С.Л. Василенко

АСИМПТОТИКА "ЗОЛОТОГО" СЕЧЕНИЯ

Общие сведения об асимптотике. Слово "асимптота" (от греч. слов: a+sun+piptw – несовпадающий) состоит из отрицания к прилагательным совпадающий или сливающийся, идентичный, конгруэнтный и т.п.

Линия называется асимптотой исследуемой кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой линии при удалении точки в бесконечность стремится к нулю. Иначе говоря, асимптота является касательной к кривой на бесконечном удалении от начала координат.

С позиций здравомыслия проявление *аксиоматики в бесконечности* следует интерпретировать не как некий фантом, а как абстрактную математическую модель, описывающую общий характер вполне реальных физических процессов и явлений.

Не любая кривая имеет асимптоту, а число асимптот для каждой кривой вполне конечно. В общем случае кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем многократно (рис. 1).

Различают асимптоты прямолинейные и криволинейные: прямолинейную, как правило, называют просто асимптотой, а криволинейную – асимптотической кривой.

Еще Ньютон показал, что криволинейные асимптоты существуют не только для трансцендентных, но даже алгебраических уравнений, начиная с 3 порядка (рис. 1 – справа).

В математике анализируют асимптотику решений дифференциальных уравнений в частных производных (сингулярных, гамильтоновых волновых и др.), асимптотику частичных сумм гармонических рядов и т.д.

Многие оптимизационные задачи также сводятся к поиску экстремальных точек и изучения асимптотики получаемых решений.

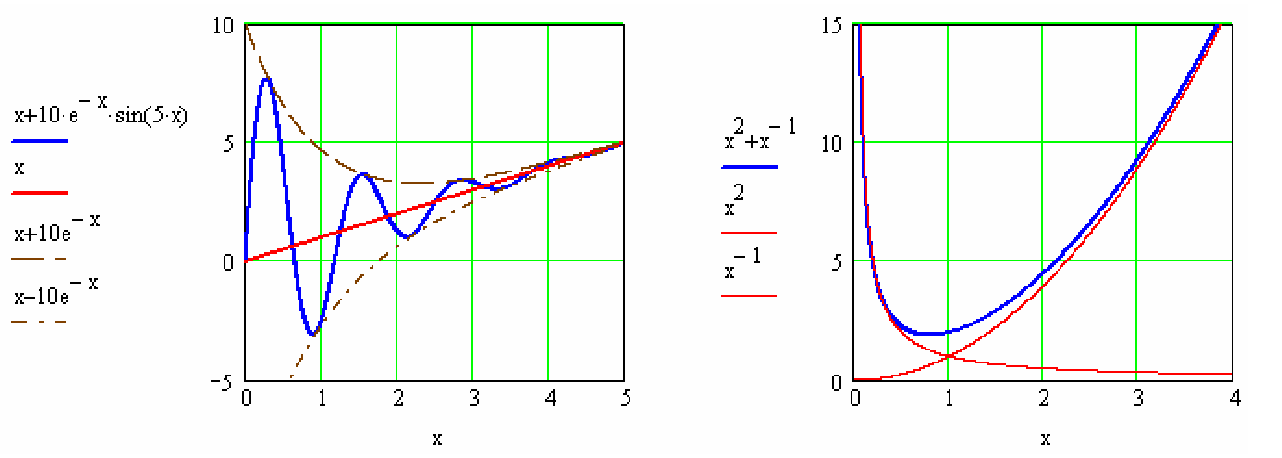

Рис. 1. Примеры прямолинейных и криволинейных асимптот

Асимптоты "золотого" сечения. Асимптотических закономерностей у "золотого" сечения (ЗС) не так уж и много, но они уникальны в своем проявлении и в избытке его характеризуют.

1. Самая первая асимптотика – это отношение двух соседних членов рекуррентной последовательности $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ с любыми начальными условиями f_0, f_1 (за исключением одновременно нулевых), включая комплексные числа, $n = 1, 2, 3, \dots$ – натуральный ряд.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Таковыми рекуррентными рядами являются хорошо известная "кроличья" последовательность Фибоначчи и ее обобщения в виде чисел Люка.

Стремление к асимптоте Φ осуществляется одновременно с двух сторон.

2. Вторая асимптотика обусловлена тем, что Φ является положительным корнем квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$.

