С.Л. Василенко

Новые рекуррентные формы золотого сечения

Хвали старое, но стремись к новому,
Ибо новое – доброе прежнее старое.

Многие исследователи не остаются равнодушными от яркого и колоритного образа золотого сечения (ЗС).

Оно уникально, доступно для понимания, просто в использовании.

В него, что называется с первого взгляда, влюбляются учёные разных специальностей.

О нём пишут искусствоведы и музыканты, архитекторы и лингвисты.

Ему посвящают свои полотна художники.

От него в восторге многие "лирики" с их песнопением величественных дифирамб.

А вот математики не жалуют золотое сечение. Для них это, можно сказать, заурядный, очевидный и во многом уже давно изученный объект.

Фактически обходят его стороной и физики, ибо в физических процессах и явлениях "золотая гармония" себя практически не проявляет.

За исключением разве что отдельных задач, например, о центре масс однородных тел с самоподобным вырезом в n-мерном Евклидовом пространстве [1].

Репродукции золотого сечения. Есть и обратная сторона "золотой медали". Она обусловлена издержками синтеза новых знаний и стремлением исследователей внести собственную лепту в теоретические построения вокруг ЗС, когда они вольно или невольно вступают в противоречие с основами теории чисел. Вопреки логике и традициям-закономерностям в математике.

Напомним, золотое сечение – это чисто математический термин, означающий специально организованное деление целого на две части в особой пропорции.

Золотым сечением также называют и фундаментальную константу $\Phi \approx 1.618$, которая характеризует такое деление. – Феноменальное и единственное.

Проще говоря, ЗС – это конкретное число. Также как 10, π или e.

Между тем, ряд авторов объявляют корни различных алгебраических уравнений «обобщёнными золотыми сечениями».

То есть, не утруждая себя особо строгостью в интерпретации вводимых понятий, числа так и называют: "золотые сечения" [2], – во множественном числе. Либо в иных похожих транскрипциях, о чём более подробно изложено, например, в статьях [3, 4].

Очевидно, что числовые константы не обобщаются в принципе. Это аксиома аксиом. Вместе с тем ничто не мешает распространению новых форм образования истинно золотого сечения, чему и посвящено наше дальнейшее изложение.

ЗС и числа Фибоначчи. Довольно часто числа Фибоначчи условно отождествляются с золотым сечением. В какой-то степени справедливо, поскольку отношение соседних элементов ряда в пределе стремится к константе золотого сечения $\Phi \approx 1{,}618$.

Вместе с тем это совершенно разные математические структуры.

Например, некоторые дробно-рациональные последовательности стремятся (чаще всего путём суммирования) к числу π. Но из-за этого трансцендентное число π никто не уравнивает с рациональными дробями.

А вот с золотым сечением, к сожалению, это происходит с завидным постоянством.

Другой аспект. Собственно дело даже не в числах Фибоначчи, известных ещё в Древней Индии задолго до распространения в Европе. Частный, хотя и довольно примечательный случай. В основном за счёт незамысловатости первых "затравочных" чисел.

Чем же всё-таки примечательны числа Фибоначчи? – Ввиду простых начальных условий (0, 1), на них хорошо отрабатывать различные формульные соотношения, связывающие те или иные элементы числовой последовательности. Собственно и всё.

Главным же здесь являются не сами числовые значения элементов ряда, а линейная двучленно-аддитивная форма их рекуррентного образования $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ с единичными коэффициентами и в общем случае произвольной парой начальных условий (f_0, f_1), не равных одновременно нулю. Именно это "код к шифру", а не сами числа Фибоначчи.

Развитие теории золотого сечения. Тем временем теория и практика золотого сечения (ЗС) продолжают развиваться и расширяться в своём истинно природном ключе на базе заложенных ещё в античности классических представлений. Несмотря на свою давнюю историю, теория золотого сечения не стоит на месте и постепенно, но уверенно совершенствуется, выходя на более высокие рубежи знаний.

Синтезируются новые модели.

Появляются видоизменённые структуры.

Рождаются свежие интерпретации.

Как оказывается, для этого вовсе не требуются надуманные обобщения математической константы ЗС. Точно также как и число π, без каких-либо обобщений входит сокровищницей в многочисленные формулы, уравнения и закономерности.

Например, в статье [5] продемонстрировано, что к "золотым" числам $\Phi \approx 1{,}618$ и $\phi = \Phi^{-1} \approx 0{,}618$ могут приводить не только известные пропорции, но и другие математические задачи. В частности, различные семейства квадратных уравнений, решения которых образуют целочисленные степени константы золотого сечения Φ^k.

Показано, что с числами Фибоначчи и Люка связана как величина золотого сечения Φ, так и её целочисленные степени. Это уже примеры «золотых крупиц», выходящие за привычные рамки евклидовой геометрии.

Значительный интерес представляет также модель обобщенного алгебраического уравнения гармонической пропорции или золотого сечения [6, 7];

$$x^{2m} - \sum_{j=1}^{m} x^{2j-1} - 1 = 0, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Так, при $m = 4$ уравнение имеет вид: $x^8 = x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$.

К главным особенностям и отличиям обобщённого уравнения ЗС от известных уравнений или их модификаций можно отнести целый ряд несомненных достоинств [7]. Главное среди них: независимо от $2m$ начальных условий положительное решение равно Φ.

Перечень последних результатов исследований может быть продолжен: основы теории рационального золотого сечения в целочисленных переменных [8], новые разложения константы ЗС в виде непрерывных дробей [9], "золотоносные" решения задачи на определение центра масс однородных тел [1] и др.

