С.Л. Василенко

# Математические пропорции взаимодействия целого и его частей

**Целое и части в системном анализе.** Понятия целого и части, структуры и элементов, целостности, связи – собственные категории системного анализа.

«Закономерности отношений между элементами и структурой, соотношения части и целого, взаимодействие структур в рамках одного объекта – относятся к основным проблемам системного анализа как методологии» [1, с. 12] решения сложных задач.

Обсуждая классическую тему соотношения целого и его элементов, еще великий древнегреческий философ Аристотель (384–322 гг. до Р.Х.) акцентировал внимание на том, что «целое больше суммы своих частей».

Целое не просто составлено из частей, только в нем и различаются отдельные компоненты, в каждой из которых действует целое и особенно характеризует именно то, чего нет у его элементов – «парадокс целостности».

По Богданову А.А. [2, с. 117], системно «*организованное целое ... больше простой суммы своих частей*, … его наличные активности соединяются более успешно, чем противостоящие им сопротивления».

Вернадский В.И. показывал [3], насколько огромна дистанция между реальным целым и целостной системой, описываемой отдельной наукой.

В теоретическом плане системный анализ базируется на таких дисциплинах как исследование операций, общая теория систем, теория управления, кибернетика и др. Это больше общенаучное (а не специально-научное) направление и методология, то есть учение или знания о структуре, логической организации, методах и средствах деятельности.

Собственно системой обычно называется «совокупность элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которая образует определенную целостность, единство» [4, с. 584]. Отношения характеризуют «взаимозависимости элементов … и могут выступать в роли свойства или признака вещей» [4, с. 454].

Целостность подразумевает системное качество организованных материальных объектов, выражающее их унитарную природу, нерасчлененность, континуальность (лат. *continuum* – непрерывный, сплошной; в математике непрерывное многообразие, например, совокупность всех точек прямой или ее отрезка).

При расчленении объектов, так или иначе, нарушается аддитивный принцип как свойство допустимости операции сложения без утраты качества. Как форма выражения сохранения количества в операции простого суммирования или свойство целой величины быть равной сумме своих частей.

Например, литр воды и литр спирта, будучи вместе соединенными, дают не 2 литра, как априори ожидается, а значительно меньше. Так и два человека, решая совместно некоторую задачу, наоборот нередко достигают больших результатов, если бы они работали порознь.

Синтез разрозненных знаний о целом – еще более сложная задача, чем анализ отдельных составляющих. В частности, при анализе качества воды пока сохраняется тенденция изучать показатели и сравнивать с нормативами индивидуально, хотя следствие они вызывают в комплексе друг с другом – за счет взаимовлияния компонентов.

Поэтому после всестороннего лабораторного контроля и численного определения лимитируемых показателей качества, окончательный диагноз и синтез знаний о воде как «соединение различных элементов, сторон предмета в единое целое» [4, с. 583] и атрибут системной методологии каждый раз остается за человеком через его желудок и организм.

За результат воздействия на человека "отвечают" не отдельно взятые показатели качества воды, а их коллективная взаимосвязанность в виде согласованности, синхронизации и когерентности как форм взаимодействия элементов.

**Целое и части в математике.** Наиболее распространенным способом исследования целого и составных частей остается его членение на элементы по аддитивному признаку.

При этом образуемые различными способами пропорции выступают в качестве количественных мер, определяющих соотносительность частей, их соразмерность (соизмеримость), сопоставимость, гармоничность, соответствие, конгруэнтность и т.п.

В частности, в последние годы значительно повысился интерес к "золотому" сечению (ЗС), известному в математике как деление в крайнем и среднем отношении или гармоническое деление. Последнее основано на уникальных математических свойствах "золотой" пропорции, и небезосновательно считается, что внутренне насыщенные этим соотношением объекты воспринимаются людьми как наиболее гармоничные.

Хотя существуют мнения, что значимость ЗС в природе, искусстве или архитектуре несколько преувеличена и часто основывается на некорректных или вовсе ошибочных расчетах [5].

Автор не ставит задачу примирения разных точек зрения.

Думается, что истина о подлинной роли ЗС в мироустройстве расположена где-то посредине и, возможно, сама же этим сечением выражается.