Из этого следуют соотношения $\Phi = \sqrt{1+\Phi}$ и $\Phi = 1 + \Phi^{-1}$, которым соответствуют два рекурсивных представления числа Φ в виде бесконечного радикала и бесконечной цепной (непрерывной) дроби, состоящим только из единиц,

$$\Phi = \sqrt{1+\Phi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}\ ,$$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1+\dfrac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \ldots\ .$$

Процесс приближения по второй формуле, по сути, воспроизводит первую асимптотику для классического ряда Фибоначчи

$$\frac{3}{2}\ \ \frac{5}{3}\ \ \frac{8}{5}\ \ \frac{13}{8}\ \ \frac{21}{13}\ \ \frac{34}{21}\ \ \frac{55}{34}\ \ \frac{89}{55}\ \ \frac{144}{89}\ldots\ .$$

Как следствие теории цепных дробей (диофантовых приближений в целых числах), среди всех иррациональных чисел самый медленная аппроксимация рациональными дробями характерна именно для числа Φ. Это естественно, поскольку в цепном разложении его знаменатели увеличиваются каждый раз на наименьшее целое число 1.

Следует отметить, что процессы роста (развития) и спада часто описываются показательной функцией или ее простым обобщением в виде математических моделей

$$\sum_{j=1}^{n} x^{-j} = 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} z^{j} = 1\,.$$

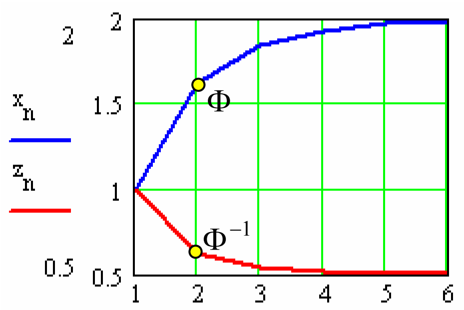

Рис. 2. Корни характеристических уравнений моделей роста и падения

С увеличением числа слагаемых n действительные решения этих уравнений x_n, z_n стремятся соответственно к 2 и 2^{-1} (рис. 2).

Подобные процессы мы наблюдаем, в частности, при митозе – размножении делением.

Если ограничится только второй степенью, то получим два действительных корня:

$$x_2 = \Phi, \quad z_2 = \Phi^{-1} = \Phi - 1\,.$$

3. К третьей асимптотике можно добавить свойства бесконечных рядов на основе геометрических прогрессий, в которых "золотое" сечение привносит только ему присущие свойства, вытекающие из п. 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n} = \Phi\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^{-2n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \Phi^{-n} = 1\,.$$

Описанные свойства полностью характеризуют ЗС.

Иной математической специфики, выделяющей ЗС из остальных чисел, нет.

4. В продолжение п. 1–3 отдельно можно отдельно выделить одно из практических приложений, а именно метод ЗС для последовательного поиска значений действительной функ-

функции в заданной области, который наиболее широко применяется в задачах оптимизации как итерационный способ нахождения экстремумов.

Суть метода состоит в делении некоторого отрезка $[a, b]$ в пропорции ЗС одновременно в двух направлениях путем выбора точек $x_1 = b - \frac{b-a}{\Phi}$, $x_2 = a + \frac{b-a}{\Phi}$ так что, точка x_1 делит отрезок $[a, x_2]$, а точка x_2 – отрезок $[x_1, b]$ в одинаковой "золотой" пропорции.

Итеративный процесс (например, поиска минимума) организуется на каждом этапе путем отбрасывания конца отрезка, к которому среди двух вновь поставленных точек ближе оказалась та, где значение исследуемой функции максимально. На каждой из последующих итераций ищется всего лишь одна новая точка, – и так до достижения принятой точности.

Об одной «условной асимптотике». Речь идет о так называемых обобщениях "золотого" сечения, к которым «приложил руку» и сам автор.

Это металлические пропорции, *p*-сечения А.П. Стахова, многофункциональное обобщение С.Л. Василенко и др.

Непредвзятый простой анализ показывает, что подобные обобщения ЗС на самом деле ничего не обобщают, но в своем частном проявлении могут вырождаться в гармоническую пропорцию.

Они представляют самостоятельные группы (классы) пропорций, возможно, даже очень важные, но не имеющие ничего общего с ЗС, кроме того, что являются корнями алгебраических уравнений, одним из которых описывается и ЗС.

