

## Золотое Сечение – морфологический закон природы

"Закон золотого деления должен быть  
диалектической необходимостью"  
Алексей Лосев.

### 1. Введение

Феномен золотого сечения известен человечеству очень давно.

Его тайну пытались осмыслить Платон, Евклид, Пифагор, Леонардо да Винчи, Кеплер и многие другие крупнейшие мыслители человечества. Они неразрывно связывали золотое сечение с понятием всеобщей гармонии, пронизывающей вселенную от микромира до макрокосмоса.

Классическими проявлениями золотого сечения являются предметы обихода, скульптура и архитектура [1, 2, 3, 4, 5], математика [6, 7, 8], музыка [9, 10, 11] и эстетика [12, 13, 14, 15, 16]. В предыдущем столетии с расширением области знаний человечества резко увеличилось количество сфер, где наблюдается феномен золотой пропорции. Это биология и зоология [17, 18, 19], экономика [20, 21], психология [22, 23, 24], кибернетика [7, 25], теория сложных систем [26, 27], и даже геология [28, 29] и астрономия [30].

Ежегодно издаются несколько книг посвященных этой проблеме, постоянно расширяя область приложения золотого сечения. Авторы этих исследований связывают золотое сечение с такими несовместимыми, на первый взгляд понятиями, как красота, асимметрия, рекурсия, самоорганизация и пропорция. За последние годы появились интересные интернет-сайты [31, 32, 33] посвященные золотому сечению.

По глубокому убеждению автора, живая природа построена на простых принципах и может быть описана элементарными моделями. В этой статье автор сделает попытку системного анализа феномена золотого сечения и выскажет несколько предположений, позволяющих объяснить всеобщий характер золотой пропорции.

### 2. Золотое сечение

Золотое сечение (золотая пропорция) - это закон пропорциональной связи целого и составляющих его частей.

Классический пример золотого сечения – задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении [6], когда целое так относится к большей своей части, как большая часть к меньшей (рис 1):

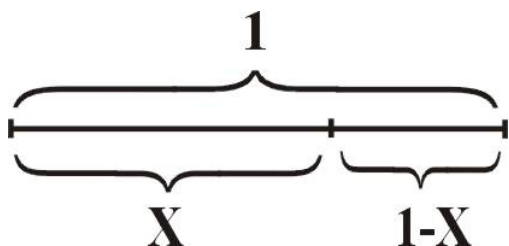


Рис. 1

Решение задачи сводится к уравнению  $X^2+X-1=0$ , одно из решений которого равно

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.6180339\dots, \quad (1)$$

обратная величина которого обычно обозначается как  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339\dots$ , называемое основанием золотой пропорции.

Число  $\alpha$  обладает уникальными математическими свойствами. Это единственное число, кроме нуля, удовлетворяющее рекуррентному соотношению:

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2)$$

Основание золотой пропорции обладает одновременно свойствами аддитивности и мультипликативности.

Весь окружающий мир можно разделить с точки зрения формообразования на две группы - то, что создано руками человека и то, что мы называем природой.

### ***3. Золотая пропорция в произведениях человека.***

Наличие золотой пропорции в формах объектов, созданных человечеством можно объяснить на основе анализа следующих исследований:

- Опыты Фехнера [22], в которых испытуемым было предложено выбрать самый "красивый" прямоугольник из серии от квадрата до двойного квадрата. Подавляющее большинство указало на прямоугольник с отношением сторон  $\alpha$ . Это объясняется строением глазного дна человека. Поле ясного зрения имеет форму эллипса, оси которого относятся как  $\alpha$  [13], поэтому предметы, в форме которых содержится золотая пропорция, воспринимаются «благоприятно». Не напрасно всеми нами любимые экраны TV и кредитные карточки имеют соотношение длины и ширины равно золотой пропорции [34].

- А.А.Соколов и Я.А.Соколов, в статье "Математические закономерности электрических колебаний мозга" [23], показали, что соотношение частот волн (ритмов) электрических колебаний мозга равно золотой пропорции.

