С.Л. Василенко

ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНОГО ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ В ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

К 70-летию профессора, д.т.н. Стахова А.П.
с пожеланием ему крепкого здоровья
и воплощения в жизнь всех творческих
задумок и начинаний по развитию "золотого"
сечения в современной науке

В теоретических и практических исследованиях часто встречаются задачи на конечно-дискретных математических объектах.

Их изучение предполагает поиск решений в виде целочисленных переменных.

В теории чисел известно целое направление по исследованию структур, описываемых диофантовыми уравнениями с целыми коэффициентами и неизвестными, которые могут принимать только целые значения.

Например, мы хотим поделить группу из 50 человек в "золотой" пропорции. Вследствие иррациональности числа $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ осуществить такое деление точно невозможно.

Но это вовсе не означает, что мы не в состоянии проделать это так, чтобы наилучшим образом наше деление приблизить к "золотому" сечению (ЗС), и не оправдываться за то, что операция выполнена не ровно по ЗС, а только приблизительно, как в известной арифметической задачке «про полтора землекопа».

Поэтому деление нашей группы в отношении 31:19 следует рассматривать не ориентировочным, а точным "золотым" сечением, – в смысле наилучшего приближения к Φ в целочисленных переменных.

Как особый частный случай традиционной "золотой" пропорции, приводящей обычно к иррациональным результатам, ЗС в целых числах назовем рациональным.

<u>Определение</u>. Рациональным "золотым" сечением (РЗС) целого числа n называется рациональная дробь $\frac{n}{b} = c$ такая, что для всех натуральных чисел x величина

$$b = \arg\min_x \left| \frac{n}{x} - \Phi \right|.$$

Ниже будет показано, что выполняются следующие соотношения:

$$a = \left\langle n\Phi^{-2} \right\rangle, \quad b = \left\langle n\Phi^{-1} \right\rangle, \quad c = \langle n\Phi \rangle, \quad n = a + b, \quad b = c - n,$$

где $\langle z \rangle = \lceil z + 0.5 \rceil$ – ближайшее целое к z, если $z > 0$;

$\lceil z \rceil$ – целая часть от z (наибольшее целое число, не превосходящее z).

Иначе говоря, $\langle z \rangle$ – это округление z до целого. В программировании $\langle z \rangle$ соответствует операнду или встроенной функции round(z), соответственно $\lceil z \rceil$ – функции floor(z).

Так, для $n = 50$: $a = 19, \quad b = 31, \quad c = 81$.

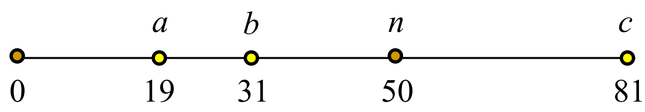

Рис. 1. Рациональное "золотое" сечение для величины n в целочисленных переменных

Числа a и b выполняют ту же роль, что и в классическом ЗС (рис. 1) при делении "Целого" (n) на составные элементы, – только приближенно в целочисленных переменных $\frac{n}{b} \approx \frac{b}{a}$. Но само такое приближение является наилучшим к Φ в области целых чисел. То есть величина $\frac{b^2}{n-b}$ является оптимальным приближением к n.

Доказательство существования РЗС.

Т е о р е м а 1 (*закон существования и единственности РЗС*). Любому натуральному числу n соответствует одно рациональное "золотое" сечение такое, что $n = \left\langle n\Phi^{-1}\right\rangle + \left\langle n\Phi^{-2}\right\rangle$.

Доказательство. Из свойств числа Φ непосредственно следует равенство $n = n\Phi^{-1} + n\Phi^{-2}$.

Весь вопрос в том, не потеряем или не приобретем ли мы лишние единицы в результате нашего суммирования при округлении каждого из слагаемых до целых чисел?

Преобразуем правую часть

$$S = \left\langle n\Phi^{-1}\right\rangle + \left\langle n\Phi^{-2}\right\rangle = \left\langle n\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right\rangle + \left\langle n\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right\rangle = \left\langle n\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\rangle + \left\langle n\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\rangle.$$

Пусть $\underline{n = 2k}$ – четное, тогда

$$S = \left\langle 2k\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\rangle + \left\langle 2k\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\rangle = \left\langle k\sqrt{5}-k\right\rangle + \left\langle 3k-k\sqrt{5}\right\rangle = \left\langle k\sqrt{5}\right\rangle - k + 3k - \left\langle k\sqrt{5}\right\rangle = 2k = n.$$

Пусть $\underline{n = 2k+1}$ – нечетное. Принимая во внимание, что $\langle z\rangle = \lceil z+0.5\rceil$, а взятие целой части от отрицательных нецелых значений адекватно операции $\lceil -u\rceil = -1-\lceil u\rceil$, получаем

$$S = \left\lceil (2k+1)\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1}{2}\right\rceil + \left\lceil (2k+1)\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right\rceil = \left\lceil -k + k\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right\rceil + \left\lceil 3k + 2 - k\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right\rceil =$$

$$= -k + \left\lceil k\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right\rceil + 3k + 2 - 1 - \left\lceil k\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right\rceil = 2k+1 = n.$$

Таким образом, для любого целого n существует РЗС, равное $S = \left\langle n\Phi^{-1}\right\rangle + \left\langle n\Phi^{-2}\right\rangle$.

И такое РЗС единственно.

Действительно, из свойства "золотого" сечения $1 = \Phi^{-1} + \Phi^{-2}$ следует, что $n = n\Phi^{-1} + n\Phi^{-2}$.

То есть натуральное число единственным образом раскладывается на два иррациональных числа $n = b' + a' = n\Phi^{-1} + n\Phi^{-2}$ такие, что $n/b' = b'/a' = \Phi$.

Применяя формально операцию округления целого числа n, имеем

$$n = \left\langle n\Phi^{-1} + n\Phi^{-2}\right\rangle \equiv \left\langle n\Phi^{-1}\right\rangle + \left\langle n\Phi^{-2}\right\rangle = n,$$

откуда следует единственность РЗС. Этим теорема доказана.

