

А. П. Стахов (Канада), С. Х. Арансон (США)

«ЗОЛОТАЯ» ФИБОНАЧЧИЕВАЯ ГОНИОМЕТРИЯ, ЧЕТВЁРТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИБОНАЧЧИ-ЛОРЕНЦА И «ЗОЛОТАЯ» ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

*Статья посвящается светлой памяти
выдающегося математика современности
академика Митропольского Юрия Алексеевича.*

Авторы

Содержание

Предисловие

1. Введение

- 1.1. *V-й постулат Евклида и геометрия Лобачевского*
- 1.2. *Геометрия Лобачевского и гиперболические функции*
- 1.3. *Четвертая проблема Гильберта*
- 1.4. *Специальная теория относительности Эйнштейна, преобразования Лоренца, и геометрия Минковского*
- 1.5. *Золотое сечение и формулы Бине*

ЧАСТЬ I. «ЗОЛОТАЯ» ФИБОНАЧЧИЕВАЯ λ -ГОНИОМЕТРИЯ

2. λ -числа Фибоначчи и металлические пропорции

- 2.1. *λ -числа Фибоначчи*
- 2.2. *Металлические пропорции*

3. «Золотая» λ -гониометрия Фибоначчи

- 3.1. *Формулы Газале для λ -чисел Фибоначчи и Люка*
- 3.2. *Определение гиперболических λ -функций Фибоначчи и Люка*
- 3.3. *Графики гиперболических λ -функций Фибоначчи и Люка*
- 3.4. *Частные случаи гиперболических λ -функций Фибоначчи и Люка*
- 3.5. *Важнейшие формулы для «золотой» λ -гониометрии Фибоначчи*

4. «Золотые» матрицы

- 4.1. *Q-матрица*
- 4.2. *«Золотые» матрицы*

Часть II. 4-ая ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

5. «Золотая» фибоначчиевая λ -гониометрия и 4-ая проблема Гильберта

- 5.1. *«Золотые» метрические λ -формы плоскости Лобачевского*
- 5.2. *Частные случаи метрических λ -форм плоскости Лобачевского*

6. Геодезические линии и другие геометрические объекты метрических λ -форм плоскости Лобачевского

7. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского на единичном диске

7.1. *Геодезические линии и углы пересечения геодезических линий в модели Пуанкаре*

7.2. *Связь между моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского на единичном диске и «золотыми» λ -моделями плоскости Лобачевского*

Часть III. Преобразования Фибоначчи-Лоренца и «золотая» интерпретация специальной теории относительности

8. Преобразования Лоренца

9. Современные представления о скорости света в вакууме и роли фактора самоорганизации в эволюции Вселенной

9.1. *Скорость света материальной Вселенной уменьшается в процессе её эволюции*

9.2. *О самоорганизации Вселенных с противоположным течением времени*

9.3. *Роль золотой пропорции и Платоновых тел в современной науке*

9.4. *Основные гипотезы исследования*

10. Двумерные преобразования Фибоначчи-Лоренца

10.1. *Собственные двумерные преобразования Фибоначчи-Лоренца*

10.2. *Космологическая интерпретация*

10.3. *Нормированная относительная фибоначчиевая скорость*

10.4. *Метрическая форма*

11. Число 137

12. Основные результаты исследования

Литература

Предисловие

Статья посвящена изложению новых результатов в области математики и теоретической физики. Первый результат – это «золотая» фибоначчиевая λ -гонометрия ($\lambda > 0$ - любое положительное число), которая задает бесконечное множество новых гиперболических функций, основаниями которых являются *металлические пропорции*, в частности, *золотая пропорция* при $\lambda = 1$.

Второй результат состоит в построении на основе «золотой» фибоначчиевой λ -гонометрии бесконечного множества *изометричных* моделей плоскости Лобачевского, что имеет непосредственное отношение к *четвёртой проблеме Гильберта*.

Третий результат состоит в развитии нового подхода к специальной теории относительности (СТО), основанного на *преобразованиях Фибоначчи-Лоренца*, являющихся обобщением *преобразований Лоренца*.

На основе этого подхода авторами предложена «золотая» космологическая модель эволюции Мироздания с момента **сингулярности пространства-времени** - «*Большого Взрыва*» (время T равно нулю) как в положительную сторону увеличения времени T (рождение «*белой дыры*», внутри которой начала развиваться наша *материальная Вселенная*), так и с *поворотом стрелы времени* - увеличению времени T в отрицательную сторону (рождение «*чёрной дыры*», являющейся временной противоположностью белой

дыры, при этом внутри чёрной дыры начала развиваться *Вселенная*, состоящая из *антиматерии*).¹

Наша модель состоит в том, что в процессе эволюции *материальной Вселенной* (при увеличении времени T в положительном направлении) было две «бифуркации». Первая бифуркация соответствует «*Большому Взрыву*», а вторая – к переходу Вселенной от «*Темных Веков*» к «*Светлому Периоду*», когда возникает свет и первые звезды, освещающие Вселенную. Скорость света c сразу после этой второй бифуркации является очень большой, значительно превышающей ее современное значение. По мере эволюции Вселенной скорость света c начинает быстро убывать и затем при дальнейшем увеличении времени T в положительном направлении скорость света c медленно (как бы «замораживаясь») стремится к предельному значению $300\,000$ [км.сек⁻¹].

Что касается эволюции *Вселенной*, состоящей из *антиматерии*, наша модель состоит в том, что для неё кроме вышеуказанной бифуркации, то есть «*Большого Взрыва*» (время $T = 0$), больше бифуркаций не было. Далее при T отрицательном, но близким к нулю, скорость света c также была близка к нулю. Затем по мере эволюции этой *Вселенной* (то есть при дальнейшем увеличении времени T в отрицательном направлении) скорость света c возрастает и затем при дальнейшем увеличении времени в отрицательном направлении скорость света c медленно стремится снизу к предельному значению $\frac{300000}{\Phi^2}$ [км • сек⁻¹], где Φ - «золотое сечение».

В статье также обсуждается естественно возникающая в нашей модели «*Вселенская константа*» - число 137 и связанная с этим числом важнейшая безразмерная физическая константа - «*постоянная тонкой структуры*» $\alpha \approx 1/137$, характеризующая физические свойства нашего мира в целом. В 1955 году российский физик **Лев Давидович Ландау** (1908-1968) высказал предположение, что α может меняться в зависимости от времени, при этом эти изменения не могут быть очень большими, иначе они бы «всплыли» в сравнительно простых экспериментах.

Авторами данной статьи предложена формула зависимости «*постоянной тонкой структуры*» α от времени T , отсчитываемое от момента «*Большого Взрыва*» ($T=0$) для любого T как большего, так и меньшего нуля.

1. Введение

1.1. V-й постулат Евклида и геометрия Лобачевского

23 февраля 1826 года российский математик **Николай Лобачевский** (1792 -1856) на заседании физико-математического факультета Казанского университета провозгласил о создании новой геометрии, названной им «*воображаемой геометрией*». Эта геометрия была основана на тех же традиционных постулатах и аксиомах геометрии, как и у **Евклида** (330-275 гг. до н. э.), но с заменой его **V-го постулата о параллельных** на **новый V-ый постулат о параллельных (аксиома параллельности Лобачевского)**.

Впервые свою новую геометрию Н.И. Лобачевский опубликовал в 1829 году в работе *О началах геометрии* в журнале «Казанский вестник».

¹ *Белая дыра* – физический объект, возникающий из *сингулярности пространства-времени*, в область которой ничего не может войти. Белая дыра является **временной противоположностью чёрной дыры**, из области которой (внутренности *сферы Шварцшильда*) ничего не может выйти (по материалам из *Википедии* -свободной энциклопедии). Первым, кто высказал сомнение о том, что время T должно течь только в одном направлении (в сторону увеличения в положительном направлении) был сам **Альберт Эйнштейн** (1879-1955), поскольку уравнения общей теории относительности (ОТО) инвариантны относительно замены T на «минус» T . В 70-х годах прошлого века в Санкт-Петербургском физико-техническом институте имени Иоффе был дан ответ на то, что физические объекты, для которых время T течёт в отрицательном направлении, должны состоять из *антиматерии*, в противоположность тому, что для *материальных* физических объектов время T может течь только в положительном направлении.

Независимо от Лобачевского к подобным идеям пришёл венгерский математик **Янош Бolyai** (1802-1860), опубликовавший свою работу *Appendix...* на три года позже Лобачевского (1832), и выдающийся немецкий математик **Карл Фридрих Гаусс** (1777-1855), у которого после его смерти были найдены отдельные неопубликованные наброски начальных положений неевклидовой геометрии.

Полное признание и широкое распространение геометрия Лобачевского получила через 12 лет после его смерти, когда стало понятно, что научная теория, построенная на базе некоторой *системы аксиом*, считается только тогда полностью завершённой, когда эта система аксиом удовлетворяет трём условиям: *независимости, непротиворечивости и полноты*. Именно этим свойствам и удовлетворяет *геометрия Лобачевского*.²

Окончательно это стало ясно, когда в 1868 году итальянский математик **Эудженио Бельтрами** (1835-1900) в своём мемуаре «*Опыт толкования неевклидовой геометрии*» показал, что в евклидовом пространстве R^3 на *псевдосферических поверхностях* имеет место геометрия куска плоскости Лобачевского, если на них за прямые принять геодезические линии.

Далее немецкий математик **Феликс Христиан Клейн** (1849-1925) и французский математик **Анри Пуанкаре** (1854-1912) строго доказали непротиворечивость неевклидовой геометрии, построив соответствующие модели плоскости Лобачевского. Истолкование геометрии Лобачевского на поверхностях евклидова пространства решающим образом способствовало общему признанию идей Лобачевского.

Итогом такого неевклидового подхода явилось создание **Георгом Фридрихом Бернхардом Риманом** (1826-1866) *римановой геометрии*, развившей учение о пространстве, понятие расстояния между элементами многообразия и учение о кривизне.

Введение *обобщённых римановых пространств*, частными случаями которых являются *пространства Евклида и Лобачевского* и так называемой *геометрии Римана*, открыло новые пути в развитии геометрии и нашли применение в физике (теория относительности) и других разделах естествознания.

1.2. Геометрия Лобачевского и гиперболические функции

Геометрию Лобачевского называют также *гиперболической* на том основании, что для описания математических соотношений данной геометрии используются *гиперболические функции*

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (1)$$

введенные в 18-м веке итальянским математиком **Винченцо Рикатти** (1707-1775), где $e \approx 2.71828$ – *число Непера*, являющееся основанием *натуральных логарифмов*, разработанных **Джоном Непером** (1550-1617) и **Иостом Бюрги** (1552—1632). Геометрическая теория логарифмов, основанная на геометрических свойствах площадей гиперболы, изложена в работе [1]. Как подчеркивается в [1], «*из геометрических рассматриваний, связанных с площадями, мы неожиданно пришли к логарифмам. При этом основание системы логарифмов равно некоторому определенному числу e , а не произвольно, как это имеет место при обычном введении логарифмов. Это обстоятельство проливает свет на то, почему создатели теории логарифмов Непер и Бюрги независимо друг от друга пришли к логарифмам по одному и тому же основанию e* ». Далее в [1] геометрическая теория натуральных логарифмов используется для вывода аналитических выражений (1), задающих гиперболические функции.

² Основным же недостатком аксиоматики Евклида, с современной точки зрения, следует считать её *неполноту* – здесь нет аксиом *непрерывности, движения и порядка*. В дальнейшем эти недостатки были устранены немецким математиком **Давидом Гильбертом** (1862-1943) в его книге «*Основания геометрии*» (1899).

Перечислим наиболее известные классические *изометричные* (сохраняющие расстояние между точками) интерпретации плоскости Лобачевского, имеющую *гауссову кривизну* $K = -1$:

- интерпретация Бельтрами на диске;
- интерпретация Бельтрами гиперболической геометрии на псевдосфере;
- евклидова модель Кэли-Клейна;
- проективная модель Кэли Клейна;
- интерпретация Пуанкаре на полуплоскости;
- интерпретация Пуанкаре внутри круга;
- интерпретация Пуанкаре на гиперboloиде.

В частности, классическая модель *плоскости Лобачевского* в *псевдосферических координатах* (u, v) , $0 < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, имеющей гауссову кривизну $K = -1$ (интерпретация Бельтрами гиперболической геометрии на псевдосфере), имеет вид:

$$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2 \quad (2)$$

где ds – элемент длины, $sh(u)$ – гиперболический синус. Как вытекает из (2), определяющую роль в *плоскости Лобачевского* играет *гиперболический синус*.

1.3. Четвертая проблема Гильберта

В докладе «*Математические проблемы*», сделанном на II Международном Конгрессе математиков, происходившем в Париже с 6 по 12 августа 1900 года, **Давид Гильберт** (1862-1943) сформулировал свои знаменитые 23 математические проблемы, которые в значительной степени определили развитие математики 20-го века. Этот доклад, охватывающий проблемы математики в целом, был несколько раз опубликован в подлиннике и в переводах и является уникальным явлением в истории математики и в математической литературе.

Русский перевод доклада **Давида Гильберта** и комментарии к нему даны в работе [2]. 4-ая проблема Гильберта названа им «**ПРОБЛЕМОЙ О ПРЯМОЙ КАК КРАТЧАЙШЕМ СОЕДИНЕНИИ ДВУХ ТОЧЕК**». Как подчеркивается в Wikipedia [3], «*в математике, 4-я проблема Гильберта относится к разряду фундаментальных проблем геометрии. В ее формулировке, полученной из оригинала, суть проблемы состоит в нахождении геометрий, чьи аксиомы наиболее близки к Евклидовой геометрии, если при этом сохраняются аксиомы порядка и инцидентности, аксиома конгруэнтности ослаблена, и аксиома о параллельных опущена*».

Отметим, что у самого Гильберта в его докладе априори (или даже явно) предполагается возможность замены *аксиомы Евклида о параллельных* (ибо она опущена) другими аксиомами. Поэтому Гильберт в качестве геометрий, наиболее близких к евклидовой геометрии, называет *геометрию Лобачевского (гиперболическую геометрию)* и *геометрию Римана (эллиптическую геометрию)*. Саму же 4-ю проблему Гильберт формулирует так: «*Более общий вопрос, возникающий при этом, заключается в следующем: возможно ли ещё с других плодотворных точек зрения построить геометрии, которые с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии*».

В математической литературе 4-я проблема Гильберта иногда считается сформулированной в весьма расплывчатой форме, что затрудняет ее окончательное решение. Как подчеркивается в [3], «*оригинальная формулировка 4-й проблемы Гильберта является весьма расплывчатой для получения определенного ответа*». В работе [4] американский геометр **Герберт Бузман** проанализировал весь комплекс вопросов, связанных с 4-й проблемой Гильберта, и также пришел к заключению, что эти вопросы являются излишне широкими. В этой связи следует отметить также книгу [5], посвященную частному решению 4-й проблемы Гильберта.

Несмотря на критическое отношение математиков к *4-й проблеме Гильберта*, необходимо подчеркнуть ее чрезвычайную важность для развития математики, в частности, геометрии. Без всякого сомнения, интуиция **Гильберта** привела его к выводу, что *геометрии Лобачевского, Римана* и другие неевклидовы геометрии не исчерпывают все возможные варианты возможных неевклидовых геометрий. *4-я проблема Гильберта* нацеливает исследователей на поиск новых неевклидовых геометрий, которые являются ближайшими геометриями к обыкновенной евклидовой геометрии.

1.4. Специальная теория относительности Эйнштейна, преобразования Лоренца, и геометрия Минковского

Наиболее широкое применение неевклидовы геометрии получили в теоретической физике. В 2005 г. произошло замечательное событие: исполнилось сто лет со дня опубликования в 1905 году **Альбертом Эйнштейном** (1879-1955) его *специальной теории относительности* (СТО). С момента появления этой теории и до настоящего времени не прекращается критика СТО и споры относительно её научного статуса. С одной стороны, критики неопровержимо доказывают несостоятельность СТО. С другой стороны, апологеты СТО с не меньшим упорством защищают эту теорию, обвиняя своих оппонентов в некомпетентности. Обе стороны приводят свои неотразимые аргументы.

СТО основывается на двух принципах: *принцип относительности* и *принцип независимости скорости света в пустоте от скорости источника*. Классические преобразования Галилея несовместимы с постулатами СТО и, следовательно, должны быть заменены другими преобразованиями.

Преобразования Лоренца, используемые в СТО, — это преобразования, которым подвергаются *галилеевы координаты* события (x, y, z, t) при переходе от одной *инерциальной системы отсчёта* (ИСО) K - к другой ИСО K' , движущейся относительно ИСО K с постоянной скоростью V . Преобразования названы в честь их первооткрывателя — нидерландского физика **Х. А. Лоренца** (1853–1928), который вывел их, чтобы устранить противоречия между *электродинамикой Максвелла* и *механикой Ньютона*. Преобразования Лоренца были впервые опубликованы в 1904 г., но в то время их форма была несовершенна. К современному, полностью самосогласованному виду их привёл французский математик **А. Пуанкаре** (1854-1912).

В 1908 г., то есть спустя три года после обнаружения СТО, немецкий математик **Герман Минковский** (1864-1909) дал оригинальную геометрическую интерпретацию преобразований Лоренца. В *пространстве Минковского* геометрически связь между двумя ИСО K и K' устанавливаются с помощью *гиперболического поворота* – движения, аналогичного обычному повороту декартовой системы в евклидовом пространстве. При этом координаты x' и t' в ИСО K' оказываются связанными с координатами точек x и t в ИСО K с помощью гиперболических функций (1). Таким образом, в *геометрии Минковского* преобразования Лоренца – не что иное, как выраженные в терминах физики зависимости гиперболической тригонометрии. То есть, *геометрия Минковского* является гиперболической интерпретацией СТО и поэтому она знаменует революционный прорыв геометрических представлений в физике, выход на качественно новый уровень взаимоотношений физики и геометрии.

Как известно, основной спор, касающийся СТО, в основном, идёт относительно второго принципа, то есть зависит или не зависит скорость света в вакууме от скорости источника света. В этом плане могут представить теоретический интерес работы **С.Х. Арансона** и **Е.В. Жужомы** [6-8], в которых в ситуации классической СТО в качестве пространства-времени рассматривался двумерный тор, что вызвало квантование света и

наложило жёсткие условия на арифметические свойства скоростей света и их спектров из допустимых относительных скоростей источников света.

1.5. Золотое сечение и формулы Бине

Как известно, *Начала* Евклида являются источником огромного количества математических идей (аксиоматический подход, V-й постулат Евклида, теория чисел, теория иррациональностей и др.), которые фундаментально повлияли на развитие математики. Кроме V-го постулата Евклида, в числе других математических результатов фундаментального характера из *Начал* Евклида к нам пришла еще одна задача, значение которой для развития математики и новых физических представлений в настоящее время пока еще до конца не осознано.