Но, оказывается, и это не всё! Можно синтезировать множество других аддитивных моделей второго порядка с аттрактором, равным ЗС.

Так, статья [10] обозначила новое направление в развитии задач, когда впервые для ЗС используется аддитивная модель с внешними условиями в виде неоднородного уравнения, характеризующего открытые системы.

В работе [11] "золотоносные" модели характеризуются уже системой двух взаимосвязанных числовых последовательностей в разных её транскрипциях, наподобие системы двух алгебраических уравнений типа [5]: $x^2 + y = 2$ и $y^2 + x = 2$.

Статья [12] открывает целую веху рекурсий с периодически изменяемой структурой. Этим трём рекуррентным формам и посвящена настоящая работа.

1. Обобщённые рекурсии с аттрактором золотого сечения

Определение. *k*-аттрактор числовой последовательности f_n – предельное отношение соседних элементов ряда $a = \lim\limits_{n\to\infty} f_{n+k} / f_n$, $k \geq 1$.

1-аттрактор можно называть просто аттрактором. В частности, для числовых последовательностей, образованных по типу линейных возвратных однородных уравнений с постоянными коэффициентами [13] $f_t = a_1 f_{t-1} + a_2 f_{t-2} + ... + a_n f_{t-n}$, где $t \geq n$ – номера членов ряда, аттрактор численно совпадает с доминирующим или максимальным по модулю корнем характеристического полинома (теорема Д.Бернулли).

1.2. Возникновение замысла. Изучая монографию армянского философа Г.Аракеляна, мы обратили внимание на две формулы суммирующего типа, которые, по словам автора, он "изобрёл" сам [14, п. 4.9]:

$$3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{\Phi^{3n}} = 1, \qquad 10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{\Phi^{5n}} = 1,$$

где F_n – числа Фибоначчи, $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ – математическая константа золотого сечения.

Приведенные бесконечные суммы натолкнули нас на развитие. Можно сказать, чисто из спортивного интереса. В науке такое часто бывает.

Вот что получилось после обобщения этих формул для любого нечётного $m = 2j–1$:

$$f_m \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{\Phi^{m\,n}} = 1,$$

где f_m – числа рекуррентного ряда (A001610[1]) $f_m = f_{m-1} + f_{m-2} + 1$ с начальными условиями $(f_0,\ f_1) = (1, 0)$.

Кроме того, $f_m = F_{m-1} + F_{m+1} - 1$ и $f_m = \sum\limits_{n=0}^{m-2} L_n$, где L_n – числа Люка или разновидность последовательности Фибоначчи с начальными условиями $(L_0, L_1) = (2,\ 1)$.

Рекуррентный ряд f_m собственно и подсказал нам идею более подробного изучения *неоднородных* линейных возвратных уравнений на примере золотоносных конструкций, имеющих аттрактор-решение в виде константы ЗС.

1.2. Первые прикидки. Проанализируем линейное возвратное уравнение второго порядка $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + c$.

Оно отличается от аддитивной рекурсии Фибоначчи лишь наличием константы c.

Разделим все члены уравнения на величину f_n. Рассматривая предельный случай для возрастающей последовательности, приходим к квадратному уравнению ЗС

[1] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://oeis.org/A001610.

$$x = \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} + \frac{c}{f_n} \quad \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \quad x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Уравнение отражает общеизвестную золотую пропорцию через x–отношение большей части целого к меньшей: $x^2 = x + 1$.

Выполним в качестве демонстрационных примеров некоторые преобразования.

1) Запишем разностные уравнения для двух состояний $n+1$ и n:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + c \quad \text{и} \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + c.$$

Почленно вычитая, приходим к соотношению

$$f_{n+1} - f_n = f_n + f_{n-1} - f_{n-1} - f_{n-2} \quad \text{или} \quad f_{n+1} = 2f_n - f_{n-2}.$$

Получили возвратное уравнение третьего порядка с характеристическим уравнением

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0.$$

Произведём упрощение: $x^3 - x^2 - \left(x^2 - 1\right) = 0$ или $(x-1)\left(x^2 - x - 1\right) = 0$.

Таким образом, имеем три корня $\left(-\Phi^{-1},\ 1,\ \Phi\right)$.

По теореме Бернулли аттрактор последовательности (предельное отношение соседних элементов) равен максимальному по модулю корню характеристического уравнения, то есть в данном случае – числу Φ.

Следовательно, добавление константы (в общем случае комплексного типа) к рекурсии не влияет на значение аттрактора.

Своими предельными отношениями последовательности всё также стремятся к Φ.

2) Пусть $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + c(n+1)$ или $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + cn$.

Почленно вычитая, приходим к соотношению

$$f_{n+1} = 2f_n - f_{n-2} + c \text{ или } (n \text{ на 1 меньше}) \ f_n = 2f_{n-1} - f_{n-3} + c.$$

Ещё раз почленно вычитая, получаем возвратную модель-рекурсию:

$$f_{n+1} = 3f_n - 2f_{n-1} - f_{n-2} + f_{n-3}$$

с характеристическим уравнением

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0 \text{ или } (x-1)^2\left(x^2 - x - 1\right) = 0$$

и максимальным корнем Φ.

Итак, двучленно-аддитивная рекурсия дискретной переменной n с дополнительным слагаемым $c{\cdot}n$ всегда стремится к своему аттрактору – числу ЗС независимо от пары начальных условий, не равных одновременно нулю.

Аналогичная картина наблюдается при усложнении добавляемой части (рис. 1).

Изменяется лишь скорость подхода числовых последовательностей к своему аттрактор, которая естественно становится выше с увеличением степени k в слагаемом n^k.