По крайней мере, она того заслуживает.

Посмотрим на данную проблему несколько шире, но глазами достаточно простой и понятной математизации общего взаимодействия целого и его частей, когда под пропорцией понимается отношение частей целого между собой и с целым [6, с. 162].

Ниже используются такие соотношения:

– $a+b=1$ – выбор единицы в качестве символа "целостности", где $b \geq a$, $x = b/a$;
– целочисленные индексы суммирования $n = \overline{0, \infty}$ и $k = \overline{1, \infty}$;
– сумма ряда бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q^{-1}$

$$(q-1)\sum_n q^{-n} = q, \qquad (q-1)\sum_k q^{-k} = 1, \qquad |q| > 1. \tag{1}$$

**Примеры и краткий анализ математических пропорций.**

1. <u>*Арифметическая пропорция*</u> $a - m = m - b$, $m = \dfrac{a+b}{2}$ – среднее арифметическое (*mean*).

Для любого соотношения в целом $x = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1-a}{a} = a^{-1} - 1 \geq 1$ – число $m = \dfrac{1}{2}$.

В случае произвольного деления целого на $J$ частей $\xi_j$, $j = \overline{1, J}$, $\sum_j \xi_j = 1$ величина среднеарифметического $m = J^{-1}\sum_j \xi_j = J^{-1}$.

2. <u>*Геометрическая пропорция*</u> $a/g = g/b$, $g = \sqrt{ab}$ – среднее геометрическое (*g.mean*).

Для любого соотношения в целом $x = b/a$ – число $g = \sqrt{a(a-1)} = \sqrt{b(b-1)}$.

При произвольном делении целого на $N$ частей $\xi_j$, $j = \overline{1, J}$, $\sum_j \xi_j = 1$ величина среднегеометрического $g = \left(\prod_j \xi_j\right)^{1/J}$.

3. <u>*Гармоническая пропорция*</u> $\dfrac{a-h}{h-b} = \dfrac{a}{b}$, $h = \dfrac{2ab}{a+b}$ – среднее гармоническое (*h.mean*).

Для любого соотношения в целом $x = b/a$ – число $h = 2a(1-a) = 2b(1-b)$.

В случае произвольного деления целого на $N$ частей $\xi_j$, $j=\overline{1,J}$, $\sum_j \xi_j = 1$ величина среднегармонического $g = J\left(\sum_j \xi_j^{-1}\right)^{-1}$.

Как и любое среднее, величины $m$, $h$, $g$ лежат между минимумом и максимумом из всех чисел $\xi_n$ и являются частными случаями средних Колмогорова (см. приложение).

4. *Равнодолевое (симметричное) деление* (половина): целое 1 одинаково относится к своим частям $a$ и $b$.

$$a = b = \frac{1}{2},\ x = 1.$$

$$x\sum_k a^k = \sum_k 2^{-k} = 1.$$

Выбрав "единицу" в качестве символа "целостности" всего сущего, И.Ш. Шевелев вводит понятие «Уравнений Первоосновы» [7], позволяющих выразить "единицу" в виде суммы простейших элементов на основе динамической модели простого суммирования бесконечных рядов.

Для дихотомии оно выглядит так

$$1 = 2^0 = 2^{-1} + 2^{-1} = \sum_k 2^{-k} \ . \tag{2}$$

Хорошо видно, что уравнение (2) естественным образом вытекает из свойств геометрической прогрессии (1).

Более того, формальным образом оно может быть распространено и на область комплексных значений (рис 1):

$$(2i)^0 = \left|(2i)^{-1}\right| + \left|(2i)^{-1}\right| = (2i-1)\sum_k (2i)^{-k} = 1, \tag{3}$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, $|\xi|$ – модуль числа.