Аналогичным образом выполняется соотношение в сторону увеличения числа n в виде $n\Phi$, поэтому окончательно получаем:

$$n = \left\langle n\Phi^{-2}\right\rangle + \left\langle n\Phi^{-1}\right\rangle, \qquad 50=19+31$$

$$n = \left\langle n\Phi\right\rangle - \left\langle n\Phi^{-1}\right\rangle, \qquad 50=81-31$$

$$n = \frac{\left\langle n\Phi^{-2}\right\rangle + \left\langle n\Phi\right\rangle}{2}. \qquad 50 = \frac{19+81}{2}$$

Исследование свойств РЗС логично начать с чисел и последовательностей Фибоначчи, поскольку именно они в своей асимптотике приводят к "золотому" сечению.

РЗС в последовательностях Фибоначчи.

1. <u>*Числа Фибоначчи.*</u> Известно, что ряд целых чисел Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … формируется по аддитивной рекуррентной процедуре:

$$(F_0, F_1) = (0, 1), \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \ge 1.$$

Нетрудно проследить, что эта же последовательность может быть построена в рамках теории РЗС рекуррентно мультипликативным генератором

$$F_2 = 1, \ F_n = \langle F_{n-1}\Phi \rangle, \qquad n \ge 3$$

или в аналитическом виде

$$F_n = \left\langle \Phi^n \big/ \sqrt{5} \right\rangle, \qquad n \ge 0,$$

то есть число Фибоначчи F_n – есть ближайшее целое к $\Phi^n \big/ \sqrt{5}$ [1, с. 27].

Действительно, с учетом очевидных неравенств $\Phi > 1$, $\sqrt{5} > 2$, свойств константы Φ и формулы Бине

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\Phi - (-\Phi)^{-1}} \tag{1}$$

имеем (по абсолютной величине разности двух чисел)

$$\left| F_n - \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}} - \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{-(-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}\Phi^n} < \frac{1}{2} \quad \text{для } n \ge 0,$$

$$|F_n - F_{n-1}\Phi| = \left| \frac{-(-1)^n (\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}} - \frac{-(-1)^{n-1}(\Phi)^{-n+2}}{\sqrt{5}} \right| = \frac{\Phi^{-n} + \Phi^{-n+2}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi + 2}{\sqrt{5}\Phi^n} < \frac{1}{2} \quad \text{для } n \ge 3.$$

Предельная формулировка $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi$ или ее адекватная запись $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{F_n}{\Phi} = F_{n-1}$ приобретает следующий вид

$$\left\langle \frac{F_n}{\Phi} \right\rangle = F_{n-1} \ \text{ – для всех } \ n \ge 2!$$

Известно, что число Φ обладает мультипликативными и аддитивными свойствами, которые вытекают из соотношения $\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n$.

Напомним [2, с. 26], что функция $y(x)$ называется мультипликативной, если она определена для всех целых $x > 0$, а для любых положительных взаимно простых x_1, x_2 выполняется равенство $y(x_1, x_2) = y(x_1) y(x_2)$. В частности, мультипликативной является функция x^z, где z – любое вещественное или комплексное число.

Как далеко распространяются мультипликативные свойства на числа Фибоначчи в рамках РЗС? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Т е о р е м а 2. Для чисел Фибоначчи и целых $(n, k) \ge (3, n/2)$ имеет место равенство

$$F_n = \left\langle F_k \Phi^{n-k} \right\rangle. \tag{2}$$

Доказательство. Очевидно, нам достаточно установить, что абсолютная величина разности двух чисел F_n и $F_k \Phi^{n-k}$ меньше $1\!\big/\!2$.

С учетом формулы Бине (1) запишем

$$\left|F_n - F_k\Phi^{n-k}\right| = \left|\frac{\Phi^n - (-1)^{-n}\Phi^{-n}}{\sqrt{5}} - \frac{\Phi^n - (-1)^{-k}\Phi^{n-2k}}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\Phi^{n-2k} + (-1)^{-n+k+1}\Phi^{-n}}{\sqrt{5}}\right|.$$

Определим максимальное значение числителя.

По условия теоремы $n \le 2k$, поэтому наибольшее значение первого слагаемого равно $\Phi^{n-2k} = 1$ и соответствует $n = 2k$.

Второе слагаемое имеет знакопеременный характер, его вес по сравнению с первых слагаемым незначителен и резко убывает с ростом n.

При $n = 2k$ его положительные значения образуются для нечетных $k = 2m+1$, поскольку в этом случае $(-1)^{-2(2m+1)+(2m+1)+1} = (-1)^{-2m} = 1$.

Среди наименьших чисел (n, k), одновременно удовлетворяющим исходным и описанным условиям, является пара $n = 6, k = 3$, которая и приводит к наибольшему значению числителя $1+\Phi^{-6}$.

Таким, образом, $\left|F_n - F_k\Phi^{n-k}\right| \le \dfrac{1+\Phi^{-6}}{\sqrt{5}} \approx 0{,}472 < \dfrac{1}{2}$, что и доказывает теорему.

Данная теорема показывает, что в направлении возрастания от n мультипликативная рекурсия относительно Φ для чисел Фибоначчи выполняется до бесконечности. В обратном направлении она тоже выполняется, но только до элемента с порядковым номером, не ниже $n/2$. Далее остаются лишь аддитивные свойства.