Речь идет о задаче о делении отрезка в крайнем и среднем отношении, сформулированной Евклидом в Теореме II.11. В современной науке эта задача более широко известна как *золотое сечение* [9, 10]. Задача сводится к делению отрезка на две неравные части в такой пропорции, чтобы отношение большей части к меньшей равнялось бы отношению всего отрезка к большей части. Задача сводится к решению простейшего алгебраического уравнения

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (3)$$

Положительный корень уравнения (3)

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (4)$$

есть ни что иное, как знаменитое иррациональное число, имеющее много замечательных названий: *золотое число*, *золотая пропорция*, *божественная пропорция* и т.д.

Алгебраическое уравнение (3) и золотая пропорция (4) тесно связаны с двумя числовыми последовательностями – *числами Фибоначчи* F_n , задаваемыми рекуррентным соотношением:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad F_0 = 0, F_1 = 1, \quad (5)$$

и *числами Люка* L_n , задаваемыми рекуррентным соотношением:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}; \quad L_0 = 2, F_1 = 1, \quad (6)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Любые три соседние числа Фибоначчи F_{n-1}, F_n, F_{n+1} ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) связаны между собой уникальным математическим тождеством:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}. \quad (7)$$

Формула (7) называется *формулой Кассини* в честь французского астронома **Джовани Кассини** (1625-1712), который впервые вывел это тождество.

Заметим, что в течение нескольких тысячелетий *задача о золотом сечении* была предметом восторженного внимания со стороны выдающихся ученых и математиков, включая **Пифагора**, **Платона**, **Евклида**, **Леонардо да Винчи**, **Луки Пачоли**, **Иоганна Кеплера** и др. В 20-м веке было привлечено внимание к уникальному свойству *золотой пропорции*, которые выделяют её среди других иррациональных чисел. Например, в работах **А.Я. Хинчина** [11] и **Н.Н. Воробьева** [9] доказано, что главная особенность *золотой пропорции* (4) состоит в том, что среди всех иррациональных чисел она *хуже всех аппроксимируется рациональными дробями*.

Известно, что *золотую пропорцию* (4) можно представить в виде *непрерывной дроби*:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (8)$$

Если мы будем аппроксимировать *золотую пропорцию* Φ , представленную в виде (8), *подходящими дробями* m/n , то мы придём к числовой последовательности, состоящей из отношений соседних чисел Фибоначчи:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots \rightarrow \Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (9)$$

Но эта последовательность чисел выражает ни что иное, как знаменитый *закон филлотаксиса* [12], в соответствии с которым Природа конструирует сосновые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечников и другие ботанические объекты. Другими словами, Природа использует уникальное математическое свойство *золотой пропорции*, задаваемое (8), (9), в своих замечательных конструкциях!

Явление *филлотаксиса* известно в науке со времен Кеплера. Считается, что именно Иоганн Кеплер установил соотношение (9), задающее связь *чисел Фибоначчи* с *золотой пропорцией*. С тех пор формула (9) называется *формулой Кеплера*.

В 19-м столетии французский математик **Жак Бине** (1786-1856) вывел еще две замечательные формулы, связывающие числа Фибоначчи и Люка с *золотой пропорцией*:

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}; \quad L_n = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n} \quad (10)$$

Заметим, что эти формулы были открыты **Абрахамом де Муавром** (1667-1754) и **Николаем Бернулли** (1687-1759) на одно столетие раньше Жака Бине. Однако в современной математической литературе эти формулы называются *формулами Бине*.

К сожалению, формулы (10) не были оценены по достоинству математиками 19-го и 20-го века, хотя в этих формулах содержался намек на важное математическое открытие – *гиперболические функции Фибоначчи и Люка*.

В 1984 г. **Алексей Стахов** опубликовал книгу *Коды золотой пропорции* [13], в которой формулы Бине (10) были представлены в виде, который ранее не использовался в математической литературе:

$$L_n = \begin{cases} \Phi^n + \Phi^{-n} & \text{для четных } n = 2k \\ \Phi^n - \Phi^{-n} & \text{для нечетных } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$F_n = \begin{cases} \frac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для нечетных } n = 2k + 1 \\ \frac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для четных } n = 2k \end{cases}, \quad (12)$$

где Φ – *золотая пропорция* (4).

Сходство формул Бине, представленных в виде (11), (12), с гиперболическими функциями (1) настолько поразительно, что формулы (11), (12) можно считать прообразом нового класса гиперболических функций, основанных на *золотой пропорции*, то есть, **Алексей Стахов** еще в 1984 г. [13] предвосхитил введение нового класса гиперболических функций – *гиперболических функций Фибоначчи и Люка*.

Разработка новой теории гиперболических функций, основанных на *формулах Бине* (11), (12), была выполнена украинскими математиками **Алексеем Стаховым**, **Иваном Ткаченко** и **Борисом Розиным** [14-16]. Независимо от них к этим же идеям пришел

украинский исследователь **Олег Боднар**, который в книге [12] ввел так называемые «золотые» гиперболические функции, которые отличаются от гиперболических функций Фибоначчи и Люка только постоянными коэффициентами. Используя новый класс гиперболических функций, Боднар создал оригинальную геометрическую теорию филлотаксиса, в которой показал, что *геометрия филлотаксиса* является неевклидовой геометрией, основанной не на классических гиперболических функциях, а на «золотых» гиперболических функциях. Основная отличительная особенность новых гиперболических функций, введенных в работах [14-16], состоит в том, что их основанием является не трансцендентное число *Непера* e , а алгебраическое число Φ - *золотая пропорция*.

Таким образом, в работах [12,14-16] сделан прорыв «гиперболических представлений» в теоретическом естествознании. В этих работах введен новый класс гиперболических функций, основанных на *золотой пропорции* [14-16], и показано [12], что эти функции являются «естественными» функциями Природы, которые обнаруживают себя в ботаническом явлении филлотаксиса (сосновые шишки, кактусы, ананасы, головки подсолнечников, корзинки цветов и т.д.) и других явлениях и структурах Природы. Самым главным результатом этих исследований является осознание той важной роли, которую *золотая пропорция* играет в структурах Природы.

Очевидно, что *золотая пропорция* и связанные с ней числа *Фибоначчи* и *Люка* выражают некоторую «скрытую гармонию» Природы, суть которой состоит в гиперболическом характере Природы. Таким образом, обнаружение *золотой пропорции* или чисел *Фибоначчи* в том или ином природном явлении является индикатором того, что геометрическая природа этого явления является гиперболической.

Уместно отметить, что идеи создания новых гиперболических функций активно поддерживались академиком **Юрием Алексеевичем Митропольским** (1917-2008) и первая в истории науки статья на эту тему «*Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи*» [14] была опубликована в *Докладах академии наук Украины* в 1993 г. по рекомендации академика Митропольского.

Дальнейшее развитие теории «золотых» гиперболических функций дано в работе [17], в которой введены так называемые *гиперболические λ -функции Фибоначчи и Люка* ($\lambda > 0$ - любое положительное число). Основанием для этих функций являются так называемые *металлические пропорции* – новые математические константы, введенные аргентинским математиком **Верой Шпинадель** [18], **Мидхатом Газале** [19] и другими исследователями (в частности, российским исследователем **Александром Татаренко**) независимо друг от друга.

Успех «золотых» гиперболических функций в раскрытии «загадки филлотаксиса» («*геометрия Боднара*») [12] натолкнул на мысль рассмотреть некоторые фундаментальные математические проблемы и физические концепции, связанные с «гиперболическими представлениями», с точки зрения «золотых» гиперболических функций, введенных в [14-17].

Пожалуй, наиболее важными из таких проблем и концепций, рассмотренных авторами данной статьи **Алексеем Стаховым** и **Самуилом Арансоном**, является их вклад в решение *4-й проблемы Гильберта*, имеющей прямое отношение к гиперболической геометрии, и новый взгляд на *преобразования Лоренца*, которые лежат в основе СТО.

Настоящая статья преследует следующие цели:

1. **Первая цель** состоит в развитии так называемой «золотой» *фибоначчиевой λ -гониометрии*, вытекающей из работы [17].
2. **Вторая цель** состоит в том, чтобы внести свою лепту в решение *4-й проблемы Гильберта*, основываясь на «золотой» *фибоначчиевой λ -гониометрии*.
3. **Третья цель** состоит в том, чтобы на основе *симметричных гиперболических функций Фибоначчи* и «*золотых матрицах*» [13,14,19], ввести и исследовать новый класс преобразований, названный авторами *преобразованиями Фибоначчи-Лоренца*,

обобщающих классические преобразования Лоренца, и с помощью этих новых преобразований дать «золотую» интерпретацию СТО.

4. **Четвертая цель** состоит в том, чтобы обсудить некоторые новые космологические эффекты, вытекающие из «золотой» СТО, то есть дать «золотую» интерпретацию эволюции Вселенной с момента **сингулярности пространства-времени** - «*Большого Взрыва*» как при увеличении времени, так и при обращении стрелы времени.

5. **Пятая цель** касается числа 137 – *Вселенской константы*, которой приписываются множество странных физических зависимостей и магических свойств. В нашем исследовании, основываясь на новом подходе к специальной теории относительности, основанной на преобразованиях Фибоначчи-Лоренца и современных данных Космологии, мы получили, что введённый нами *безразмерный параметр самоорганизации* ψ и время T [млн. лет], отсчитываемое от момента Большого Взрыва ($T=0$) с учётом периода «Тёмных Веков» (200 млн. лет), связаны соотношением: $\psi = \frac{T}{a}$, где $a=100$ [млн. лет].

В такой трактовке параметр самоорганизации ψ можно считать *безразмерным временем*, отсчитываемым от момента Большого Взрыва. Поскольку по уточнённым данным Космологии, от момента Большого Взрыва по настоящее время существования Вселенной прошло $T_{\text{наст}}$ [млн. лет] ≈ 13700 [млн. лет], то $\psi = \frac{13700}{100} = 137$.

С числом 137 связана важнейшая безразмерная физическая константа - «*постоянная тонкой структуры*» $\alpha \approx 1/137$, характеризующая физические свойства нашего мира в целом. Однако, как показали современные астрофизические наблюдения, α изменяется с возрастом Вселенной

Мы предложили формулу зависимости «постоянной тонкой структуры» α от времени T , отсчитываемое от момента «*Большого Взрыва*» ($T=0$) для любого T как большего, так и меньшего нуля. Расчёты по этой формуле как качественно, так и количественно, согласуются с этими астрофизическими наблюдениями.

Заметим, что впервые сформулированные выше идеи были изложены авторами в электронной публикации [20].

ЧАСТЬ I. «ЗОЛОТАЯ» ФИБОНАЧЧИЕВАЯ λ -ГОНИОМЕТРИЯ

2. λ -числа Фибоначчи и металлические пропорции

2.1. λ -числа Фибоначчи

Зададимся положительным числом $\lambda > 0$ и рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$F_{\lambda}(n+2) = \lambda F_{\lambda}(n+1) + F_{\lambda}(n); \quad F_{\lambda}(0) = 0, F_{\lambda}(1) = 1. \quad (13)$$

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ рекуррентное соотношение (13) сводится к рекуррентному соотношению (5), задающему классические числа Фибоначчи. Основываясь на этой аналогии, числовые последовательности, генерируемые рекуррентным соотношением (13), были названы в [17] *λ -числами Фибоначчи*. Поскольку каждое число $\lambda > 0$ генерирует свою собственную последовательность типа (13), то это означает, что множество новых рекуррентных числовых последовательностей, задаваемых (13), бесконечно.

2.2. Металлические пропорции

Представим рекуррентное соотношение (13) в виде:

$$\frac{F_\lambda(n+2)}{F_\lambda(n+1)} = \lambda + \frac{1}{\frac{F_\lambda(n+1)}{F_\lambda(n)}}. \quad (14)$$

При $n \rightarrow \pm\infty$ выражение (14) сводится к квадратному уравнению

$$x^2 - \lambda x - 1 = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) имеет два корня:

$$x_1 = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{\lambda - \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}. \quad (16)$$

Обозначим через Φ_λ положительный корень x_1 и рассмотрим новый класс математических констант, задаваемых следующей формулой:

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}. \quad (17)$$

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ формула (17) принимает форму (4), задающую классическую *золотую пропорцию*.

Аргентинский математик **Вера Шпинадель** [18] назвала математические константы, задаваемые выражением (17), *металлическими пропорциями*. Если в (17) мы примем $\lambda = 1, 2, 3, 4$, тогда мы получим следующие математические константы, имеющие согласно Шпинадель следующие названия:

$$\Phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (золотая пропорция, } \lambda = 1); \quad \Phi_2 = 1 + \sqrt{2} \text{ (серебряная пропорция, } \lambda = 2);$$

$$\Phi_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \text{ (бронзовая пропорция, } \lambda = 3); \quad \Phi_4 = 2 + \sqrt{5} \text{ (медная пропорция, } \lambda = 4).$$

Остальные *металлические пропорции* ($\lambda \geq 5$) не имеют специальных названий:

$$\Phi_5 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}; \quad \Phi_6 = 3 + 2\sqrt{10}; \quad \Phi_7 = \frac{7 + 2\sqrt{14}}{2}; \quad \Phi_8 = 4 + \sqrt{17} \dots$$

Нетрудно доказать [17], что корень x_2 может быть выражен через *металлическую пропорцию* (17) следующим образом:

$$x_2 = -\frac{1}{\Phi_\lambda} = \frac{\lambda - \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}. \quad (18)$$

Используя алгебраическое уравнение (15), легко доказать [17] следующие замечательные свойства *металлических пропорций* (17):

$$\Phi_\lambda = \sqrt{1 + \lambda \sqrt{1 + \lambda \sqrt{1 + \lambda \sqrt{\dots}}}}; \quad \Phi_\lambda = \lambda + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda + \dots}}} \quad (19)$$

Заметим, что эти соотношения являются обобщением аналогичных свойств для классической *золотой пропорции* ($\lambda = 1$).

3. «Золотая» λ -гониометрия Фибоначчи

3.1. Формулы Газале для λ -чисел Фибоначчи и Люка

Используя металлические пропорции (17), **Мидхат Газале** в книге [19] вывел следующую формулу, которая задает λ -числа Фибоначчи (13) в аналитическом виде:

$$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4 + \lambda^2}}, \quad (20)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

В работе [17] выведена подобная аналитическая формула для λ -чисел Люка:

$$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}, \quad (21)$$

где $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Формулы (20) и (21) названы в [17] *формулами Газале* в честь **Мидхата Газале**, который, как упоминалось, впервые вывел формулу (20) в книге [19]. Заметим, что для случая $\lambda = 1$ *формулы Газале* (20) и (21) сводятся к *формулам Бине* (10).

Как показано в [17], λ -числа Люка (21) могут быть также заданы с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$L_\lambda(n) = \lambda L_\lambda(n-1) + L_\lambda(n-2); L_\lambda(0) = 2, L_\lambda(1) = \lambda. \quad (22)$$

Заметим, что λ -числа Люка (22) для случая $\lambda = 1$ сводятся к классическим числам Люка (6).

Представим *формулы Газале* (20) и (21) для отрицательных значений n в виде:

$$F_\lambda(-n) = \frac{\Phi_\lambda^{-n} - (-1)^{-n} \Phi_\lambda^n}{\sqrt{4 + \lambda^2}} \quad (23)$$

$$L_\lambda(-n) = \Phi_\lambda^{-n} + (-1)^{-n} \Phi_\lambda^n. \quad (24)$$

Сравнивая попарно формулы (20) и (23), а затем формулы (21) и (24) для четных ($n=2k$) и нечетных ($n=2k+1$) значений n , мы приходим к следующему заключению:

$$F_\lambda(2k) = -F_\lambda(-2k) \text{ и } F_\lambda(2k+1) = F_\lambda(-2k-1) \quad (25)$$

и

$$L_\lambda(2k) = L_\lambda(-2k) \text{ и } L_\lambda(2k+1) = -L_\lambda(-2k-1). \quad (26)$$

Это означает, что для заданного положительного числа $\lambda > 0$ последовательность λ -чисел Фибоначчи (13) в бесконечном диапазоне $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ является симметричной относительно λ -числа Фибоначчи $F_\lambda(0) = 0$. При этом необходимо учитывать, что λ -числа Фибоначчи $F_\lambda(2k)$ и $F_\lambda(-2k)$ противоположны по знаку.

Подобный вывод мы можем сделать и для λ -чисел Люка, то есть последовательность λ -чисел Люка (22) в бесконечном диапазоне $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ также является симметричной относительно λ -числа Люка $L_\lambda(0) = 2$. При этом также необходимо учитывать, что λ -числа Люка $L_\lambda(2k+1)$ и $L_\lambda(-2k-1)$ противоположны по знаку.

Заметим, что для случая $\lambda = 2$ *формулы Газале* (20) и (21) генерируют числовые последовательности, известные как *числа Пелли* и *числа Пелли-Люка*, соответственно.

Несложно вывести следующее тождество для λ -чисел Фибоначчи

$$F_\lambda^2(n) - F_\lambda(n-1)F_\lambda(n+1) = (-1)^{n+1}. \quad (27)$$

Заметим, что формула (27) является обобщением классической *формулы Кассини* (7), к которой формула (27) сводится при $\lambda = 1$.

3.2. Определение гиперболических λ -функций Фибоначчи и Люка

Формулы Газале (20) и (21) являются исходными для определения нового класса гиперболических функций – *гиперболических λ -функций Фибоначчи и Люка*, введенных в [17]. Рассмотрим эти функции.

Гиперболический λ -синус и λ -косинус Фибоначчи

$$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4 + \lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 + \lambda^2}} \left[\left(\frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2} \right)^x - \left(\frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2} \right)^{-x} \right], \quad (28)$$

$$cF_{\lambda}(x) = \frac{\Phi_{\lambda}^x + \Phi_{\lambda}^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}} \left[\left(\frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \right)^x + \left(\frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \right)^{-x} \right]. \quad (29)$$

Гиперболический λ -синус и λ -косинус Люка

$$sL_{\lambda}(x) = \Phi_{\lambda}^x - \Phi_{\lambda}^{-x} = \left(\frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \right)^x - \left(\frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \right)^{-x}, \quad (30)$$

$$cL_{\lambda}(x) = \Phi_{\lambda}^x + \Phi_{\lambda}^{-x} = \left(\frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \right)^x + \left(\frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \right)^{-x}, \quad (31)$$

где x – непрерывная переменная и $\lambda > 0$ – любое положительное число.

λ -числа Фибоначчи и Люка определяются через гиперболические λ функции Фибоначчи и Люка следующим образом:

$$F_{\lambda}(n) = \begin{cases} sF_{\lambda}(n), & n = 2k \\ cF_{\lambda}(n), & n = 2k+1 \end{cases}; \quad L_{\lambda}(n) = \begin{cases} cL_{\lambda}(n), & n = 2k \\ sL_{\lambda}(n), & n = 2k+1 \end{cases}. \quad (32)$$

Нетрудно видеть, что функции (28)-(31) связаны простыми соотношениями:

$$sF_{\lambda}(x) = \frac{sL_{\lambda}(x)}{\sqrt{4+\lambda^2}}; \quad cF_{\lambda}(x) = \frac{cL_{\lambda}(x)}{\sqrt{4+\lambda^2}}. \quad (33)$$

Это означает что функции (28) и (29) совпадают с функциями (30) и (31) с точностью до постоянного коэффициента $\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}$.