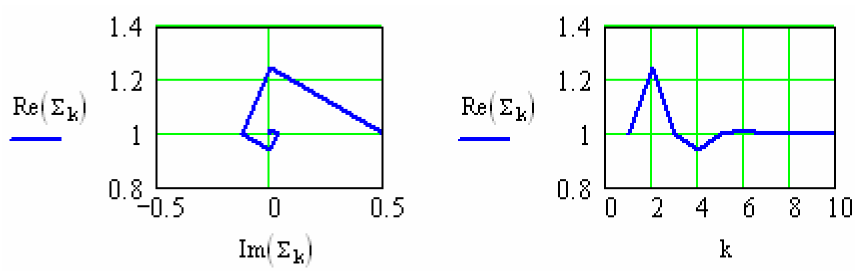


Рис. 1. Графики изменения характеристик частных сумм для дихотомии (3) в области комплексных значений

5. *"Золотое" сечение*: целое 1 так относится к большей части $b$, как она – к меньшей $a$.

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{a}, \quad b^2 + b - 1 = 0, \quad a^2 - 3a + 1 = 0, \quad a = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \Phi^{-2} \approx 0{,}382.$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1 \equiv \frac{b}{a}, \quad \frac{1}{x} + 1 = x, \quad x^2 - x - 1 = 0, \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \approx 1{,}618.$$

$$\sum_n \Phi^{-n} = \Phi, \qquad \sum_n \Phi^{-n-2} = \sum_k \Phi^{-2k+1} = \sum_{i=2}^{\infty} \Phi^{-i} = 1.$$

Соответствующее «Уравнение Первоосновы» по Шевелеву [7] записывается так

$$1 = \Phi^{0} = \Phi^{-1} + \Phi^{-2} = \sum_{k} \Phi^{-2k+1} \,. \qquad (4)$$

Он утверждает, что уравнения (2), (4) являются первостепенными: «Именно так строит себя живая природа. Все ее объекты возникают по этой схеме».

Не будем оспаривать категоричность данного утверждения.

Позволим себе только заметить, что кроме дихотомии и ЗС могут быть и другие математические пропорции, которые также часто встречаются в естественных условиях.

6. *<u>Деление $^{1}/_{3}$</u>* (треть): целое 1 одинаково относится как к меньшей части $a$, так и разности $b-a$ между большей и меньшей частями (меньшая часть равна разности).

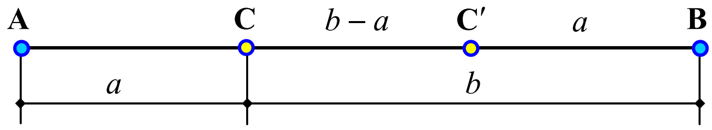


Рис. 2. Деление отрезка AB единичной длины

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b-a}, \quad 2a = b = 1-a\,, \quad a = \frac{1}{3}, \quad x = 2\,.$$

$$x\sum_{k} a^{k} = 2\sum_{k} 3^{-k} = 1\,. \qquad (5)$$

Такое деление носит устойчивый характер в природе, и не столько в виде четких количественных соотношений, сколько в тринитарном ее понимании: «белое–серое–черное», «сухо–сыро–мокро», «свобода–необходимость–случайность», «левое–правое–середина» и т.п. То есть в целом может существовать самостоятельное, полноценное третье, ничуть не менее самостоятельное и значимое, чем первое и второе, – в расширение диалектического подхода, исходящего из принципа «третьего не дано».

В математическом аспекте такое деление одновременно несет в себе бинарную операцию: меньшая часть равна половине большей или большая часть равна двум меньшим, что наглядно проявляется и в сумме геометрической прогрессии (5) в виде сомножителя 2.

То есть треть в неявном виде содержит и дихотомию, являясь естественным развитием и трансформацией диалектики на "триалектическое" понимание и видение мира [8] с освобождением от бинарного стереотипа. Или как говорил великий Гете, между двумя противоположными мнениями находится не истина, а проблема.

И если рассматривать живую природу, то ее мыслящей составляющей, включая человека, как раз и свойственен анализ с преимущественным разбиением целого на три (не обязательно равные) части, когда между "да" и "нет" практически всегда присутствует третье состояние: «Ни да, ни нет» или «И да, и нет».

Собственно и наличие двоичной системы (0, 1) в вычислительных машинах обязано главным образом тем, что период их становления совпал с отсутствием надежной элементной базы для реализации более экономной и эффективной троичной системы счисления с устойчивым третьим состоянием $(-1, 0, 1)$ или $(0, 1, 2)$.