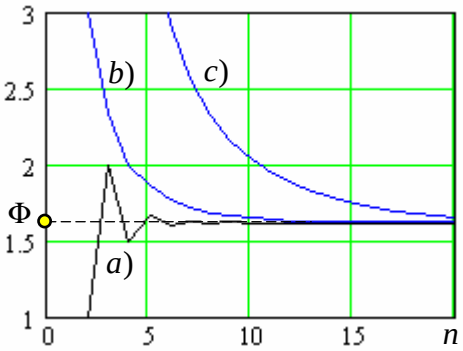

Рис. 1. Сходимость к аттрактору Φ:

a) $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$;

b) $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + n$;

c) $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + n^5$

В этой связи вполне обоснованно возникает интерес к изучению вопроса о виде дополнительного слагаемого в общем случае.

Это приводит нас к понятию неоднородных возвратных уравнений с хорошо разработанной теорией.

1.3. Общее решение. Линейное неоднородное разностное (возвратное) уравнение второго порядка

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + g(n), \tag{1}$$

имеет такое решение [15, п. 1.2]

$$f_n = f_0 F_{n-1} + f_1 F_n + \sum_{k=1}^{n-1} g(n-k+1) F_k . \tag{2}$$

Данное соотношение основано на теореме [13, с. 315; 16, с. 671]: общее решение линейного неоднородного разностного уравнения представляется в виде суммы частного его решения и общего решения $f_n = f_0 F_{n-1} + f_1 F_n$ однородного уравнения $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

В частности, для константы $g(n) = c$ последовательность $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + c$ с начальными условиями (f_0, f_1) определяется аналитически через числа Фибоначчи F_n:

$$f_n = f_0 F_{n-1} + f_1 F_n + c(F_{n+1} - 1)$$

или в другой транскрипции:

$$f_n = (f_0 + c) F_{n-1} + (f_1 + c) F_n - c .$$

Формула справедлива для любых комплексных значений (f_0, f_1) и константы c.

Если $(f_0, f_1) = (0, 1)$ и $c = 0$, то получаются числа Фибоначчи: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

При произвольных начальных условиях (f_0, f_1) и $c = 0$ образуются разнообразные ряды Фибоначчи.

В ряде наиболее простых случаев общее решение (2) упрощается, в частности:

(f_0, f_1)	Рекуррентная форма	Аналитическая форма	Индекс ряда
(0, 1)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 1$	$f_n = F_{n+2} - 1$	
(0, 1)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 2$	$f_n = F_{n+3} - 2$	
(1, 4)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 3$	$f_n = L_{n+2} - 3$	A027961
(1, 1)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 1$	$f_n = 2F_{n+1} - 1$	A001595
(0, 2)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 1$	$f_n = L_{n+1} - 1$	A001610
(1, 5)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 1$	$f_n = F_{n-2} + F_{n+4} - 1$	A022319
(4, 3)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} - 2$	$f_n = L_n + 2$	A000211
(0, 1)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + n$	$f_n = F_{n+4} - n - 3$	A001924
(0, 1)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + n^2$	$f_n = F_{n+7} - n^2 - 6n - 13$	A163250
(0, 1)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + n - 1$	$f_n = 2(F_{n+2} - 1) - n$	A104161

В самом общем случае имеем последовательности Фибоначчи с любыми начальными условиями (f_0, f_1) и постоянно действующим внешним фактором в виде заданной константы c комплексного типа.

Здесь могут быть самые разные комбинации и взаимосвязи.

В частности, для модели $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + n$ справедливо $f_n = F_n - f_{n-3} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} F_i$.

1.4. Выбор функции $g(n)$. Мы убедились на частных примерах, что рекурсия (1) в виде неоднородного разностного уравнения может иметь аттрактор Ф.

Попробуем уточнить эти условия.

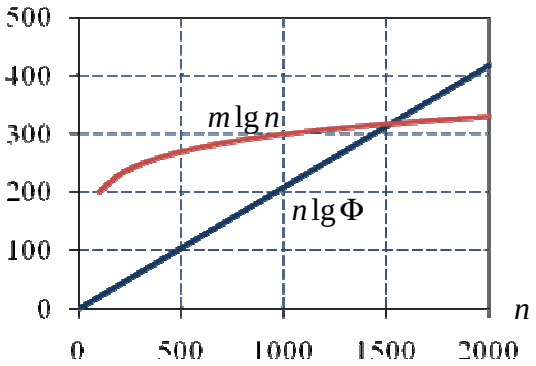

Рис. 2. Логарифмическое сравнение степеней Φ^n и n^m, $m = 100$

Пусть $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + n^m$, где m – сколь угодно большое конечное число.

Если неоднородная часть уравнения равна нулю $g(n) = 0$, то числа Фибоначчи возрастают как целочисленные значения степенной функции Φ^n.

Сравним величины Φ^n и n^m.

Их сопоставление более наглядно проявляется в логарифмических координатах (рис. 2).

Независимо от значения степени m, функция Φ^n рано или поздно "перебивает" функцию n^m и становится главенствующей в их сумме.

Таким образом, аттрактором последовательности становится число Ф.

Аналогичная картина наблюдается, если $g(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_{k-1} n + a_k$ – любое алгебраическое уравнение.

Иначе говоря, функция $g(n)$ не должна расти со скоростью, превышающей скорость увеличения степенной функции Φ^n.

"Перебить" золотой аттрактор можно лишь такой функцией, возрастание которой происходит быстрее, чем Φ^n. Например, другая степенная функция $g(n) = G^n$ при $G > F$.