Заметим, что для случая $\lambda=1$ гиперболические λ -функции Фибоначчи и Люка (28)-(31) сводятся к следующим симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка, введенным в работе [15]:

Симметричный гиперболический синус и косинус Фибоначчи

$$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}; \quad cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}. \quad (34)$$

Симметричный гиперболический синус и косинус Люка

$$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x}; \quad cLs(x) = \Phi^x + \Phi^{-x}, \quad (35)$$

где $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – золотая пропорция.

3.3. Графики гиперболических λ -функций Фибоначчи и Люка

Рассмотрим графики симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка, приведенные в работе [15] (Рис. 1).

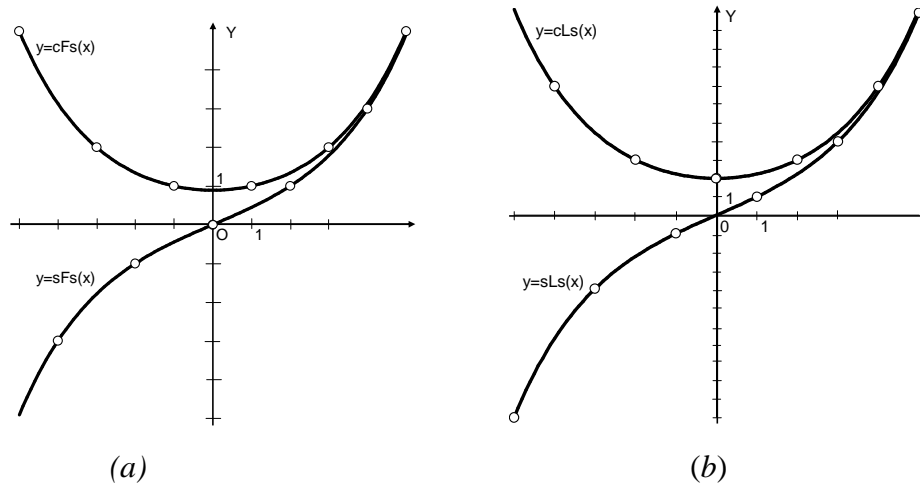


Рисунок 1. Графики симметричных гиперболических функций Фибоначчи (a) и Люка (b)

Графики гиперболических λ -функций Фибоначчи и Люка имеют форму, аналогичную симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка. Отличие состоит в том, что в точке $x=0$, гиперболический λ -косинус Фибоначчи (29) принимает значение $cF_\lambda(0) = \frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}$, а гиперболический λ -косинус Люка (31) принимает значение $cL_\lambda(0) = 2$.

Важно также подчеркнуть, что λ -числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ с четными значениями $n = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ «вписываются» в график гиперболического λ -синуса Фибоначчи $sF_\lambda(x)$ в точках $x = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$, в то же время λ -числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ с нечетными значениями $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ «вписываются» в график гиперболического λ -косинуса Фибоначчи $cF_\lambda(x)$ в точках $x = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ (Рис. 1-a).

С другой стороны, λ -числа Люка $L_\lambda(n)$ с четными значениями n «вписываются» в график гиперболического λ -косинуса Люка $cL_\lambda(x)$ в точках $x = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$, и λ -числа Люка $L_\lambda(n)$ с нечетными значениями n «вписываются» в график гиперболического λ -синуса Люка $sL_\lambda(x)$ в точках $x = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ (Рис. 1-b).

По аналогии с симметричными гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка [15], мы можем ввести другие виды гиперболических λ -функций Фибоначчи и Люка, в частности, гиперболические λ -тангенсы, котангенсы, секансы и косекансы и т.д.

3.4. Частные случаи гиперболических λ -функций Фибоначчи и Люка

Формулы (28)-(31) задают бесконечное множество различных гиперболических λ -функций, поскольку каждое число $\lambda > 0$ генерирует свой собственный вариант гиперболических λ -функций Фибоначчи и Люка типа (28)-(31).

Рассмотрим характерные случаи гиперболических λ -функций (28)-(31), соответствующих различным значениям λ .

Для случая $\lambda = 1$ золотая пропорция (4) является основанием гиперболических 1-функций Фибоначчи и Люка, которые для этого случая совпадают с симметричными гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка (34) и (35). В дальнейшем мы будем называть функции (34) и (35) соответственно «золотыми» гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка.

Для случая $\lambda=2$ *серебряная пропорция* $\Phi_2 = 1 + \sqrt{2}$ является основанием нового класса гиперболических функций, которые мы будем называть «серебряными» гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка:

$$sF_2(x) = \frac{\Phi_2^x - \Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1+\sqrt{2})^x - (1+\sqrt{2})^{-x} \right], \quad (36)$$

$$cF_2(x) = \frac{\Phi_2^x + \Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1+\sqrt{2})^x + (1+\sqrt{2})^{-x} \right], \quad (37)$$

$$sL_2(x) = \Phi_2^x - \Phi_2^{-x} = (1+\sqrt{2})^x - (1+\sqrt{2})^{-x}, \quad (38)$$

$$cL_2(x) = \Phi_2^x + \Phi_2^{-x} = (1+\sqrt{2})^x + (1+\sqrt{2})^{-x}. \quad (39)$$

Для случая $\lambda=3$ *бронзовая пропорция* $\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ является основанием нового класса гиперболических функций, которые мы будем называть «бронзовыми» гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка:

$$sF_3(x) = \frac{\Phi_3^x - \Phi_3^{-x}}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2} \right)^x - \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2} \right)^{-x} \right], \quad (40)$$

$$cF_3(x) = \frac{\Phi_3^x + \Phi_3^{-x}}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2} \right)^x + \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2} \right)^{-x} \right], \quad (41)$$

$$sL_3(x) = \Phi_3^x - \Phi_3^{-x} = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2} \right)^x - \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2} \right)^{-x}, \quad (42)$$

$$cL_3(x) = \Phi_3^x + \Phi_3^{-x} = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2} \right)^x + \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2} \right)^{-x}. \quad (43)$$

Для случая $\lambda=4$ *медная пропорция* $\Phi_4 = 2 + \sqrt{5}$ является основанием нового класса гиперболических функций, которые мы будем называть «медными» гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка:

$$sF_4(x) = \frac{\Phi_4^x - \Phi_4^{-x}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(2+\sqrt{5})^x - (2+\sqrt{5})^{-x} \right], \quad (44)$$

$$cF_4(x) = \frac{\Phi_4^x + \Phi_4^{-x}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(2+\sqrt{5})^x + (2+\sqrt{5})^{-x} \right], \quad (45)$$

$$sL_4(x) = \Phi_4^x - \Phi_4^{-x} = (2+\sqrt{5})^x - (2+\sqrt{5})^{-x}, \quad (46)$$

$$cL_4(x) = \Phi_4^x + \Phi_4^{-x} = (2+\sqrt{5})^x + (2+\sqrt{5})^{-x}. \quad (47)$$

Сравним теперь гиперболические λ -функции Люка (30) и (31) с классическими гиперболическими функциями (1). Нетрудно доказать [17], что для случая

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2} = e \quad (48)$$

гиперболические λ -функции Люка (30) и (31) совпадают с классическими гиперболическими функциями (1) с точностью до постоянного коэффициента $1/2$, то есть

$$sh(x) = \frac{sL_\lambda(x)}{2} \quad \text{и} \quad ch(x) = \frac{cL_\lambda(x)}{2}. \quad (49)$$

Используя (48) после простых преобразований мы можем вычислить значение λ_e , для которого выражение (49) является верным:

$$\lambda_e = e - \frac{1}{e} = 2sh(1) \approx 2.35040238. \quad (50)$$

Таким образом, согласно (49) классические гиперболические функции (1) является частным случаем гиперболических λ -функций Люка для случая (50).

3.5. Важнейшие формулы для «золотой» λ -гониометрии Фибоначчи

Заметим, что перечень гиперболических λ -функций Фибоначчи и Люка, задаваемых (28)-(31), можно продолжать до бесконечности. Этот факт дает нам основание утверждать, что функции (28)-(31) образуют основу общей теории гиперболических функций, которые, с одной стороны, обладают всеми свойствами классических гиперболических функций («гиперболические свойства») и, с другой стороны, обладают «рекурсивными свойствами», подобными свойствам λ -чисел Фибоначчи и Люка, задаваемыми рекуррентными соотношениями (13) и (22).

Ниже приведены соотношения, связывающие *золотую пропорцию* (4) с *металлическими пропорциями* (17) (таблица 1) и классические гиперболические функции (1) с гиперболическими λ -функциями Фибоначчи (28) и (29) (таблица 2).

Таблица 1. Связь золотой пропорции с металлическими пропорциями

Золотая пропорция ($\lambda = 1$)	Металлические пропорции ($\lambda > 0$)
$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}$
$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}}}$	$\Phi_\lambda = \sqrt{1 + \lambda \sqrt{1 + \lambda \sqrt{1 + \lambda \sqrt{\dots}}}}$
$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$	$\Phi_\lambda = \lambda + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\dots}}}$
$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1}$	$\Phi_\lambda^n = \lambda \Phi_\lambda^{n-1} + \Phi_\lambda^{n-2} = \Phi_\lambda \times \Phi_\lambda^{n-1}$
$F(n) = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}$	$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4 + \lambda^2}}$
$L(n) = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n}$	$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}$
$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$	$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4 + \lambda^2}}$
$cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$	$cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4 + \lambda^2}}$
$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x}$	$sL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}$
$cLs(x) = \Phi^x + \Phi^{-x}$	$cL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}$

Таблица 2. Основные формулы «золотой» фибоначчиевой гониометрии

Формулы для классических гиперболических функций	Формулы для гиперболических лямбда - функций Фибоначчи
$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}; cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$sh(x+2) = 2sh(1)ch(x+1) + sh(x)$ $ch(x+2) = 2sh(1)sh(x+1) + ch(x)$	$sF_\lambda(x+2) = \lambda cF_\lambda(x+1) + sF_\lambda(x)$ $cF_\lambda(x+2) = \lambda sF_\lambda(x+1) + cF_\lambda(x)$
$sh^2(x) - ch(x+1)ch(x-1) = -ch^2(1)$ $ch^2(x) - sh(x+1)sh(x-1) = ch^2(1)$	$[sF_\lambda(x)]^2 - cF_\lambda(x+1)cF_\lambda(x-1) = -1$ $[cF_\lambda(x)]^2 - sF_\lambda(x+1)sF_\lambda(x-1) = 1$
$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$	$[cF_\lambda(x)]^2 - [sF_\lambda(x)]^2 = \frac{4}{4+\lambda^2}$
$sh(x+y) = sh(x)ch(x) + ch(x)sh(x)$ $sh(x-y) = sh(x)ch(x) - ch(x)sh(x)$	$\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}sF_\lambda(x+y) = sF_\lambda(x)cF_\lambda(x) + cF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$ $\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}sF_\lambda(x-y) = sF_\lambda(x)cF_\lambda(x) - cF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$
$ch(x+y) = ch(x)ch(x) + sh(x)sh(x)$ $ch(x-y) = ch(x)ch(x) - sh(x)sh(x)$	$\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}cF_\lambda(x+y) = cF_\lambda(x)cF_\lambda(x) + sF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$ $\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}cF_\lambda(x-y) = cF_\lambda(x)cF_\lambda(x) - sF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$
$ch(2x) = 2sh(x)ch(x)$	$\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}cF_\lambda(2x) = sF_\lambda(x)cF_\lambda(x)$
$[ch(x) \pm sh(x)]^n = ch(nx) \pm sh(nx)$	$[cF_\lambda(x) \pm sF_\lambda(x)]^n = \left(\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}\right)^{n-1} [cF_\lambda(nx) \pm sF_\lambda(nx)]$

4. «Золотые» матрицы

4.1. Q-матрица

Известный американский математик **Вернер Хоггат** (1921-1981) исследовал свойства так называемой Q-матрицы [10], которая представляет собой квадратную матрицу следующего вида:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Если Q-матрицу (51) возвести в n-ю степень, то возникает циклическая группа с образующей (51), при этом элементами матрицы Q^n являются числа Фибоначчи (5) и Q^n при этом принимает вид:

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Детерминант матрицы (52) выражается формулой Кассини (7):

$$\det Q^n = F_{n+1}F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n. \quad (53)$$

Как показано в [21], характеристическое уравнение матрицы Q может быть записано в виде:

$$\det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 - x - 1 = 0. \quad (54)$$

Уравнение (54) является уравнением золотой пропорции (3), при этом корни этого уравнения $x_1 = \Phi$ и $x_2 = -\Phi^{-1}$ являются собственными значениями симметрической матрицы Q. Но тогда матрица Q подобна диагональной матрице $X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, то есть

$Q = TXT^{-1}$, где T называется сопрягающей матрицей. В данном случае сопрягающая матрица T и обратная к ней матрица T^{-1} имеют вид:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\Phi}{\sqrt{1+\Phi^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+\Phi^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\Phi^2}} & \frac{\Phi}{\sqrt{1+\Phi^2}} \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi}{\sqrt{1+\Phi^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\Phi^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+\Phi^2}} & \frac{\Phi}{\sqrt{1+\Phi^2}} \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Отсюда матрицу Q^n можно представить в виде:

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = TX^nT^{-1} = T \begin{pmatrix} \Phi^n & 0 \\ 0 & (-\Phi)^{-n} \end{pmatrix} T^{-1}. \quad (56)$$

4. 2. «Золотые» матрицы.

В [22] по аналогии с матрицами Q^n вида (52) введено понятие «золотых» матриц. Рассмотрим следующую символическую матрицу

$$Q_k(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{k+1}(x+1) & \varphi_k(x) \\ \varphi_k(x) & \varphi_{k+1}(x-1) \end{pmatrix}, \quad (57)$$

где функции $\varphi_k(x) = sFs(x)$ при $k=0$ (тот же результат получается при любом чётном k) и $\varphi_k(x) = cFs(x)$ при $k=1$ (тот же результат получается при любом нечётном k), $x \in R$, где R -множество всех вещественных чисел.

Отсюда получаем следующие свойства:

$$\varphi_k(x) = \frac{\Phi^x - (-1)^k \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}; \quad Q_n(n) = Q^n; \quad \det Q_k(x) = (-1)^k,$$

где $k=0;1$, $n \in Z$ -множество всех целых чисел, $x \in R$.

Но тогда, расписывая при $k=0$ и $k=1$ соотношение (57), получаем следующие две матрицы, которые называются *золотыми матрицами* [20], составленными из симметричных гиперболических функций Фибоначчи sFs , cFs вида (34):

$$\begin{cases} Q_0(x) = \begin{pmatrix} cFs(x+1) & sFs(x) \\ sFs(x) & cFs(x-1) \end{pmatrix} \\ Q_1(x) = \begin{pmatrix} sFs(x+1) & cFs(x) \\ cFs(x) & sFs(x-1) \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (58)$$

причём

$$\det Q_0(x) = 1, \quad \det Q_1(x) = -1 \quad (59)$$

Ясно, что «золотые матрицы» (58) являются обобщениями Q -матрицы (52) на непрерывную область.

Итак, основным результатом исследования, проведенного в части I статьи, является разработка общей теории гиперболических функций. В отличие от классических гиперболических функций с основанием e (число Непера), основанием нового класса гиперболических функций – *гиперболических λ -функций Фибоначчи и Люка* ($\lambda > 0$ – любое положительное число) – являются новые математические константы – *металлические пропорции*, являющиеся корнем простейшего квадратного уравнения

$x^2 - \lambda x - 1 = 0$ и задаваемые с помощью формулы $\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}$, которая при $\lambda = 1$ сводится к классической *золотой пропорции* $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Новый класс гиперболических функций, задаваемых выражениями (28)-(31), может оказаться перспективным для разработки моделей современного естествознания.

Часть II. 4-ая ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

5. «Золотая» фибоначчиевая λ -гонометрия и 4-ая проблема Гильберта

5.1. «Золотые» метрические λ -формы плоскости Лобачевского

В связи с 4-ой проблемой Гильберта авторы настоящей статьи предложили в [20] бесконечное множество метрических форм плоскости Лобачевского в зависимости от вещественного параметра $\lambda > 0$. Эти метрические формы задаются в координатах (u, v) , $0 < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, имеют гауссову кривизну $K = -1$ и представляются в виде

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4} [sF_\lambda(u)]^2 (dv)^2, \quad (60)$$

где $\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}$ - металлическая пропорция и $sF_\lambda(u)$ - гиперболический λ -синус Фибоначчи. Назовем формы (60) метрическими λ -формами плоскости Лобачевского.

В [20] мы утверждали (без доказательства), что для всякого вещественного параметра $\lambda > 0$ метрические формы (2) и (60) являются изометричными с помощью диффеоморфизма

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v) = \text{Arcch} \left[\frac{\sqrt{4 + \lambda^2}}{2} cF_\lambda(u) \right] = \text{Arcsh} \left[\frac{\sqrt{4 + \lambda^2}}{2} sF_\lambda(u) \right], \bar{v} = \bar{v}(u, v) = v, \quad (61)$$

где (u, v) , $0 < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$ и (\bar{u}, \bar{v}) , $0 < \bar{u} < +\infty$, $-\infty < \bar{v} < +\infty$.

Ниже мы приведем доказательство изометрии метрических форм (2) и (60). Это доказательство осуществляется в три этапа.

Этап 1. Докажем, что метрическая форма (60) имеет гауссову кривизну $K = -1$. С этой целью введем следующие обозначения:

$$A = \ln(\Phi_\lambda), \quad B = \frac{\sqrt{4 + \lambda^2}}{2} sF_\lambda(u). \quad (62)$$

Здесь, в соответствии с (28) $sF_\lambda(u) = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{\sqrt{4 + \lambda^2}}$, тогда второе соотношение в (62)

может быть представлено в виде:

$$B = \frac{\sqrt{4 + \lambda^2}}{2} sF_\lambda(u) = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2}, \quad (63)$$

где, в силу (17), $\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}$. Тогда соотношения (62) могут быть записаны в виде:

$$A = \ln(\Phi_\lambda) = \ln \left(\frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2} \right), \quad B = \frac{\sqrt{4 + \lambda^2}}{2} sF_\lambda(u) = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2}. \quad (64)$$

Следовательно, метрическая форма (60) может быть записана в виде:

$$(ds)^2 = A^2 (du)^2 + B^2 (dv)^2. \quad (65)$$

Принимая во внимание выражение (64) и очевидные условия:

$$\lambda > 0, \quad 0 < u < +\infty, \quad -\infty < v < +\infty,$$

мы можем записать:

$$A > 0, \quad B > 0. \quad (66)$$

Известно [23], что для метрической формы типа (65) гауссова кривизна K определяется соотношением:

$$K = K(u, v) = -\frac{1}{AB} \left[\left(\frac{A_v}{B} \right)_v + \left(\frac{A_u}{B} \right)_u \right]. \quad (67)$$

Здесь символы $(\)_v$ и $(\)_u$ означают частные производные по v и u .

