Г. Я. Мартыненко

Кумулятивные суммы последовательностей Мидхата Газале и Алексея Стахова

Известно, что сумма членов последовательности Фибоначчи протяженности *n* равна:

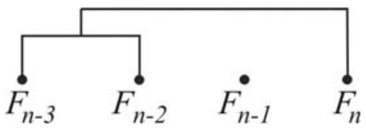
$$\sum_1^n F_n = F_{n+2} - 1$$

Для последовательности Люка имеем такую формулу:

$$\sum_1^n L_n = L_{n+2} - 3$$

Интересно, как выглядят в данном аспекте кумулятивные суммы последовательности М. Газале и А. Стахова. Обе последовательности, а также кумулятивные суммы их членов представлены в двух таблицах, приведенных ниже.

Начнем с последовательности Газале. Рассмотрим простейший вариант, основанный на рекурсии (*Мартыненко Г. Я.* Стахов, Газале, Файнберг: система обобщенных рекурсий // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ. 14971, 19.12.2008. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321096.htm)



Этой рекурсии соответствует уравнение серебряного сечения Падована-Газале:

$$x^3 - x - 1 = 0$$

При построении данной последовательности необходимо использовать три затравочных числа. Пусть ими будут 1, 2, 3, хотя в принципе числа могут быть любыми.

Таблица 1

Кумулятивные суммы последовательности Газале

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
G_n	**1**	**2**	**3**	**3**	**5**	**6**	**8**	**11**	**14**	**19**
$\sum G_n$	**1**	**3**	**6**	**9**	**14**	**20**	**28**	**39**	**53**	**72**
$\sum G_n / \sum G_{n-1}$		**3**	**2**	**1,5**	**1,556**	**1,429**	**1,4**	**1,393**	**1,359**	**1,358**
$\sum G_n / G_n$		**1,5**	**2**	**3**	**2,8**	**3,333**	**3,5**	**3,545**	**3,786**	**3,789**

Продолжение табл. 1

n	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
G_n	**25**	**33**	**44**	**58**	**77**	**102**	**135**	**179**	**237**	**314**
$\sum G_n$	**97**	**130**	**174**	**232**	**309**	**411**	**546**	**725**	**962**	**1276**
$\sum G_n / \sum G_{n-1}$	**1,347**	**1,340**	**1,338**	**1,333**	**1,332**	**1,330**	**1,328**	**1,328**	**1,327**	**1,326**
$\sum G_n / G_n$	**3,88**	**3,939**	**3,955**	**4**	**4,013**	**4,029**	**4,044**	**4,050**	**4,059**	**4,064**

Легко заметить, что кумулятивная сумма чисел Газале порядка *n* равна $\sum_1^n G_n = G_{n+2} - 5$.

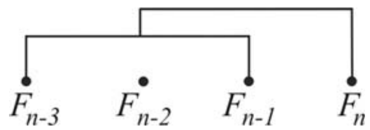
Что касается суммативного правила для кумулятивной последовательности чисел, то здесь тоже остается в силе эффект пятерки, а именно:

$$\sum G_n + \sum G_{n+1} = \sum G_{n+3} + 5.$$

Эта «коварная» пятерка мешает быстрой сходимости кумулятивных сумм Газале к серебряному сечению 1,3245. Сходимость хотя и медленная, но верная и неизбежная.

Этим замечательные свойства газалевых сумм не исчерпываются. Есть еще одно, касающееся сходимости к предельной величине отношения суммы соответствующего порядка к числу Газале того же порядка. Оказалось, что эта предельная величина равна серебряному сечению в пятой степени: $1{,}3257^5 = 4{,}788$, т. е. здесь выскакивает та же «магическая» пятерка.

А теперь перейдем к последовательности Алексея Стахова, которой соответствует рекурсия



и уравнение

$$x^3 - x^2 - 1 = 0$$

построена таблица (табл. 2) , аналогичная табл. 1

Таблица 2

Кумулятивные суммы последовательности Стахова

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
S_n	1	**2**	**3**	**4**	**6**	**9**	**13**	**19**	**28**	**41**
$\sum S_n$	**1**	**3**	**6**	**10**	**16**	**25**	**38**	**57**	**85**	**126**
$\sum S_n / \sum S_{n-1}$		**3**	**2**	**1,667**	**1,6**	**1,563**	**1,52**	**1,5**	**1,491**	**1,482**
$\sum S_n / S_n$		**1,5**	**2**	**2,5**	**2,667**	**2,778**	**2,923**	**3**	**3,036**	**3,073**

Продолжение табл. 2

	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**176**	**18**	**19**	**20**
S_n	**60**	**88**	**129**	**189**	**277**	**406**	**595**	**872**	**1278**	**1873**
$\sum S_n$	**186**	**274**	**403**	**592**	**869**	**1275**	**1870**	**2742**	**4020**	**5893**
$\sum S_n / \sum S_{n-1}$	**1,476**	**1,473**	**1,471**	**1,469**	**1,468**	**1,467**	**1,467**	**1,466**	**1,466**	**1,466**
$\sum S_n / S_n$	**3,1**	**3,114**	**3,124**	**3,132**	**3,137**	**3,140**	**3,142**	**3,144**	**3,146**	**3,146**

Кумулятивная сумма чисел Стахова порядка *n* равна:

$$\sum_1^n S_n = S_{n+2} - 3,$$

а суммативное правило имеет вид:

$$\sum S_{n-1} + \sum S_{n+1} = \sum S_{n+2} + 3.$$

При этом

$$\lim_{n\to\infty} \sum S_n \Big/ \sum S_{n-1} = 1{,}4654, \text{ а}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum S_n \Big/ S_n = 1{,}4654^3 = 3{,}146.$$

т. е. в отличие от последовательности Газале, мы здесь имеем дело с «магической» тройкой - так же, как и в последовательности Люка.