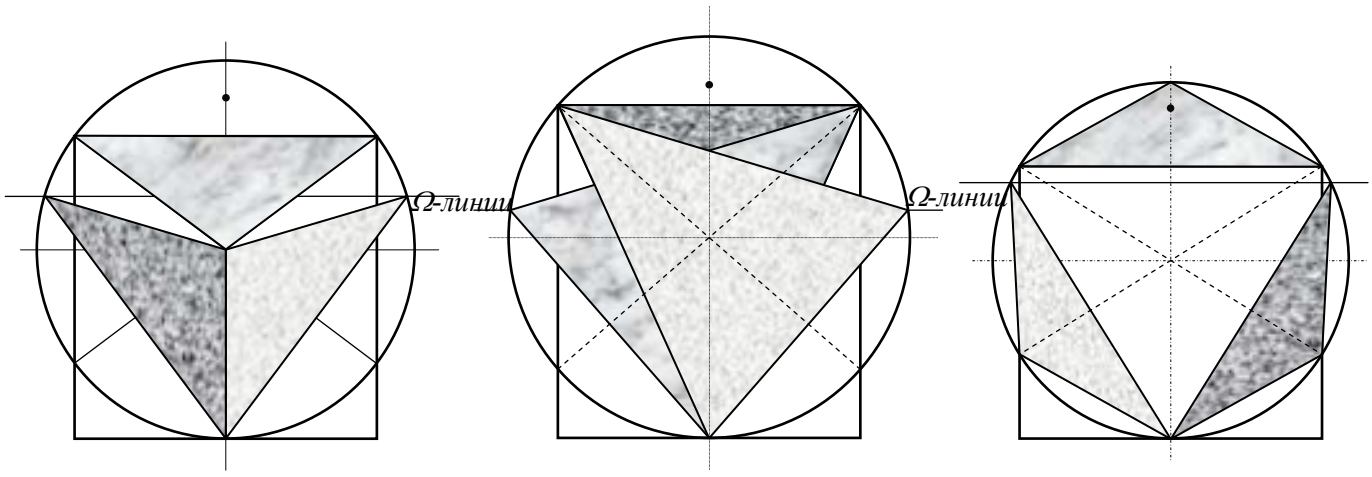
Сергей А. Алфёров

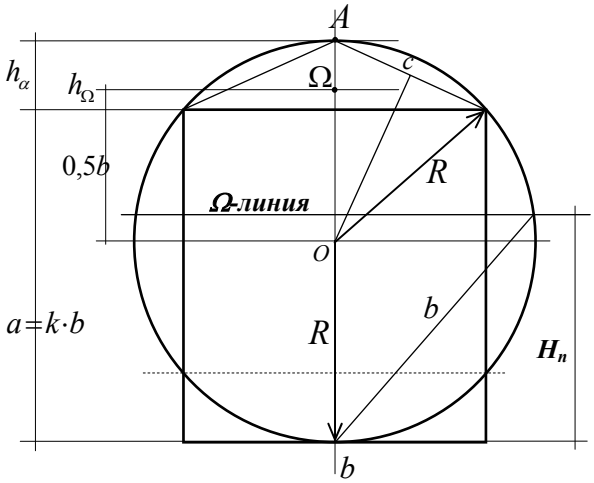
Вписано-описанность: причина и следствие (два примера)

С общими закономерностями вписано-описанных прямоугольников (ВО-прямоугольников) можно познакомиться в ранних публикациях, в частности в тексте «Динамика ВО-прямоугольников» (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320024.htm). Здесь же давайте рассмотрим 2 продолжения темы.