Используя определение (64), мы можем получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} A_v &= 0; B_u = \frac{\Phi_\lambda^u + \Phi_\lambda^{-u}}{2} \ln(\Phi_\lambda); B_{uu} = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2} \ln^2(\Phi_\lambda); \\ AB &= \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2} \ln(\Phi_\lambda); \left(\frac{A_v}{B} \right)_v = 0; \left(\frac{B_u}{A} \right)_u = \frac{B_{uu}}{A} = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2} \ln(\Phi_\lambda); \\ K &= -\frac{1}{AB} \left[\left(\frac{A_v}{B} \right)_v + \left(\frac{B_u}{A} \right)_u \right] = -\left[\frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2} \ln(\Phi_\lambda) \right]^{-1} \left[\frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2} \ln(\Phi_\lambda) \right] = -1, \end{aligned}$$

что и следовало доказать.

Этап 2. Докажем, что преобразование (61) может быть записано в виде:

$$\bar{u} = [\ln(\Phi_\lambda)]u, \bar{v} = v \quad (68)$$

Так как

$$\frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{2} cF_\lambda(u) = \frac{\Phi_\lambda^u + \Phi_\lambda^{-u}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{2} sF_\lambda(u) = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2}, \quad (69)$$

Тогда, в силу (69), из преобразования (61) для случаев $\bar{u} > 0, u > 0$ мы получаем:

$$ch(u) = \frac{\Phi_\lambda^u + \Phi_\lambda^{-u}}{2} \quad \text{и} \quad sh(u) = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2}. \quad (70)$$

Возьмем дифференциал d от первого соотношения в (70):

$$d[ch(u)] = sh(\bar{u})d\bar{u} = d\left[\frac{\Phi_\lambda^u + \Phi_\lambda^{-u}}{2} \right] = [\ln(\Phi_\lambda)] \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2} du. \quad (71)$$

Так как $sh(\bar{u}) = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2}$, тогда после подстановки этого выражения в (71) мы получаем: $sh(\bar{u})d\bar{u} = [\ln(\Phi_\lambda)]sh(\bar{u})du$. Так как $\bar{u} > 0$, тогда после сокращения на $sh(\bar{u})$ мы приходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{u}} = \ln(\Phi_\lambda). \quad (72)$$

Следовательно, мы имеем:

$$\bar{u} = [\ln(\Phi_\lambda)]u + C, \quad (73)$$

где $C = const$. Так как в (72) мы имеем $\bar{u} = 0$ при $u = 0$, тогда в (72) мы можем положить $C = 0$, и тогда мы получаем из (73), что $\bar{u} = [\ln(\Phi_\lambda)]u$. Но тогда для всех

$$(u, v), 0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty, \quad (\bar{u}, \bar{v}), 0 < \bar{u} < +\infty, -\infty < \bar{v} < +\infty \quad (74)$$

вместо (61) мы можем рассматривать преобразование (68), что и следовало доказать.

Этап 3. Докажем, что метрические формы (2) и (71) *изометричны*. Для доказательства мы будем использовать преобразования (68), которые являются диффеоморфизмами для всех значений переменных, задаваемых (74).

С этой целью рассмотрим более общую ситуацию, когда заданы две изометричные формы:

$$\begin{cases} (ds)^2 = \bar{E}(\bar{u}, \bar{v})(d\bar{u})^2 + 2\bar{F}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G}(\bar{u}, \bar{v})(d\bar{v})^2 \\ (ds)^2 = E(u, v)(du)^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)(dv)^2 \end{cases} \quad (75)$$

где $\bar{E} > 0$, $\bar{G} > 0$, $\bar{E}\bar{G} - (\bar{F})^2 > 0$, $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$. Обозначим диффеоморфизм, осуществляющий эту изометричность, в следующем виде:

$$h: \bar{u} = \bar{u}(u, v), \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v). \quad (76)$$

Рассмотрим дифференциал от \bar{u} :

$$d\bar{u} = d[\bar{u}(u, v)] = \bar{u}_u du + \bar{u}_v dv \text{ and } d\bar{v} = d[\bar{v}(u, v)] = \bar{v}_u du + \bar{v}_v dv. \quad (77)$$

Подставим (77) в (75) и при этом напомним, что в соответствии с нашим предположением первая и вторая метрические формы в (75) являются изометричными. Принимая во внимание, что они имеют общий линейный элемент ds , мы можем записать следующее тождество:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= \bar{E} \times (\bar{u}_u du + \bar{u}_v dv)^2 + 2\bar{F} \times (\bar{u}_u du + \bar{u}_v dv)(\bar{v}_u du + \bar{v}_v dv) + \bar{G} \times (\bar{v}_u du + \bar{v}_v dv)^2 \\ &= E \times (du)^2 + 2F \times dudv + G \times (dv)^2 \end{aligned} \quad (78)$$

Сравнивая в левой и правой части тождества (78) равные коэффициенты при $(du)^2$, du , dv и $(dv)^2$, мы получим следующие соотношения:

$$\begin{pmatrix} E \\ F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{u}_u)^2 & 2\bar{u}_u \bar{v}_u & (\bar{v}_u)^2 \\ \bar{u}_u \bar{u}_v & \bar{u}_u \bar{v}_v + \bar{u}_v \bar{u}_u & \bar{v}_u \bar{v}_v \\ (\bar{u}_v)^2 & 2\bar{u}_v \bar{v}_v & (\bar{v}_v)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{E} \\ \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Справедливо также и обратное утверждение, то есть, если мы имеем две метрические формы

$$\begin{cases} (d\bar{s})^2 = \bar{E}(\bar{u}, \bar{v})(d\bar{u})^2 + 2\bar{F}(\bar{u}, \bar{v})d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G}(\bar{u}, \bar{v})(d\bar{v})^2 \\ (ds)^2 = E(u, v)(du)^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)(dv)^2 \end{cases} \quad (80)$$

и существует диффеоморфизм (76) такой, что соотношения (79) выполняются, тогда $(d\bar{s})^2 = (ds)^2$, то есть, метрические формы (80) изометричны.

В нашей ситуации мы имеем две метрические формы (2) и (60). Как показано выше (этап 1, соотношение (64)), метрическая форма (60) может быть записана в виде выражения (65), коэффициенты которого A^2 и B^2 имеют вид:

$$A^2 = \ln^2(\Phi_\lambda), \quad B^2 = \left(\frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2} \right)^2.$$

Докажем изометрию метрических форм (2) и (60):

$$\begin{cases} (d\bar{s})^2 = (d\bar{u})^2 + sh^2(\bar{u})(d\bar{v})^2 \\ (ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \left(\frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2} \right)^2 (dv)^2 \end{cases} \quad (81)$$

Эта изометрия доказывается путем использования аналитического диффеоморфизма (76), имеющего вид $\bar{u} = \bar{u}(u, v) = [\ln(\Phi_\lambda)]u$, $\bar{v} = \bar{v}(u, v) = v$, который, как показано в параграфе 5.1 (этап 2), может быть записан в форме (68).

Заметим, что область изменения параметров и переменных имеет следующий вид:

$$\lambda > 0, (0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty), (0 < \bar{u} < +\infty, -\infty < \bar{v} < +\infty), \quad (82)$$

где, в силу (17), имеем: $\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}$.

Тогда, в терминах соотношений (75) для метрических форм (81) мы получаем следующие выражения для коэффициентов этих форм:

$$\begin{cases} \bar{E}(\bar{u}, \bar{v}) = 1, \bar{F}(\bar{u}, \bar{v}) = 0, \bar{G}(\bar{u}, \bar{v}) = sh^2(\bar{u}), \\ E(u, v) = \ln^2(\Phi_\lambda), F(u, v) = 0, G(u, v) = \left(\frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (83)$$

Из преобразований (68) мы получаем следующие производные:

$$\bar{u}_u = \ln(\Phi_\lambda), \bar{u}_v = 0, \bar{v}_u = 0, \bar{v}_v = 1 \quad (84)$$

Тогда с учетом (83) и (84) преобразования (80) могут быть записаны в форме:

$$\begin{bmatrix} \ln^2(\Phi_\lambda) \\ 0 \\ \left(\frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln^2(\Phi_\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ sh^2(\bar{u}) \end{bmatrix} \quad (85)$$

Отсюда мы получаем следующие тождества:

$$\begin{cases} [\ln(\Phi_\lambda)]^2 \equiv [\ln(\Phi_\lambda)]^2 \\ 0 \equiv 0 \\ \left(\frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2}\right)^2 \equiv sh^2(\bar{u}) \end{cases} \quad (86)$$

Первые два тождества (86) очевидны. Последнее тождество из (86) вытекает из второго соотношения из (70) $sh(\bar{u}) = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2}$, которое доказано в параграфе 5.1 (этап 2) при $\bar{u} = [\ln(\Phi_\lambda)]u$, где $\lambda > 0$ и $u > 0$.

Таким образом, используя преобразования (68), мы доказали, что метрические формы (2) и (60) изометричны.

5.2. Частные случаи метрических λ -форм плоскости Лобачевского

1) «Золотая» метрическая форма плоскости Лобачевского

Для случая $\lambda = 1$ мы имеем $\Phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$ – золотая пропорция, и, следовательно, метрическая форма (60) сводится к следующему:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_1)(du)^2 + \frac{5}{4}[sFs(u)]^2 (dv)^2, \quad (87)$$

где $\ln^2(\Phi_1) = \ln^2\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.231565$ и $sFs(u) = \frac{\Phi_1^u - \Phi_1^{-u}}{\sqrt{5}}$ – симметричный гиперболический синус Фибоначчи (см. параграф 4.1).

Будем называть метрическую форму (87) «золотой» метрической формой плоскости Лобачевского.

2) «Серебряная» метрическая форма плоскости Лобачевского

Для случая $\lambda = 2$ мы имеем $\Phi_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2.1421$ – серебряная пропорция, и, следовательно, метрическая форма (71) сводится к следующему:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_2)(du)^2 + 2[sF_2(u)]^2(dv)^2, \quad (88)$$

где $\ln^2(\Phi_2) \approx 0.776819$ и $sF_2(u) = \frac{\Phi_2^u - \Phi_2^{-u}}{2\sqrt{2}}$.

Будем называть метрическую форму (88) «серебряной» метрической формой плоскости Лобачевского.

3) «Бронзовая» метрическая форма плоскости Лобачевского

Для случая $\lambda = 3$ мы имеем $\Phi_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3.30278$ - бронзовая пропорция и, следовательно, форма (60) сводится к следующему:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_3)(du)^2 + \frac{13}{4}[sF_3(u)]^2(dv)^2 \quad (89)$$

где $\ln^2(\Phi_3) \approx 1.42746$ и $sF_3(u) = \frac{\Phi_3^u - \Phi_3^{-u}}{\sqrt{13}}$.

Будем называть метрическую форму (89) «бронзовой» метрической формой плоскости Лобачевского.

4) «Медная» метрическая форма плоскости Лобачевского

Для случая $\lambda = 4$ мы имеем $\Phi_4 = 2 + \sqrt{5} \approx 4.23607$ - медная пропорция и, следовательно, форма (60) сводится к следующему:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_4)(du)^2 + 5[sF_4(u)]^2(dv)^2, \quad (90)$$

где $\ln^2(\Phi_4) \approx 2.08408$ и $sF_4(u) = \frac{\Phi_4^u - \Phi_4^{-u}}{2\sqrt{5}}$.

Будем называть метрическую форму (90) «медной» метрической формой плоскости Лобачевского

5) Классическая метрическая форма плоскости Лобачевского

Для случая $\lambda = \lambda_e = 2sh(1) \approx 2.350402$ мы имеем $\Phi_{\lambda_e} = e \approx 2.7182$ - число Непере и, следовательно, форма (60) сводится к выражению (2):

$$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2,$$

то есть, к известной [23] классической метрической форме плоскости Лобачевского, задаваемой в псевдогеодезических координатах (u, v) , где $0 < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$.

В таблице 3 сведены выражения для всех рассмотренных выше частных случаев метрических λ -форм плоскости Лобачевского.

Таблица 3. Метрические λ -формы Лобачевского

Название	λ	Φ_λ	Аналитическое выражение
Метрическая λ -форма Лобачевского	$\lambda > 0$	$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4 + \lambda^2}{4}[sF_\lambda(u)]^2(dv)^2$
"Золотая" форма	$\lambda = 1$	$\Phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_1)(du)^2 + \frac{5}{4}[sF_1(u)]^2(dv)^2$
"Серебряная" форма	$\lambda = 2$	$\Phi_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2.1421$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_2)(du)^2 + 2[sF_2(u)]^2(dv)^2$
"Бронзовая" форма	$\lambda = 3$	$\Phi_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3.30278$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_3)(du)^2 + \frac{13}{4}[sF_3(u)]^2(dv)^2$
"Медная" форма	$\lambda = 4$	$\Phi_4 = 2 + \sqrt{5} \approx 4.23607$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_4)(du)^2 + 5[sF_4(u)]^2(dv)^2$
Классическая форма	$\lambda_e \approx 2.350402$	$\Phi_{\lambda_e} = e \approx 2.7182$	$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2$

6. Геодезические линии и другие геометрические объекты метрических λ -форм плоскости Лобачевского

Геодезические линии и углы между геодезическими линиями являются важнейшими понятиями внутренней геометрии. Если метрическая форма задана, тогда геодезические линии определяются как экстремумы функционалов длин кривых.

Выше мы доказали (см. этап 3 параграфа 5.1), что метрические λ -формы плоскости Лобачевского вида (60) совпадают с метрическими формами (65). Для удобства введем следующие обозначения для этих форм:

$$(ds)^2 = A^2 (du)^2 + [B(u)]^2 (dv)^2, \quad (91)$$

где

$$A = \ln(\Phi_\lambda) > 0, B(u) = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2} > 0, \Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}, \lambda > 0, 0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty \quad (92)$$

Легко доказать (см. формулу (70)), что для условий (92) мы имеем:

$$sh(Au) = B(u) = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2} > 0, ch(Au) = C(u) = \frac{\Phi_\lambda^u + \Phi_\lambda^{-u}}{2} > 0. \quad (93)$$

Рассмотрим трехмерное пространство Минковского $L^3 = (X, Y, Z)$ с метрикой Минковского

$$(dl)^2 = dX^2 - dY^2 - dZ^2, \quad (94)$$

где dl - линейный элемент пространства L^3 . Рассмотрим теперь верхнюю половину M^2 двуполостного гиперboloида:

$$X^2 - Y^2 - Z^2 = 1, X > 0. \quad (95)$$

Поверхность M^2 может быть задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} X = X(u, v) = ch(Au) = C(u) \\ Y = Y(u, v) = sh(Au) \cos(v) = B(u) \cos(v) \\ Z = Z(u, v) = sh(Au) \sin(v) = B(u) \sin(v) \end{cases} \quad (96)$$

Путем непосредственной проверки, мы можем убедиться что

$$[X(u, v)]^2 - [Y(u, v)]^2 - [Z(u, v)]^2 \equiv 1, X(u, v) > 0. \quad (97)$$

Подставим (96) в соотношение (94), тогда для верхней половины M^2 двуполостного гиперboloида мы получим метрическую форму:

$$(dl)^2 = -\left\{ A^2 (du)^2 + [B(u)]^2 (dv)^2 \right\}, \quad (98)$$

где A и $B(u)$ задаются в виде (92). Отсюда мы получаем метрическую λ -форму плоскости Лобачевского вида (91):

$$(ds)^2 = -(dl)^2 = A^2 (du)^2 + [B(u)]^2 (dv)^2$$

Рассмотрим в пространстве $L^3 = (X, Y, Z)$ следующие плоскости

$$aX + bY + cZ = 0, (a^2 + b^2 + c^2 > 0), \quad (99)$$

которые проходят через начало координат $O(0, 0, 0)$ и пересекают верхнюю половину M^2 двуполостного гиперboloида (95), если коэффициенты уравнения (99) удовлетворяют следующим ограничениям:

$$-a^2 + b^2 + c^2 > 0 \quad (100)$$

Тогда линии пересечения плоскостей (99) с поверхностью (95) являются геодезическими линиями на поверхности (95) в метрике (94) (см. [23]). Это аналогично случаю, когда на единичной сфере $S^2: X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ линии пересечения плоскостей $aX + bY + cZ = 0$ (где $a^2 + b^2 + c^2 > 0$) с этой сферой являются геодезическими линиями в метрике с постоянной гауссовой кривизной $K = 1$.

Если мы подставим (96) в (99), тогда в λ -метрике (91) в координатах (u, v) мы получим уравнение геодезических линий в следующей неявной форме:

$$ach(Au) + bsh(Au)\cos(v) + csh(Au)\sin(v) = 0, \quad (101)$$

где $\lambda > 0, 0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty, A = \ln(\Phi_\lambda) > 0, \Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2} > 1$.

Заметим, что коэффициенты a, b, c в (101) удовлетворяют следующим ограничениям:

$$a^2 + b^2 + c^2 > 0, \quad -a^2 + b^2 + c^2 > 0. \quad (102)$$

Запишем (101) в виде:

$$F(u, v) = a \frac{\Phi_\lambda^u + \Phi_\lambda^{-u}}{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}} + b \cos(v) + c \sin(v) = 0. \quad (103)$$

Пусть (u_0, v_0) - координаты точки пересечения геодезических линий, задаваемых уравнениями:

$$\begin{cases} F_1(u, v) = a_1 \frac{\Phi_\lambda^u + \Phi_\lambda^{-u}}{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}} + b_1 \cos(v) + c_1 \sin(v) = 0 \\ F_2(u, v) = a_2 \frac{\Phi_\lambda^u + \Phi_\lambda^{-u}}{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}} + b_2 \cos(v) + c_2 \sin(v) = 0 \end{cases}$$

Угол α пересечения двух геодезических линий (отсчитываемый против часовой стрелки), в соответствии с формулами дифференциальной геометрии, может быть найден из следующего соотношения:

$$tg(\alpha) = \frac{\sqrt{EG - F^2} \left(\frac{\partial F_1}{\partial u} \frac{\partial F_2}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial v} \frac{\partial F_2}{\partial u} \right)}{E \frac{\partial F_1}{\partial u} \frac{\partial F_1}{\partial v} + F \left(\frac{\partial F_1}{\partial u} \frac{\partial F_2}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial v} \frac{\partial F_2}{\partial u} \right) + G \frac{\partial F_2}{\partial u} \frac{\partial F_2}{\partial v}}, \quad (104)$$

где правая часть соотношения (115) берется в точке (u_0, v_0) , а выражения $E = E(u, v)$,

$F = F(u, v), G = G(u, v)$ являются коэффициентами метрической формы

$$(ds)^2 = E(dv)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2.$$

Заметим, что формулы для $\sin(\alpha)$ и $\cos(\alpha)$ могут быть записаны по аналогии.