ЗС уже уникально в своих проявлениях, и обобщить его как-то дальше невозможно.

Можно развивать и расширять сферу и разнообразие математических соотношений целого и его частей. Но ЗС останется во всем этом безбрежном море-множестве уникальным островком – своеобразным аттрактором и центром притяжения других пропорций. Именно это важно и является главным. А так плодятся «в корзину» бесконечные множества разных последовательностей без какого-либо практического приложения.

Даже если какое-то новое алгебраическое уравнение неожиданно находит применение в конкретной области науки, то это не повод увязывать его с ЗС только на том основании, что и ЗС – это корень квадратного уравнения.

Поэтому использование термина «обобщенное золотое сечение» в любом его проявлении следует признать неудачным.

На наш взгляд это стало естественным следствием большого желания ряда исследователей (автор относит и себя к их числу) как-то расширить математическую сферу ЗС.

Слишком уж несопоставимо ассоциируется обоснованная претензия ЗС занять центральное место в математической гармонии мироздания со сравнительной скудностью его математических свойств, хотя воистину фундаментально-уникальных.

Можно показать, что практически любое алгебраическое уравнение произвольной степени с хорошо подобранными коэффициентами является генератором рекуррентных последовательностей, в которых отношение соседних членов стремится к максимальному действительному корню этих уравнений.

Эти последовательности допустимо называть расширением классического ряда Фибоначчи, находить в них свои закономерности, строить разные зависимости. Но это другая систематика, иные соотношения, и ЗС здесь ни при чем.

Например, корень из двух – это корень из двух, но никак ни обобщение ЗС. "Одни трамвай зеленый, а другой свернул за поворот" – это и есть суть всех наших обобщений ЗС.

Можно также говорить о математической теории пропорций или соотношений целого и его частей, и ЗС в этой теории – весьма значимый, но всего лишь частный случай.

Более того, обсуждая классическую тему соотношения целого и его элементов, еще великий Аристотель акцентировал внимание на том, что «целое больше суммы своих частей».

Но даже "золотое" сечение в чистом виде этого не дает. Тогда где же та дельта (?), которая характеризует именно то в целом, чего нет у его составных элементов.

Одно из решений подобной задачи при рассмотрении ЗС предлагал в свое время И.А. Марутаев [1, с. 188–189]. Но выглядело это несколько искусственно из-за его большого стремления напрямую увязать ЗС с постоянной тонкой структуры α.

Со временем физики изменили ее значение в сторону уточнения, и все авторские выкладки и погоня за тождественностью оказались сомнительными. Тем не менее, предложенная им идея учета системных связей в целом, описываемым характеристическим уравнением ЗС, остается важной и сегодня.

В поисках новых асимптотик. В ряде статей А.И. Ивануса [2–4] настойчиво, но без должного уровня проработки, отстаивается точка зрения, что энтропия дискретного биномиального и непрерывного нормального распределения стремится к "золотой" пропорции.

Кроме перечисленных нами выше, других "золотых" асимптот пока неизвестно, поэтому любое новое (не модифицированное) соотношение в этой области является важным, если не сказать исключительным событием в математике, что дает основание более скрупулезно взглянуть на логику и доказательную базу упомянутых работ [2–4].

Оставляя без внимания экономическую сторону проведенных исследований, которые, надо полагать, имеют существенную новизну, остановимся лишь на вычислительных аспектах, для чего сначала выскажем некоторые замечания:

- с увеличением числа случайных событий действие центральной предельной теоремы не нарушается, а наоборот усиливается, приводя в пределе к нормальным распределениям;
- энтропия по Шеннону вычисляется через логарифм с основанием 2;
- бесконечностью в обоснованных случаях можно пренебрегать, оставляя необходимое количество событий и указывая точность проводимых вычислений, однако это не может служить основанием для исключения самого понятия математической бесконечности – пусть и абстрактного, но достаточно мощного и продуктивного приема;
- уменьшение скорости сходимости расчетов не является поводом для «обрезания хвостов» с целью получения нужного результата, тем более, когда это касается оценки наличия или отсутствия "золотого" сечения в изучаемом процессе или явлении.

Что касается непрерывных распределений, то для них обычно вычисляются дифференциальные энтропии, абсолютные значения которых не имеют четко выраженного физического содержания в виду произвольности выбора оснований логарифмов. Информационный смысл имеет не столько сама дифференциальная энтропия, сколько разность или соотношение двух дифференциальных энтропий, чем и объясняется ее название.