7. <u>"*Серебряная" пропорция*</u>: Целое 1 так относится к большей части $b$, как разность $b-a$ к меньшей $a$.

$$\frac{1}{b} = \frac{b-a}{a}, \quad 2a^{2} - 4a + 1 = 0\,, \quad a = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}293\,.$$

$$\frac{a+b}{b}=1+\frac{a}{b}\equiv\frac{b-a}{a}=\frac{b}{a}-1, \quad x^2-2x-1=0, \quad x=1+\sqrt{2}\approx 2{,}414 .$$

Это частный случай называемых в литературе "металлических" пропорций, которые описываются квадратным уравнением $x^2-mx-q=0$ с корнем $\phi=\frac{m+\sqrt{m^2+4q}}{2}$.

При $m=q=1$ образуется "золотое сечение": $\phi\Rightarrow\Phi$.

Характеристическое уравнение $1=m\phi^{-1}+q\phi^{-2}$ можно последовательно умножить бесконечное число раз на $q\phi^{-2}$ или $m\phi^{-1}$ и затем просуммировать полученные соотношения, в результате чего получим

$$m\phi^{-1}+q\phi^{-2}=m\sum\nolimits_n\frac{q^n}{\phi^{2n+1}}=q\sum\nolimits_n\frac{m^n}{\phi^{n+2}}=1.$$

где в общем случае $m, q$ – любые комплексные числа.

В частности, для "серебряной" пропорции имеем ($x=1+\sqrt{2}$):

$$2\sum\nolimits_n x^{-2n-1}=\sum\nolimits_n 2^n x^{-n-2}=\sqrt{2}\sum\nolimits_k x^{-k}=1.$$

8. *Деление* $^1/_4$ (четверть): целое 1 так относится к разности $b-a$, как она – к меньшей части $a$.

$$\frac{1}{b-a}=\frac{b-a}{a}, \quad 4a^2-5a+1=0, \quad a=\frac{1}{4}.$$

$$\frac{a+b}{b-a}=\frac{1+x}{x-1}\equiv\frac{b-a}{a}=x-1, \quad x^2-3x=0, \quad x=3.$$

$$x\sum\nolimits_k a^k=3\sum\nolimits_k 4^{-k}=3\sum\nolimits_k 2^{-2k}=1.$$

9. *Деление* $^1/_5$ (Парето): половина большего $b/2$ в целом 1 равна двум меньшим $2a$.

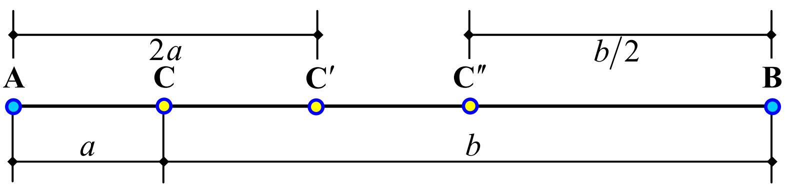


Рис. 3. Деление отрезка AB в соотношении Парето 20/80

$$b/2=2a, \quad 1-a=4a, \quad a=\frac{1}{5}, \quad x=4.$$

$$x\sum\nolimits_k a^k=4\sum\nolimits_k 5^{-k}=1. \tag{6}$$

Деление $^1/_5$ названо нами по имени итальянского экономиста В. Парето (1848–1923), выявившего закономерности при разделении прибыли, которые известны, как правило «20/80».

Двухпараметрическое распределение вероятностей Парето именуют также распределением с так называемыми "тяжелыми хвостами" (ТХ) /heavy tails, fat tails/, которые нельзя просто "обрезать", равно как и пренебрегать крупными, но редкими событиями (природные и антропогенные катастрофы, землетрясения, извержения вулканов и т.п.).

Исходя из широкого проявления в природе "золотой" пропорций и ее свойств $1-\sqrt{\Phi^{-1}} \approx 0,\underline{21}4$ и $\dfrac{\Phi^{-2}}{2} \approx 0,\underline{19}1$, в работе [9, с. 126–129] предлагается внести уточнения в принцип Парето с его заменой на два правила: «21 / 79» и «19 / 81».