В этом случае аттрактор Ф сменяется на аттрактор G.

Другими словами, двучленно-аддитивная рекурсия f_n стремится к своему аттрактору золотого сечения Ф, если "мощность" обмена $g(n)$ с окружающей средой не превышает Φ^n.

1.5. Некоторые размышления. Итак, в теории золотого сечения долгое время был один ряд в виде чисел Фибоначчи с их аттрактором-константой Ф.

У нас также были обобщённые последовательности Фибоначчи, отличающиеся друг от друга начальными условиями.

Теперь мы вышли на бесконечные множества бесчисленных множеств иных последовательностей, но тоже с аттрактором золотого сечения.

Возьмём, к примеру, рекурсию, включающую алгебраический многочлен общего вида

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_{k-1} n + a_k .$$

Для любого конечного значения k все эти последовательности сходятся к ЗС.

Можно сказать, что обнаружена новая золотоносная жила в изучении ЗС.

С открытием совершенно новых ещё неведомых просторов для истинно «золотоносной философии»! – Некая фантастика в нынешней реальности!

Это по-настоящему обобщение большого круга задач, приводящих к единственной и уникально-неповторимой константе ЗС. Существующие последовательности (числа Фибоначчи и т.п.), несомненно, стоят рангом ниже, как частные случаи.

По-сути, мы вышли на открытые системы.

Если оперировать историческими образами кроликов Фибоначчи, то теперь ушастые персонажи не только размножаются. В новой модели их можно изымать для еды, причём в прогрессии. Они перестают быть бессмертными. Их допустимо привносить из других систем и так далее.

Можно сказать, что известная аддитивная форма $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ характеризует замкнутую систему. Всё варится в собственном соку.

Неоднородное уравнение $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + g(n)$ описывает уж*е* открытую систему.

Слагаемое $g(n)$ отражает динамическую связь системы с внешним миром.

2. Парные двухчленно-аддитивные рекурсии

В настоящем разделе продолжаются признанные научным сообществом традиции в развитии новых представлений о золотом сечении, хотя и в несколько непривычном ракурсе.

Основой излагаемого подхода является трансформация линейных разностных уравнений второго порядка в виде систем двух уравнений первого порядка.

2.1. Алгоритм Рассела. В работах [17; 18, гл. 24] описана любопытная модель формирования взаимоувязанной пары числовых последовательностей с особыми свойствами.

Алгоритм восходит к далёкой поре древности:

«Квадратный корень из 2 – первое из открытых иррациональных чисел – был известен ранним пифагорейцам, и были изобретены остроумные методы приближения к его значению. Наилучшими были следующие: образуйте два столбца чисел, которые мы будем называть a и b; каждый столбец начинается с единицы.

Каждое последующее a на каждой стадии образуется путем сложения уже полученных последних a и b. Последующее b образуется путем прибавления удвоенного предыдущего a к предыдущему b. Так получаются первые 6 пар (1, 1), (2, 3), (5, 7), (12, 17), (29, 41), (70, 99). Для каждой пары выражение $2a^2 - b^2$ будет 1 или –1. Таким образом, b/a является почти квадратным корнем из 2 и с каждым новым шагом приближается к корню из 2».

По мнению В.Белянина «многократно замечено сначала двумя индийскими математиками в VII и XII веках, а затем в Европе: Ферма, Валлисом и другими…», что в более общем случае данный алгоритм или "модель Рассела" сходится к аттрактору $\sqrt{k}$:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = y_{n-1} + k \cdot x_{n-1}, \end{cases} \qquad \frac{y_n}{x_n} \Rightarrow \sqrt{k}\,.$$

В работе [17] также замечено, что если переместить коэффициент во второй строке $y_n = 2y_{n-1} + x_{n-1}$, то отношение y_n/x_n стремится к золотому сечению $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

На основании этого даже делаются выводы не только об «эволюционной связи двух математических констант – квадратного корня из двойки и золотого сечения», но также в целом об «эволюционном развитии нашей вселенной».

Представляется, что это излишне эмоциональная и слишком завышенная оценка значимости описанного события.

Кстати довольно заурядного события, как частного случая более общих представлений в данной области, например:

а) начальные условия (x_0, y_0) могут быть отличны от единиц и представляться любыми вещественными числами;

б) коэффициенты в рекурсии не обязательно равны 1 или 2 и также могут выражаться произвольными действительными числами;

в) эти в общем случае различные коэффициенты могут присутствовать одновременно при разных слагаемых рекурсии и др.

Так мы приходим к «модели двухчленно-аддитивных взаимосвязанных рекурсий» или, если чуть короче: «*модели парных рекурсий*»

2.2. Общее решение. Рассмотрим систему двух линейных возвратных (разностных) уравнений с постоянными коэффициентами (рис. 3)

$$x_n = ax_{n-1} + by_{n-1}, \tag{3}$$

$$y_n = cy_{n-1} + dx_{n-1}. \tag{4}$$

Представим данные выражения также с индексами, уменьшенными на единицу:

$$x_{n-1} = ax_{n-2} + by_{n-2}, \tag{5}$$

$$y_{n-1} = cy_{n-2} + dx_{n-2}. \tag{6}$$

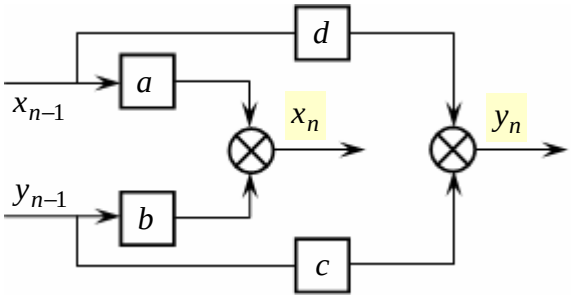

Рис. 3. Структурная схема модели парной рекурсии с умножителями и сумматорами

Умножим уравнение (6) на b, заменим в нём выражение by_{n-2} из (5) и полученный результат by_{n-1} подставим в (3).