В частности, для соседних чисел Фибоначчи, полагая в (2) $k = n \mp 1$, имеем

$$F_n = \langle F_{n-1}\Phi\rangle,$$

$$F_n = \left\langle F_{n+1}\Phi^{-1}\right\rangle.$$

Выполняя в этих уравнениях двойную подстановку, при $n \ge 3$ также получаем

$$F_n = \left\langle\left\langle F_n\Phi^{-1}\right\rangle\Phi\right\rangle = \left\langle\langle F_n\Phi\rangle\Phi^{-1}\right\rangle.$$

Для других чисел натурального ряда, не являющимися числами Фибоначчи, первое равенство выполняется не всегда, например,

$$\left\langle\left\langle 4\Phi^{-1}\right\rangle\Phi\right\rangle = 3, \ \left\langle\left\langle 7\Phi^{-1}\right\rangle\Phi\right\rangle = 6, \ \left\langle\left\langle 9\Phi^{-1}\right\rangle\Phi\right\rangle = 10.$$

Можно показать, что область действия теоремы 2 достаточно просто расширяется на весь натуральный ряд k с помощью пары взаимно дополняющих решений:

$$F_k = \begin{cases} \varphi_{n,k}, & k \le 2n \\ \varphi_{n,k} - F_{k-2n}, & k > 2n \end{cases}, \qquad F_n = \begin{cases} \varphi_{k,n}, & k \ge n/2 \\ \varphi_{k,n} + (-1)^k F_{n-2k}, & k < n/2 \end{cases},$$

где $\varphi_{n,k} = \left\langle F_n\Phi^{k-n}\right\rangle$, $\varphi_{k,n} = \left\langle F_k\Phi^{n-k}\right\rangle$.

Как видно из диаграммы (рис. 2), мультипликативные признаки в чистом виде действуют, хотя и на больших, но все же ограниченных участках натурального ряда.

<table>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25 ⋯</td><td>k</td></tr>
<tr><td colspan="5">$\varphi_{k,n} + (-1)^k F_{n-2k}$</td><td colspan="21">$\varphi_{k,n} = \left\langle F_k \Phi^{n-k} \right\rangle$</td><td>$F_n$</td></tr>
<tr><td colspan="21">$\varphi_{n,k} = \left\langle F_n \Phi^{k-n} \right\rangle$</td><td colspan="5">$\varphi_{n,k} - F_{k-2n}$</td><td>$F_k$</td></tr>
</table>

Рис. 2. Диаграмма мультипликативных решений для чисел Фибоначчи
в рамках теории рационального "золотого" сечения, $n = 10$

Это своего рода плата за округление до целых чисел. Вместе с тем полностью сохраняются аддитивные свойства.

Т е о р е м а 3. Числа Фибоначчи – это рациональные "золотые" сечения для любого его элемента, кроме двух начальных.

Доказательство. Легко убедиться, что уравнение (2) при $k > n$ справедливо не только для $n \geq 3$, как по условию теоремы 2, но также и для меньших значений n.

То есть ограничение $n \geq 3$ больше касается случая, когда $k \leq n$.

Из уравнения (2) при $k = n+1$ и $k = n+2$ следует $F_n = \left\langle F_{n+1}\Phi^{-1} \right\rangle$ и $F_n = \left\langle F_{n+2}\Phi^{-2} \right\rangle$ или, изменяя нумерацию, $F_{n-1} = \left\langle F_n\Phi^{-1} \right\rangle$ и $F_{n-2} = \left\langle F_n\Phi^{-2} \right\rangle$, где $n \geq 2$.

Суммируя эти равенства, получаем

$$F_{n-1} + F_{n-2} = F_n = \left\langle F_n\Phi^{-1} \right\rangle + \left\langle F_n\Phi^{-2} \right\rangle,$$

что согласно теореме 1 означает рациональное "золотое" сечение для чисел Фибоначчи, начиная с F_2.

Итак, любые три последовательных числа Фибоначчи – это тройка чисел рационального "золотого" сечения. И речь идет не о каких-то приближенных вычислениях, а математически точном решении задачи в целых числах. То есть на каждом этапе формирования числовой последовательности F мы получаем "золотое" сечение в чистом виде, только в целочисленном измерении.

А как быть с другими натуральными числами?

Соответствующие последовательности можно построить и для них.

2. Прямая рекурсия. Рассмотрим функцию $\psi(n) = \left\langle \langle nc \rangle c^{-1} \right\rangle$.

Можно показать, если $c = p/q$ – несократимая правильная дробь, то $\psi(n)$ – периодическая знакопеременная функция с периодом q и количеством нулевых значений p на любом интервале $[m, m+q]$ (рис. 3).

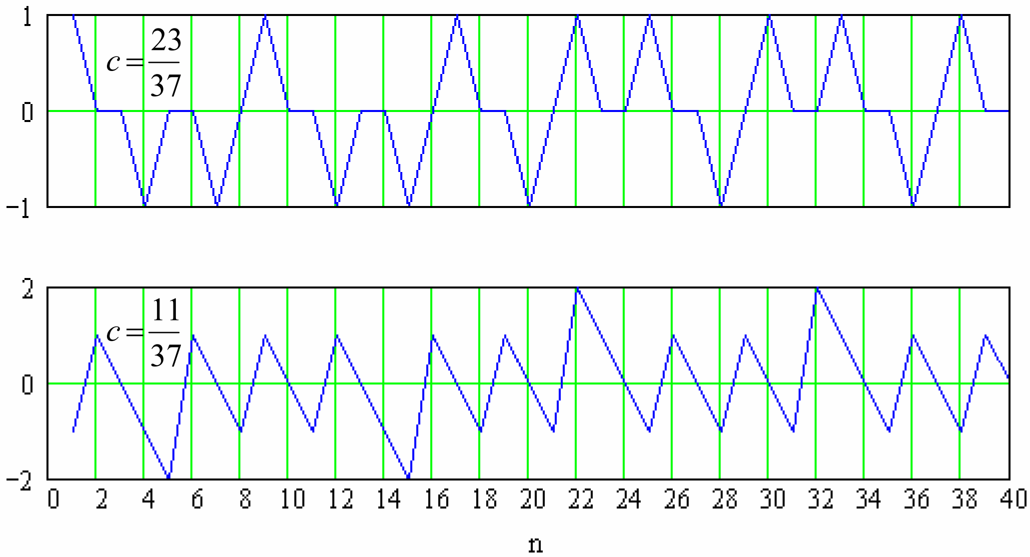

Рис. 3. Графики функции $\psi(n)=\left\langle\langle nc\rangle c^{-1}\right\rangle$

В тоже время для любых $c \ge 1, u \ge 0$ и выполняется равенство

$$\psi(n)=\left\langle\left\langle nc^{u}\right\rangle c^{-u}\right\rangle = n. \tag{3}$$

Это означает, что для конкретного N мультипликативность рекурсии РЗС может нарушаться в обратном направлении $0 \leftarrow N$, и полностью сохраняется для прямого хода $N \to \infty$.