Подобная фанатичная вера в "золотую" пропорцию и порой искусственное ее "выуживание", откуда только можно, заслуживает искреннего уважения преданности автора концепции о всеобщности гармоническое деление.

Возможно, приведенные цифры даже имеют сакраментальное значение, но для этого вовсе не требуется изменять само название принципа «20/ 80».

Заметим, что сам Парето не делал упрощения типа 20/80, но оно обосновано вытекает из его метода и является доступной для понимания трактовкой, некоторой метафорой, наглядным определением или ярким слоганом.

Нетрудно также заметить, что именно такое соотношение через цифру $5 = 100/20$ уже наполнено внутренним содержанием ЗС

$$\left(\Phi+\Phi^{-1}\right)^{-2} = 1/5 .$$

Более того, соотношение «20/ 80» одновременно несет в себе только ему присущие два бинарных признака в виде «удвоения меньшего и половинки большего»

$$20 \cdot 2 = 80 / 2,$$

что одновременно отражено и в геометрической прогрессии (6) наличием числа $4 = 2^2$:

$$2^2 \sum_k \left(\Phi + \Phi^{-1}\right)^{-2k} = 1 .$$

Поэтому можно утверждать, что принцип Парето в его классической формулировке органически объединяет в себе дихотомию и ЗС, что находит адекватное отражение в проявлении редких, но значительных природных и жизненных явлений. А само деление $1/5$ ассоциируется с известной поговоркой: "За одного битого двух небитых дают".

Следует сказать, что возможны и иные подобные деления, например, по пути уменьшения $a$ (рис. 4), но в отдельности они становятся все менее интересными, потому далее рассмотрим некоторые особенности родственных разбиений целого в общем виде.

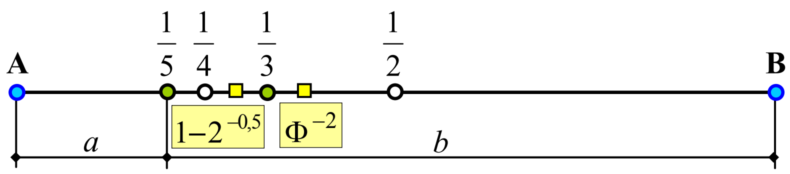


Рис. 4. Ранжирование некоторых математических пропорций взаимодействия целого 1 и его частей $a + b = 1$

**Произвольное деление $a/b$.**

Подобных делений существует бесчисленное множество.

Поэтому поставим вопрос в иной плоскости.

Сколько в поле натуральных чисел $(a, b) \in N \times N$ можно построить неповторяющихся пропорций? Или другими словами, какое количество составляют взаимно-простые пары целых чисел, считая, что $(a, b) \neq (b, a)$, или как часто они встречаются?

В такой постановке задача уже имеет ярко выраженный практический подтекст, поскольку все виды взаимодействий (электромагнитных, гравитационных, ядерных и др.) так или иначе можно свести к совокупности дуальных или парных взаимосвязей.

В абстрактной алгебре это соответствует бинарной коммутативной операции со знаком действия «o» на множестве натуральных чисел $N$ в виде отображения $N \times N \to N$.

Каждой упорядоченной паре элементов или операндов $(a, b)$ из множества $N$ это отображение ставит в соответствие некоторый элемент (результат) $a \circ b = b \circ a$ того же множества, не зависящий от перестановки операндов.

В вычислительном аспекте данный вопрос не является сложным и сводится к рекуррентному подсчету суммы ($n$ = 2, 3, 4, 5, ...)

$$R_n = R_{n-1} + 2r_n = R_{n-1} + 2\sum_{i=1}^{n} \max[2 - \gcd(n,i), 0] \,, \tag{7}$$

либо

$$R_n = R_{n-1} + 2\varphi(n) = 2\sum_{i=2}^{n} \varphi(i) \,,$$

где $\varphi(n)$ порядок группы обратимых элементов кольца $Z_n$ (множества неотрицательных целых чисел с алгебраическими операциями сложения и умножения) или функция Эйлера, выражающая количество целых чисел отрезка $[1, n]$, взаимно простых с $n$; $R_1$=0, $\gcd(n,i) \equiv$ НОД$(n,i)$ – наибольший общий делитель целых чисел $n$ и $i$, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n / R_{n-1} = 1$.

