А.П. Стахов

«Золотые» матрицы

В настоящее время я пишу новую научно-популярную книгу в развитие моей предыдущей книги «Код да Винчи и ряды Фибоначчи» [1]. В этой книге я попытаюсь популярно изложить все мои новейшие научные результаты в области «теории чисел Фибоначчи», полученные мною в последние годы [2]. Настоящая статья посвящена описанию *Q-матрицы Фибоначчи*, теория которой изложена в книге **Вернера Хоггатта** [3], и *«золотых» Q –матриц*, введенных мною в статье [4].

1. *Q*-матрица Фибоначчи

В последние десятилетия «теория чисел Фибоначчи» дополнилась теорией так называемой *Q-матрицы Фибоначчи* [3]. Последняя представляет собой простейшую квадратную 2-матрицу следующего вида:

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{1}$$

Заметим, что *детерминант* матрицы (1) равен:

$$\det Q=-1. \tag{2}$$

Но какое отношение *Q*-матрица (1) имеет к числам Фибоначчи. Для ответа на этот вопрос возведем *Q*-матрицу (1) в *n*-ю степень. Для этого будем последовательно умножать матрицы $Q, Q^2, Q^3, \ldots, Q^{n-1}$ на матрицу (1). При этом получим следующую последовательность матриц:

$$Q^2=Q\times Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+1\times1 & 1\times1+1\times0\\ 1\times1+0\times1 & 1\times1+0\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \tag{3}$$

$$Q^3=Q^2\times Q=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1+1\times1 & 2\times1+1\times0\\ 1\times1+1\times1 & 1\times1+1\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \tag{4}$$

$$Q^4=Q^3\times Q=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times1+2\times1 & 3\times1+2\times0\\ 2\times1+1\times1 & 2\times1+1\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix} \tag{5}$$

Анализируя матрицы (1) и (3)-(5), мы замечаем, что элемент a_{11} этих матриц есть последовательность чисел Фибоначчи 1, 2, 3, 5, элементы a_{12} и a_{21} есть последовательности чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3 и, наконец, элемент a_{22} также есть последовательность чисел Фибоначчи 0, 1, 1, 2. Из этих наблюдений вытекает индуктивное предположение:

$$Q^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Заметим, что элементами матрицы (6) являются числа Фибоначчи. Это предположение легко доказывается [3].

Вычислим теперь детерминант матрицы (6):.

$$\det Q^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 \tag{7}$$

Для вычисления значения $\det Q^n$ запишем:

$$\det Q^n = \left(\det Q\right)^n. \tag{8}$$

Подставляя значение детерминанта (2) в выражение (8), окончательно получим:

$$\det Q^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \left(-1\right)^n \tag{9}$$

Но выражение (9) представляет собой так называемую *формулу Кассини*, одно из самых замечательных тождеств «теории чисел Фибоначчи», связывающих любые три соседних числа Фибоначчи. Наверное, это стало главной причиной особого восторженного отношения **Вернера Хоггатта** к *Q-матрице Фибоначчи* (1). Хотя эта матрица была введена до Хоггатта, но он посвятил этой матрице несколько публикаций в «The Fibonacci Quarterly" и в его книге [3] имеется специальный раздел, посвященный теории *Q*-матрицы.

Теперь представим матрицу (6) в следующем виде:

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} & F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_{n-1} + F_{n-2} & F_{n-2} + F_{n-3} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

что может быть представлено в виде суммы двух матриц:

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-3} \end{pmatrix} = Q^{n-1} + Q^{n-2}, \tag{11}$$

то есть, матрица Q^n связана со своими предыдущими матрицами Q^{n-1} и Q^{n-2} тем же рекуррентным соотношением, что и числа Фибоначчи или степени «золотой пропорции».

Таким образом, *Q*-матрица Q^n может быть получена из предыдущих матриц двумя способами – путем умножения ($Q^n = Q \times Q^{n-1}$) (свойство мультипликативности) и путем сложения ($Q^n = Q^{n-1} + Q^{n-2}$) (свойство аддитивности). Однако, золотая пропорция Ф обладает такими же свойствами ($\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1}$), что выделяет ее среди других иррациональных чисел. Это дает нам основание выдвинуть предположение, что *Q*-матрица (1) играет среди квадратных 2-матриц такую же роль, что и золотая пропорция среди иррациональных чисел, то есть, как и золотая пропорция, матрица (1) является «уникальной» и «неповторимой».

Запишем выражение (11) в следующем виде:

$$Q^{n-2} = Q^n - Q^{n-1} \tag{12}$$

Матрицы Q^n (n = 0, ±1, ±2, ±3, ...), полученные с помощью рекуррентных формул (11), (12), задаются Табл. 1.

