Г.Я.Мартыненко

Гармоническая тетрада повторных радикалов

Широко известно представление золотого числа φ в виде непрерывной дроби или повторного радикала.

Например, повторный радикал для числа φ имеет вид:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1...}}} \to 1{,}618,$$

а для серебряного сечения М. Газале:

$$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1...}}} \to 1{,}3247.$$

Продолжим этот сюжет.

Сначала обратимся к числу φ.

Это замечательное число можно получить и так:

$$\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1.-...}}} \to 0{,}618 = \frac{1}{\varphi}, \text{ если затравка меньше 1.}$$

Но это же число можно поучить при знакопеременном варианте подкоренных выражений. Но здесь мы будем иметь дело не с единичками, а с двойками:

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+...}}} \to 1{,}618.$$

Но самое интересное, что в «семью» повторных кубических радикалов на основе единичек входит и сечение А. Стахова.

Этому сечению соответствует радикал:

$$\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-...}}} \to 0{,}6824 = \frac{1}{1{,}4654},$$

если затравка меньше 1, т. е. этот радикал устремляется к величине, обратной основному стаховскому сечению.

Итак, золотое сечение и два его дочерних обобщения – сечение М. Газале и сечение А. Стахова, будучи представленными в виде непрерывных радикалах простейшего типа, образуют изящную тетраду:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1...}}} \to 1{,}618 & \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1.-...}}} \to 1{,}618^{-1}, \\ \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1...}}} \to 1{,}3247 & \sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1-...}}} \to 1{,}4654^{-1} \end{array}$$

Аналогичные манипуляции могут быть осуществлены и применительно к непрерывным дробям.

В этом нет ничего удивительного, так как уравнения Стахова находятся в соответствии с уравнениями Газале, а именно уравнение Газале возникает тогда, когда значения независимой переменной в уравнении Стахова мы заменим на обратные величины.

Пусть в уравнении Стахова $x^3 - x^2 - 1 = 0$ $x = \frac{1}{y}$. Тогда получаем новое уравнение $y^3 + y - 1 = 0$, корень которого равен величине (0,862), обратной числу Стахова (1,465).

Если же, наоборот, идти от уравнения Газале, поменяв в нем значения переменной на обратные, то получаем уравнение $y^3 + y^2 - 1 = 0$, корень которого равен величине, обратной серебряному сечению Падована-Газале, то есть $\frac{1}{1{,}325} = 0{,}755$.

Симметрия царствует и здесь.