Определим вероятность $P$ несократимости дроби $a/b$ как предел при $N \to \infty$ вероятности того, что будут взаимно простыми числа $a$ и $b$, каждому из которых независимо от другого присвоено одно из значений $\overline{1, N}$, принимаемых как равновозможные [10, с. 39].

Тогда $P = \zeta(2)^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_n \frac{1}{n^{-2}}\right)^{-1} \to \frac{6}{\pi^2} \approx 0{,}608$, где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана (в целой четной точке $s = 2$).

Другими словами, вероятность несократимости дроби $a/b$ – это вероятность события, при котором произвольно выбранные целые числа $a$, $b$ не имеют общего делителя: в разложениях этих чисел на простые сомножители отсутствуют общие множители.

Характерно, что дискретная функция $R_n/n^2$ по мере увеличения $n$ убывает, но не монотонно, а буквально стягивается или сжимается с двух сторон в одну точку, стремясь к своему пределу (рис. 5).

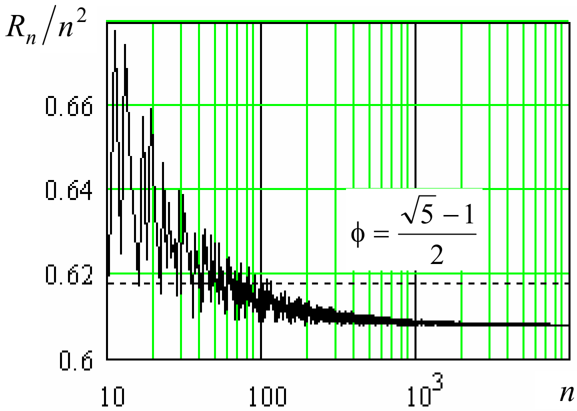

Рис. 5. График функции $R_n/n^2$ (7)

Впервые ответ на вопрос о частоте появления пары взаимно простых чисел дала удивительная теорема, открытая в 1881 г. итальянцем Э. Чезаро [11, п. 3]:

вероятность выбора из $N$ пары взаимно простых чисел равна $6/\pi^2$.

То есть примерно в 61 % случаев из натурального ряда можно извлечь пару взаимно простых чисел. Необыкновенно, но по теореме Чезаро в "царстве" целых чисел при этом возникает загадочное и вездесущее число $\pi$.

У любого физического взаимодействия есть своя константа связи.

Поэтому вполне разумно для совокупности математических пропорций взаимодействия целого и его частей в виде произвольного деления $a/b$ как несократимой дроби использовать следующие постоянные структуры или структурного равновесия взаимодействий:

*постоянная «сжатия» структуры дуально-несимметричных (неизоморфных) взаимодействий*

$$S_v = \lim_{n\to\infty} R_n \Big/ n^2 = 6\big/\pi^2 \approx 0{,}608 \ ,$$

которой соответствует константа "зеркального" отображения в виде игнорируемых (сокращаемых или аннулируемых) взаимодействий

$$\overline{S}_v = 1 - S_v \approx 0{,}392\,;$$

*постоянная «сжатия» структуры дуально-симметричных (изоморфных) взаимодействий*

$$S'_v = S_v/2 = 3\big/\pi^2 \approx 0{,}304 \ ,$$

которой соответствует своя константа "зеркального" отображения

$$\overline{S'_v} = 1 - \overline{S'_v} = 1 - S_v/2 \approx 0{,}696\,.$$

**Вместо заключения.**

Заметим, что числа $S_v, \overline{S}_v$ достаточно близки к значениям, обусловленным "золотым" сечением: $\Phi^{-1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$ и $1-\Phi^{-1} = \Phi^{-2} \approx 0{,}382$, которое в свою очередь довольно тесно связано с простыми числами, например [12]:

$$\Phi\left(1+\frac{2\ln 3}{\ln 5+\ln 7}\right)^{-1} \approx 1{,}000018\,; \qquad \Phi^{-1}\left(1+\frac{3\ln 3}{2\ln 3+\ln 23}\right) \approx 1{,}000004\,.$$

Относительное отклонение составляет $\left(1-6\pi^{-2}\Phi\right)\cdot 100 \approx 1{,}6\ \%$.