В нашей ситуации в соответствии с (60), (62), (91), (92) мы можем записать:

$$E = \ln^2(\Phi_\lambda), F = 0, G = \left(\frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{4 + \lambda^2}}{2} sF_\lambda(u) \right)^2 = sh^2[u \ln(\Phi_\lambda)]. \quad (105)$$

Частные производные по u и v от функции $F(u, v)$ вида (103) имеют следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = a \frac{\ln(\Phi_\lambda)}{ch^2[u \ln(\Phi_\lambda)]}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = -b \sin(v) + c \cos(v) \quad (106)$$

В дальнейшем по аналогии с плоскостью Лобачевского, задаваемой метрическими λ -формами (60), для любого действительного числа $\lambda > 0$ мы можем найти соответствующие формулы для расстояний между двумя точками, преобразований движения и все другие математические присущие этой геометрии.

Авторы настоящей статьи не преследуют цель записать все соответствующие формулы и геометрические конструкции, которые связаны с метрическими λ -формами плоскости Лобачевского, поскольку эта проблема является предметом отдельного исследования.

В этой связи было бы весьма полезным объединить в дальнейшем развитые авторами метрические λ -формы плоскости Лобачевского вида (60), имеющие гауссову кривизну $K = -1$ и реализуемые для любого действительного числа $\lambda > 0$ на полуплоскости $\Pi^+ = (u, v) (0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty)$, с хорошо изученной и удобной для приложений

классическую модель *плоскости Лобачевского*, предложенной в 1882 **Анри Пуанкаре** (1854-1912) на диске

$$D^2 : x^2 + y^2 < 1, \quad (107)$$

пополненную *абсолютом* $E : x^2 + y^2 = 1$, который играет роль носителя бесконечно удаленных точек в *плоскости Лобачевского*.

7. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского на единичном диске

7.1. Геодезические линии и углы пересечения геодезических линий в модели Пуанкаре

Напомним основные факты *геометрии Лобачевского* применительно к *модели Пуанкаре* на диске (107). Информация взята из [23].

Метрическая форма Пуанкаре гауссовой кривизны $K = -1$ имеет следующий вид:

$$(ds)^2 = \frac{4[(dx)^2 + (dy)^2]}{(1 - x^2 - y^2)^2}. \quad (108)$$

Геодезические линии в *модели Пуанкаре* являются либо дугами, ортогональными к *абсолюту* (если эти геодезические линии не содержат начало координат $O(0,0)$) или отрезками прямых линий (если эти геодезические линии проходят через начало координат).

В общем случае уравнение геодезических линий в *модели Пуанкаре* имеет следующий вид:

$$F(x, y) = a(1 + x^2 + y^2) - 2bx - 2cy = 0, \quad x^2 + y^2 < 1, \quad (109)$$

где $a^2 + b^2 + c^2 > 0, -a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Угол пересечения α двух геодезических линий (отсчитываемый против часовой стрелки) определяется из соотношения:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial x}}{\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x}}, \quad (110)$$

где правая часть в (110) берется в точке (x_0, y_0) , являющейся точкой пересечения следующих геодезических линий :

$$\begin{cases} F_1(x, y) = a_1(1 + x^2 + y^2) - 2b_1x - 2c_1y = 0 \\ F_2(x, y) = a_2(1 + x^2 + y^2) - 2b_2x - 2c_2y = 0 \end{cases} \quad (111)$$

Таким образом, в метрике (108) углы измеряются в евклидовом смысле.

Пусть $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ произвольные точки *плоскости Лобачевского*, которые реализуются на диске (107) с метрикой (108).

В дальнейших рассуждениях мы будем использовать комплексные числа. Мы обозначим точку $A(x, y)$ через $z = x + iy$, где $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Как известно, модуль комплексного числа z равен $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Пусть $\bar{z} = x - iy$ число, комплексно-сопряженное с комплексным числом $z = x + iy$.

Для этого случая точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ в комплексной записи могут быть представлены следующим образом: $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$. Известно, что *расстояние* $\rho(A_1, A_2)$ между двумя точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ в комплексной записи имеет следующий вид:

$$\rho(A_1, A_2) = \ln \left(\frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2} \right|} \right) \quad (112)$$

В комплексной записи метрика (108) представляется в виде:

$$(ds)^2 = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} dz d\bar{z}, |z| < 1. \quad (113)$$

Движения метрики (113) в плоскости Лобачевского записываются следующим образом:

$$z' = f(z) = \frac{Az + \bar{B}}{Bz + A}, |A|^2 - |B|^2 = 1, \quad (114)$$

где $z = x + iy$ и $z' = x' + iy'$. Заметим, что при движениях (114) расстояния между точками и углы между геодезическими линиями сохраняются.

7.2. Связь между моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского на единичном диске и «золотыми» λ -моделями плоскости Лобачевского

В работе [23] доказано, что верхняя половина M^2 двуполостного гиперboloида (95) допускает параметризацию следующего вида:

$$X = X(x, y) = \frac{2}{1 - x^2 - y^2} - 1, y = Y(x, y) = \frac{2x}{1 - x^2 - y^2}, Z = Z(x, y) = \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}, \quad (115)$$

где $x^2 + y^2 < 1$.

Непосредственное вычисление показывает, что если подставить (115) в соотношение (94), тогда мы получим вид метрики (108) на M^2 в координатах (x, y) , то есть, метрика модели Пуанкаре плоскости Лобачевского на единичном диске $x^2 + y^2 < 1$ имеет вид

$$(ds)^2 = -(dl)^2 = \frac{4[(dx)^2 + (dy)^2]}{(1 - x^2 - y^2)^2},$$

где dl – линейный элемент вида (94).

Таким образом, преобразования (115) приводят к модели Пуанкаре на единичном диске, основные свойства которой описаны в пункте 7.1 настоящей статьи.

Чтобы перейти от модели Пуанкаре плоскости Лобачевского на единичном диске $x^2 + y^2 < 1$ к метрическим λ -формам плоскости Лобачевского на полуплоскости $0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty$, мы введём другую параметризацию верхней половины M^2 двуполостного гиперboloида (95), связанную с предыдущей параметризацией (115) следующими соотношениями:

$$\begin{cases} X = X(x, y) = \frac{2}{1 - x^2 - y^2} - 1 = ch(Au) \\ Y = Y(x, y) = \frac{2x}{1 - x^2 - y^2} = sh(Au) \cos(v) \\ Z = Z(x, y) = \frac{2y}{1 - x^2 - y^2} = sh(Au) \sin(v) \end{cases} \quad (116)$$

где

$$A = \ln(\Phi_\lambda) > 0, \Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}, \lambda > 0 \quad (117)$$

Выше мы доказали, что если представить верхнюю половину M^2 двуполостного гиперболоида (95) в виде (96)

$$X = ch(Au), Y = sh(Au)\cos(v), Z = sh(Au)\sin(v),$$

то мы непосредственно придём к метрическим λ -формам плоскости Лобачевского вида (60) или, в другой записи, вида (91)

$$(ds)^2 = A^2(du)^2 + [B(u)]^2(dv)^2,$$

где

$$B(u) = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2} > 0, 0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty. \quad (118)$$

В силу (93) при условии $0 < u < +\infty$ имеют место следующие соотношения:

$$sh(Au) = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2} > 0, ch(Au) = \frac{\Phi_\lambda^u + \Phi_\lambda^{-u}}{2} > 0. \quad (119)$$

Тогда, из соотношений (116) и (119) мы получаем непосредственно следующие связи между параметрами (x, y) и (u, v) :

$$\begin{cases} x = x(u, v) = \frac{sh(Au)}{1 + ch(Au)} \cos(v) = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2 + \Phi_\lambda^u + \Phi_\lambda^{-u}} \cos(v) \\ y = y(u, v) = \frac{sh(Au)}{1 + ch(Au)} \sin(v) = \frac{\Phi_\lambda^u - \Phi_\lambda^{-u}}{2 + \Phi_\lambda^u + \Phi_\lambda^{-u}} \sin(v) \end{cases} \quad (120)$$

Заметим, что для любых $\lambda > 0$ и $0 < u < +\infty$ преобразования (120) являются диффеоморфизмами, потому что их якобиан не равен нулю и они устанавливают связь между метрическими λ -формами плоскости Лобачевского в координатах $0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty$ и классической моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского на единичном диске $x^2 + y^2 < 1$.

Более того, преобразования (120) устанавливают изометрию между метрической формой Пуанкаре (108) и метрическими λ -формами вида (60) или, в другой записи, вида (91).

Используя преобразования (120) и формулы (112) и (114), для метрических λ -форм плоскости Лобачевского в координатах $0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty$, для каждого вещественного числа $\lambda > 0$ мы можем получить формулу для расстояния между двумя произвольными точками (u_1, v_1) и (u_2, v_2) и формулу для движения метрик (60) и (91).

Общий итог исследования, выполненного в части II, состоит в том, что получено бесконечное множество метрических λ -форм плоскости Лобачевского ($\lambda > 0$ -заданное положительное число), задаваемых выражением (60). Все эти формы изометричны классической метрической форме плоскости Лобачевского, задаваемой выражением (2).

А это означает, что полученные авторами новые «золотые» модели плоскости Лобачевского вместе с классическими геометриями Лобачевского, Римана и Минковского «могут рассматриваться как ближайшие геометрии к обыкновенной геометрии Евклида» (Давид Гильберт).

Таким образом, результаты авторов, полученные в данной статье, являются новым важным вкладом в решение 4-й проблемы Гильберта.

Часть III. Преобразования Фибоначчи-Лоренца и «золотая» интерпретация специальной теории относительности

8. Преобразования Лоренца

Как упоминалось во введении, преобразованиями Лоренца называются кинематические формулы преобразования координат и времени в специальной теории

относительности (СТО), созданной **Альбертом Эйнштейном** (1879 – 1955) в 1905 году. Они были предложены в 1904 году нидерландским физиком и математиком **Гендриком Антоном Лоренцом** (1853–1928), как преобразования, относительно которых инвариантны уравнения электродинамики.

Преобразования Лоренца устанавливают связь между пространственными координатами (x_1, x_2, x_3) и моментом времени t события, наблюдаемого в *инерциальной системе отсчёта* (ИСО) $K = (x_0 = ct, x_1, x_2, x_3)$, и пространственными координатами $(x'_0 = ct', x'_1, x'_2, x'_3)$ и моментом времени t' этого же события, наблюдаемого в другой ИСО $K' = (x'_0 = ct', x'_1, x'_2, x'_3)$.

Здесь c [$м \cdot сек^{-1}$] – скорость света в вакууме, t [$сек$] – время, x_0, x_1, x_2, x_3 имеют размерность [$м$]. Для случая, когда ИСО K' движется относительно ИСО K со скоростью v [$м \cdot сек^{-1}$] вдоль оси x_1 , преобразования Лоренца имеют вид [23]:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) & 0 & 0 \\ sh(\theta) & ch(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad (121)$$

где угол θ ($-\infty < \theta < +\infty$) называется *углом гиперболического поворота*, при этом

$$sh(\theta) = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad ch(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \quad (122)$$

Четырёхмерное пространство R_1^4 с координатной системой $K = (x_0 = ct, x_1, x_2, x_3)$, снабжённое знакопеременной метрикой

$$(ds)^2 = (dx_0)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2, \quad (123)$$

где ds – элемент дуги, называется *четырёхмерным пространством Минковского*, а метрика (123) – *метрикой Минковского*.

Это пространство предложено немецким математиком и физиком **Германом Минковским** (1864-1909) в 1908 году в качестве геометрической интерпретации пространства-времени специальной теории относительности.

Метрика Минковского (123) обладает замечательным свойством *инвариантности* относительно преобразований Лоренца (121).

Из инвариантности метрики Минковского (123) относительно преобразований Лоренца (121) с учётом соотношений (122) вытекает целый ряд следствий. В частности, из них следует *релятивистский эффект замедления времени* и *лоренцово сокращение длины*, а также вывод об *относительности одновременности*.

В работе [23] рассмотрены также n -мерные пространства R_1^n ($n \geq 2$) с координатной системой $K = (x_0 = ct, x_1, \dots, x_{n-1})$, снабжённые знакопеременной метрикой

$$(ds)^2 = (dx_0)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (dx_i)^2,$$

которые названы *пространствами Минковского размерности n* .

В частности, в [23] подробно исследован случай $n=2$ (*плоскость Минковского* R_1^2) и *двумерные преобразования Лоренца*

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) \\ sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}, \quad (124)$$

где $sh(\theta), ch(\theta)$ удовлетворяют условию (122).

Определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) \\ sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix} \quad (125)$$

преобразования (124) равен $\det A = ch^2(\theta) - sh^2(\theta) = 1$, а метрика Минковского при этом имеет вид:

$$(ds)^2 = (dx_0)^2 - (dx_1)^2. \quad (126)$$

Преобразования (124) названы в [23] *собственными двумерными преобразованиями Лоренца*.

Поскольку в (122) присутствует $\sqrt{1-(v/c)^2}$ и $th(\theta) = v/c$, то $1-(v/c)^2 > 0$, откуда при всех θ ($-\infty < \theta < +\infty$) выполняется неравенство:

$$|v| < c. \quad (127)$$

Можно также рассматривать *несобственные двумерные преобразования Лоренца*

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sh(\theta) & ch(\theta) \\ ch(\theta) & sh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}, \quad (128)$$

где определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} sh(\theta) & ch(\theta) \\ ch(\theta) & sh(\theta) \end{pmatrix} \quad (129)$$

преобразования (128) равен $\det A = sh^2(\theta) - ch^2(\theta) = -1$.

Однако вопрос о рассмотрении несобственных преобразований Лоренца и их обобщений мы выносим за рамки настоящей статьи.

9. Современные представления о скорости света в вакууме и роли фактора самоорганизации в эволюции Вселенной

9.1. Скорость света материальной Вселенной уменьшается в процессе её эволюции

Как упоминалось во Введении, основной спор, касающийся СТО, в основном, идёт относительно *принципа постоянства скорости света в вакууме*. В последние годы ряд ученых в области космологии выдвинули гипотезу, согласно которой для *наблюдаемой материальной Вселенной* ставится под сомнение постоянство фундаментальной величины, на которую опираются основные законы современной физики – скорости света c в вакууме.

По мнению группы учёных, возглавляемых физиком-теоретиком **Поллом Дэвисом (Paul Davis)** из Университета Маскуэиге в Сиднее, скорость света c меняется [24]. Согласно новой гипотезе, значение величины c скорости света в вакууме, которое сейчас считается постоянным параметром, с увеличением возраста Вселенной уменьшается. Новая гипотеза базируется на информации, собранной астрономом **Джоном Веббом (John Webb)**. Он обнаружил, что характеристики света от *квазара*, удалённого от Земли приблизительно на 3,7 миллиона парсеков, не соответствуют ожидаемым. Как отмечают астрофизики, из этого наблюдения возможны два вывода – либо о непостоянстве скорости света, либо о переменной величине заряда электрона. Однако последнее предполагает нарушение *принципа уменьшения энтропии*, т.е. второго начала термодинамики.

Поэтому учёные сделали заключение, что для нашей наблюдаемой материальной Вселенной **скорость света c в вакууме с увеличением времени уменьшается.**³

9.2. О самоорганизации Вселенных с противоположным течением времени

Другая фундаментальная идея нашей статьи связана с учетом фактора самоорганизации как для нашей материальной Вселенной в процессе ее эволюции [25, 26], так и для гипотетической нематериальной Вселенной.

Согласно современным представлениям [26] в развитии нашей материальной Вселенной можно выделить ряд процессов самоорганизации и деградации: 1) исходный вакуум; 2) возникновение суперструн; 3) рождение частиц; 4) разделение вещества и излучения; 5) рождение Солнца, звезд, галактик; 6) возникновение цивилизации; 7) гибель Солнца; 8) гибель Вселенной.

Наша идея состоит в том, чтобы связать факт изменения скорости света c в процессе эволюции этих Вселенных с двумя факторами:

1) ввести для этих Вселенных зависимость скорости света c в вакууме от параметра самоорганизации ψ , под которым понимается некоторая безразмерная величина, значение которой для материальной Вселенной возрастает от $\psi=0$ до $\psi=+\infty$, а для нематериальной Вселенной ψ убывает от $\psi=0$ до $\psi=-\infty$;

2) связать для этих Вселенных параметр самоорганизации ψ с текущим временем T их эволюции, начиная от значения $T=0$ - сингулярности пространства времени («Большого Взрыва»).

9.3. Роль золотой пропорции и Платоновых тел в современной науке

Важнейшая идея исследования состоит в том, чтобы поставить в центр наших рассуждений золотую пропорцию $\Phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$, которая в течение многих тысячелетий считалась одной из важнейших математических констант Природы, связанной с процессами самоорганизации Вселенной.

Существует достаточно подтверждений о том, что золотая пропорция, и связанные с ней Платоновы тела проникли в различные области современного теоретического естествознания (кристаллография – квазикристаллы Шехтмана [27], химия – fullerenes (Нобелевская Премия 1996 г.), квантовая физика – теория E -infinity Эль Нашие [28-32], генетика – «золотые» геноматрицы Петухова [33] и т.д.).

Выше мы упоминали о геометрии Боднара [12] – новой геометрической теории филлотаксиса, основанной на «золотых» гиперболических функциях. Исследование резонансной структуры генетического кода и общая классификация генетических кодов на этой основе [34] является еще одним примером успешного применения «золотой» фибоначчиевой гониометрии. Классификация генетических кодов, приведенная в [34], основана на принципе самоорганизации Природы.

³ Что касается гипотетической Вселенной, состоящей из антиматерии и для которой в процессе её эволюции время течёт в отрицательном направлении, то насколько известно авторам данной статьи, эти вопросы остаются открытыми.

В заключение уместно упомянуть о работах известного белорусского философа **Эдуарда Сороко**. В книге [35] им сформулирован следующий *Закон структурной гармонии систем*: «**Обобщенные золотые сечения суть инварианты, на основе и посредством которых в процессе самоорганизации естественные системы обретают гармоничное строение, стационарный режим существования, структурно-функциональную ... устойчивость**».

Все изложенные научные факты отражают важнейшую тенденцию современной науки – возврат к идеям Гармонии и Золотого Сечения, воплощенных в Пифагорейской доктрине о числовой гармонии Мироздания, космологии Платона и Началах Евклида.

9.4. Основные гипотезы исследования

1. Мы допускаем, что *скорость света* c в вакууме в процессе эволюции, как для нашей *материальной Вселенной*, так и для гипотетической *антиматериальной Вселенной*, **не является постоянной величиной и не равна эйнштейновской скорости света в вакууме**

$$c_{эйн} = 3 \cdot 10^8 \text{ м.сек}^{-1} [\text{м.сек}^{-1}] \quad (\text{более точно: } c_{эйн} = 2.998 \cdot 10^8 [\text{м.сек}^{-1}]),$$

используемой в СТО, хотя, априори, c может быть и сколь угодно близка к $c_{эйн}$.