1

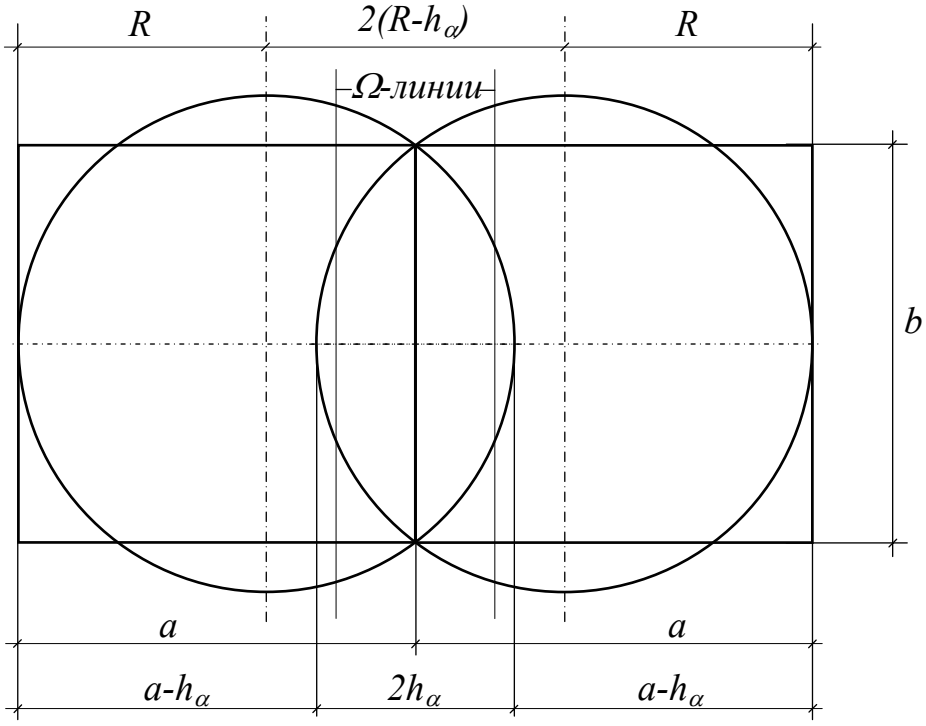
Посмотрите ещё раз на образы, величины и соотношения ВО-прямоугольников. Но главное – на образ. Он – не симметричен по одному из 2-х направлений…





А в этом тексте (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320035.htm) была приведена таблица вариантов «Обобщенного ВО-прямоугольника», в которой странным образом все характерные, значимые варианты в своих соотношениях a/b=k имеют в знаменателе «2» (под четкими формульными выражениями); то есть поделены пополам (и «1» тоже – как «2/2»). Почему? Потому что «заказывают» сделать b=2 (как в схеме Главы_11 «Сада Золотой пропорции, http://www.sci.aha.ru/ots/alf1.htm)? Или потому, что «указывают» на половину какого-то конструкта?!..

Да-да, конечно – на пересекающиеся окружности! Смотрите!



Интересно сразу – при каких значениях «a/b» две окружности проходят через характерные (значимые) для себя положения? Для расчетов мы привлечем соотношения и рисунок (предыдущий) из Главы_8 «Сада»… И вот какие получаются выводы.

1. Окружности взаимно проходят через свои центры (когда $h_\alpha=R/2$) при значениях $R=1/\sqrt{3}$ и $a=\sqrt{3}/2$. При этом $R=1/2k$. А ***Ω-линии*** совместятся и пройдут по границе ВО-прямоугольников (через точки пересечения окружностей)!

2. Окружности совпадут ($h_\alpha=R$) при $R=a/b=0,5$. То есть в предельном и исходном варианте ***(ψ-варианте***), как он показывался ранее!

3. Окружности взаимно касаются ***Ω-линий*** друг друга ($h_\alpha=a-1/2R$) при $a/b = \Phi^{3/2}/2 \approx 1,03$ (то есть в ВО-прямоугольниках Золотой спирали!). При этом $R = \phi\cdot k = \sqrt{\Phi}/2$. (Здесь «Ф» и «ф» - большая и малая величины Золотой пропорции.)