В итоге имеем разностное уравнение второго порядка, в котором переменная x_n зависит только от своих предшествующих значений:

$$x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}, \tag{7}$$

где $p = a + c, \quad q = bd - ac$.

Выполняя аналогичные построения, умножим уравнение (5) на d, заменим в нём выражение dx_{n-2} из (6) и полученный результат dx_{n-1} подставим в (4).

Так, мы приходим к разностному уравнению второго порядка, в котором следующая переменная y_n зависит только от своих предшествующих значений:

$$y_n = py_{n-1} + qy_{n-2}. \tag{8}$$

Таким образом, по своему виду и составу коэффициентов уравнения (7)–(8) совершенно идентичны.

Оно и понятно, ибо исходные уравнения (3)–(4) структурно эквивалентны, и поэтому взаимные замены $x_n \Leftrightarrow y_n$ не влияют на величины $(a + c), bd, ac$.

Запишем для возвратных (разностных) уравнений (7)–(8) эквивалентный аналог в виде характеристического алгебраического уравнения второго порядка $z^2 - pz - q = 0$ с положительным корнем $\lambda = \left(p + \sqrt{p^2 + 4q}\right)/2$.

Это означает, что двух последовательностей (7)–(8) с произвольными начальными условиями предельное отношением их соседних элементов является аттрактором λ (теорема Д.Бернулли) [10], то есть

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}. \qquad (9)$$

Из уравнений (3)–(4), после деления числителя и знаменателя на величину x_{n-1}, находим предельное отношение ($n\to\infty$):

$$\theta = \frac{y_n}{x_n} = \frac{cy_{n-1}+dx_{n-1}}{ax_{n-1}+by_{n-1}} = \frac{c\theta+d}{a+b\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta^2 - \frac{c-a}{b}\cdot\theta - d = 0,$$

откуда вычисляем положительный корень

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{c-a+\sqrt{(c-a)^2+4b^2d}}{2b}. \qquad (10)$$

В частности, для коэффициентов $a = b = d = 1$ и $c = 2$ ряд $y_n = 2y_{n-1}+x_{n-1} = 3y_{n-1}-y_{n-2}$, величина $\theta = \Phi$. При этом последовательности x_n и y_n образуют соответственно нечётные и чётные числа Фибоначчи.

Соответственно для $a = b = c = 1$ и $d = 2$ ряд $y_n = y_{n-1}+2x_{n-1} = 2y_{n-1}+y_{n-2}$, и величина $\theta = \sqrt{2}$.

А теперь проанализируем другие, наиболее характерные частные случаи.

Модель парно-золотых рекурсий. Пусть $c-a = b = d = 1$.

Соответствующая пара разностных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_n = a\cdot x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = (a+1)y_{n-1} + x_{n-1}, \end{cases}$$

Величины: $p = 2a+1,\ q = 1-a(a+1)$.

Авто-рекурсия: $x_n = (2a+1)\cdot x_{n-1} + \left(1-a-a^2\right)\cdot x_{n-2}$.

Предельные отношения (9)–(10) выражаются числами золотого сечения:

$$\underline{\theta = \mathbf{\Phi}}, \qquad \underline{\lambda = a+\mathbf{\Phi}}.$$

При $a = 1$, величина $\lambda = 1+\Phi = \Phi^2$.

Модель нечётных степеней ЗС. Можно выделить и другие специфические значения коэффициентов.

Так, аттрактор выражается нечётными степенями константы золотого сечения:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = k_m y_{n-1} + x_{n-1}, \end{cases}$$

$$\underline{\theta = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m+1}}}, \qquad \underline{\lambda = 1+\mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m+1}}},$$

где $k_m = L_{2m+1}+1 \Rightarrow 2, 5, 12, 30, 77, 200...$; $m = 0, 1, 2, \ldots$;

Здесь $p = k_m + 1, \quad q = -(k_m - 1)$ и $x_n = (k_m + 1) \cdot x_{n-1} - (k_m - 1) \cdot x_{n-2}$.

Модель чётных степеней ЗС.

Аттрактор выражается чётными степенями константы золотого сечения:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = k_m y_{n-1} - x_{n-1}, \end{cases}$$

$$\underline{\theta = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m}}}, \qquad \underline{\lambda = 1 + \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m}}},$$

где $k_m = L_{2m} + 1 \Rightarrow 3, 4, 8, 19, 48, 124...$; $m = 0, 1, 2, \ldots$;

Здесь $p = k_m + 1, \quad q = -(k_m + 1)$ и $x_n = (k_m + 1)(x_{n-1} - x_{n-2}) \cdot$.

Модель целочисленных аттракторов.

$$\begin{cases} x_n = a \cdot x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = (a+1) y_{n-1} + k(k-1) x_{n-1}, \end{cases}$$

$$\theta = \frac{1 + \sqrt{1 + 4k(k-1)}}{2} = k, \qquad \underline{\lambda = a + k}.$$

Модель квадратного уравнения общего вида. *Для произвольной пары начальных условий* (x_0, y_0) и пары коэффициентов (P, Q) "модель Рассела" даёт следующее решение:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = (P+1) y_{n-1} + Q x_{n-1}, \end{cases}$$

$$\theta = \frac{P + \sqrt{P^2 + 4Q}}{2}, \qquad \underline{\lambda = 1 + \theta}.$$

Это решение в пределе совпадает с аттрактором обобщённой последовательности Фибоначчи $z_n = P z_{n-1} + Q z_{n-2}$ с характеристическим квадратным уравнением $z^2 = Pz + Q$.