2. Мы постулируем следующую связь *скорости света* c в вакууме для этих Вселенных с вводимым ниже (пункт 10.1) *параметром самоорганизации* ψ по формуле:

$$c = c(\psi) = \bar{c}(\psi) \times c_0. \quad (130)$$

Здесь приняты следующие обозначения и терминология:

c [м.сек^{-1}] $\neq \text{const}$ – *скорость света в вакууме*;

c_0 [м.сек^{-1}] = $\text{const} = \frac{c_{эйн}}{\Phi}$ – *нормирующий множитель*;

$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$ – *золотая пропорция* (безразмерная величина);

ψ ($-\infty < \psi < +\infty$) – *параметр самоорганизации* (безразмерный коэффициент);

$\bar{c} = \bar{c}(\psi) \neq \text{const}$ – *собственная нормированная фибоначчиевая скорость света в вакууме* (безразмерная величина).

Вид функции $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ будет конкретизирован ниже (пункт 10.1).

3. Мы связываем безразмерный *параметр самоорганизации* ψ со временем T [*млрд. лет*], отсчитываемый от момента «*Большого Взрыва*» ($T=0$), по формуле:

$$T = a \times \psi, \quad (131)$$

где a [*млрд. лет*] – *коэффициент пропорциональности*. Как будет показано ниже (пункт 10.2) с учётом периода «*Тёмных веков*» (0.2 [*млрд. лет*]) и соответствующему этому периоду значению $\psi = 2$, получаем, что величина $a = 0.1$ [*млрд. лет*]. Но тогда для *современного времени* $T = 13.7$ [*млрд. лет*] существования нашей *материальной Вселенной* из формулы (131) получаем «*Вселенскую константу*» $\psi = \frac{13.7}{0.1} = 137$.

4. Мы применяем разработанные в части I соотношения и формулы «*золотой фибоначчиевой гониометрии*» для введения нового класса преобразований, названных нами *преобразованиями Фибоначчи-Лоренца* и являющихся обобщением классических *преобразований Лоренца*, используемых в СТО.

Эти новые преобразования позволяют качественно (и, иногда и количественно) интерпретировать эволюцию как нашей *материальной Вселенной* ($T > 0$), так и *антиматериальной Вселенной* ($T < 0$).

10. Двумерные преобразования Фибоначчи-Лоренца

10.1. Собственные двумерные преобразования Фибоначчи-Лоренца

Выше на плоскости Минковского $R_1^2=(x_0=ct, x_1)$ были рассмотрены *собственные двумерные преобразования Лоренца* (124), которые, согласно (122), зависят от двух параметров: c - скорости света в вакууме, являющейся постоянной величиной в любой инерциальной системе отсчёта, и v - постоянной скорости движения одной инерциальной системы отсчёта $K'=(x'_0=ct', x'_1)$ относительно другой инерциальной системы отсчёта $K=(x_0=ct, x_1)$.

Назовём величину $\bar{v} = \frac{v}{c}$ *нормированной относительной скоростью* и соотношение (122) перепишем в виде:

$$\bar{v} = \frac{sh(\theta)}{ch(\theta)} = th(\theta), |\bar{v}| < 1, -\infty < \theta < +\infty, \quad (132)$$

Перепишем также соотношения (124) в виде:

$$\begin{cases} ct = ch(\theta)(ct') + sh(\theta)x'_1 \\ x_1 = sh(\theta)(ct') + ch(\theta)x'_1 \end{cases} \quad (133)$$

Предположим, что в соотношениях (133) параметр $c \neq const$, а определяется соотношением (130).

Обозначим через $\xi = c_0 t$, $\xi' = c_0 t'$ - величины, имеющие размерность [м].

Тогда (133) перепишется в виде:

$$\begin{cases} \bar{c}(\psi)\xi = \bar{c}(\psi)ch(\theta)\xi' + sh(\theta)x'_1 \\ x_1 = \bar{c}(\psi)sh(\theta)\xi' + ch(\theta)x'_1 \end{cases} \quad (134)$$

Разделим верхнее выражение в (134) на $\bar{c}(\psi)$, тогда получим преобразование вида:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\theta) & \frac{sh(\theta)}{\bar{c}(\psi)} \\ \bar{c}(\psi)sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad (135)$$

Преобразованию (135) соответствует матрица вида

$$\bar{\Omega}(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} ch(\theta) & \frac{sh(\theta)}{\bar{c}(\psi)} \\ \bar{c}(\psi)sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix}, \quad (136)$$

зависимая от двух параметров θ и ψ , где ψ является аргументом пока что неизвестной функции $\bar{c}(\psi)$.

Для того, чтобы конкретизировать функцию $\bar{c}(\psi)$ и найти связь между θ и ψ , приравняем матрицу (136) *поэлементно* к матрице

$$\Omega(\psi) = \begin{pmatrix} cFs(\psi-1) & sFs(\psi-2) \\ sFs(\psi) & cFs(\psi-1) \end{pmatrix}, \det \Omega(\psi) = 1, \quad (137)$$

то есть введём в рассмотрение **матричное уравнение** $\bar{\Omega}(\theta, \psi) = \Omega(\psi)$, где элементами матрицы (137) являются симметричные гиперболические функции Фибоначчи sFs, cFs вида (34).

Заметим, что матрицы $\Omega(\psi)$ получаются из «золотых матриц» (58)

$$Q_0(\psi) = Q_0(\psi) = \begin{pmatrix} cFs(\psi) & sFs(\psi-1) \\ sFs(\psi-1) & cFs(\psi-2) \end{pmatrix}, \det Q_0(\psi) = 1,$$

умножением слева на постоянную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \det A = 1,$$

то есть $\Omega(\psi) = A Q_0(\psi)$.

Матрица (137) введена авторами данной статьи в [20], где элементы матрицы связаны между собой рекуррентным соотношением:

$$sFs(\psi) = cFs(\psi - 1) + sFs(\psi - 2). \quad (138)$$

Матрицу (137) назовём *собственной двумерной матрицей Фибоначчи – Лоренца*, а преобразование

$$\begin{pmatrix} \xi \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cFs(\psi - 1) & sFs(\psi - 2) \\ sFs(\psi) & cFs(\psi - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ x_1' \end{pmatrix} \quad (139)$$

собственным двумерным преобразованием Фибоначчи – Лоренца

Выбор матрицы $\Omega(\psi)$ вида (137) такой, что из матричного уравнения $\bar{\Omega}(\theta, \psi) = \Omega(\psi)$, как оказалось в дальнейшем, находится не только связь между θ и ψ , но и конкретный вид функции $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$, обусловлен тем, что, отталкиваясь от классических преобразований Лоренца (124), мы приходим к преобразованиям (139), основанных на симметричных гиперболических функциях Фибоначчи (34), выражаемых через степени «золотой пропорции» (4) – древнейшей научной парадигме о красоте и гармонии Мироздания.

Поэтому мы надеялись (и это оправдалось) на получение новых неожиданных эффектов, согласованных как качественно (а иногда и количественно), с современными взглядами на эволюцию Мироздания с момента сингулярности пространства - времени – «*Большого Взрыва*». Заметим, что ни один из этих эффектов не может быть получен в рамках классических преобразований Лоренца и специальной теории относительности.

Но тогда из матричного уравнения $\bar{\Omega}(\theta, \psi) = \Omega(\psi)$ после поэлементного сравнения их элементов, получаем соотношения:

$$\begin{cases} ch(\theta) = cFs(\psi - 1) \\ \frac{sh(\theta)}{\bar{c}(\psi)} = sFs(\psi - 2) \\ \bar{c}(\psi) sh(\theta) = sFs(\psi) \end{cases} \quad (140)$$

Отсюда следуют соотношения:

$$\begin{cases} ch(\theta) = cFs(\psi - 1) \\ sh(\theta) = \bar{c}(\psi) sFs(\psi - 2) = \frac{sFs(\psi)}{\bar{c}(\psi)} \end{cases} \quad (141)$$

Но тогда из второго соотношения в формулах (141) получаем, что *нормированная фибоначчиевая скорость света $\bar{c}(\psi)$ в вакууме для двумерного собственного преобразования Фибоначчи-Лоренца имеет вид:*

$$\bar{c}(\psi) = \sqrt{\frac{sFs(\psi)}{sFs(\psi - 2)}}. \quad (142)$$

Подставим (142) во второе соотношение в (140). Тогда получим равенство:

$$sh(\theta) = \sqrt{\frac{sFs(\psi)}{sFs(\psi-2)}} \times sFs(\psi-2). \quad (143)$$

Отсюда получаем функцию

$$\theta = \theta(\psi) = \text{Arcsh}z = \ln \left[z + \sqrt{z^2 + 1} \right], \quad z = \bar{c}(\psi) sFs(\psi-2).$$

Эта функция осуществляет важную связь между введёнными авторами настоящей статьи *параметром самоорганизации* ψ , который можно трактовать также как *угол фибоначчиевого поворота* для собственных преобразований Фибоначчи-Лоренца (139), и *углом гиперболического поворота* θ для классических преобразований Лоренца (124), положенных в основу специальной теории относительности.

После несложных преобразований с учётом соотношения (138) формула

$$\theta = \theta(\psi) = \text{Arcsh}z = \ln \left[z + \sqrt{z^2 + 1} \right], \quad z = \bar{c}(\psi) sFs(\psi-2).$$

приобретает вид:

$$\theta = \theta(\psi) = \ln \left[\sqrt{\frac{sFs(\psi)}{sFs(\psi-2)}} \times sFs(\psi-2) + cFs(\psi-1) \right]. \quad (144)$$

Функция (144) определена на множестве $D = \{-\infty < \psi \leq 0\} \cup \{2 \leq \psi < +\infty\}$, на котором эта функция непрерывна и взаимно однозначна. На интервале $0 < \psi < 2$ функция $\theta = \theta(\psi)$ не определена, поскольку на этом интервале $\bar{c}(\psi)$ является мнимой величиной (рисунок 2).

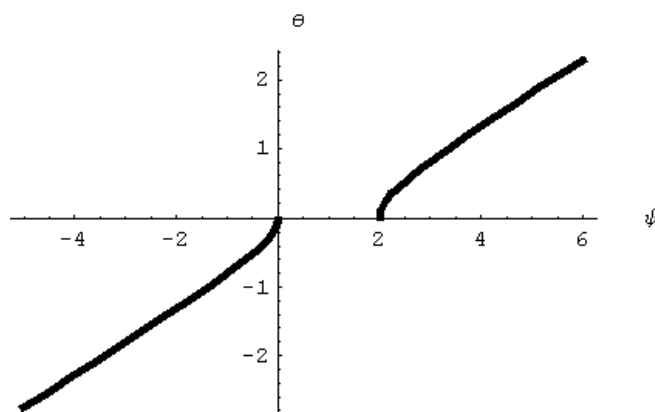


Рисунок 2. График функции $\theta = \theta(\psi)$

Поэтому вещественное решение $\theta = \theta(\psi)$ уравнения $\bar{\Omega}(\theta, \psi) = \Omega(\psi)$ имеет место только на множестве $D = \{-\infty < \psi \leq 0\} \cup \{2 \leq \psi < +\infty\}$ и тогда для таких ψ возникает поэлементное тождество $\bar{\Omega}(\theta, \psi) \equiv \Omega(\psi)$.

Обратно, вещественное решение $\theta = \theta(\psi)$ уравнения $\bar{\Omega}(\theta, \psi) = \Omega(\psi)$ имеет место для всех $\theta \neq 0$, и, следовательно, для таких θ выполняется тождество $\bar{\Omega}[\theta, \psi(\theta)] = \Omega[\psi(\theta)]$.

Из формулы (144) и рисунка 1 следует также, что для случая $\theta = 0-0$ получаем $\psi(0-0) = 0-0$, а при $\theta = 0+0$ получаем: $\psi(0+0) = 2+0$.

С этих позиций нужно трактовать переход от преобразований (135) к преобразованиям (139). Тем не менее, после того, как мы перейдем к преобразованиям (139), мы будем для полноты картины рассматривать преобразования (139) для всех значений *параметра самоорганизации* $-\infty < \psi < +\infty$, при этом для *собственной нормированной фибоначчиевой скорости света в вакууме* $\bar{c}(\psi)$ мы будем использовать формулу (142), график которой изображён на рисунке 3.

График функции $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ имеет три асимптоты, из которых две - для ветви $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ при $2 < \psi < +\infty$ (вертикальная асимптота $\psi = 2$ и горизонтальная асимптота $\bar{c} = \Phi \approx 1.61803$) и одна - для ветви $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ при $-\infty < \psi < 0$ (горизонтальная асимптота $\bar{c} = \Phi^{-1} \approx 0.61803$), где Φ - «золотая пропорция».

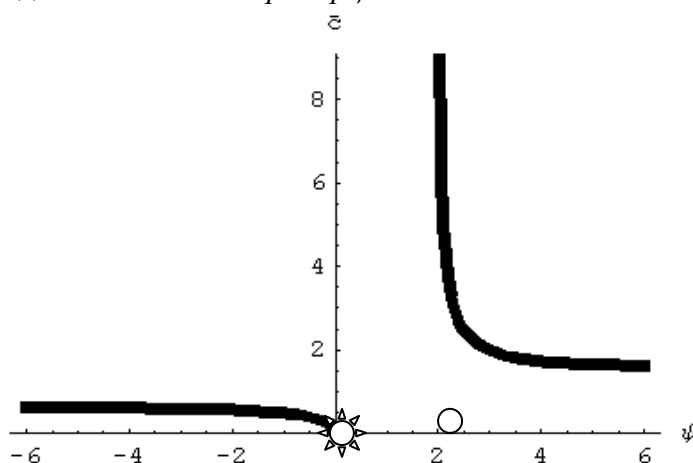


Рисунок 3. График функции $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$

10.2. Космологическая интерпретация

График функции $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$, задающей изменение *собственной нормированной фибоначчиевой скорости света в вакууме* в зависимости от *параметра самоорганизации* ψ (рисунок 3), при $0+0 < \psi < +\infty$ качественно согласуется с современными представлениями об эволюции нашей «материальной» Вселенной от ее рождения $\psi = 0$ («Большой Взрыв») до настоящего времени и прогнозами, касающимися ее будущего развития.

Кроме того, график $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ даёт информацию не только о нашей «материальной» Вселенной ($0+0 < \psi < +\infty$), но и информацию об одновременно родившейся с ней после «Большого Взрыва» гипотетической «антиматериальной» Вселенной при $0-0 > \psi > -\infty$ от её рождения $\psi = 0$ («Большой Взрыв») и прогнозами её будущего развития при $\psi \rightarrow -\infty$.

10.2.1. Космологическая интерпретация эволюции «материальной» Вселенной

На рисунке 3 для «материальной» Вселенной мы видим две «бифуркационные точки»: $\psi = 0$ и $\psi = 2$.

Мы будем использовать космологическую интерпретацию, чтобы дать описание явлений, вытекающих из качественного и количественного анализа графика функции $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ (рис. 3) путем сравнения результатов этого анализа с данными современной космологии [36-38] и принимая во внимание изменение реальной скорости света в вакууме $c = c(T)$ во времени T , начиная с «Большого Взрыва» ($T=0$) до настоящего времени и в будущем.

Для определенности, согласуем шкалы параметров T и ψ с помощью формулы:

$$T = a \times \psi, \quad (145)$$

где ψ - безразмерный *параметр самоорганизации*, а коэффициент a может быть вычислен с использованием данных современной космологии.

Первую бифуркационную точку $\psi = 0$ для «материальной» Вселенной ($0 + 0 < \psi < +\infty$) мы будем относить к «Большому Взрыву». С другой стороны, период между бифуркационными точками $\psi = 0$ и $\psi = 2$ может быть отнесен к явлению, которое в современной космологии называется «темными веками».

При этом вторая бифуркация $\psi = 2$ относится к моменту перехода от «темных веков» к «светлому периоду». Как подчеркивается в [36], «долгое время Вселенная, остыв после Большого Взрыва, оставалась темной и холодной - ничто ее не освещало. Этот период, названный «Темными веками», закончился, когда сформировались звезды. Очень ранний возраст Вселенной, к которому относят начало формирования первого поколения звезд, впервые осветивших ее спустя всего 0.2 [млд. лет] после «Большого Взрыва», привел к идее о том, что таинственный тип невидимой материи собрал газ вместе вскоре после рождения Вселенной, позволив сформироваться первым звездам и галактикам».

Из этих рассуждений, используя формулу (145), мы можем вычислить значение коэффициента пропорциональности a следующим образом:

$$a = \frac{0.2}{2} = 0.1 \text{ [млд. лет]}. \quad (146)$$


Отсюда получаем, что безразмерный параметр самоорганизации ψ и время T [млд. лет], отсчитываемые от момента «Большого Взрыва», связаны соотношением:

$$\psi = 10 \times T \quad (147)$$

Если интерпретировать для «материальной» Вселенной график, изображённый на рисунке 3, в космологическом плане как эволюцию собственной нормированной фибоначчиевой скорости света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ в вакууме при изменении параметра самоорганизации ψ от $\psi = 0$ до $\psi = +\infty$, то наблюдаемую картину изменения нормированной фибоначчиевой скорости света можно разбить на несколько периодов.

Здесь и в дальнейшем, если не оговорено отдельно, то для удобства восприятия и сокращения текста вместо термина «собственная нормированная фибоначчиевая скорость света \bar{c} в вакууме» будем употреблять термин «фибоначчиевая скорость света \bar{c} ».

Первая бифуркация. Большой Взрыв ($\psi = 0$)

Точка $\psi = 0$ на рисунке 3 является первым бифуркационным значением для «фибоначчиевой скорости света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ ». Эта точка обозначена на рисунке 3 символом . Этот момент, называемый бифуркацией (или катастрофой), применяется к ситуации, когда некоторый объект $Q = Q(\mu)$ зависит от параметра μ и в любой окрестности некоторого значения $\mu = \mu_0$ (бифуркационное значение или точка) исследуемые качественные свойства объекта Q не являются одинаковыми для всех μ .

В нашем случае таким объектом Q является фибоначчиевая скорость света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$, зависящая от параметра самоорганизации ψ , а бифуркационным значением является $\psi = 0$, при этом само существование такой бифуркации называется в космологии «Большим Взрывом».

Согласно современным космологическим данным, «Большой Взрыв» возник 13.7 миллиардов лет назад, что соответствует возрасту нашей материальной Вселенной.

После «Большого Взрыва» материальная Вселенная остается «темной», но очень горячей и плотной. Но как только эта Вселенная начала расширяться, ее температура начала уменьшаться. Данные взяты из [36-38].

«Темные века» ($0 < \psi < 2$)

В этот период у фибоначчевой скорости света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ подкоренное выражение в формуле (142) является отрицательным. Поэтому *фибоначчевая скорость света* $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$, согласно формуле (142), есть чисто мнимая функция, имеющая вид:

$$\bar{c} = \bar{c}(\psi) = i |\bar{c}(\psi)|, \quad |\bar{c}(\psi)| = \sqrt{\left| \frac{sFs(\psi)}{sFs(\psi-2)} \right|}, \quad (148)$$

где $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Согласно данным современной космологии, Вселенная быстро охладилась после «*Большого Взрыва*» и в течение длительного времени оставалась «*темной*» и «*холодной*» и ничто ее не освещало. Этот период, называемый «*Темными Веками*», закончился, когда начали формироваться первые звёзды, осветившие Вселенную примерно через 0.2 миллиарда лет после «*Большого Взрыва*». Эта гипотеза привела к идее, что в этот период загадочный вид невидимой материи, собранный вместе в виде газа, вскоре после возникновения Вселенной привел к формированию первых звезд и галактик. Данные взяты из [36-38].