На наш взгляд, это сходство является одной из первопричин отыскания в многообразии структур мироустройства тех или иных структурированных природных образований, в которых присутствуют признаки или заложен механизм "золотой" пропорции.

И то, что часто выдается за приблизительную гармонию на основе ЗС, на самом деле может являться результатом долгого и мучительного процесса сначала синтеза, потом "притирки", а далее – и сегодня продолжающейся эволюции миропорядка, в основе которых лежит постоянная структуры дуальных взаимодействий $S_v \approx 0{,}608$ как некая фрактальная размерность Вселенной, основанная на числе $\pi$.

Во всяком случае, нельзя исключать возможности, что в ряде случаев вместо ЗС $0{,}382/0{,}618$ на самом деле мы имеем дело с дуально-несимметричным взаимодействием частей целого в его предельном соотношении $0{,}392/0{,}608$

$$\frac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{6}{\pi^2}}{0{,}382/0{,}618 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}392/0{,}608}$$

Возможно, именно поэтому мы пока не находим точных проявлений ЗС, особенно в неживой материи, а довольствуемся лишь его приближенным демонстрированием, которое потом представляем уже в качестве установленного достоверного факта.

Эволюционирование и дихотомическое структурирование (см. рис. 5) в живом проходит гораздо быстрее, поэтому в нем достаточно легко наблюдаются и обнаруживаются признаки ЗС.

Не исключено также, что в процессе развития объектов при прохождении ими линии $\Phi^{-1}$ на каком-то этапе (из более 50 пересечений с наименьшими отклонениями по абсолютной величине при $n$=103: $6554/103^2 \approx 0{,}6178$ и $n$=113: $7894/113^2 \approx 0{,}6182$ – рис. 6) происходит их "зацикливание" на уровне идеального состояния, выражаемого "золотым" сечением.

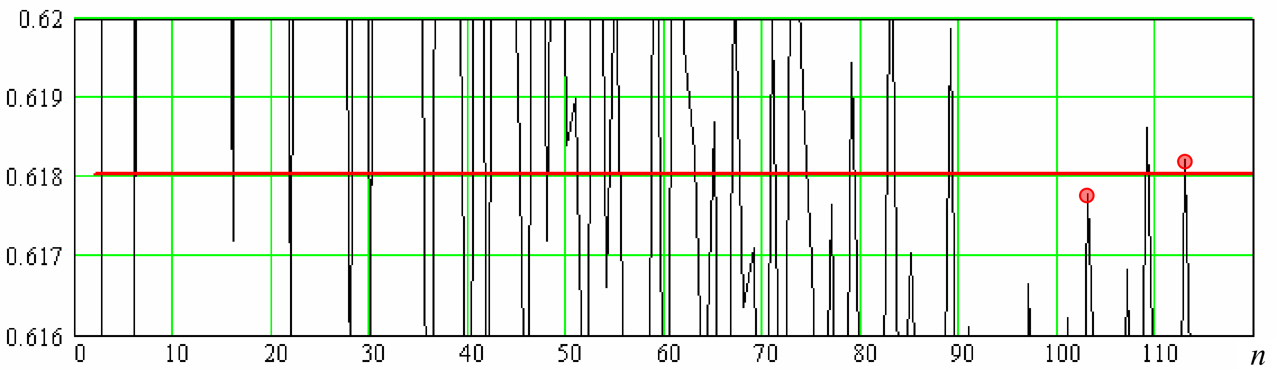


Рис. 6. Пересечение линии золотого сечения $\Phi^{-1}$ рекуррентной относительной суммой $R_n / n^2$ несокращаемых дробей $a/b$ (взаимно-простых пар целых чисел)

Но для подтверждения таких соображений необходимы дополнительные серьезные исследования.

Гипертрофированная одержимость идеей о *всеобщей гармонизации мира* исключительно на основе "золотой" пропорции может нанести вред самому понятию, а также установлению ее действительной роли в мироздании.