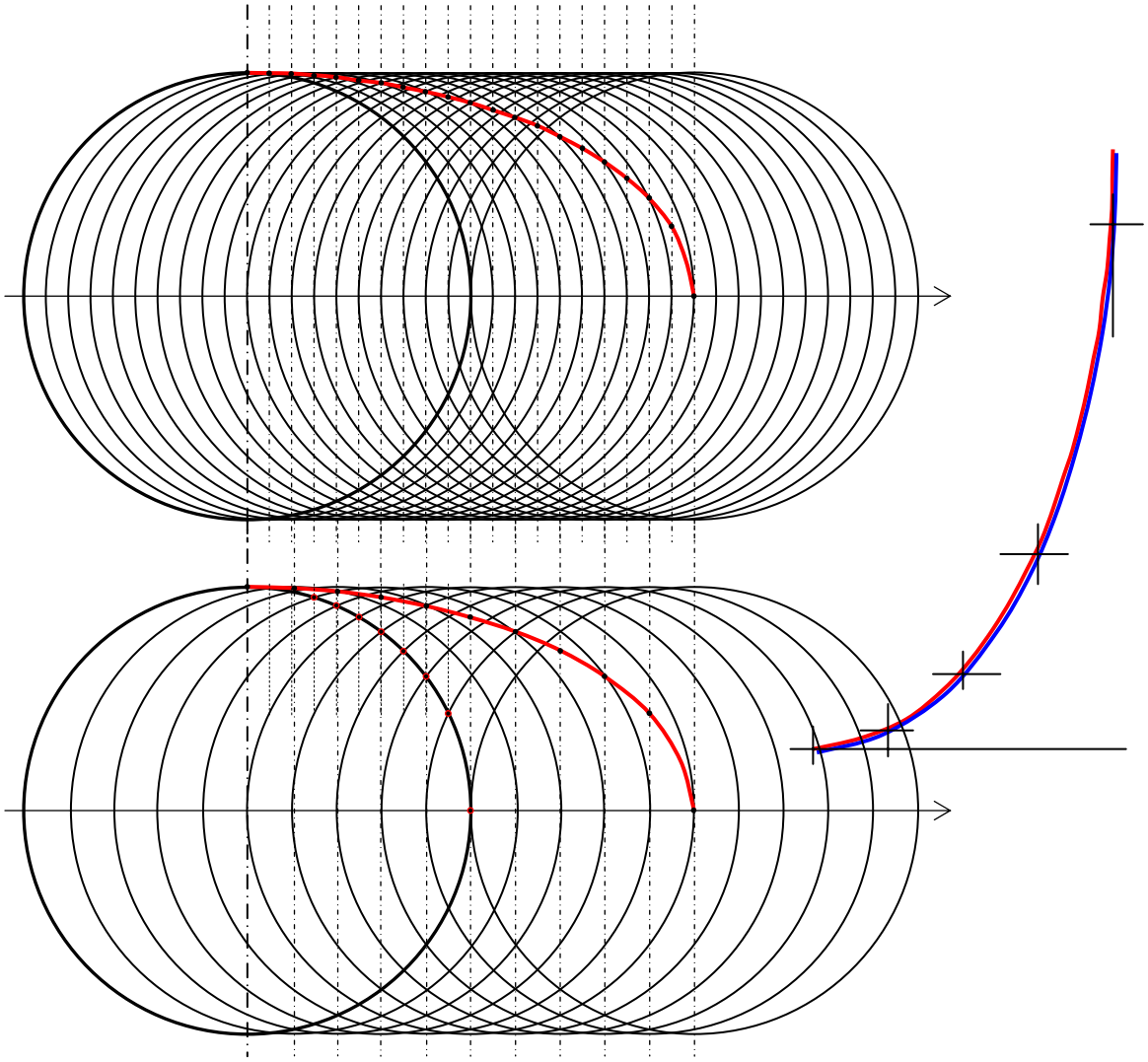
Посмотрите ещё раз на общую схему сдвоенных ВО-отношений. Сдвижение/раздвижение 2-х окружностей моделируют ВО-отношения! Моделируют через изменение расстояния между точками их пересечения, изменение ширины зоны пересечения, которая есть «***b***» при определенном «***k=a/b***». Соотношения задают ***a/b*** . Можно нарисовать обобщающие графические образы, показывающие изменение со-единения 2-х окружностей в их связи с зоной «***b***» вписано-описанности. Они будут моделировать динамику ВО-отношений через связь ***R*** и ***b*** (или других величин?). Можно сделать 2 типа таких графических образов: с артикуляцией изменения: или ширины зоны пересечения (при едином ***R***), или ***R*** окружностей (при едином ***b***).