Вторая бифуркация. Переход от «Темных Веков» к «Светлому Периоду» и возникновение бесконечно большой фибоначчевой скорости света ($\psi = 2$)

Точка $\psi = 2$, обозначенная на рисунке 3 символом \bigcirc , является *вторым бифуркационным значением для фибоначчевой скорости света* $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$. Слева от точки $\psi = 2$ значения $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ являются мнимыми, но справа от точки $\psi = 2$ значения $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ являются вещественными и положительными, стремящимися к “ $+\infty$ ” для $\psi \rightarrow 2+0$.

Эта вторая бифуркация связана с тем, что в момент, когда параметр самоорганизации становится равным $\psi = 2$, для *фибоначчевой скорости света* \bar{c} осуществляется переход от чисто мнимой величины к бесконечно большой величине.

Современный период ($2 < \psi < +\infty$)

Этот период характеризуется *стабильностью существования* вещественной *фибоначчевой скорости света* $\bar{c} = \bar{c}(\psi) > \Phi$ (Φ - золотая пропорция).

После некоторого периода *релаксации* (переходного периода) от значения параметра самоорганизации $\psi = 2$, соответствующего $T=0.2$ [млрд.лет], до значения параметра самоорганизации $\psi = \psi_{наст}$, соответствующему настоящему времени $T=13.7$ [млрд.лет] существования Вселенной, *фибоначчевая скорость света* $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ уменьшается от бесконечно большого значения до величины, близкой к *золотой пропорции* $\Phi \approx 1.61803$). При $\psi \rightarrow +\infty$ *коллапса* не наблюдается, так как $\bar{c} \rightarrow \Phi$.

Найдем значение параметра самоорганизации $\psi = \psi_{наст}$, соответствующего времени $T = T_{наст} = 13.7$ [млрд.лет], прошедшего с момента «*Большого Взрыва*».

В соответствии с формулой (147) при $T_{наст} = 13.7$ [млрд.лет] получаем

$$\psi_{наст} = 10 \times T_{наст} = 10 \times 13.7 = 137. \quad (149)$$

Чтобы оценить для настоящего времени $T = T_{наст} = 13.7$ [мл.лет] отклонение фибоначчиевой скорости света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$, задаваемой формулой (142), от предельного значения $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ («золотая пропорция») представим $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ в виде:

$$\bar{c}(\psi) = \Phi + \Delta(\psi). \quad (150)$$

Отсюда отклонение $\Delta(\psi)$ находится из соотношения :

$$\Delta(\psi) = \bar{c}(\psi) - \Phi. \quad (151)$$

Для $\psi = \psi_{наст} = 137$, непосредственный подсчёт по формуле (151) и (142) даёт следующую величину отклонения:

$$\Delta_{наст} = \Delta(\psi_{наст} = 137) = 2.22045 \times 10^{-16}. \quad (152)$$

Откуда на основании соотношений (150) и (151) получаем следующее численное значение *фибоначчиевой скорости света* в настоящее время:

$$\bar{c}_{наст} = \Phi + \Delta_{наст}. \quad (153)$$

В силу соотношения (130), *реальная скорость света в вакууме* равна

$$c(\psi) = \bar{c}(\psi) \times \frac{c_{эйн}}{\Phi} \quad [м.сек^{-1}], \quad (154)$$

где $\bar{c}(\psi)$ - *фибоначчиевая скорость света* (безразмерная величина), определяемая по формуле (142), $c_{эйн} = 3 \times 10^8$ [м.сек⁻¹] (более точно: $c_{эйн} = 2.998 \times 10^8$ [м.сек⁻¹]) - *эйштейновская скорость света в вакууме*.

Но тогда на основании формул (152)-(154) получаем, что для настоящего времени реальная скорость света $c_{наст}$ [м.сек⁻¹] находится из соотношений:

$$c_{наст} = \bar{c}_{наст} \times \frac{c_{эйн}}{\Phi} = (\Phi + \Delta_{наст}) \times \frac{c_{эйн}}{\Phi} = c_{эйн} + \delta \approx c_{эйн} = 3 \times 10^8 \quad [м.сек^{-1}], \quad (155)$$

где

$$\delta = \Delta_{наст} \times \frac{c_{эйн}}{\Phi} = (2.22045 \times 10^{-16}) \times \frac{3 \times 10^8}{1.61803} = 4.11695 \times 10^{-8} \quad [м.сек^{-1}]. \quad (156)$$

В дальнейшем (см. рисунок 3) по мере увеличения *параметра самоорганизации* $\psi > \psi_{наст} = 137$ *фибоначчиевая скорость света* $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ как бы «замораживается», медленно приближаясь при $\psi \rightarrow +\infty$ к своему предельному значению

$$\bar{c}_{пред} = \lim_{\psi \rightarrow +\infty} \bar{c}(\psi) = \Phi. \quad (157)$$

Для *реальной скорости света в вакууме* $c = c(\psi)$, в силу соотношений (130) и (157), получаем:

$$c_{пред} = \bar{c}_{пред} \times \frac{c_{эйн}}{\Phi} = \Phi \times \frac{c_{эйн}}{\Phi} = c_{эйн} = 3 \times 10^8 \quad [м.сек^{-1}] \quad (158)$$

10.2.2. Космологическая интерпретация эволюции «антиматериальной» Вселенной

На рисунке 3 «антиматериальная» Вселенная соответствует параметру самоорганизации $\psi < 0$ (левая ветвь графика функции $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$). На основании формулы (147) для этой Вселенной получаем *поворот стрелы времени* T в отрицательную сторону ($T < 0$) по сравнению с «материальной» Вселенной, для которой $\psi > 0$, и, следовательно, $T > 0$, где T [мл.лет] – время, отсчитываемое с момента «Большого Взрыва» ($T=0$).

Для *фибоначчиевой скорости света* $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ «антиматериальной» Вселенной имеется только одно *бифуркационное значение* - точка $\psi = 0$, соответствующая «Большому Взрыву», при этом $\lim_{\psi \rightarrow 0-0} \bar{c}(\psi) = 0$.

Затем по мере эволюции этой Вселенной, то есть при дальнейшем увеличении параметра самоорганизации ψ (то есть и времени T) в отрицательном направлении *фибоначчиевая скорость света* $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ возрастает и при дальнейшем увеличении ψ (то есть и времени T) в отрицательном направлении *фибоначчиевая скорость света* $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ медленно стремится снизу к предельному значению $\frac{1}{\Phi}$, где Φ - *золотая пропорция*. Запишем этот факт в виде:

$$\bar{c}_{пред}^* = \lim_{\psi \rightarrow -\infty} \bar{c}(\psi) = \frac{1}{\Phi}. \quad (159)$$

Для реальной скорости света в вакууме $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ для «*антиматериальной*» Вселенной, в силу соотношений (130) и (159), получаем:

$$c_{пред}^* = \bar{c}_{пред}^* \times \frac{c_{эйн}}{\Phi} = \frac{1}{\Phi} \times \frac{c_{эйн}}{\Phi} = \frac{c_{эйн}}{\Phi^2} = \frac{3 \times 10^8}{\Phi^2} = 1.1459 \times 10^8 \text{ [м.сек}^{-1}\text{]} \quad (160)$$

Из соотношений (158) и (160) следует, что «*материальная*» и «*антиматериальная*» Вселенные *асимметричны*, поскольку для «*материальной*» Вселенной предельная реальная скорость света в вакууме равна $c_{пред} = c_{эйн} = 3 \times 10^8 \text{ [м.сек}^{-1}\text{]}$, а для «*антиматериальной*» Вселенной предельная реальная скорость света в вакууме равна $c_{пред}^* = \frac{c_{эйн}}{\Phi^2} = \frac{3 \times 10^8}{\Phi^2} = 1.1459 \times 10^8 \text{ [м.сек}^{-1}\text{]}$, то есть $c_{пред}$ (для «*материальной*» Вселенной) больше $c_{пред}^*$ (для «*антиматериальной*» Вселенной) в $\Phi^2 = 2.61803$ раз, где Φ - «*золотая пропорция*».

10.3. Нормированная относительная фибоначчиевая скорость

Согласно формуле (132), для *собственных двумерных преобразований Лоренца* (124) на плоскости Минковского $R_1^2 = (x_0 = ct, x_1)$ была введена безразмерная *нормированная относительная скорость* $\bar{v} = \bar{v} = \frac{sh(\theta)}{ch(\theta)} = th(\theta)$, $|\bar{v}| < 1, -\infty < \theta < +\infty$ движения одной инерциальной системы отсчёта K' относительно другой инерциальной системы K .

После перехода от собственных преобразований Лоренца (124) к собственным преобразованиям Фибоначчи-Лоренца (139) из формул (141), получаем соотношение

$$\bar{v} = \bar{v}(\theta) = \frac{sh(\theta)}{ch(\theta)} = th(\theta) = \frac{1}{c(\psi)} \frac{sFs(\psi)}{cFs(\psi-1)} = \frac{\bar{V}(\psi)}{c(\psi)}, \quad (161)$$

где безразмерную величину

$$\bar{V} = \bar{V}(\psi) = \frac{sFs(\psi)}{cFs(\psi-1)} \quad (162)$$

назовём *нормированной скоростью движения инерциальной системы $K' = (\xi', x_1')$ относительно системы $K = (\xi, x_1)$ вдоль оси x_1 преобразования Фибоначчи-Лоренца (139), или, для краткости, *нормированной фибоначчиевой относительной скоростью*.*

Отметим, что функция $\bar{V} = \bar{V}(\psi)$ (формула (162)) определена при всех $-\infty < \psi < +\infty$, то есть определена и интервале $0 < \psi < 2$ (*тёмный период* для «*материальной*» Вселенной), на котором не определена вещественная функция $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$, ибо на этом интервале функция $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ является чисто мнимой (формула (148)).

С точки зрения современной космологии этот феномен можно объяснить тем, что в тёмный период существования «материальной» Вселенной хотя ещё и не зажглись первые звёзды и некому было её освещать, тем не менее в этой Вселенной уже появились элементарные частицы (электроны, протоны, нейтроны) и атомы, то есть, априори, уже можно говорить о скорости движения \bar{V} инерциальных систем (ИСО) относительно друг друга, «привязывая» ИСО к конкретным элементарным частицам и атомам.

В этом плане отождествление двух понятий: *скорость движения одной ИСО относительно другой ИСО* есть *скорость движения одного источника света относительно другого источника света*, как это принято в классической СТО, в нашей ситуации на интервале $0 < \psi < 2$ некорректно.

График *нормированной фибоначчиевой относительной скорости* $\bar{V} = \bar{V}(\psi)$ в зависимости от *параметра самоорганизации* ψ изображён на рисунке 4 и имеет две горизонтальные асимптоты: $\bar{V} = \Phi$ при $\psi \rightarrow +\infty$ и $\bar{V} = -\Phi^{-1}$ при $\psi \rightarrow -\infty$, где Φ - *золотая пропорция*. При $\psi = 0$ («*Большой Взрыв*») имеем $\bar{V} = 0$. При $0 < \psi < 2$ («*Тёмные Века*») имеем $0 < \bar{V} < 1$.

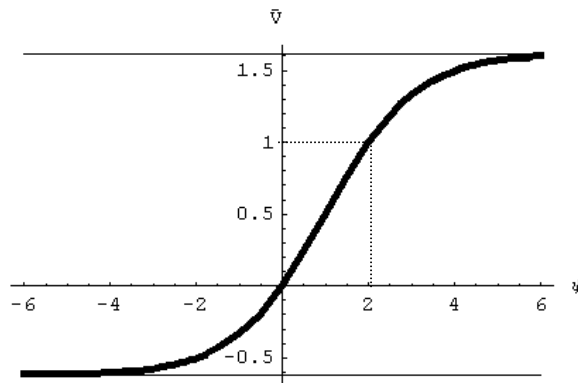


Рисунок 4. График функции $\bar{V} = \bar{V}(\psi)$

Из формул (142), (162) и таблицы 2 (с использованием взятых из таблицы 2 при $\lambda = 1$ соотношений между *симметричными гиперболическими функциями Фибоначчи*) получаем следующие зависимости между *нормированной фибоначчиевой скоростью света в вакууме* \bar{c} и *нормированной фибоначчиевой относительной скоростью* \bar{V} :

$$\bar{c} = \bar{c}(\bar{V}) = \sqrt{\frac{\bar{V}}{\bar{V}-1}}, \quad \bar{V} = \bar{V}(\bar{c}) = \frac{(\bar{c})^2}{(\bar{c})^2 - 1}. \quad (163)$$

Из соотношений (163) следует, что $|\bar{V}| < |\bar{c}|$. График функции $\bar{c} = \bar{c}(\bar{V}) = \sqrt{\frac{\bar{V}}{\bar{V}-1}}$ при $-\Phi^{-1} < \bar{V} < \Phi$, где Φ - «золотая пропорция, изображён на рисунке 5 и имеет вертикальную асимптоту $\bar{V} = 1$. При $\bar{V} = 0$ имеем $\bar{c} = 0$, а при $\bar{V} = -\Phi^{-1}$ и $\bar{V} = \Phi$ имеем, соответственно, $\bar{c} = \bar{c}_{\text{сред}}^* = \Phi^{-1}$ и $\bar{c} = \bar{c}_{\text{сред}} = \Phi$.

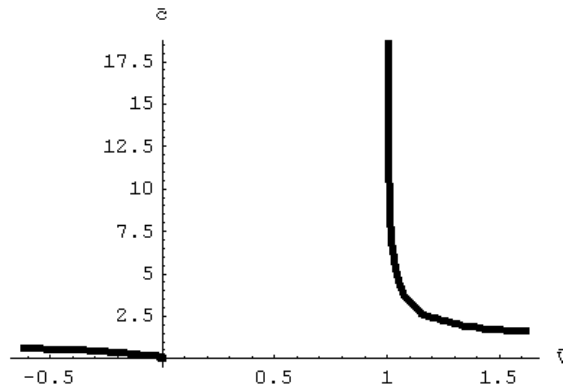


Рисунок 5. График функции $\bar{c} = \bar{c}(\bar{V})$ при $-\Phi^{-1} < \bar{V} < \Phi$

10.4. Метрическая форма

При $\psi < 0$ и $\psi > 2$ плоскость $L^2 = (\zeta, x_1)$ можно снабдить знакопеременной метрической формой Минковского

$$(ds)^2 = (\bar{c}(\psi))^2 (d\zeta)^2 - (dx_1)^2, \quad (164)$$

инвариантной относительно *собственного преобразования Фибоначчи-Лоренца* (139), поскольку при $\psi < 0$ и $\psi > 2$ имеем $\bar{c}(\psi) > 0$ и, следовательно, $[\bar{c}(\psi)]^2 > 0$.

Поэтому при $\psi < 0$ и $\psi > 2$ плоскость $L^2 = (\zeta, x_1)$ является плоскостью Минковского R_1^2 с координатной системой $K = (\xi, x_1)$.

При *бифуркационных значениях* $\psi = 0$ и $\psi = 2$ метрика (164) имеет особенности. Далее, поскольку при $0 < \psi < 2$ *фибоначчиевая скорость света* $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ как вещественное число не существует (см. формулу (148), то метрическую форму на плоскости $L^2 = (\zeta, x_1)$, инвариантную относительно преобразования(139), вводить не имеет смысла.

11. Число 137

Как упоминалось во введении, число 137 играет роль *Вселенской константы*, которой приписываются множество странных физических зависимостей и магических свойств. Проведенное группой исследователей системно-техническое моделирование характеристик планет, Солнечной системы и Галактики [39] привело к заключению, что число 137 является некой мировой константой нашей Галактики, как бы ее "генетическим" кодом, обеспечивающим ее устойчивое функционирование и индивидуальность.

Число 137 имеет непосредственное отношение к физике, поскольку оно связано с важнейшей безразмерной физической константой- *постоянной тонкой структуры* α , приблизительно равной $1/137$. Более точно, *постоянная тонкой структуры* имеет следующий вид :

$$\alpha = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137.035999679} = 7.2973525376 \times 10^{-3}, \quad (165)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 8.854187817620 \times 10^{-12} \text{ [Ф.м}^{-1}\text{]} - \text{электрическая постоянная (или} \\ &\text{диэлектрическая проницаемость вакуума),} \\ \bar{h} &= \frac{h}{2\pi} = 1.054571628 \times 10^{-34} \text{ [Дж} \cdot \text{сек]} - \text{постоянная Дирака (или приведённая} \\ &\text{постоянная Планка),} \\ c &= 2.99792458 \times 10^8 \text{ [м.сек}^{-1}\text{]} - \text{скорость света в вакууме,} \\ e &= 1.602176487 \times 10^{-19} \text{ [Кл]} - \text{элементарный заряд.} \end{aligned}$$

Постоянная тонкой структуры α является фундаментальной физической постоянной, характеризующей силу электромагнитного взаимодействия. Она характеризует не отдельные тела, а физические свойства нашего мира в целом.

Впервые α описана в 1916 году немецким физиком **Арнольдом Зоммерфельдом** (1868-1951) в качестве меры релятивистских поправок при описании атомных спектральных линий в рамках модели атома датского физика **Нильса Бора** (1885-1962).

Другими словами, постоянная тонкой структуры α описывает расщепление атомных уровней на несколько близких подуровней (*мультиплеты*) за счёт эффектов *специальной теории относительности*.

Аналогичное высказывание о числе α принадлежит американскому физiku **Ричарду Филиппсу Фейнману** (1918 - 1988): «С тех пор, как оно было открыто, оно было загадкой. Всех искушённых физиков-теоретиков это число ставило в тупик и тем самым вызывало беспокойство. Непосредственно Вам хотелось бы знать, откуда эта постоянная связи появилась: связана ли она с числом π или может быть она связана с натуральными логарифмами? Никто не знает».

Проблема *постоянной тонкой структуры* является одной из 10 важнейших проблем физики, которые названы «*проблемами тысячелетия*» (американский физик **George Johnson**). В 2000 году украинский физик **Николай Косинов** [40] нашёл простое и красивое соотношение, связывающее безразмерные константы: *постоянную тонкой*

структуры α , число π и золотую пропорцию $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Эта формула имеет следующий вид:

$$\alpha = 10^{-\frac{43}{20}} \times \pi^{\frac{1}{260}} \times \Phi^{\frac{7}{130}}. \quad (166)$$

На основе формулы (166) в [40] получено новое расчётное значение *постоянной тонкой структуры*

$$\alpha = \frac{1}{137.036009823} = 7.2973519973 \times 10^{-3}. \quad (167)$$

Таким образом, абсолютная ошибка между истинным значением (165) и расчётным значением (167) равна величине:

$$\Delta\alpha = |7.2973525376 \times 10^{-3} - 7.2973519973 \times 10^{-3}| = 5.403 \times 10^{-10}. \quad (168)$$

Относительная ошибка равна величине:

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{5.403 \times 10^{-10}}{7.2973525376 \times 10^{-3}} = 7.40406 \times 10^{-8}. \quad (169)$$

В 1955 году российский физик **Лев Ландау** (1908-1968) высказал предположение, что α может меняться в зависимости от времени. Однако подобные изменения не могут быть очень большими, иначе они бы уже давно «всплыли» в сравнительно простых экспериментах.

