Г. Я. Мартыненко

# Обобщение формулы Кассини для последовательностей Фибоначчи и Люка

Известно, что любое число Фибоначчи и два контактно обрамляющих его числа связаны формулой знаменитого французского астронома Джованни Доменико Кассини (1625-1712):

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1},$$

которая справедлива для произвольного целого $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 ...$

Эта формула может быть распространена и на последовательности Фибоначчи и Люка. Рассмотрим эту ситуацию на примере классических чисел Фибоначчи.

Начнем с последовательности Фибоначчи. Ее фрагмент представлен в табл. 1.

*Таблица 1*

| $n$ | 5 | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | **55** | 89 | 144 | 233 | 377 | 610 |

Пусть центральным числом будет 55. Перемножим попарно и пошагово числа, обрамляющие это числа, и вычтем из этих произведений квадрат 55,

Полученные результаты приведены в табл. 2.

*Таблица 2*

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L(n) \times L(n+2) = a$ | 3026 | 3024 | 3029 | 3016 | 3050 | 2961 |
| $L(n+1)^2 = b$ | 3025 | 3025 | 3025 | 3025 | 3025 | 3025 |
| $b - a$ | 1 | -1 | 4 | –9 | 25 | –64 |
| $F_k^2$ | 1 | 1 | $2^2$ | $3^2$ | $5^2$ | $8^2$ |

Итак, формула Кассини для пар чисел при возрастании расстояния от центра зеркальной симметрии приобретает вид:

$$F_n^2 - F_{n-k}F_{n+k} = (-1)^{n+1} F_k^2,$$

где $F_k$ – стандартное число Фибоначчи *k*.

Эту формулу можно переписать и так:

$$\left(\frac{F_n}{F_k}\right)^2 - \frac{F_{n-k}F_{n+k}}{F_k^2} = (-1)^{n+1}$$

В таком виде формула внешне сохраняет преемственность с классической формулой Кассини.

Теперь перейдем к последовательности Люка (см. табл. 3) и посмотрим, как здесь выполняется формула Кассини.

*Таблица 3*

| $n$ | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L(n)$ | 11 | 18 | 29 | 47 | **76** | 123 | 199 | 322 | 521 | 843 | 1364 |

Сначала проверим данной формулы к контактным обрамляющим числам Люка.

Обратимся к началу последовательности и будем скользить по ней, выполняя необходимые вычисления. Результаты разместим в табл. 4.

*Таблица 4*

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L(n)$ | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 | 123 |
| $L(n)\times L(n+2)=a$ | | 4 | 21 | 44 | 126 | 319 | 846 | 2204 | 5781 | 15124 |
| $L(n+1)^2=b$ | | 9 | 16 | 49 | 121 | 324 | 841 | 2209 | 5776 | 15129 |
| $b-a$ | | 5 | -5 | 5 | -5 | 5 | -5 | 5 | -5 | 5 |

Формула для контактных обрамляющих чисел в данном случае будет иметь вид:

$$L_n^2 - L_{n-k}L_{n+k} = (-5)^{n+1}F_k^2,$$

Перейдем теперь к обрамляющим числам, отстоящим от центрального числа на любое расстояние, и рассмотрим их последовательность.

Пусть центральным числом будет 123. Перемножим попарно и пошагово числа, обрамляющие это числа, и вычтем из этих произведений квадрат 123,

Полученные результаты приведены в табл. 5.

*Таблица 5*

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L(n)\times L(n+2)=a$ | 15124 | 15134 | 15109 | 15174 | 15004 | 14449 |
| $L(n+1)^2=b$ | 15129 | 15129 | 15129 | 15129 | 15129 | 15129 |
| $b-a$ | 5 | –5 | 20 | –45 | 125 | -320 |
| $\frac{b-a}{5}$ | 1 | –1 | 4 | –9 | 25 | 64 |
| $F_k^2$ | 1 | 1 | $2^2$ | $3^2$ | $5^2$ | $8^2$ |

Формула Кассини для нарастающих обрамляющих чисел Люка идентична таковой для последовательности Фибоначчи, исключая присутствие пятерки:

$$\left(\frac{L_n}{F_k}\right)^2 - \frac{L_{n-k}L_{n+k}}{F_k^2} = (-5)^{n+1}.$$

Теперь обратимся к неклассическим последовательностям типа Фибоначчи, например, к двум наиболее распространенным в семействе фиботипов последовательностям – Ф-3 и Ф-4 (*Мартыненко Г. Я.* Пространственная типология последовательностей Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14720, 19.02.2008). Результаты вычислений разместим в табл. 6 и 7.

*Таблица 6*

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F-3(n)$ | 3 | 1 | 4 | 5 | 9 | 14 | 23 | 37 | 60 | 97 |
| $F-3(n)\times F-3(n+2)=a$ | | 1 | 16 | 25 | 81 | 19 6 | 529 | 1369 | 3600 | 9409 |
| $F-3(n+1)^2=b$ | | 12 | 5 | 36 | 70 | 201 | 518 | 1380 | 3589 | 9420 |
| $b-a$ | | -11 | 11 | -11 | 11 | -11 | 11 | -11 | 11 | -11 |

*Таблица 7*

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F-4(n)$ | 3 | 2 | 5 | 7 | 12 | 19 | 31 | 50 | 81 | 131 |
| $F-4(n)\times F-4(n+2)=a$ | | 4 | 25 | 49 | 144 | 361 | 961 | 2500 | 6561 | 17161 |
| $F-4(n+1)^2=b$ | | 15 | 14 | 60 | 133 | 372 | 950 | 2511 | 6550 | 17172 |
| $b-a$ | | -11 | 11 | -11 | 11 | -11 | 11 | -11 | 11 | -11 |

Результаты вычислений – довольно любопытные. Разности $b-a$ для двух последовательностей одинаковы. Причем мы убеждаемся, что разность эта возрастает: имеем 1 – для последовательности Фибоначчи, 5 – для Люка и 11 – для F-3 и F-4. Одинаковость разностей для F-3 и F-4, по-видимому, является следствием того, что эти последовательности связаны отношением сопряженности (Мартыненко, 2008). Но это лишь предположение, нуждающееся в проверке на материале большого числа фиботипов.

В заключение приведем разведочное наблюдение частного характера, которое убедит нас в закономерном росте разности $b-a$.

Пусть затравочными будет пара чисел, из которых одно – фиксированная единица, а второе – одно из чисел натурального ряда.

Получена следующая последовательность разностей $b-a$:

$$(1+1)\times 0+1=1$$
$$(1+3)\times 1+1=5$$
$$(1+4)\times 2+1=11$$
$$(1+5)\times 3+1=19$$
$$(1+6)\times 4+1=29$$
$$(1+7)\times 5+1=41$$
$$(1+8)\times 6+1=55$$
$$(1+9)\times 7+1=71$$
$$(1+10)\times 8+1=89$$

Несколько выбивается из общей «компании» число 55, но это только на первый взгляд. Ведь это число кратно и 11, и 5.

В следующей работе мы рассмотрим результаты применения формулы Кассини к последовательностям А. Стахова и М. Газале.