Вообще связь ***R*** и ***b*** задается известной из Главы_8 формулой:

$$R = b\cdot\frac{k^2+0,25}{2k}$$

Эта дробь имеет общую структуру для множества формул той главы. Её функциональный образ можно посмотреть через «Excel», но давайте здесь просто закончим графическими построениями, заданными в предыдущем абзаце.

Давайте посмотрим, какие зависимости и между чем образуются при со-движении 2-х окружностей? Первый тип графического образа – на ***R=const*** – приведен ниже в 2-х схемах, давших одинаковый результат, но построенных от своих величин.



На обоих схемах точки пересечения каждой пары откладываются так, что координата «X» задается центром правой окружности от «0» центра левой окружности; а координата «Y» – переносом точки пересечения.

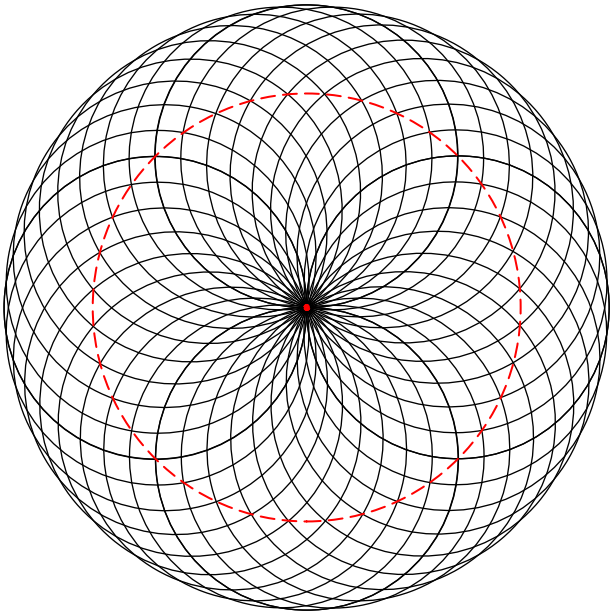
Верхняя схема построена при равномерном изменении межцентрового расстояния, то есть $(2R-2h_\alpha)=const$. То есть имеет место зависимость $b=f(h_\alpha)$, где h_α равномерно изменяется.

Нижняя схема построена при равномерном изменении расстояния между точками пересечения с соответствующим изменением «b». То есть от «0» центра равномерно удаляется линия на расстояния $(R-h_\alpha=const)$. То есть тоже имеет место зависимость $b=f(h_\alpha)$, где h_α (при R=const) равномерно изменяется.

Можно видеть на правом совмещенном рисунке совпадение кривых пересечения на обеих схемах. И можно видеть, как величина «b» становится нулевой ($a/b=\infty$), то есть превращается в линию при соприкосновении окружностей, демонстрируя предельно-смысловой вариант взаимодействия. При этом в близости этого предельного варианта (с допустимой точностью – на половине диапазона «b») изменение происходит по параболе $y=x^2/4$. Функция изменения стремится к параболе $(0,5x)^2$. Как это имело место на обобщенном графике для одинакового среднего геометрического при изменяющихся исходных парах величин (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321027.htm)…

Интересно, как тесно связаны «h_α» и «R». Это сразу видно в полной (симметричной) картине (процессе) пересекающихся окружностей; и чуть менее – в половинной картине ВО-отношений. И также тесно связаны«h_α» и «a», вспомним их простую и красивую зависимость при b=1: $a\cdot h_\alpha=1/4$…