Результаты тщательных экспериментов, проведённых в настоящее время и полученных в результате изучения линий поглощения *квazarов*, показывают, что за последние 10 миллиардов лет относительные вариации α не могут превышать 6×10^{-7} .

В конце 1990-х годов появились новые данные из астрономических наблюдений (**John Webb** и его коллеги) обнаружили крошечные изменения в длинах световых волн от отдалённых квазаров. Моделирование их света межзвёздными облаками показало, что значение «альфы» 10-12 миллиардов лет назад было больше нынешнего значения на 5-7 миллионов.

НАША ГИПОТЕЗА.

«Постоянная тонкой структуры» α зависит от времени T [млд. лет], отсчитываемое от момента «Большого Взрыва» ($T=0$) как для нашей «материальной» Вселенной ($T>0$), так и для Вселенной, состоящей из антиматерии (или, в другой терминологии, «антиматериальной» Вселенной) ($T<0$) по формуле:

$$\alpha = \alpha(T) = 10^{-\frac{43}{20}} \times \pi^{\frac{1}{260}} \times \left\{ \bar{c}[\psi(T)] \right\}^{\frac{7}{130}}, \quad (170)$$

где

$\psi = \psi(T) = 10 \times T$ - параметр самоорганизации (формула (147)),

$\bar{c}(\psi) = \sqrt{\frac{sFs(\psi)}{sFs(\psi-2)}}$ - фибоначчиевая скорость света (формула (142)),

$sFs(\psi) = \frac{\Phi^\psi - \Phi^{-\psi}}{\sqrt{5}}$, $cFs(\psi) = \frac{\Phi^\psi + \Phi^{-\psi}}{\sqrt{5}}$ - соответственно симметричный гиперболический синус и симметричный гиперболический косинус Фибоначчи (формула (34)),

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ - золотая пропорция.

Заметим, что формула (170) получена на основании формулы (166), выведенной **Николаем Косиновым** [40] и наших результатов, поскольку для нашей «материальной» Вселенной мы имеем $\Phi = \lim_{T \rightarrow +\infty} \bar{c}[\psi(T)]$ (см. рисунок 3 и формулу (147)).

Поэтому в формуле (166) **Николая Косинова** мы заменяем при $T>0$ сначала Φ на $\bar{c}[\psi(T)]$ и получаем информацию об изменении $\alpha = \alpha(T)$ при эволюции нашей материальной Вселенной, а затем, пользуясь формулами (142) и (147), применяем формулу (170) при $T<0$ и получаем информацию об эволюции для «антиматериальной» Вселенной.

На рисунках 6 и 7 представлены графики функции $\alpha = \alpha(T)$ эволюции во времени $T>0$ нашей «материальной» Вселенной (правая ветвь) и эволюции во времени $T<0$ «антиматериальной» Вселенной (левая ветвь). Из этих рисунков мы видим, что функция $\alpha = \alpha(T)$ как для правой ветви, так и для левой ветви как бы замораживается, что говорит об устойчивости существования на долгие времена *Мироздания*, родившегося в результате «Большого взрыва».

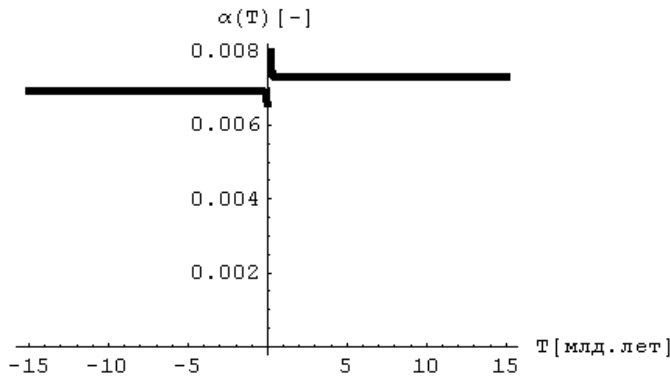


Рисунок 6. График функции $\alpha = \alpha(T)$ для больших промежутков времени T с момента Большого Взрыва

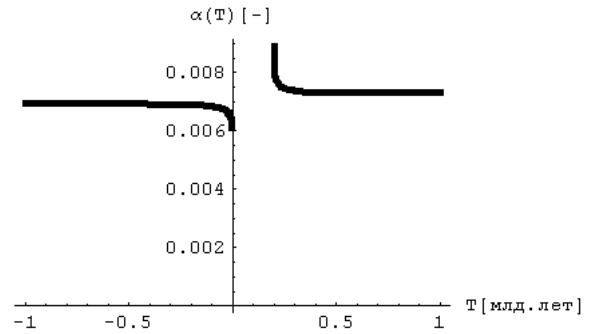


Рисунок 7. График функции $\alpha = \alpha(T)$ для малых промежутков времени T с момента Большого Взрыва

Для правой ветви получаем $\lim_{T \rightarrow +\infty} \alpha(T) = 0.0072973519973773635$.

Для левой ветви получаем $\lim_{T \rightarrow -\infty} \alpha(T) = 0.0069288144971134814$.

12. Основные результаты исследования

Настоящая статья затрагивает широкий комплекс фундаментальных проблем современной науки, которые восходят в своих истоках к *Началам* Евклида. Наши исследования привели к следующим результатам:

Первый результат касается неожиданной взаимосвязи двух математических проблем, сформулированных в *Началах* Евклида – *V-го постулата Евклида* и *задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении*. Эта взаимосвязь никак не изучалась ранее. Каждая из этих проблем оказала существенное влияние на развитие математики и науки в целом.

Изучение *V-го постулата Евклида* привело в 19-м веке к созданию *геометрии Лобачевского*, которая может быть отнесена к одному из крупнейших математических открытий 19-го века. *Геометрия Лобачевского* основана на *гиперболических функциях* (1) и может рассматриваться как «прорыв» гиперболических представлений в математике и теоретической физике.

Задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении (Теорема II.11 *Начал* Евклида), позже названная *золотым сечением*, привела в начале 21-го века к созданию так называемой «золотой» *фибоначчиевой λ-гониметрии* (**Алексей Стахов**, 2006), которая является следствием разработки нового класса гиперболических функций – *гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка* [17], основанных на *золотой пропорции* (4) и ее обобщении – *металлических пропорциях* (36)-(47).

Таким образом, две древние математические проблемы - *V-й постулат Евклида*, который привел к открытию *гиперболической геометрии*, и *золотое сечение*, которое привело к созданию нового класса гиперболических функций, – объединились в рамках «золотой» *фибоначчиевой λ-гониметрии*. И этот факт является главным историческим и методологическим результатом настоящего исследования.

Второй результат касается решения *Четвертой Проблемы Гильберта* – одной из 23 математических проблем, сформулированных в 1900 г. **Давидом Гильбертом**. Интерес к *гиперболической геометрии*, которая, начиная с **Лобачевского** изучалась в течение 19-го века многими выдающимися математиками **Боляи**, **Гауссом**, **Бельтрами**,

Клейном, Пуанкаре, Риманом, настолько повысился в конце 19-го столетия, что выдающийся математик **Давид Гильберт** в своей лекции *Математические проблемы*, прочитанной на Втором Международном Конгрессе Математиков (Париж, 1900), выделил проблему *гиперболической геометрии* в отдельную математическую проблему - *Четвертую Проблему Гильберта*.

В течение 20-го столетия предпринимались попытки ее решения. В конечном итоге, математики пришли к выводу, что эта проблема была сформулирована Гильбертом весьма расплывчато, что делает затруднительным ее окончательное решение.

Новый подход к решению *Четвертой Проблемы Гильберта*, развитый в настоящей статье авторами – украинским математиком **Алексеем Стаховым** и российским математиком **Самуилом Арансоном** – стал возможным благодаря «золотой» *фибоначчиевой λ -гониметрии* [17].

Один из основных результатов настоящего исследования, состоит в том, что, основываясь на «золотой» *фибоначчиевой λ -гониметрии* **Алексея Стахова** [17], авторами получено бесконечное множество мощности континуума метрических λ -форм плоскости Лобачевского ($\lambda > 0$ - заданное положительное число), задаваемых выражением (60), имеющих одну и ту же отрицательную *гауссову кривизну* $K = -1$.

Все эти формы *изометричны* классической метрической форме плоскости Лобачевского, задаваемой выражением (2). А это означает, что теоретически получено бесконечное множество мощности континуума новых неевклидовых геометрий, которые вместе с геометриями Лобачевского, Римана и Минковского «с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии» (**Давид Гильберт**).

При этом весьма «плодотворной точкой зрения» для построения новых неевклидовых геометрий является «золотая» *фибоначчиевая гониметрия* [17]. Проведенные исследования показали, что существует бесконечное множество новых неевклидовых геометрий, которые являются «ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии».

А это, в свою очередь, дает основание утверждать, что **метрические λ -формы плоскости Лобачевского, полученные в данной статье, являются важным вкладом авторов в решение 4-й проблемы Гильберта.**

Третий результат касается классической *специальной теории относительности* (СТО), в частности, *преобразований Лоренца*, связанных с гиперболическими представлениями.

В настоящей статье авторы не хотели бы вступать в спор о правомочности или неправомочности СТО, основой которой являются *преобразования Лоренца*. Авторы просто хотели понять, что получится, если классические *преобразования Лоренца*, используемые в качестве преобразования координат и времени в СТО, заменить на преобразования, названные авторами *преобразованиями Фибоначчи-Лоренца*, задаваемые формулами (124).

Матрицы *Фибоначчи-Лоренца* (137), входящие в *преобразования Фибоначчи-Лоренца* (139), получены с помощью умножения слева на постоянную матрицу «золотых» *матриц* (58), элементами которых являются *симметричный гиперболический синус* и *косинус Фибоначчи*, задаваемые соотношением (34).

Учитывая ту роль, которую играет *золотая пропорция* Φ в современном естествознании как *основа красоты и гармонии Природы*, мы вправе были ожидать появления новых эффектов по сравнению с классической СТО, если рассматривать преобразования *Фибоначчи-Лоренца* как преобразования координат и времени, сохраняя ту же терминологию, что и в СТО.

В результате вместо *стационарной* классической модели СТО, в которой скорость света в вакууме является постоянной величиной, авторы получили *нестационарную* модель, в которой *фибоначчиевая скорость света в вакууме* меняется в зависимости от

угла *фибоначчиевого поворота* ψ , который авторы, возможно, несколько нескромно (да простят нас физики и биологи) назвали *параметром самоорганизации*.

Построив и проанализировав график *нормированной фибоначчиевой скорости света в вакууме* $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ для собственных преобразований Фибоначчи-Лоренца в зависимости от ψ (рисунок 3), авторы дали «*космологическую интерпретацию*» полученных результатов, употребив (опять несколько нескромно) такие термины, как «*Большой Взрыв*» и другие, и, более того, описав теоретический сценарий эволюции *Мироздания* с момента «*Большого Взрыва*» (время $T=0$) как в положительную сторону увеличения времени T (рождение и эволюция нашей «*материальной*» Вселенной), так и с *поворотом стрелы времени* - увеличению времени T в отрицательную сторону (рождение и эволюция Вселенной, состоящей из *антиматерии*, которую мы называем также «*антиматериальной*» Вселенной).

В частности, основываясь на этом подходе, авторам удалось показать, что в процессе эволюции нашей «*материальной*» Вселенной при возрастании $T > 0$ было две «*бифуркационные точки*». **Первая** из них соответствует «*Большому Взрыву*», а **вторая** – переходу нашей Вселенной от «*Темных Веков*» до «*Светлого Периода*», когда возникает свет и зажигаются первые звезды, которые освещают Вселенную.

Скорость света $c = c(T)$ сразу после этой **второй** бифуркационной точки является очень большой, но по мере эволюции Вселенной при возрастании T в положительном направлении начинает снижаться и достигает предельного значения в 300 000 км в сек.

Что касается эволюции гипотетической *Вселенной*, состоящей из «*антиматерии*», родившейся одновременно с «*материальной*» Вселенной в результате «*Большого Взрыва*», но для которой повернута стрела времени, то есть $T < 0$, то для такой «*антиматериальной*» Вселенной была только **одна** бифуркация- «*Большой Взрыв*» ($T=0$).

Скорость света $c = c(T)$ для «*антиматериальной*» Вселенной сразу после «*Большого Взрыва*» ($T=0$) сначала близка к нулю, но по мере эволюции этой Вселенной при увеличении времени T в отрицательном направлении скорость света $c = c(T)$ возрастает и медленно стремится к предельному значению $\frac{300000}{\Phi^2}$ [км в сек], где Φ - «*золотая пропорция*».

Отсюда следует, что «*антиматериальная*» Вселенная асимметрична «*материальной*» Вселенной.

Четвёртый результат касается обсуждения естественно возникающей в нашей модели «*Вселенской константы*» - числа 137 и связанным с этим числом важнейшей безразмерной физической константы - «*постоянной тонкой структуры*» $\alpha \approx 1/137$, характеризующей физические свойства нашего мира в целом.

Авторами данной статьи предложена формула зависимости «*постоянной тонкой структуры*» α от времени T , отсчитываемое от момента «*Большого Взрыва*» ($T=0$) для любого T , как большего, так и меньшего нуля (формула (170), рисунки 6 и 7).

Из вышеуказанного следует, что применение *гиперболических функций Фибоначчи* и «*золотых*» *матриц* имеет фундаментальное значение для развития современной математики (гиперболическая геометрия), теоретической физики и других разделов естествознания.

Литература

1. Шерватов В.Г. Гиперболические функции. М.: Физматгиз, 1958. – 56 с.
2. Александров П.С. (общий редактор). Проблемы Гильберта. М.: Наука. 1969. - 240 с.
3. Hilbert's Fourth Problem. Wikipedia. The Free Encyclopedia.
http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_fourth_problem

4. Буземан Г. О четвертой проблеме Гильберта. Успехи математических наук. **1966**, том.21, № 1(27). – с.155-164.
5. Погорелов А.В. Четвертая проблема Гильберта. М.: Наука, **1974**.
6. Aranson S., Zhuzhoma E. On arithmetical and dynamical properties of Lorenz maps of the torus. ArXiv:math. DS/0404464, 26 Apr. **2004**, Vol.1. - 1-14.
7. Aranson S., Zhuzhoma E. On arithmetical and dynamical properties of Lorenz maps of the torus. Institut de Recherche Mathematique de Rennes. France, Prepublication 04-27.April **2004**. - 1-14.
8. Арансон С.Х., Жужома Е.В. Арифметические и динамические свойства преобразований Лоренца на торе. Труды Средневолжского математического общества. Материалы Второй Международной научной школы «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Саранск. Россия. **2005**, том 7, №1. - 245-247.
9. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, **1978**. – 144 с.
10. Hoggat, V. E. Fibonacci and Lucas Numbers. Palo Alto: Houghton-Mifflin, **1969**.
11. Хинчин А.Я. Цепные дроби. Изд.4, **2004**. 112 с. (первое издание – **1935** г.)
12. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, **1994**. – 204 с.
13. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, **1984**. – 152 с.
14. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, **1993**, том 208, № 7.
15. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals, **2004**, 23(2): 379-389.
16. Stakhov A. Rozin B. The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, **2006**, V.8, No.3
<http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/stakhov/index.html>
17. Stakhov A.P. Gazale formulas, a new class of the hyperbolic Fibonacci and Lucas functions, and the improved method of the “golden” cryptography. М.: Академия Тринитаризма, № 77-6567, эл. публикация 14098, **2006**
<http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm>
18. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, **1998**(second edition, Nobuko, **2004**)
19. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, **1999** (русский перевод, **2002**).
20. Стахов А.П., Арансон С.Х. Золотая фибоначиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14816, 04.06.**2008**
<http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm>
21. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, **1968**, 367 с.
22. Stakhov A.P. The “golden” matrices and a new kind of cryptography. Chaos, Solitons & Fractals, **2007**, V.32, Issue 3, 1138-1146
23. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Москва: Наука, **1979**, 760 с.
24. Australian scientists: the velocity of light falls. Lenta.ru
<http://www.lenta.ru/world/2002/08/08/light>
25. Дубровский В.Н., Молчанов Ю.Б. Самоорганизация пространства-времени в процессе эволюции Вселенной // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.11203, 10.05.**2004**
<http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/02310019.htm>
26. Шульман М.К. Размышления о законах Природы и о самоорганизации материи.

- http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/shulman_razmyshlenia.htm
27. **Гратиа Д.** Квази-кристаллы. Успехи физических наук, **1988**, том 156: 347-363
 28. **El Naschie, M.S.** Is Quantum Space a Random Cantor Set with a Golden Mean Dimension at the Core? Chaos, Solitons & Fractals, **1994**; 4(2); 177-179.
 29. **El Naschie, M.S.** On a class of general theories for high energy particle physics. Chaos, Solitons & Fractals, **2002**; 14: 649-668.
 30. **El Naschie, M.S.** From symmetry to particles. Chaos, Solitons & Fractals, **2007**; 32: 427-430.
 31. **El Naschie, M.S.** On the topologic ground state of E -infinity space-time and Superstring connection. Chaos, Solitons & Fractals, **2007**; 32: 468-470.
 32. **El Naschie, M.S.** Feigenbaum scenario for turbulence and Cantorian E -infinity theory of high energy particle physics. Chaos, Solitons & Fractals, **2007**, 32 (3), 911-915.
 33. **Петухов С.В.** Метафизические аспекты матричного анализа генетического кода и золотое сечение. В кн. «Метафизика. Век XXI. М.: БИНОМ, **2006**. - 216-250.
 34. **Стахов А.П., Арансон С.Х., Хантон И.В.** Золотая фибоначчиева гониометрия, резонансная структура генетического кода ДНК, преобразования Фибоначчи-Лоренца и другие приложения. Часть II. Резонансная структура генетического кода ДНК // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14779, 26.04.**2008**.
 35. **Сороко Э.М.** Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, **1984**.- 264 с.
 36. **Андреев Н.** Мир, рожденный из ничего.
<http://galspace.spb.ru/index60-2.html>
 37. **Нудельман Р.** Космология: конец и продолжение. Журнал «Знание – сила», 2003, №10 http://www.znanie-sila.ru/issue_2410.html
 38. **Нудельман Р.** Скорость света: исчерпаны ли парадоксы? Журнал «Знание – сила», **2003**, №11.
 39. **Барулин В.Н., Злобин В.С., Суховилов К.К.** Вселенская константа. Эзотерическая энциклопедия. **2007**.
<http://esopedia.ru/VselenskajaKonstanta>
 40. **Косинов Н.В.** Неожиданная связь трех важнейших констант: постоянной тонкой структуры α , числа π и золотой пропорции Φ .
http://rusnauka.narod.ru/lib/author/kosinov_n/3