В силу своей идеальности, ЗС не терпит суеты, равно как и многоголосного аллилуйного хора. Но как фундаментальная математическая константа Ф она должна проявлять себя в природе, прежде всего, *золотником* (!) в механизме построения иных идеальных математических и физических конструкций. И если это срабатывает на все сто, то и доверие к результату адекватно высокое. А всякие круги «вокруг да около» – от лукавого.

Так что главное еще не сказано, а если и заявлено, то пока больше на уровне гипотез, которые требуют дополнительного и более надежного подтверждения.

Расширенный анализ различных математических пропорций взаимодействия целого и его частей дает нам ключ и возможность перейти от хвалебных од "золотому" сечению к поиску реальных путей по его научно-аргументированному обоснованию и строгому доказательству там, где оно действительно имеет место, – с учетом систематики анализа, о чем говорилось вначале.

**Литература:**

1. *Елфимов Г.М.*, *Красников В.С.* Основы системного анализа. СПб.: Северо-Западная академия государственной службы, 1998. – 108 с.

2. *Богданов А.А.* Тектология. Всеобщая организация науки. / Под ред. Л.И. Абалкина. – М.: Экономика, 1989. – Т. 1. – 304 с.

3. *Вернадский В.И.* Биосфера и ноосфера. – М.: Наука, 1989. – 261 с.

4. *Философский энциклопедический словарь*. – 2-е изд. – М.: Сов. энциклопедия, 1989. – 815 с.

5. *Шевелев И.Ш.*, *Марутаев И.А.*, *Шмелев И.П.* Золотое сечение: Три взгляда на природу гармонии. – М.: Стройиздат, 1990. – 343 с.

6. *Радзюкевич А.В.* Красивая сказка о «золотом сечении». // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.12981 от 17.02.2006.

7. *Шевелев И.Ш.* Метаязык живой природы. – Кострома: Воскресенье, 2000. – 352 с.

8. *Сергиенко П.Я.* Триалектика. О мерах мудрости и мудрости мер. – Пущино: ОНТИ ПНЦ, 2003. – 84 с.

9. *Ясинский С.А.* "Золотое" сечение в культурном и социально-экономическом развитии общества с приложениями в связи и логистике. – СПб.: ВАС, 2005. – 176 с.

10. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел: Учеб. пособие, изд. 11-е стер. – Спб.: Лань,

2006. – 176 с.
11. *Сизый С.В.* Лекции по теории чисел: Учеб. пособие для математ. спец. – Екатеринбург: УГУ, 1999. – http://www.allmath.ru/highermath/algebra/theorychisel-ugu/index.htm.
12. *Василенко С.Л.* Фрактальные многоугольники и «золотое» сечение // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15108 от 21.02.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321095.htm.
13. *Колмогоров А.Н.* Избранные труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985. – 470 с.

*Приложение*

Средние Колмогорова для действительных чисел $\xi_j$, $j=\overline{1,J}$ – это величины вида

$$M(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_J) = \varphi^{-1}\left[\frac{1}{J}\sum_j \varphi(\xi_j)\right],$$

где $\varphi$ – непрерывная строго монотонная функция, $\varphi^{-1}$ – функция, обратная к $\varphi$.

При разном задании функции $\varphi$ получают различные средние:

$\varphi(\xi)=\xi$ – среднее арифметическое;

$\varphi(\xi)=\log\xi$ – среднее геометрическое;

$\varphi(\xi)=\xi^{-1}$ – среднее гармоническое;

$\varphi(\xi)=\xi^2$ – среднее квадратическое;

$\varphi(\xi)=\xi^\alpha$ – среднее степенное, $\alpha \neq 0$;

Согласно Колмогорову А.Н. [13, с. 136–138] любая средняя величина – функция $M(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_J)$ обладает свойствами:

непрерывна;

монотонна по каждому $\xi_j$, $j=\overline{1,J}$;

симметрична, то есть ее значение не меняется при перестановке аргументов;

среднее одинаковых чисел равно их общему значению;

некоторую группу значений $\xi_j$ можно заменить их собственным средним, не меняя общего среднего.