- В статье И.А.Рыбина "Психофизика: поиск новых подходов" [35] на основании экспериментальных данных показано, что число  $\alpha$  - инвариант психофизических законов, описывающих сенсорные восприятия человека.

- В исследованиях Цейзинга [36], Хембиджа [4], Дочи [18], Петухова [17], Шапаренко [37] показано наличие золотой пропорции в отношении частей тела человека (рис 2), в частности руки.

Можно сказать, что человек всегда имеет эталон золотой пропорции "под рукой".



Рассмотрим геометрическую аналогию самоподобности – «динамический» прямоугольник с отношением сторон равным  $\alpha$ . Самоподобность выражается в том, что присоединяя к большей стороне «динамического» прямоугольника ABCD (рис 3) квадрат DCFE со стороной, равной этой стороне, получим прямоугольник ABFE, подобный первоначальному. Аналогично, если отсечь от «динамического» прямоугольника ABCD квадрат AMND, то получим прямоугольник MBCN подобный «динамическому».

Нетрудно доказать, что «динамический» прямоугольник может иметь соотношение сторон только равное  $\alpha$ .

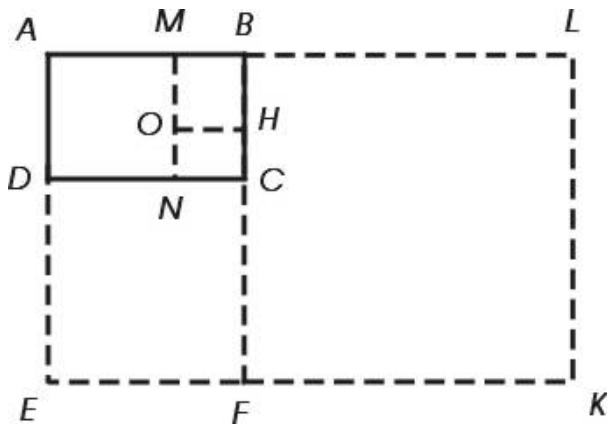


Рис. 3

Операцию отсечения или добавления квадрата можно производить многократно, и в результате всегда будет получаться прямоугольник с соотношением сторон равным  $\alpha$ . «Динамический» прямоугольник также называют «живым». Присоединяя к «живому» прямоугольнику «неживую» фигуру квадрат, получим опять «живую». Это аналогия экспансии биологической жизни на окружающее пространство.

Эта модель содержит в себе не только самоподобность, но и асимметрию. Под асимметрией, мы будем понимать не отсутствие симметрии, а некоторое нарушение ее.

В квадрате, симметричной фигуре, все стороны равны, а в «динамическом» прямоугольнике стороны равны лишь попарно.

По мнению основателя синергетики Г. Хагена [27], появление асимметрии вызывает понижение степени симметрии пространства, которое является необходимым условием самоорганизации, что приводит к появлению внутренних сил, являющихся основой саморегуляции.

Так, «неживая» фигура квадрат имеет 4 оси симметрии, а «динамический» прямоугольник только две.

## 5. Пентагональная симметрия и асимметрия

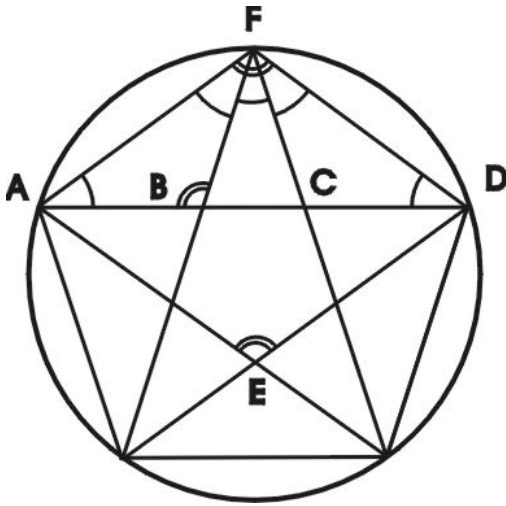


Рис. 4

Если рассмотреть правильный пятиугольник (рис. 4), то увидим, что он буквально "заполнен" золотым сечением, так:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|} = \alpha$$