Однако образуемые последовательности x_n и y_n существенно отличаются от эквивалентного рекуррентного ряда z_n.

2.3. Некоторые размышлизмы.

Было бы наивно думать, что мы получили некие сверхвыдающиеся результаты.

Тем не менее, в истории развития ЗС, на наш взгляд, предпринята одна из первых попыток обобщить подход, названный нами выше алгоритмом Рассела.

По сути, выражаясь сухим языком, имеет место видоизменение линейного разностного уравнения второго порядка в виде взаимосвязанной пары двух уравнений первого порядка.

Математически это абсолютно логично и корректно.

А вот с точки зрения содержательных интерпретаций появляются новые возможности и направленности. Та же автомодель Фибоначчи, как последовательное суммирование двух предшествующих собственных значений, теперь распадается на два параллельных синхронно-увязанных процесса. То есть вначале был один процесс на базе двух предыдущих состояний. По образу: «завтра = сегодня + вчера». Теперь у нас два процесса, но уже с одним предыдущим состоянием. Что-то вроде схемы: «общее сегодня = двум разным вчера».

В этом и состоит принципиальная разница, включая новые направленности в поиске подобных задач в природе. Одно дело искать и находить свойства числа "2", и совсем другое – идентифицировать пару со свойствами числа "1". Это кардинальное изменение угла зрения, хотя в математическом смысле и содержит элементы тождественных переходов.

3. Рекурсии с периодически изменяемой структурой

С помощью переустройства исходных структур можно расстроить любой закостенелый порядок или способ организации и заставить модели работать по-новому.

Однако следует помнить, что даже самая хорошая идея в преобразованиях способна погибнуть либо завести в тупик, если изменения в корне нарушают фундаментальные понятия, низвергая их в пропасть безрассудных и вычурных фантазий.

Если характеризовать в целом, то вышеизложенные материалы (п. 1 – п. 2) объединяет одно общее свойство – это постоянство изучаемых структур (операторов, рекурсий) во времени.

В настоящем подразделе рассматривается совершенно новый подкласс рекурсии.

3.1. ПИС-преобразования. В основе исследуемых рекурсий лежит периодически изменяемая структура (ПИС).

Это означает, что по мере развития процесса рекуррентная формула периодически перескакивает на разные формообразующие структуры.

Алгоритм подобного переключения на расчётные функции может быть самым разнообразным и зависит от заданного набора функций-переключателей.

Возможности образования новых видов числовых последовательностей практически не лимитированы. И приводят к различным построениям с невероятно широким спектром разнообразных теоретических линий.

Ограничимся пока рассмотрением характеристических триномов.

Каждый член последовательности определяется алгебраической суммой двух предшествующих элементов с тем или иным запаздыванием.

Кроме того, и это самое главное, набор предшествующих значений периодически изменяется. С той или иной периодичностью происходит переключение на параллельные формообразующие структуры.

3.2. Парно-дуальные ПИС-триномы. Одна из простейших, периодически изменяемых структур имеет вид пары рекурсий триномиального вида:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-q}, & n = 1 \pmod 2, \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-p}, & n = 0 \pmod 2, \end{cases}$$

$(f_0,\ f_1, ...,\ f_{p-1}) = (0, 1, ..., 1)$ – начальные условия; n – дискретное время; p, q – параметры-индексы запаздывания, $n \geq p \geq q$.

То есть для нечётных элементов n (деление на 2 с остатком 1), суммирование происходит по первой строке-формуле, для чётных элементов – по второй.

Очевидно, что при $p = q = 2$ равенства идентичны и образуют рекурсию формирования чисел Фибоначчи с аттрактором, равным числу золотого сечения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

В частности, главной особенностью золотого сечения является «*инвариантное повторение закономерностей частей и целого*» (Н.Александров). В целых числах это – ряд Фибоначчи (1, 2, 3, 5, 8, 13 ...).

Если $p = q$, то приходим к так называемым p-сечениям[2], которые характеризуются алгебраическим триномом двух старших степеней $x^p = x^{p-1} + 1$.

Прерывчато-периодическая схема формирования элементов ряда соответствующим образом накладывает отпечаток на технику образования предельных аттракторов.

Вместо одного аттрактора, как это имело место для обычных рекуррентных последовательностей, теперь следует различать пару предельных отношений

$$(a, b) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_{2n}}{f_{2n-1}}, \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}}\right).$$

Эти величины при $q = 2$ разнятся между собой порядком следования в отношении: чёт-нечет или нечет-чёт и удовлетворяют общему равенству:

$$1 + a = ab.$$

Отсюда, в частности, следует, что предельное отношение двух элементов ряда, отстоящих друг от друга на две позиции (2-аттрактор), уже не зависит от чётности индекса n, то есть:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n-2}} = a\cdot b.$$

Общая теория прерывистых разностных уравнений достаточна сложна.

Собственно, нам даже неизвестно, есть ли вообще подобная разработанная теория.

Поэтому в данном изложении пока ограничимся изложением некоторых частных случаев, которые помогут нам понять формообразующие механизмы подобных числовых рядов. Да и саму возможность формирования последовательностей с периодически изменяемой структурой.

<u>Запаздывание **p = 3, q = 2.**</u>

Начальные значения ряда имеют вид:

0 1 1 2 3 5 7 12 17 29 41 70 99 169 239 408 577 985 1393 ...

