногочисленных энтузиастов, изучающих, исследовавших и открывающих пропорции, были под впечатлением и в плену "золотых" формулировок... в плену у золотой пропорции и её названия, приписывая и иным пропорциям термин "золотой"».

Поэтому с целью упорядочения терминологии и устранения путаницы предлагается опускать золотоносные эпитеты там, где речь не идёт конкретно о золотом сечении Φ.

В то же время считаю, что допустимо вести речь о развитии или расширении границ задачи о золотом сечении, отбрасывая при этом в терминах золотоносную атрибутику.

В таком ключе всё становится понятным и недвусмысленно-вразумительным, включая профессионально-математический круг общения.

3. Позиционные системы счисления с основанием λ_p-кодов (положительных корней полинома $x^p - x^{p-1} - 1$) не сходятся при $p \geq 3$. Это означает, что любое целое число нельзя представить с их помощью в виде конечной суммы-разложения $\sum_i a_i \lambda_p^i$.

В то же время существует множество других сходящихся кодов с иррациональными основаниями: Φ, Φ^2, t_m-код m-боначчи и многие другие, которые обычно связаны с числами Пизо.

Вместо заключения. Мозг – орган, которым мы думаем, будто мы думаем (Амброз Бирс). Отсюда и частые иллюзии, в том числе и оптические (см. приложение). – С грёзами золотых миражей.

Дрожит себе золотое марево, повисшее вдалеке. Ни тебе не тёплое, не холодное.

А просто светит себе и даже слепит глаза.

Вроде и дорога вьётся, петляя среди золотистых бликов.

Но стоит хорошенько потереть глаза, чтобы лучше видеть, куда идти, как сияние золотого марева тускнеет и пропадает. Призрачные видения исчезают.

И ты попадаешь в сад одной-единственной золотой пропорции [24].

Он небольшой. Но воистину чудесный, гармоничный и дивный сад.

В нём произрастают размеренные согласованности и слаженные целостности.

А всё вокруг становится окружающими их декорациями. Но, увы. Уже не золотыми.

Литература:

1. *Цветков В.Д.* "Золотая" гармония "противоположностей", энергооптимальность и сердце // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17017, 23.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322044.htm.

2. *Василенко С.Л.* Квазизолотая пропорция в структурированных системах // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16054, 30.08.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161694.htm.

3. *Василенко С.Л.* Обобщенные "золотые" pk-пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14756 от 27.03.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321080.htm.

4. *Василенко С.Л.* Серебряные миражи // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 14.08.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11286.html.

5. *Стахов А.П.* Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17008, 21.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322039.htm / Украинский математический журнал. – 2004. – Т. 56, № 8. – С. 1143–1150.

6. *Василенко С.Л.* Математизация гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15492, 27.08.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161533.htm.

7. *Бунин В.А.* Код биоподобия. Троеначальный код метагармонии как биоподобия техногенных систем по критерию целевой функции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15669, 24.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161582.htm.

8. *Василенко С.Л.* Миф про обобщения золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 23.07.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=32&sm=2.

9. *Василенко С.Л.* Незадачливые p-сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=50&sm=2.

10. *Стахов А.П.* Нужны ли современной науке p-числа Фибоначчи и p-коды Фибоначчи? // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15355, 20.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321123.htm.

11. *Стахов А.П.* Ещё раз о *p*-числах Фибоначчи, фибоначчиевых алгоритмах измерения, *p*-кодах Фибоначчи, золотых *p*-сечениях, системе Бергмана, кодах золотой *p*-пропорции, проектах компьютеров Фибоначчи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15630, 04.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321174.htm.

12. *Статьи и доклады* профессора Стахова. Отчет о презентации книги проф. А.П. Стахова "Новый тип элементарной математики и компьютерной науки, основанных на Золотом Сечении". – http://www.goldenmuseum.com/index_rus.html.

13. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей: Изд. 2-е, доп. – М.: Физматлит, 1959. – 400 с.

14. *Лосев А.Ф.* История античной эстетики. Том VII. – М.: Искусство, 1988.

15. *Стахов А.П.* Математизация гармонии и гармонизация математики // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16897, 16.10.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/100a/02320066.htm.

16. *Стахов А.П.* Гармония мироздания и золотое сечение: древнейшая научная парадигма и ее роль в современной науке, математике и образовании. Часть 1 // Обретение. – http://www.obretenie.info/txt/stahov/harmoni1.htm.

17. *Стахов А.П.* Ещё раз о "золотой" или "божественной" теории чисел // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16989, 16.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322032.htm.

18. *Стахов А.П.* Роль систем счисления с иррациональными основаниями (кодов золотой пропорции) в развитии теории систем счисления, теории компьютеров и «современной теории чисел Фибоначчи» (к обоснованию "математики гармонии") // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15341, 14.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321117.htm.