Углы ABF, AFD и AED равны  $108^\circ$  или  $\frac{3}{5}\pi$ , а углы ADF, AFB, BFC равны  $36^\circ$  или  $\frac{1}{5}\pi$ , при

этом:

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\alpha; \quad \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2\alpha} \quad (3)$$

Считалось, что пентагональная симметрия встречается только в живой природе, что является отличительной чертой саморегулирующихся систем. Тогда как в кристаллах – «неживых структурах», согласно классической кристаллографии, возможны симметрии третьего, четвертого и шестого порядков [39]. Однако, открытие квазикристаллов, сделанное в 1982 Даном Шехтманом, опровергло этот закон классической кристаллографии. В отличие от классических кристаллов, квазикристаллы 5-го порядка, открытые Даном Шехтманом, являются "пограничными" объектами на стыке "живого" и "неживого". Чем глубже мы будем понимать разницу между "живым" и "неживым", тем больше мы будем находить "пограничных" объектов. Из всех правильных фигур только пятиугольником нельзя заполнить плоскость. То есть, из них нельзя выложить паркет.

Нужно отметить, что в поперечном сечении двойная спираль ДНК - правильный пятиугольник [40, 41].

### Предположение 3

Золотое сечение на прямой и пентагональная симметрия на плоскости являются отображением внутренней асимметрии самоподобных систем.

### 6. Числа Фибоначчи, рекурсия и золотое сечение.

В математике хорошо известна последовательность чисел 1,1,2,3,5,8,13,21,...., называемая числами Фибоначчи и образуемая по рекуррентной формуле:

$$\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n \quad (4)$$

где  $n$  - натуральное число и начальные члены равны 1 и 1.

Ярким примером проявления чисел Фибоначчи в живой природе является филлотаксис [19].

Французский математик Бине показал, как связаны числа Фибоначчи и основание золотой пропорции:

$$\varphi_n = \frac{\alpha^n - \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad (5)$$

Эта формула интересна тем, что справа находятся иррациональные числа  $\alpha$  и  $\sqrt{5}$ , а слева всегда целое. Нужно отметить асимметричность знаменателя правой части формулы 5. Из последней формулы легко получить следующее соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} = \alpha, \quad (6)$$

которое вместе с формулами (2), (4) и (5) показывает глубокую связь между числами Фибоначчи и золотой пропорцией. В формулах (1), (3), (5) можно заметить почти «мистическое» присутствие числа 5.

Если в рекурсивной последовательности образуемой по формуле (4), задать произвольные начальные члены, то предел отношения двух соседних членов этого ряда все равно будет стремиться к  $\alpha$  (формула (6)). Даже некоторое количество арифметических ошибок в вычислении  $\varphi_i$  при  $1 < i < n$ , не повлияют на этот результат.

Основание золотой пропорции является инвариантом рекурсивных соотношений (4) и (6). В этом проявляется «устойчивость» золотого сечения, одного из принципов организации живой материи (см. Предположение 2).

Так же, основание золотой пропорции является решением двух экзотических рекурсивных последовательностей

$$\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

$$\alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Присутствие золотой пропорции и чисел Фибоначчи в живой природе позволяют говорить о некотором едином механизме их возникновения.

#### Предположение 4

Числа Фибоначчи и золотое сечение являются математическим описанием некоторого формообразующего процесса. На микроуровне (целочисленном) количественная характеристика этого процесса проявляется как числа Фибоначчи, а на макроуровне (статистическом) как основание золотой пропорции - число  $\alpha$ .