Предельные отношения соседних членов числовой последовательности связаны с корнем из двух.

Два аттрактора, соответствующие чётным и нечётным значениям последовательности, равны

$$a = \sqrt{2} \approx 1{,}414; \qquad b = 1 + 1/\sqrt{2} \approx 1{,}707.$$

Характерно, что

$$\frac{f_{2n}}{f_{2n-\mathbf{1}}} \to \sqrt{2}, \qquad \frac{f_{2n}}{f_{2n-\mathbf{2}}} \to 1+\sqrt{2}, \qquad \frac{f_{2n}}{f_{2n-\mathbf{3}}} \to 2+\sqrt{2}.$$

[2] Иногда подобные формы ошибочно называются «обобщёнными золотыми сечениями». Хотя к феномену ЗС они не имеют никакого отношения. Разве что, как и ЗС, в своём описании соотносятся с алгебраическим уравнением.

Здесь также применимо тождество $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$.

В то же время, независимо от чётности-нечётности n, справедливо отношение:

$$\frac{f_n}{f_{n-2}} \to a \cdot b = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}414.$$

В целом можно сказать, что рассмотренный случай – это «модель $\sqrt{2}$».

<u>Запаздывание **p = 4, q = 2.**</u>

При заданных начальных условиях (0, 1, 1, 1) первая двадцатка ряда имеет вид:

0 1 1 1 1 2 3 5 6 11 14 25 31 56 70 126 157 283 353 636 793 ...

Предельные отношения связаны с правильным семиугольником, для которого отношение радиусов вписанной r и описанной R окружностей составляет половину b:

$$\frac{r}{R} = \cos\frac{\pi}{7} = \frac{b}{2}.$$

Значения аттракторов равны:

$$a = (b-1)^{-1} \approx 1{,}247; \qquad b = 2\cos\pi/7 \approx 1{,}802.$$

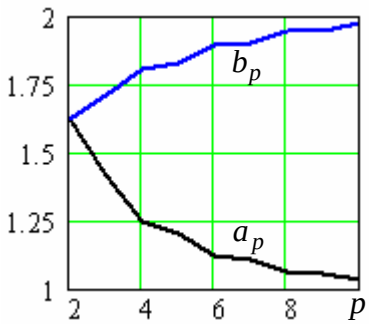

Рис. 4. Аттракторы ПИС

Далее с увеличением параметра p явных формул для аттракторов найти не удалось.

Вероятно, это известные издержки отсутствия аналитических решений для алгебраических уравнений высоких порядков.

Математические машинные эксперименты показывают (рис. 4), что по мере роста индекса запаздывания p значения аттракторов (a, b) стремятся к значениям (1, 2).

Причём скорости устремления (a, b) к своим асимптотам довольно высокие. Сами значения (a, b) не зависят от начальных условий ряда f_n.

<u>Модель золотого сечения (периодическая структура).</u>

Модель описывается следующей парой уравнений, характеризующих периодически изменяемую структуру:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, & n = 1 \pmod 2, \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-p}, & n = 0 \pmod 2. \end{cases}$$

При p = 4 образуется следующий ряд:

0 1 **1** 1 **1** 2 **2** 4 **3** 7 **5** 12 **8** 20 **13** 33 **21** 54 **34** 88 **55** 143 **89** 232 **144** 376 **233**...

Здесь всё довольно просто.

На чётных номерах-позициях расположены последовательные числа Фибоначчи.

Между ними находятся числа, которые на единицу меньше чисел Фибоначчи.

А вот при p = 7 формируемая последовательность уже не столь очевидна:

0 1 1 1 1 1 1 2 2 4 3 7 4 11 6 17 10 27 17 44 28 72 45 117 72 189 116 305 188 493 305 798 494 1292 799 2091 1292 3383 2090 5473 3382 8855 5473 1433 8856...

Или с изменёнными начальными условиями (*подчёркнуто*):

<u>0 1 2 3 4 5 6</u> 11 7 18 10 28 15 43 26 69 44 113 72 185 115 300 184 484 297 781 482 1263 782 2045 1266 3311 2047 5358 3310 8668 5355...

Примечательно, что все эти последовательности имеют аттракторы, непосредственно связанные с константой золотого сечения, а именно:

$$a = \Phi^{-1} \approx 0{,}618; \qquad b = 1+\Phi = \Phi^2 \approx 2{,}618.$$

Их произведение равно Ф. Это означает, что независимо от чётности-нечётности *n*, для данной последовательности справедливо отношение для 2-аттрактора:

$$\frac{f_n}{f_{n-2}} \to \Phi.$$

В теоретических исследованиях в области золотого сечения это довольно нетривиальный результат. Ибо до сих мы привыкли видеть подобное соотношение для соседних членов чисел Фибоначчи F_n, то есть $F_n / F_{n-1} \to \Phi$.

На наш взгляд, второе уравнение образуемой модели

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, & n = 1 \pmod 2, \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-7}, & n = 0 \pmod 2, \end{cases}$$

косвенно характеризует симметрию пятого порядка (5 = 7 – 2), которая свойственна правильному пятиугольнику.

Это именно та симметрия, которая запрещена в решётке кристаллов, но может присутствовать в квазикристаллах – искусственных сплавах, образуемых при чрезвычайно высокой скорости охлаждения нагретых расплавов: до миллиона градусов в секунду.

Ремарка. Невольно вспоминается одно наблюдение О.Акимова[3]: «Наткнувшись на золотое сечение, икосаэдр или додекаэдр, он (гармонист-золотоискатель) тут же падает на колени, бьётся головой об пол» и возносит "молебен-экстазен".