Выберем три любых последовательных числа $f_n = N$, $f_{n+1} = \langle f_n \Phi \rangle$, $f_{n+2} = \langle f_{n+1}\Phi\rangle$.

С учетом формулы (3) и свойства числа Φ получаем:

$$f_{n+2} = \langle f_{n+1}\Phi\rangle = \langle\langle f_n\Phi\rangle\Phi\rangle = \left\langle\langle f_n\Phi\rangle\left(1+\Phi^{-1}\right)\right\rangle = \left\langle\langle f_n\Phi\rangle + \langle f_n\Phi\rangle\Phi^{-1}\right\rangle = \langle f_{n+1}+f_n\rangle = f_{n+1}+f_n.$$

Таким образом, для произвольного целого $f_n = N$ рекурсия прямого хода $f_{n+1} = \langle f_n\Phi\rangle$ будет иметь как мультипликативные, так и аддитивные свойства.

Обратный ход $0 \leftarrow N$ может нарушать мультипликативность. Поскольку даже для обычных чисел Фибоначчи обратная мультипликативная рекурсия согласно теореме 2 выполняется с ограничением только до номера $n/2$, вполне естественно и нам не акцентировать на ней внимания, сохранив на этом участке хотя бы аддитивные свойства.

3. *<u>Обратное восстановление рекурсий РЗС для натурального числа N.</u>* Порядковый номер числа в рекуррентной последовательности нам еще не известен, поэтому присвоим ему некоторое произвольное значение, например, 50, то есть $f_{50} = N$.

Тогда, исходя из мультипликативности прямого хода, можно положить $f_{51} = \langle N\Phi\rangle$. Организуем аддитивный цикл обратного хода: $f_{i-1} = f_{i+1} - f_i$, $i = \overline{50,1}$, пока $f_{i-1} \le f_i$.

После завершения процедуры на i-м этапе, получаем f_i, f_{i+1} – искомые начальные условия и $50-i$ – порядковый номер числа N в рекуррентной последовательности (рис. 4).

```
f01(n) := | (f50  f51) ← (n  round(n·Φ))
          | for i ∈ 50..1
          |   | fi-1 ← fi+1 − fi
          |   | break if fi-1 > fi
          | (fi  fi+1  50 − i)

f01(13703598) = (77  3230  19)
f01(72973525376) = (112930  301727  27)
f01(50) = (2  5  6)
```

Рис. 4. Программа в MathCad для нахождения начальных условий рекуррентной последовательности РЗС, содержащей вводимое число n

Например, затравочные числа $f_0 = 112930$, $f_1 = 301727$ в точности воссоздают нам α=0,0072973525376 – фундаментальную физическую безразмерную константу тонкой структуры (ее численное значение рекомендовано CODATA).

Иначе говоря, выполняется соотношение

$$\frac{10^{-13}}{\sqrt{5}}\left[112930\left(\Phi^{26}-(-\Phi)^{-26}\right)+301727\left(\Phi^{27}-(-\Phi)^{-27}\right)\right]=0{,}0072973525376 .$$

Мы не вкладываем какой-либо физический смысл в это равенство. Оно лишь демонстрирует возможность представления любого числа в виде элемента аддитивной рекуррентной последовательности, отношение соседних членов которой стремится к асимптоте Φ.

3. <u>*Обобщенные последовательности Фибоначчи*</u>. Среди чисел Фибоначчи только две пары чисел 1, $F_{12}=12$ и 1, $F_6=8$ являются соответственно квадратами и кубами натуральных чисел. С помощью описанной рекурсии РЗС можно получить рекуррентные последовательности, содержащие любые числа, включая квадраты, кубы и иные степени целых чисел.

Предварительный анализ таких рядов показывает, что подобные последовательности, как правило, содержат только одно квадратичное число, за исключением ряда с начальными условиями $(f_0, f_1)=(0, 2)$, который одновременно дает квадраты двух чисел: 2-х и 4-х.

По-видимому, это общее свойство всех обобщенных последовательностей Фибоначчи, которое при желании можно попытаться доказать.

Обобщенная дискретная функция Фибоначчи с произвольными начальными условиями (f_0, f_1) имеет вид ($n \ge 1$)

$$f_{n+1}=f_n+f_{n-1} \tag{4}$$

или

$$f_n=f_1F_n+f_0F_{n-1}=f_1\frac{\Phi^n-(-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}}+f_0\frac{\Phi^{n-1}-(-\Phi)^{-(n-1)}}{\sqrt{5}}, \tag{5}$$

где F_n – классические числа Фибоначчи с начальными условиями $F_0=0,\ F_1=1$.

Учитывая, что $F_n=\left\langle \Phi^n/\sqrt{5}\right\rangle$, при $n\ge 1$ справедлива аналитическая расчетная формула

$$f_n=f_1\left\langle\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}\right\rangle+f_0\left\langle\frac{\Phi^{n-1}}{\sqrt{5}}\right\rangle.$$

Изучение последовательностей f_n с разными начальными условиями показывает, что свойствами РЗС обладают не все члены последовательности, а только часть из них с порядковыми номерами, которые больше некоторого значения n в зависимости от взаимной конфигурации (f_0, f_1).

Определим условия, при которых тройка подряд идущих обобщенных чисел Фибоначчи составляет РЗС.

Т е о р е м а 4. Обобщенные числа Фибоначчи – это рациональные "золотые" сечения для любого элемента последовательности с порядковыми номерами $n>\dfrac{\ln 2+\ln\left(|f_1-f_0\Phi|\right)}{\ln\Phi}$.

Доказательство. Согласно закону существования и единственности РЗС (см. теорему 1) любому натуральному числу m соответствует одно рациональное "золотое" сечение такое, что $m=\left\langle m\Phi^{-1}\right\rangle+\left\langle m\Phi^{-2}\right\rangle$. Поскольку $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, то доказательство теоремы сводится к нахождению таких значений n, при которых одновременно выполняются равенства $f_{n-1}=\left\langle f_n\Phi^{-1}\right\rangle$ и $f_{n-2}=\left\langle f_n\Phi^{-2}\right\rangle$.