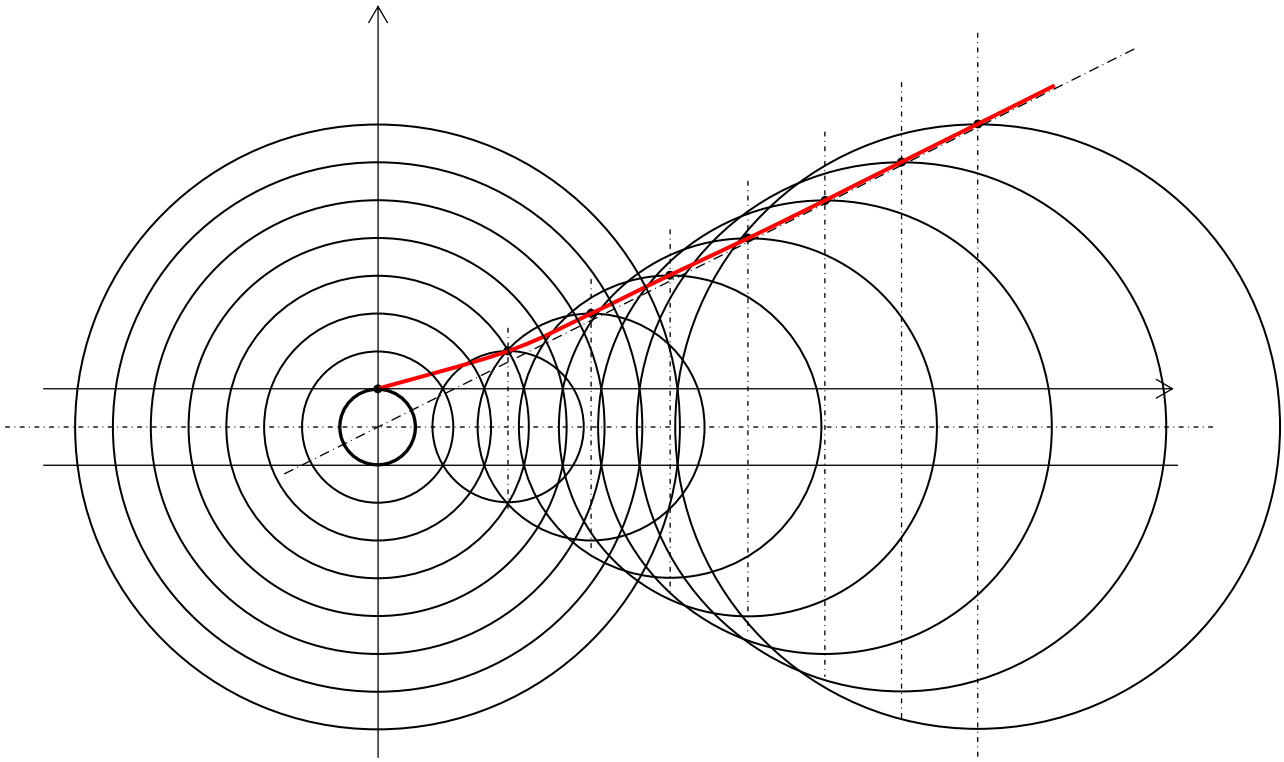
Красиво и то, как окружности, фиксируясь одной точкой и расходясь веером относительно её (равномерно по кругу), создают квази-филлотаксисный объект…