Если такой формообразующий процесс является законом живой природы, то с его помощью можно объяснить наличие золотой пропорции в соотношении частей тела человека и животных, а также явление филлотаксиса.

#### *7. Асинхронное деление клеток*

В биологии существует понятие, называемое асинхронным делением (дроблением). В монографии К.Г. Газаряна и Л.В. Белоусова "Биология индивидуального развития животных" [42] автор нашел: "Начиная с 11-го деления, дробление становится повсеместно асинхронным", там же, "В яйцах многих групп животных - круглых червей, некоторых моллюсков, млекопитающих - периода синхронных делений нет: начиная со 2-го деления, дробление идет асинхронно".

#### Предположение 5

При асинхронном делении каждая клетка делится на две клетки, одна из которых пропускает следующий такт деления.

Для краткости, такой формообразующий процесс будем называть F-делением.

Рассмотрим количественные характеристики F-деления. После определенного количества синхронных делений происходят исключительно F-деления. Так после первого такта F-деления образуются две клетки A и B (рис 5), из которых только B будет делиться во втором такте. После двух тактов F-деления образуются три клетки, из которых только две будут делиться в третьем такте. После третьего такта суммарное количество клеток станет равным пяти, из которых три будут делиться в четвертом такте F-деления и т.д. Следовательно, в процессе F-деления из одной клетки будет образовываться 2,3,5,8,13,21,.. клеток.

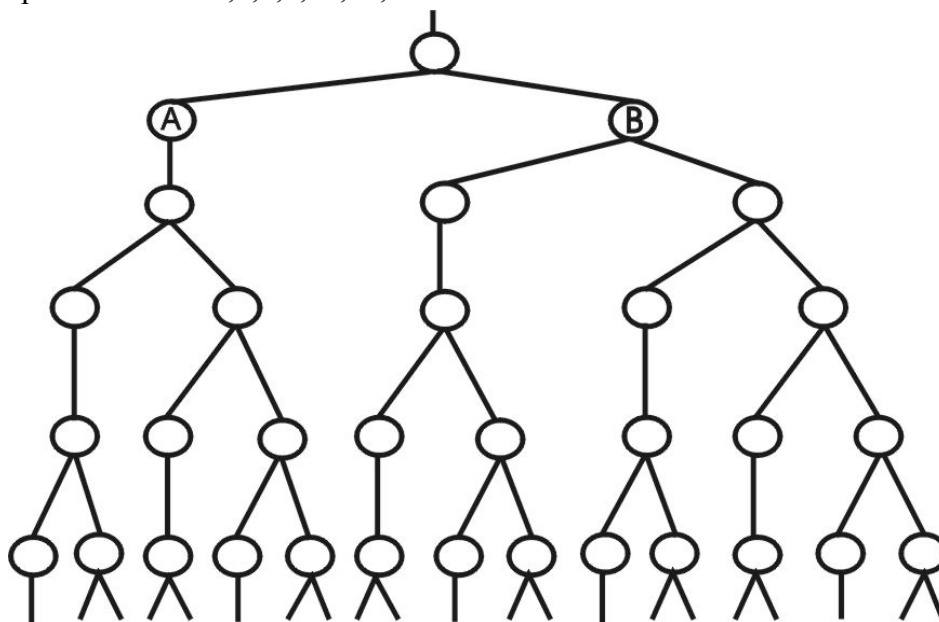


Рис. 5

Гипотеза о F-делении клеток позволяет объяснить наличие золотой пропорции в результатах исследований из раздела 3, сердечных ритмах человека [43, 44], а также в линейных размерах тела человека, например руки (Рис. 2).

Пусть на определенном этапе развития зародыша, после периода синхронных делений, выделится одна клетка из которой будет развиваться рука. После первого F-деления образуются две клетки А и В(рис 5). Клетка А пропустит следующий такт деления, следовательно, ее потомков будет в  $\alpha$  раз меньше клеток потомков В. Действительно, как видно из рисунка 1 отношение длины кисти и локтя к предплечью есть золотое сечение. Принимая длину, пропорциональную количеству клеток, получаем, что из клетки А будет развиваться предплечье, а из В кисть и локоть. Аналогично после деления В, из образовавшихся дочерних клеток, будут развиваться локоть и кисть, и т.д. до фаланг пальцев на руке.