19. *Frougny C.* How to write Integers in Non-Integer Base // LATIN'92: 1st Latin American Symposium on Theoretical Informatics, São Paulo, Brazil, 1992. – p. 154–164. – http://books.google.com/books?id=I3fC6batwokC&lpg=PA154&pg=PA154#v=onepage&q&f=false.

20. *Ильясов И.И.* Об одной системе счисления с иррациональным основанием // Чебышевский сборник. – 2003. – Т. 4, вып. 2. – С. 68–72.

21. *Касселс Д.В.С.* Введение в теорию диофантовых приближений. – М.: Изд. ин. лит, 1961. – 213 с.

22. *Егоров А.* Числа Пизо // Квант. – 2005. – № 5, с. 8–13. – № 6, с. 9–13.

23. *Шенягин В.П.* Пифагор, или каждый создает свой миф // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17031, 27.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm.

24. *Алфёров С.А.* По саду «Золотой пропорции». – http://www.sci.aha.ru/ots/alf1.htm.

«*Золотое сечение бытия*»:
на рисунке явственно
просматривается ребёнок

Приложение

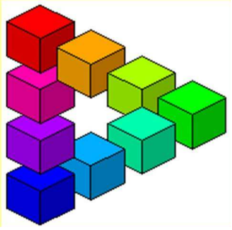
Оптические иллюзии

Мозг человека, помимо восприятия, мышления, памяти и ряда других психических процессов имеет особенную форму психики, присущую исключительно людям, – воображение.

С этим тесно связаны и *оптические иллюзии* – впечатления о видимом предмете или явлении, несоответствующие действительности[8].

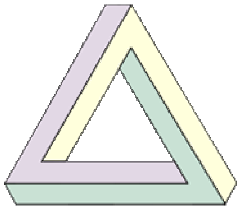
То есть, по сути, происходит оптический обман зрения.

Особенностью воображения является и восприятие невозможных фигур.



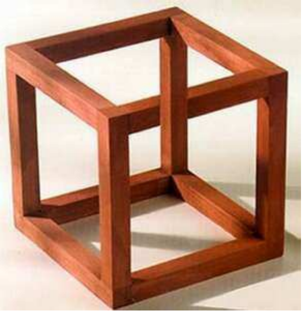
Первую невыполнимую фигуру создал в 1934 году шведский художник Оскар Ройтерсверд, изобразив девять кубиков в особом порядке.

Но, пожалуй, самая известная из таких фигур – это невозможный треугольник Пенроуза в виде трёх балок, соединённых друг с другом под прямыми углами.

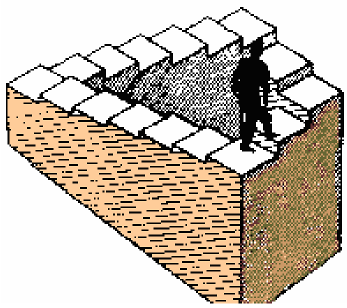


А вот и другие примеры оптических иллюзий разной направленности.

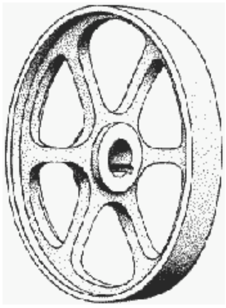
Невозможный куб Эшера



Бесконечная лестница, ведущая вверх



Невозможное колесо



Отец с матерью и дочерью

Пейзаж и бородатый мужчина.

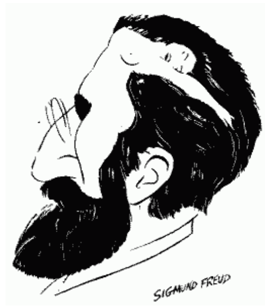
Человек играет на саксе и лицо

[8] http://www.psy.msu.ru/illusion/, http://www.masters.donntu.edu.ua/2011/fkita/volkova/ind/index.htm.

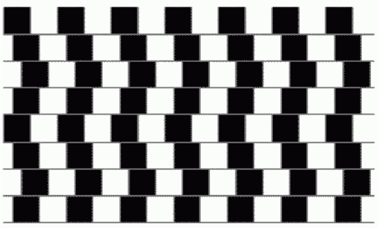
Утка и кролик

Лебедь и белка

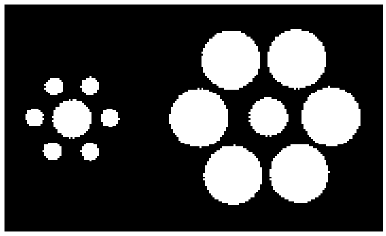
Портрет Зигмунда Фрейда



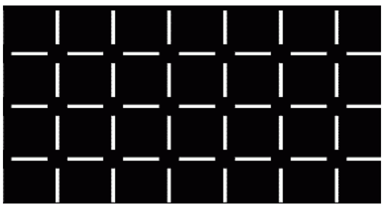
Горизонтальные линии параллельны



Круги в серединах цветков одинаковы



На рисунке нет ни одного кружочка



Квадрат, которого нет