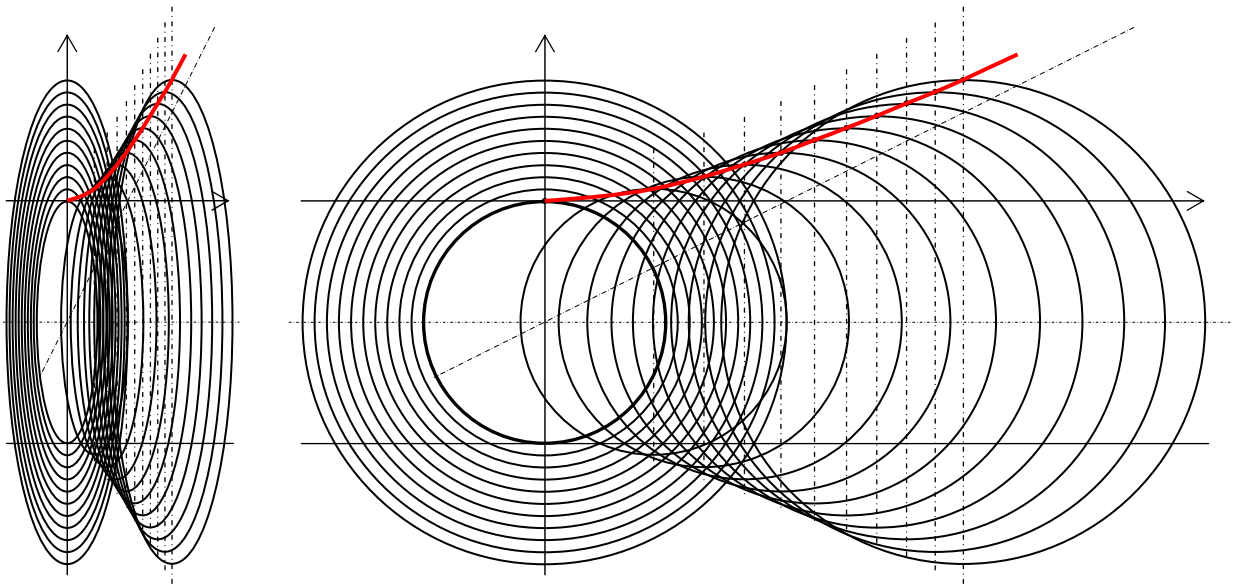


Теперь посмотрим 2-ой тип графического образа, при b=const. Пересекаются пары окружностей равного диаметра, но на таком межцентровом расстоянии, чтобы сохранялось одно значение «b». На первом рисунке окружности увеличиваются быстро по отношению «b». Первая пара (жирной линией) – полное совпадение, а уже вторая пара в 2 раза больше «b»; и так далее. Итак, здесь по оси «Y» откладывается радиус соответствующей пары окружностей. По оси «X» по прежнему происходит движение точки, связанной с «$2h_\alpha$» и «R». То есть имеем $R=f(R, h_\alpha)$.

Построение понятно из рисунка. И сразу видно асимптотическое приближение графика, который в пределе приближается к прямой ***y=0,5x***. Это легко видеть по соотношениям приращений вдоль осей. Наша линия выстраивается почти точно в прямую. Интересно здесь то, что этот «асимптотический» прямоугольник ***y/x=0,5*** является основой самого известного графического построения Золотых пропорций.

По первой схеме соотношение a/b уже во втором пересечении (R/b=1) переходит за 1,8. А основные ВО-варианты (средние 5 строк из 9 строк таблицы обобщенного ВО-прямоугольника) находятся в диапазоне R/b ≈ 0,56 ÷ 0,63 (вся таблица: R/b≈0,5÷0,8). Поэтому на втором рисунке показано пересечение окружностей в более подробном диапазоне 2-х первых пар первого (верхнего) рисунка.





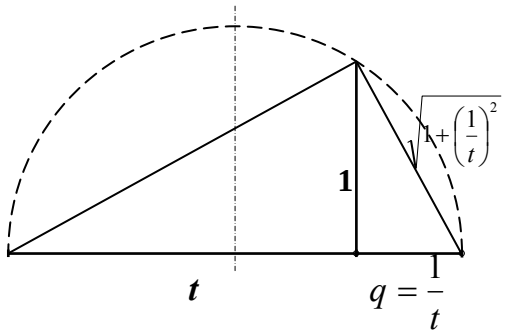
2

А помните эту как бы обобщающую формулу $\Phi_{1,2} = \dfrac{\sqrt{k^2+1}\ \mu\ 1}{k}$