Нечто похожее демонстрирует гармонист-ортодокс, вводя читателей в заблуждение, будто квазикристаллы (КК) основаны на ЗС.

Но хорошо известно, что за первым сплавом $Al + Mn$ (1982 г.) с шестью осями симметрии 5-го порядка с ЗС, были открыты сотни других квазипериодических кристаллов с осями 8-го, 10-го и 12-го порядков[4] с числами самоподобия Пизо 1+√2, 2+√3.

Меняя технологические условия, виды атомов, трансляцию симметрий, сегодня получают практически неограниченный спектр КК (от ~ аморфного до ~ кристаллического).

Стоило бы начать исследование с других сплавов, например, на базе $Si + Ni + Cr$ с их 8-симметрией, которой нет у икосаэдра, никто бы и не вспомнил про ЗС.

Достаточно посмотреть материалы многих конференций в области квазикристаллов. – Ни в одном из докладов вы не увидите и слова о ЗС.

Именно преодоление границ симметрии 5-го порядка позволил создать достойную теоретическую подоснову для переходных кристаллических структур – новой формы-разновидности в организации материи.

---

[3] Конец науки. – http://sceptic-ratio.narod.ru/rep/kn14.htm.

[4] Ранее считалось, что кристаллы имеют осевую симметрию лишь 1, 2, 3, 4 и 6 порядков.

Именно поэтому открытие квазикристаллов стало объектом присуждения Нобелевской премии по химии в 2011 г.

Выводы:

1. Изложены основы новой теории обобщения задач, приводящих к уникальной константе ЗС. Впервые для ЗС используется аддитивная модель с внешними условиями в виде неоднородного уравнения $f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = g(n)$, характерного для открытых систем.

2. Для системы двух взаимосвязанных числовых последовательностей в разных её транскрипциях образованы "золотоносные" модели с аттракторами, которые выражаются через константу золотого сечения Φ:

- *модель парно-золотых рекурсий* $x_n = a \cdot x_{n-1} + y_{n-1}$ и $y_n = (a+1)y_{n-1} + x_{n-1}$ с аттракторами

$$\frac{y_n}{x_n} \Rightarrow \theta = \Phi, \qquad \left(\frac{y_n}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{x_{n-1}}\right) \Rightarrow \lambda = a + \Phi.$$

- *модель нечётных степеней золотого сечения* $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ и $y_n = (1 + L_{2m+1})y_{n-1} + x_{n-1}$ с нечётными членами L_{2m+1} ряда Люка и аттракторами

$$\theta = \Phi^{2m+1}, \qquad \lambda = 1 + \Phi^{2m+1}.$$

- *модель чётных степеней золотого сечения* $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ и $y_n = (1 + L_{2m})y_{n-1} - x_{n-1}$ с чётными членами L_{2m} ряда Люка и аттракторами ($m = 0,1,2\ldots$)

$$\theta = \Phi^{2m}, \qquad \lambda = 1 + \Phi^{2m}.$$

3. Рассмотрен совершенно новый класс вариабельных пар рекурсий триномиального вида с аттракторами, равными корню из двух √2, золотому сечению

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, & n = 1 \pmod 2, \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-7}, & n = 0 \pmod 2, \end{cases}$$

и другим математическим константам.

Литература:

1. *Василенко С.Л., Белянин В.С., Радзюкевич А.В.* Центры масс однородных тел как аттракторы возвратных последовательностей (Фибоначчи, Трибоначчи ...) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16023, 30.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161684.htm.

2. *Сороко Э.М.* Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем: Введение в общую теорию гармонии систем: 2-е изд. – М.: КомКнига, 2006. – 264 с. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/007a/02321006.htm.

3. *Василенко С.*Л. Незадачливые *p*-сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=50&sm=2.

4. *Василенко С.Л.* Миф про обобщения золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 23.07.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=32&sm=2.

5. *Белянин В.С.*, *Василенко С.Л.* Золотоносный песок // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 03.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=47&sm=2.

6. *Василенко С.Л.* Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.

7. *Василенко С.Л.* Онтология обобщенной модели золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16212, 11.12.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161739.htm.

8. *Василенко С.Л.* Основы теории рационального золотого сечения в целочисленных переменных // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15274 от 08.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322057.htm.

9. *Василенко С.Л.* Златые цепи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15557, 22.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161546.htm.

10. *Василенко С.Л.* Обобщённые рекурсии с аттрактором золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=49&sm=2.

11. *Василенко С.Л.* Парные двухчленно-аддитивные рекурсии // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 08.10.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=51&sm=2.

12. *Василенко С.Л.* Рекурсии с периодически изменяемой структурой // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.10.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=53&sm=2.

13. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.

14. *Аракелян Г.Б.* Фундаментальная теория ЛМФ. – Ереван, 2007. – http://www.hrantara.com/Monograph.pdf.

15. *EqWorld*: The World of Mathematical Equations. – http://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/fe/fe-toc1.htm. – http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/fe/fe1202.pdf.

16. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.

17. *Чернов А.* Альтернативный алгоритм ряда Фибоначчи и обобщённый алгоритм для √2 и золотого сечения. – 2009. – http://chernov-trezin.narod.ru/ZS_1_2.htm.

18. *Рассел Б.* История западной философии, и её связь с политическими и социальными условиями от античности до наших дней: 3- изд. испр. – Новосибирск: Сибир. универ. изд-во, 2001. – http://psylib.org.ua/books/rassb01/index.htm.

© ВаСиЛенко, 2011