В частности, из теории информации известно, что среди всех непрерывных распределений с фиксированной дисперсией σ^2 и одинаковым основанием логарифма n наибольшую дифференциальную энтропию

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\log_n \varphi(x)dx$$

имеет именно нормальное распределение $H_{\max} = \log_n\left(\sigma\sqrt{2\pi e}\right)$.

При достаточно больших значениях n и вероятности $p = 0{,}5$ биномиальное распределение с дискретной функцией вероятности $f_k = \binom{n}{k}2^{-n}$ "вырождается" в нормальное, поэтому его поведение можно исследовать с помощью распределения Гаусса, характеризуемого плотностью вероятности

$$\varphi(x, x_o, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_o}{\sigma}\right)^2},$$

где $x_{\text{o}} = \dfrac{n}{2}$, $\sigma = \dfrac{\sqrt{n}}{2}$, $\dbinom{n}{k} = C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Тогда H_n-мера неопределенности состояния системы (мера хаоса, информационная энтропия) и I_n-мера определенности состояния системы (мера порядка), которые связаны нормированным (через основание логарифма n) уравнением [5]

$$1 = \mathrm{H}_n + \mathrm{I}_n = -\sum_{k=1}^{n} f_k \log_n f_k + \sum_{k=1}^{n} f_k \log_n n f_k ,$$

при достаточно больших значениях n трансформируются в соответствующие величины нормального распределения

$$\begin{cases} \mathrm{H}(n) = -2\displaystyle\int_{x_{\text{o}}}^{\infty} \varphi(x, x_{\text{o}}, \sigma) \log_n \varphi(x, x_{\text{o}}, \sigma)\, dx, \\ \mathrm{I}(n) = 2\displaystyle\int_{x_{\text{o}}}^{\infty} \varphi(x, x_{\text{o}}, \sigma) \log_n [n \cdot \varphi(x, x_{\text{o}}, \sigma)]\, dx. \end{cases} \tag{1}$$

Множитель 2 в (1) взят в виду симметричности нормального распределения.

Вместо бесконечности, верхний предел с гарантированной точностью результатов можно принять равным $x_{\text{o}} + 5\sqrt{n}$, что соответствует интервалу в $10\,\sigma$.

Учитывая свойства логарифмов $\log_n na = 1 + \log_n a$, величина $\mathrm{I}(n) = 1 - \mathrm{H}(n)$.

Точное значение первого интеграла в (1) равно

$$\mathrm{H}(n) = \frac{1}{2} + \log_n \frac{\pi e}{2}, \tag{2}$$

откуда следует, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{H}(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{I}(n) = 1/2$, то есть "золотое" сечение не является асимптотикой энтропии биномиального и нормального распределения.

С помощью этой формулы достаточно просто можно исследовать поведение функции энтропии для больших значений n (рис. 3).

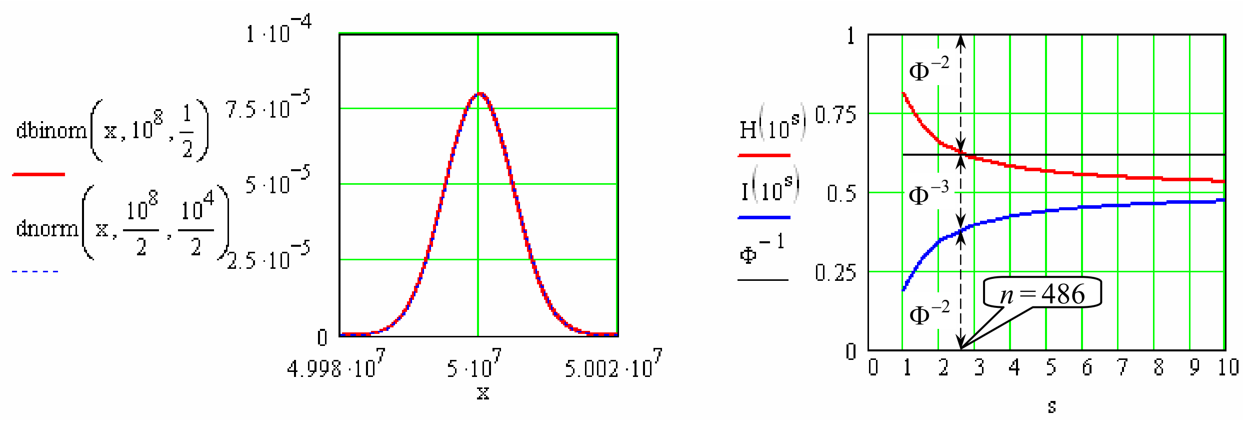

Рис. 3. Графики изменения функций:
а) плотность вероятности для биномиального (dbinom) и нормального (dnorm) распределения, $n = 10^8$;
б) энтропия H и информационная I-мера упорядоченности системы, $n = 10^1 \div 10^{10}$