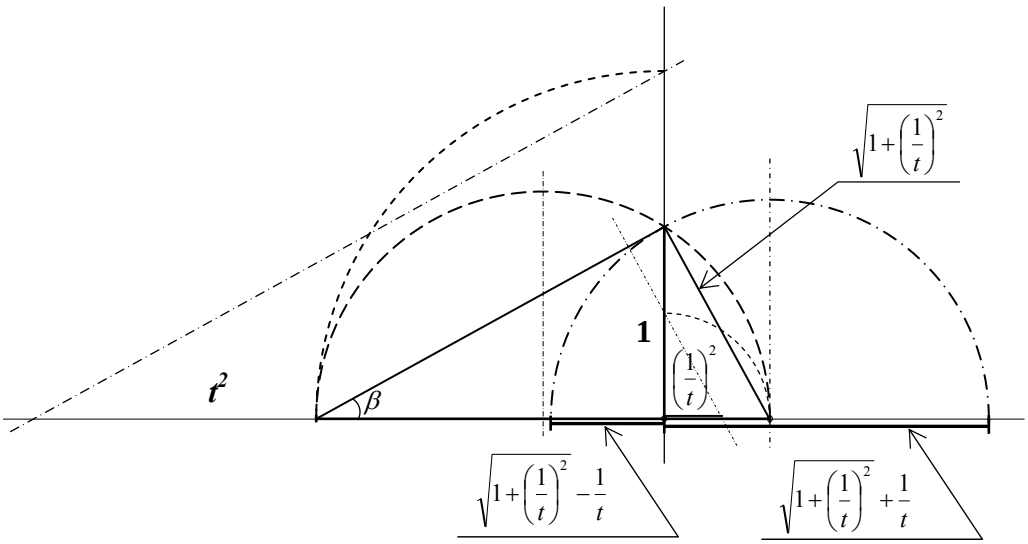
которая задает одну из линий значений, пересекающихся с другими аналогичными линиями в точке Золотой пропорции?

А интересно было бы посмотреть геометрические построения величин, задаваемых этой формулой? Давайте её запишем в следующем виде. А рядом посмотрим на следующую схему.

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{t^2+1}\ \mu\ 1}{t} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\ \mu\frac{1}{t}$$



Вообще, это геометрическая схема среднего геометрического двух чисел «***t***» и «***q***». А когда их средне-геометрическое равно «1», сами они являются взаимообратными. Посмотрите на значение гипотенузы правого (маленького) треугольника. И тогда ясно завершение построения.



На этой схеме попутно можно увидеть квадраты чисел «***t***» и «***q***», как большего «1», так и меньшего «1»; а в принципе – любого. То есть на схеме построены значения площадей! И аналогично можно геометрически построить и следующие степени числа.

Ну, и на заметку.

Посмотрите ещё раз на верхнюю схему… Продолжите половинки её пересекающихся окружностей вниз, восстановите полную картину…

На схеме правая окружность меньше левой (***q≈0,55***). Когда эта схема будет рисовать Золотые пропорции (на углу β≈26,6°, ***q≈0,5***), правая окружность станет ещё меньше. В этом случае соответствующие ВО-прямоугольники этих окружностей получают следующие значения: левое ***A/B=1***, правое ***a/b=ф/2***. А полная протяженность по схеме: $(1+ф/2)\times2=Ф^2\approx2,62$ (двойной «золотой вурф»).

Пересекающиеся окружности будут равны (и граница левой величины совпадет с центром исходной окружности), когда прямоугольные треугольники будут иметь углы «β» в 30° (***q=1/√3≈0,58***). ВО-прямоугольники этих окружностей составят: ***A/B=√3/2***, ***a/b=√3/2***. Полная длина по окружностям схемы: $(\sqrt{3}/2+\sqrt{3}/2)\times2=2\sqrt{3}\approx3,46$.

При ***t=Ф*** и ***q=ф*** (угол β≈31,7°) значения взаимообратных величин будут равны интересным числам «***τ–ф***» и «***τ+ф***» ($\tau^2-ф^2=1$). Соответственно ВО-прямоугольники этих окружностей: ***A/B=Ф/2***, ***a/b=(ф+τ)/2***. Полная длина по окружностям схемы: $Ф+ф+\tau = \sqrt{5}+\tau = 2\varphi_0 + \sqrt{(2ф\varphi_0)} \approx 3,41$.

(Получается попутно, что в районе «β≈30°» при единичной высоте пересечения полуокружностей есть некий экстремум в протяженности схемы, экстремум в отношениях…)

А наиболее красиво эта схема рисует пропорции «***√2±1***»… Задавая исходные ВО-отношения.