Очевидно, нам достаточно определить условия, когда соответствующие абсолютные величины разностей чисел меньше $1/2$: $\left|f_{n-1} - f_n \Phi^{-1}\right| < 1/2$ и $\left|f_{n-2} - f_n \Phi^{-2}\right| < 1/2$.

Применим соотношения (4)–(5) и выполним некоторые преобразования

$$\left|f_{n-1} - f_n \Phi^{-1}\right| = \left|f_1 \frac{\Phi^{-n+1} + \Phi^{-n-1}}{\sqrt{5}} - f_0 \frac{\Phi^{-n+2} + \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}\right| = \Phi^{-n}\left|\frac{f_1\left(\Phi + \Phi^{-1}\right) - f_0\left(\Phi^2 + 1\right)}{\sqrt{5}}\right|,$$

$$\left|f_{n-2} - f_n \Phi^{-2}\right| = \left|f_1 \frac{-\Phi^{-n+2} + \Phi^{-n-2}}{\sqrt{5}} + f_0 \frac{\Phi^{-n+3} - \Phi^{-n-1}}{\sqrt{5}}\right| = \Phi^{-n}\left|\frac{-f_1\left(\Phi^2 - \Phi^{-2}\right) + f_0\left(\Phi^3 - \Phi^{-1}\right)}{\sqrt{5}}\right|.$$

Учитывая, что $\dfrac{\Phi + \Phi^{-1}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\Phi^2 - \Phi^{-2}}{\sqrt{5}} = 1$ и $\dfrac{\Phi^2 + 1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\Phi^3 - \Phi^{-1}}{\sqrt{5}} = \Phi$, получаем

$$\left|f_{n-1} - f_n \Phi^{-1}\right| = \Phi^{-n}\left|f_1 - f_0 \Phi\right| \equiv \Phi^{-n}\left|-f_1 + f_0 \Phi\right| = \left|f_{n-2} - f_n \Phi^{-2}\right|.$$

Абсолютное значение данной величины всегда меньше $1/2$ при $-n \ln \Phi + \ln(|f_1 - f_0 \Phi|) < -\ln 2$ или $n > \alpha = \dfrac{\ln 2 + \ln(|f_1 - f_0 \Phi|)}{\ln \Phi}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, минимальный порядковый номер, начиная с которого члены последовательности Фибоначчи с затравочными числами (f_0, f_1) составляют РЗС, можно определить по формуле

$$n_{\min} = \lceil \alpha \rceil + 1,$$

где $\lceil \alpha \rceil$ – целая часть от $\alpha = \dfrac{\ln 2 + \ln(|f_1 - f_0 \Phi|)}{\ln \Phi}$.

В частности,

$$(f_0, f_1) = (0, 1) \;\Rightarrow\; n = \lceil \alpha \rceil + 1 = \lceil 1{,}4\ldots \rceil + 1 = 2,$$

$$(f_0, f_1) = (2, 1) \;\Rightarrow\; n = \lceil \alpha \rceil + 1 = \lceil 3{,}1\ldots \rceil + 1 = 4,$$

то есть числа Фибоначчи формируют рациональное "золотое" сечение для любого элемента, начиная со второго (см. также теорему 3), числа Люка – с четвертого.

Некоторые начальные условия сразу выводят на РЗС, например, когда $|f_1 - f_0 \Phi| \approx 1$. Другим предшествует определенный этап самонастройки на РЗС по мере роста n (рис. 5).

Так или иначе, но по прошествии $\lceil \alpha \rceil$ шагов аддитивная рекурсия «закручивается» вокруг "золотого" сечения, попадая в его заколдованный круг, и больше из него не выходит.

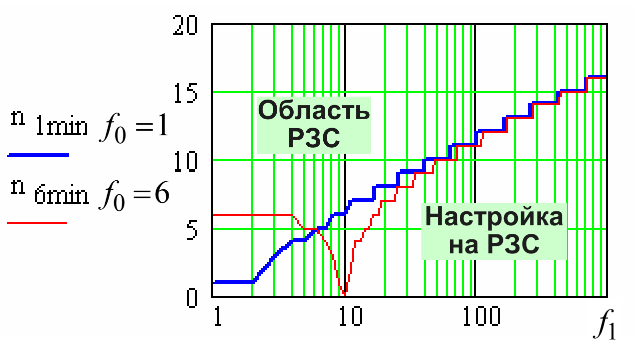

Рис. 5. Графики изменения порядкового номера $n_{\min}$, начиная с которого обобщенные последовательности Фибоначчи образуют рациональное "золотое" сечение (РЗС)

Частные случаи РЗС.

Представляют интерес некоторые частные случаи в области малых значений n, которые приводят к довольно неожиданным и заслуживающим внимания результатам.

Рассмотрим РЗС натурального числа n в виде соотношений

$$n = a + b, \quad a = \langle n\Phi^{-2} \rangle, \quad b = \langle n\Phi^{-1} \rangle.$$

1. $n = 1 = 0 + 1,\ a = 0,\ b = 1$: как ни парадоксально, но двоичная система счисления – это частный случай РЗС, когда меньшее равно нулю, а большее равно самому целому. Более того, совместное рассмотрение традиционного золотого "сечения" и его рационального проявления, то есть РЗС, наглядно показывает несовершенство (ограниченность) двоичного исчисления в процессе умственного принятия решений в непростых ситуациях (рис. 6).