Граф на рисунке 5 не является оригинальным, похожие рисунки можно увидеть при решении задач о росте деревьев, размножении кроликов и пчел [45], а также на предложенной британским эмбриологом С. Н. Waddington [46] схеме прогрессивного назначения эмбриональных клеток.

Нетрудно заметить, что Граф на рисунке 5 является фрактальной структурой.

## ***8. Морфогенетическое поле и асимметрия***

### **Предположение 6**

**Совокупность клеток зародыша образует морфогенетическое поле.**

Необходимость существования морфогенетического поля доказал физик и биолог Б.Н.Белинцев [47].

Потенциал клетки в морфогенетическом поле эмбриона определяется ее положением относительно других клеток. В зависимости от этого потенциала активизируется определенный участок ДНК.

### **Предположение 7**

**Уникальный потенциал клетки в морфогенетическом поле эмбриона является запускающим механизмом считывания генетической программы.**

В результате выполнения этой программы происходит дифференциация клеток эмбриона на различные ткани и части тела.

### **Предположение 8**

**Асимметричность F-деления позволяет каждой клетке зародыша обладать уникальным потенциалом в морфогенетическом поле.**

Гипотеза о F-делении описывает наиболее общий алгоритм развития организма и дает объяснение устойчивому присутствию золотой пропорции в морфологических процессах живой природы.

## ***9. Асинхронность, асимметрия и диалектика***

### **Предположение 9**

**Асинхронность есть выражение асимметричности во времени.**

При F-делении происходит уменьшение количества осей симметрии образующейся совокупности клеток, что является необходимым условием самоорганизации по Хагену [27].



### **Предположение 10**

**Асимметричность морфологических процессов является источником внутреннего противоречия, необходимым условием возникновения и существования самоорганизующихся систем.**

В F-делении клеток с одной стороны, присутствует симметрия - каждая клетка делится на две, с другой стороны, после деления клетки не равноправны - асимметрия.

Симметрия и асимметрия являются диалектическими противоположностями.

### **Предположение 11**

**Диалектическое противоречие между симметрией и асимметрией является движущей силой саморегуляции.**

Гегель писал: «Противоречие - корень всего движения и живучести» [48]. Перефразируя известный философский закон «О Единстве Противоположностей», получим закон «О Единстве Симметрии и Асимметрии».

Белорусский философ Э.М.Сороко высказал предположение, что «сочетание симметрии и асимметрии в определенной пропорции и есть гармония» [26].

## ***10. Морфологические процессы и асимметрия***

### **Предположение 12**

**Асимметричность морфологических процессов есть фундаментальный закон живой материи, а числа Фибоначчи, золотое сечение и пентагональная симметрия его количественное отображение.**

Приведенные выше предположения дают возможность качественно нового подхода к изучению живой материи.

Становится возможным построение реальных математических моделей живых организмов и всевозможных самоорганизующихся систем.

### *Литература*

1. Мессель Э. Пропорции в античности и в средние века.-М., 1936.
2. Гика М. Эстетика пропорций в природе и искусстве.-М., 1936.
3. Корбюзье Л. Модульор.-М., 1976.
4. Хембидж Д. Динамическая симметрия в архитектуре.-М., 1936.
5. Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение/Три взгляда на природу гармонии.-М., 1990.
6. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи.-М., 1984.
7. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения.-М., "Наука",1979.
8. Dubner H., Keller W. "New Fibonacci and Lucas primes," Math. Comp., 68:225 (1999) 417--427, S1--S12. MR 99c
9. Proportions in Music //Fibonacci Quarterly vol 2 (1964) pages 219-222
10. Howat R. Debussy in Proportion : A Musical Analysis
11. <http://evolutionoftruth.com/goldensection/music.htm>
12. Лосев А.Ф. Эстетика Возрождения.-М., 1978.

13. Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи/ Учебное пособие.-К., 1986.
14. Мещеряков В.Т. Гармония и гармоническое отношение.-Л., 1976.
15. Петрович Д. Теоретика пропорций.-М., 1979.
16. Шестаков В.П. Гармония как эстетическая категория.-М., 1973.
17. Петухов С.В. Биомеханика, бионика и симметрия.-М., 1984.
18. Doczi G. The power of limite. Proportional harmonies in nature, art and architecture.-London, 1981.
19. <http://www.math.smith.edu/~phyllo/index.html>
20. Frost A.J., Prechter R.R. Jr. Elliot Wave Principle: Key to Stock Market Profits. New Classics Library, Gainseville, Georgia, 1985.
21. Fisher R. Fibonacci Applications and Strategies for Traders, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1993.
22. Fechner G. T. Vorschule der Aesthetik. Breitkopf & Huartel, Lipsia, 1876.
23. Соколов А.А., Соколов Я.А. Математические закономерности электрических колебаний мозга.-М., 1977.
24. Prechter R R. The Wave Principle of Human Social Behavior and the New Science of Socionomics. New Classics Library, Gainseville, Georgia, 1999.
25. Стахов А.П. Коды золотой пропорции.-М., 1984.
26. Сороко Э.М. Структурная гармония систем.-Минск, 1984.
27. Хаген Г. Синергетика.-М., 1980.
28. Степанов И. Н. Формы в мире почв. - М., Наука. 1986
29. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. Москва, Изд-во "Молодая Гвардия", 1990 г.
30. <http://evolutionoftruth.com/abennett> <http://evolutionoftruth.com/goldensection/solarsys.htm>
31. <http://www.goldenmuseum.com>
32. <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott>
33. <http://goldennumber.net>
34. <http://goldennumber.net/creditcard.htm>
35. Рыбин И.А. "Психофизика: поиск новых подходов"//Природа № 2, 1992.
36. Zeising A. Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers. Leipzig, 1854..
37. Шапаренко П.Ф. Принцип пропорциональности в соматогенезе.-Винница, 1994.
38. Mandelbrot B. The Fractal Gometry of Nature / Benoit B. Mandelbrot.San Francisco : W.H. Freeman, 1982.
39. Шубников А. В., Копчик В. А. Симметрия в науке и искусстве. -М.: Наука, 1972.
40. <http://milan.milanovic.org/math/english/golden/golden2.html>
41. <http://goldennumber.net/dna.htm>
42. Газарян К.Г., Белоусов Л.В. Биология индивидуального развития животных.-М., 1983
43. <http://www.smolensk.ru/user/sgma/MMORPH/N-6-html/CVETKOV-1/cvetkov-1.html>
44. Цветков В. Д. Сердце, золотое сечение и симметрия. - Пушкино: ПНЦ РАН, 1997.
45. <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html>
46. Harris A. K., "Multicellular Mechanics in the Creation of Anatomical Structures," Biomechanics of Active Movement and Division of Cells, N. Akkas, ed., Springer-Verlag, 1994 pp. 87–129
47. Белинцев Б.Н. Физические основы биологического формообразования.-М., 1991.
48. Hegel's science of logic / translated by A.V. Miller ; foreword by J.N. Findlay. Wissenschaft der Logik. English Atlantic Highlands, NJ : Humanities Press International, 1989
49. Соляниченко Н.А., Розин Б.Н. Тайна золотого сечения. Тезисы конференции «Фенид 90. Нетрадиционные идеи о природе и ее явлениях». Гомель 1990, Vol 3.
50. Соляниченко Н.А., Розин Б.Н. О причинах присутствия золотой пропорции в формах живой природы. Депонированно в УКР НТИ 02.02.93 N 73УК93