Например, $\mathrm{H}(486) \approx \Phi^{-1}$, а отношение мер $\mathrm{H}_n / \mathrm{I}_n$ в точке $n = 486$ с точностью до 5 значащих цифр равно $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

В точке $n = 10\,833$ отношение мер $\mathrm{H}(n)/\mathrm{I}(n) = 1{,}3703598... \approx \alpha^{-1}10^{-2}$, где α=0,0072973525376 – фундаментальная физическая безразмерная постоянная тонкой структуры (ее численное значение рекомендовано CODATA, характеризует силу электромагнитного взаимодействия и не зависит от выбранной системы единиц).

А в невообразимо удаленной точке $n_\alpha = 1{,}565780731 \cdot 10^{43}$ величина энтропии отличается от своего асимптотического значения ровно на значение α, то есть $\mathrm{H}(n_\alpha) - 1/2 = \alpha$.

Таким образом, ЗС не является асимптотикой энтропии рассмотренных распределений.

Зато для любых значений x_0, σ нормального распределения всегда выполняются следующие соотношения с интервалами интегрирования в одну [6] и две сигмы

$$\int_{x_0-\sigma/2}^{x_0+\sigma/2} \varphi(x, x_0, \sigma)\, dx = 0{,}38293 \approx \Phi^{-2},$$

$$\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} \varphi(x, x_0, \sigma)\, dx = 0{,}682689 \approx \Phi^{-2} + 0{,}3.$$

Эти равенства имеют непосредственное отношение к исследуемой асимптотике, поскольку согласно центральной предельной теореме средние значения выборок одинаково распределенных случайных величин имеют нормальное распределение при $n \to \infty$.

Выводы.

1. Асимптотика "золотого" сечения (ЗС) основана на его известных уникальных свойствах и проявляется в нескольких аспектах:

– предельное стремление к числу Φ отношения двух соседних членов аддитивной рекуррентной последовательности $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ с любыми начальными условиями f_0, f_1;

– рекурсивное представление числа Φ в виде бесконечного радикала и бесконечной цепной (непрерывной) дроби, которые состоят только из единиц;

– построение бесконечных рядов в виде геометрической прогрессии со знаменателем Φ^{-1} и суммой, равной единице;

– практическое применение метода ЗС для рекурсивного поиска значений действительной функции в заданной области.

2. Показано, что ЗС не является асимптотой энтропии биномиального и нормального распределений.

3. Термин «обобщенное золотое сечение», претендующий на расширение асимптотики ЗС, в любом его проявлении следует признать некорректным, и не применять в научной практике ЗС.

Литература.

1. *Шевелев И.Ш., Марутаев И.А., Шмелев И.П.* Золотое сечение: Три взгляда на природу гармонии. – М.: Стройиздат, 1990. – 343 с.

2. *Иванус А.И.* Золотое сечение в системах с биномиальным законом распределения // Академия Тринитаризма, М. – Эл. № 77-6567, публ.13681, 18.08.2006.

3. *Иванус А.И.* К вопросу о постановке задачи гармонизации для экономических систем // Академия Тринитаризма, М. – Эл. № 77-6567, публ.14784, 28.04.2008.

4. *Иванус А.И.* Экономика: гауссовость, золотое сечение, негауссовость // Академия Тринитаризма, М. – Эл. № 77-6567, публ.15244, 22.04.2009.

5. *Харитонов А.С.* Симметрия хаоса и порядка в круговороте энергии: Холистическая парадигма триединства природы, человека и общества. – М.: Энергия, 2004. – 172 с.

6. *Василенко С.Л.* Случайность и "золотая" пропорция в системе «хаос–порядок» // Академия Тринитаризма, М. – Эл. № 77-6567, публ.15220, 09.04.2009.