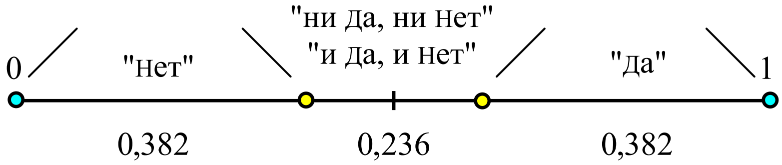

Рис. 6. Иллюстрация процесса принятия решения в возможной связи с ЗС

2. $n = 2 = 1 + 1$, $n = 4 = 2 + 2$, $n = 2^2 = 2^1 + 2^1$, то есть дихотомия (греч dicha + tome – деление целого надвое) как двоичное структурирование объекта или явления – это тоже "золотое" сечение, но в целочисленных переменных. В этом контексте, например, процесс деления клеток или последовательное расчленение любого целого на две части можно также рассматривать как проявление РЗС, не выделяя дихотомию в особый феномен мироздания.

3. $n = 3 = 2 + 1$ – это тоже частный случай рационального "золотого" сечения или *деление* $1/3$ (треть): целое одинаково относится как к меньшей части a, так и разности $b - a$ между большей и меньшей частями (меньшая часть равна разности).

Известная теория триалектики здесь получает новое информационное содержание и развитие, как проявление рационального "золотого" сечения триады.

При этом сама тройка является третьим (сразу после двух начальных условий) элементом чисел Люка, как квадратичная форма "золотой" константы: $\Phi^2 + (-\Phi)^{-2} = 3$.

4. $n = 5 = 2 + 3$, $n = 12 = 5 + 7$ – здесь заложена основная систематика современного гармонического музыкального ряда (малая терция 3, кварта 5, квинта 7, октава 12).

12-тональное целочисленное "золотое" сечение $n = 12 = 5 + 7$ не только содержит квинту, но оказалось наилучшим для построения практичных и удобных в использовании музыкальных инструментов (рис. 7).

$$\log_2 3/2 \Rightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 5 & 2 & 23 \\ 1 & 1 & 3 & 7 & 24 & 31 & 179 & 389 & 9126 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 12 & 41 & 53 & 306 & 665 & 15601 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a_n \\ \dfrac{p_n}{q_n} \end{matrix} \end{array}$$

Рис. 7. Рациональные "золотые" сечения
в разложении 3/2-тонально-частотного музыкального интервала в цепную дробь:
$\langle 12\Phi^{-1} \rangle = 7,\ \langle 5\Phi^{-1} \rangle = 3,\ \langle 2\Phi^{-1} \rangle = 1; \qquad \langle 41\Phi^{-1} \rangle = 25 \ne 24,\ \langle 53\Phi^{-1} \rangle = 33 \ne 31, \ldots$

Числа p_n, q_n задают две пары начальных условий $(1, 3)$ и $(2, 5)$ для обобщенных рядов Фибоначчи, причем второй из них определяется также адекватными начальными условиями $(3, 2)$, как и в 3/2-тонально-частотном музыкальном интервале (рис. 8). Ряды задают соответственно квинтовые и октавные ступени [3].

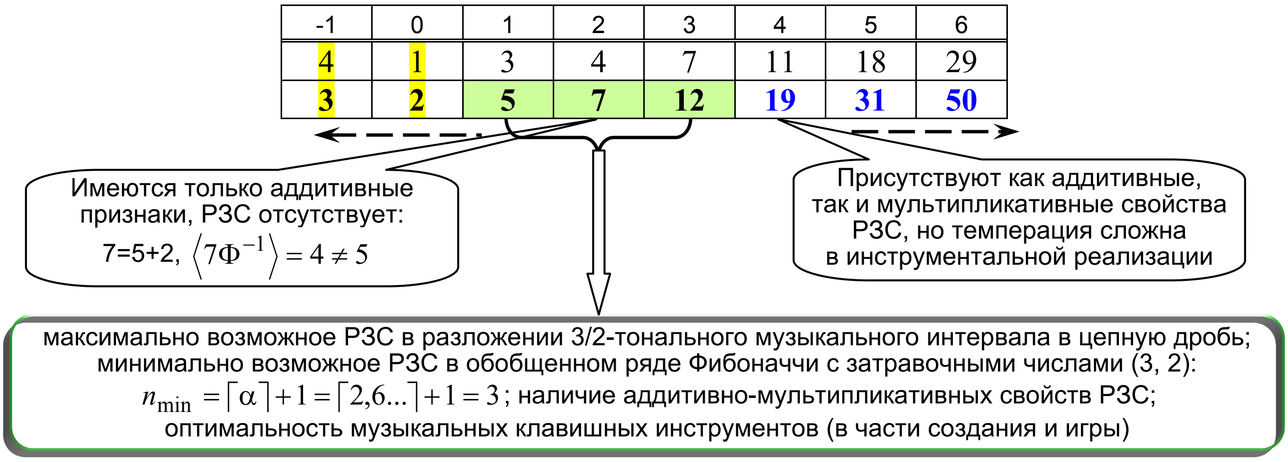

Рис. 8. Укрупненная схема обоснования современного музыкального ряда в рамках теории рационального "золотого" сечения (РЗС)

Примечательно, что существует музыка, написанная в 19-ти и 31-ти тональной темперации – также рациональном, но не оптимальном (в части инструментальной реализации) "золотом" сечении.

Общее число РЗС. Итак, для каждого натурального числа существует свое рациональное "золотое" сечение в виде рациональной дроби, наилучшим образом соответствующей иррациональному числу Ф или его составным частям Φ^{-1}, Φ^{-2} – для единичного интервала.

Но некоторые РЗС в виду сократимости дробей могут повторять уже существующие пропорции целых чисел a, b.

Сколько же можно построить неповторяющихся РЗС?

Ответ на этот вопрос ответ дает теорема Чезаро и свойство дзета-функция Римана ζ(s) в целой четной точке $s = 2$ [4]. В виду неравномерного распределения простых чисел на числовой оси, относительная накопительная сумма несокращаемых дробей РЗС с увеличением n ведет себя довольно хаотическим образом (рис. 9–10), но постепенно график "подравнивается", устремляясь к асимптоте $6\pi^{-2} \approx 0{,}608 < \Phi^{-1} \approx 0{,}618$.

Иначе говоря, $6\pi^{-2}$ – это вероятность несократимости дроби p/q [2, с. 38].

Поскольку в РЗС нас интересует что-то одно: либо только правильные дроби (меньшее к большему), либо только неправильные дроби (большее к меньшему), то общее число РЗС в натуральном ряде составляет $3\pi^{-2} \approx 0{,}304$.

```
g(n) := | (m  z1) ← (Φ^-1  0)
        | for i ∈ 2..n
        |   | z_i ← z_(i-1)
        |   | z_i ← z_i + 1  if  gcd(round(i·m), i) = 1
        |   | g_i ← z_i · i^-1
        | g
```

Рис. 9. Программа в математической среде MathCad для определения относительной накопительной суммы несокращаемых дробей рационального "золотого" сечения для чисел натурального ряда n:
gcd(x,y) – наибольший общий делитель, равный 1 для взаимно простых чисел **x** и **y**;
round(x) – округление до целого **x**

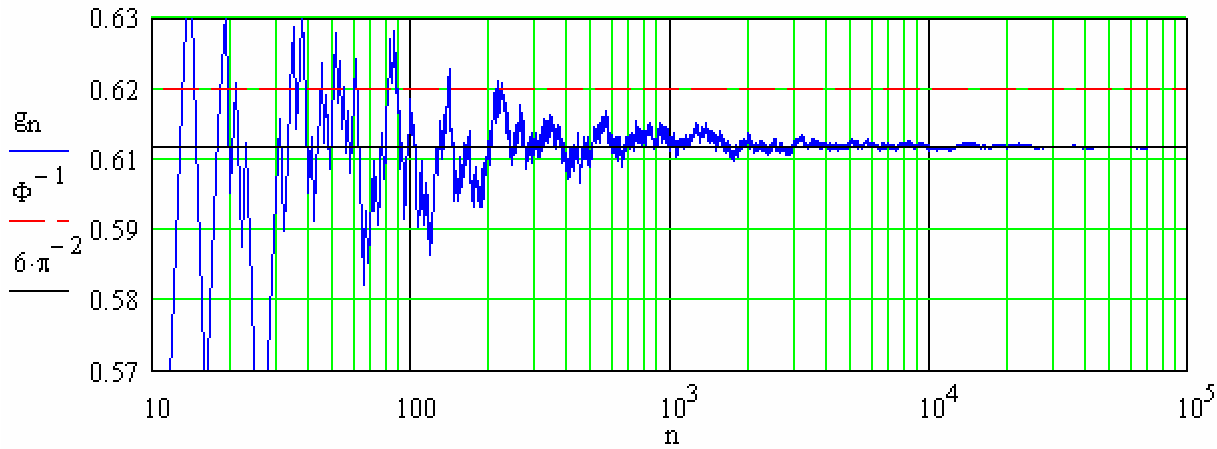

Рис. 10. График изменения относительной накопительной суммы несокращаемых дробей рационального "золотого" сечения для чисел натурального ряда n с асимптотой $6\pi^{-2}$

"Заметки на полях". Обычно мы анализируем готовое целое как нечто данное, разделяя его на составные элементы по тем или иным признакам и соображениям, чаще всего интуитивно либо исходя из здравого смысла. Но как был собран объект в процессе синтеза (эволюции, становления, строительства), большей частью не знаем.

Как в числах Фибоначчи: процесс сборки в прямом направлении идет адекватно по аддитивной $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ и мультипликативной $F_n = \left\langle \Phi^n / \sqrt{5} \right\rangle$ рекурсии. В обратном направлении уловной разборки этот процесс нормально доходит до некоторого значения, после чего "расщепляется" (см. рис. 2).

Это и есть момент истины, который подтверждает мысль великого древнегреческого философа Аристотеля (384–322 гг. до Р.Х.), что «целое больше суммы своих частей».

Применительно к нашему случаю это означает, что процессы сборки и разборки не совпадают (рис. 11).

↓	↗	↓	↗	↓	↗	↓
					0	0
					1	1
			1	1	2	1
	1	1	4	4	3	2
1	6	6	4	5	6	3
10	7	7	8	9	9	5
11	13	13	12	14	14	8
21	20	20	20	23	23	13
32	33	33	33	37	37	21
53	53	53	53	60	60	34
85	85	86	86	97	97	55
138	138	139	139	157	157	89
223	223	225	225	254	254	144
361	361	364	364	411	411	233
584	584	589	589	665	665	377

↓	↗	↓	↗	↓	↗	↓
					0	0
					1	1
			0	0	1	1
			2	2	2	2
	0	0	2	2	2	3
	4	4	3	4	4	5
1	4	4	5	6	6	8
10	8	8	8	10	10	13
11	12	12	12	16	16	21
21	20	20	20	26	26	34
32	32	32	32	42	42	55
53	53	52	52	68	68	89
85	85	84	84	110	110	144
138	138	136	136	178	178	233
223	223	220	220	288	288	377
361	361	356	356	466	466	610
584	584	576	576	754	754	987

↓ – аддитивная сборка $f_{n+1} = f_n + f_{n+1}$;

↗ – мультипликативная разборка $f'_{n-1} \Leftarrow \left\langle f_n \Phi^{-1} \right\rangle$;

↗ – мультипликативная разборка $f'_{n-2} \Leftarrow \left\langle f_n \Phi^{-2} \right\rangle$.

Рис. 11. Последовательная схема многократной "сборки–разборки" последовательностей Фибоначчи на примере затравочных чисел $(f_0, f_1) = (1, 10)$: итогом являются числа Фибоначчи (в правых столбцах)

Поэтому, анализируя целое, дробя его на составные части, находя между ними признаки "золотого" сечения (ЗС), но не его стопроцентное проявление, а потом и вовсе, абсолютизируя его и объявляя универсальным для всех явлений природы, искусства и т.п., мы тем самым допускаем большую методологическую ошибку.

В таком контексте теоретические подходы РЗС находятся в более выгодной ситуации, позволяя нам (там, где это возможно) математически точно устанавливать наличие–отсутствие атрибутов ЗС в области целых чисел.

Иррациональное ЗС, несмотря на его изящность и эстетичность, в чистом виде себя практически не проявляет хотя бы потому, что своей идеальностью не оставляет ни одного шанса на наличие внутрисистемных связей, чем целое отличается от просто суммы своих слагаемых.

Если бы природа действовала исключительно на основе безупречного значения Ф со всеми его миллиардными знаками после запятой, она просто не смогла бы развиваться, зациклившись на своем идеале, у которого, нужно сказать, «мертвая хватка» в прямом и переносном смысле. В этом смысле число Ф – это летальный исход или приговор обновлению, совершенствованию и вообще любому развитию.

Безусловно, что в мироустройстве очень многое, если сказать не почти все, "крутится" вокруг ЗС. И анализ наблюдаемых процессов, явлений, живых объектов это показывает.

Но их синтез шел и продолжается далее в своем развитии по другим законам, где число Ф, если и играет доминирующую роль, то не в своем идеальном проявлении, – типа деления в крайнем и среднем отношении.

Его уникальная математическая конструкция не способствует образованию "дельты", отвечающей за системность целого. Попадая точно на Ф, объект теряет системные связи и свою целостность, а значит разрушается.

Живое, попадая в его заколдованный круг, перестает быть таковым.

Возможно, для всех биотических тел число Ф является главной причиной их тленности, и в этом его одно из главных проявлений и предназначений.

Поэтому процессы синтеза и сегодня продолжающаяся эволюция миропорядка, скорее всего, идут в целочисленном измерении, в основе которого лежит постоянная структуры дуальных взаимодействий $6\pi^{-2}$ как некая фрактальная размерность Вселенной, базирующаяся на числе π.

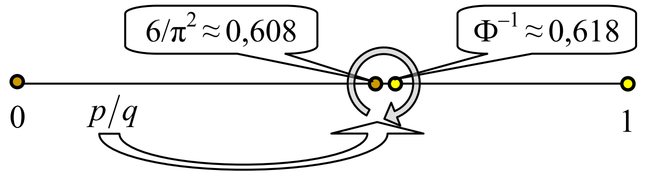

Рис. 11. Схема синтеза природных образований на основе развивающихся дробно-рациональных структур РЗС и их бесконечной настройки на "золотое" сечение

Но уже готовые объекты нами воспринимаются в виде демонстрирования складывающейся или почти законченной гармонии с кодом "золотой" пропорции (рис. 11).

Заметки по РЗС в анатомии человека. Существует разнообразные описания "золотой" пропорции в фигуре (размерах и частях тела) человека (Леонардо да Винчи, Цейзинг А., Коробко В.И. [5]) , сердечных структурах (Цветков В.Д.), ритмах мозга (Соколов А.А.) и др.

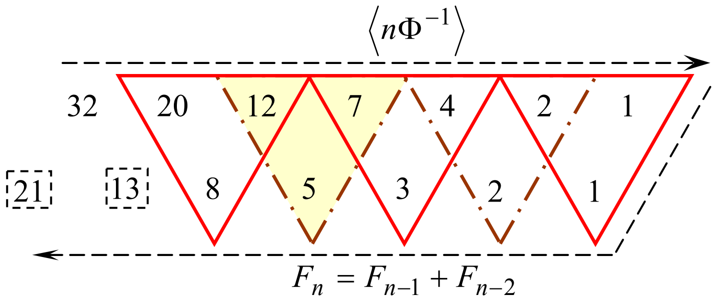

Рис. 8. Схема рациональных "золотых" сечений в анатомическом строении человека (по треугольникам и нижнему ряду – числам Фибоначчи):

- пальцы рук и ног как пограничная связь с внешним миром – 20
  (то же самое с головой – 21, как число Фибоначчи)
- весь организм: внешние (голова, руки, ноги – 5), основные внутренние органы (по варианту *а*) – 7: <u>12 = 5 + 7</u> – 12
  (то же самое с туловищем – 13, как число Фибоначчи)
- число пар ребер, число фаланг (3 × 4) – 12
- основные внутренние органы:
  а) сердце, легкие (2), почки (2), печень, желудок, кишечник – 8
  б) сердце, легкие, почки, печень, желудок, кишечник, половые – 7
- парные органы: глаза, уши, ноги, руки, почки, легкие, половые – 7
  в т.ч. внешние – 4, внутренние – 3: <u>7 = 3 + 4</u>
- органы чувств: зрение, слух, вкус, обоняние, осязание (кожа) – 5
  в т.ч. одиночные – 3, парные – 2: <u>5 = 2 + 3</u>
  (при этом нос занимает промежуточное положение, и условно можно отнести как к парным, так и одиночным)
- число пальцев на одной конечности – 5
- количество конечностей (состоят из двух пар) <u>4 = 2 + 2</u> – 4

Не было возможности досконально изучить уже проведенные исследования в этой области. Поэтому без особой детализации предлагается авторский схематичный набросок (рис. 8) в части возможного синтеза анатомического строения человека на базе общих подходов РЗС.

В основу построения положено число $2^5 = 32$. Скажу откровенно, довольно произвольно. Возможно, потому, что связка 2–5 является ключевой в числе $\Phi = \frac{2^0 + \sqrt{5}}{2^1}$.

Кроме того, здоровые зубы – залог долголетия.

И именно долгоденствия и долголетия, как в числах Фибоначчи в их нескончаемом движении к "золотому" сечению, хочется больше всего пожелать уважаемому юбиляру и прославленному "золотоискателю" – Стахову Алексею Петровичу!

Литература.

1. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 5-е изд. – М.: Наука, 1984. – 144 с.
2. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел: 10-е изд., стер. – Спб.: Лань, 2004. – 180 с.
3. *Алферов С.А.* Гармония звуков, ряды Фибоначчи и восприятие // Академия Тринитаризма, М. – Эл. № 77-6567, публ.13056, 09.03.2006.
4. *Василенко С.Л.* Математические пропорции взаимодействия целого и его частей // Академия Тринитаризма, М. – Эл. № 77-6567, публ.15248, 23.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322040.htm.
5. *Коробко В.И.* Золотая пропорция и человек: 2-изд. доп. – М.: АСВ, 2002. – 394 с.