Таблица 1. Матрицы типа Q^n (n = 0, ±1, ±2, ±3, ...)

n	0	1	2	3	4	5	6
Q^n	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8&5\\5&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}13&8\\8&5\end{pmatrix}$
Q^{-n}	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&5\\5&-8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&-8\\-8&13\end{pmatrix}$

Заметим, что Табл. 1 задает «прямые» матрицы Q^n и «обратные» к ним матрицы Q^{-n} в явной форме. Сравнивая «прямые» и «обратные» матрицы Q^n и Q^{-n} задаваемые Табл. 1, легко увидеть, что существует очень простой метод получения «обратной» матрицы Q^{-n} из ее «прямой» матрицы Q^n . Действительно, если степень «прямой» матрицы Q^n, задаваемой (6), является четным числом (n=2k), тогда для получения «обратной» матрицы Q^{-n} необходимо переставить местами в матрице (6) диагональные элементы F_{n+1} и F_{n-1}, а диагональные элементы F_n взять с противоположным знаком. Это означает, что для случая n=2k «обратная» матрица Q^{-n} имеет следующий вид:

$$Q^{-n} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}, n = 2k \tag{13}$$

Для случая n=2k+1 для получения «обратной» матрицы Q^{-n} из «прямой» матрицы Q^n необходимо переставить в (6) диагональные элементы F_{n+1} and F_{n-1} и взять их с противоположным знаком, то есть:

$$Q^{-n} = \begin{pmatrix} -F_{n-1} & F_n \\ F_n & -F_{n+1} \end{pmatrix}, n = 2k+1\,. \tag{14}$$

Другой метод получения последовательности матриц типа Q^n (n=0,±1,±2,±3, …) вытекает непосредственно из выражения (6). Для этого необходимо представить две последовательности чисел Фибоначчи, сдвинутые на один столбец одна относительно другой (Табл. .2).

Таблица 10.2. Последовательности чисел Фибоначчи F_{n+1} и F_n

n	6	**5**	4	3	2	**1**	0	-1	-2	-3	-4	**-5**	-6
F_{n+1}	13	**8**	**5**	3	2	**1**	**1**	0	1	-1	2	**-3**	**5**
F_n	8	**5**	**3**	2	1	**1**	**0**	1	-1	2	-3	**5**	**-8**

Если мы выберем число n = 1 в первой строке Табл. 2 и затем четыре числа Фибоначчи в двух следующих строках под числами 1 и 0 первой строки, то мы можем увидеть, что множество из четырех чисел Фибоначчи образует Q-матрицу. Перемещаясь вдоль Табл. 2 влево относительно Q-матрицы, мы получим последовательно матрицы Q^2, Q^3, …, Q^n. Перемещаясь вправо относительно Q-матрицы, мы получим последовательно матрицы Q^0, Q^{-1}, …, Q^{-n}.

2. «Золотые» *Q*-матрицы

2.1. *Определение «золотых» Q-матриц.* Рассмотрим две квадратные 2-матрицы типа (6), которые задаются для четных (n=2k) и нечетных (n=2k+1) значений n:

$$Q^{2k}=\begin{pmatrix} F_{2k+1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k-1} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$Q^{2k+1}=\begin{pmatrix} F_{2k+2} & F_{2k+1} \\ F_{2k+1} & F_{2k} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

В работе **Алексея Стахова** и **Бориса Розина** [5] ввели так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка.* Для дальнейших исследований нам понадобятся симметричные гиперболические функции Фибоначчи:

Симметричный гиперболический синус Фибоначчи

$$sFs(x)=\frac{\Phi^{x}-\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{17}$$

Симметричный гиперболический косинус Фибоначчи

$$cFs(x)=\frac{\Phi^{x}+\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{18}$$

Напомним, что симметричные гиперболические функции Фибоначчи (17), (18) связаны следующими удивительными тождествами, справедливыми для любого непрерывного x, что доказано в работе [5]:

$$\begin{aligned} &\left[sFs(x)\right]^{2}-cFs(x-1)cFs(x-1)=-1; \\ &\left[cFs(x)\right]^{2}-sFs(x-1)sFs(x-1)=1. \end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что тождества (19) являются обобщением *формулы Кассини* на непрерывную область.

Напомним, что числа Фибоначчи F_n связаны с функциями (10.26) и (10.27) простыми соотношениями [5]:

$$F_n=\begin{cases} sFs(n), & n=2k \\ cFs(n), & n=2k+1 \end{cases}. \tag{20}$$

Мы можем использовать соотношения (20) для представления матриц (15) и (16) в терминах гиперболических функций Фибоначчи (17) и (18):

$$Q^{2k}=\begin{pmatrix} cFs(2k+1) & sFs(2k) \\ sFs(2k) & cFs(2k-1) \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$Q^{2k+1}=\begin{pmatrix} sFs(2k+2) & cFs(2k+1) \\ cFs(2k+1) & sFs(2k) \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где k – дискретная переменная, k=0,±1,±2,±3,… .

Если заменить дискретную переменную k в матрицах (21) и (22) на непрерывную переменную x, мы получим две необычные матрицы $Q_0(x)$ и $Q_1(x)$, которые являются функциями непрерывной переменной x:

$$Q_0(x)=\begin{pmatrix} cFs(2x+1) & sFs(2x) \\ sFs(2x) & cFs(2x-1) \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$Q_1(x)=\begin{pmatrix} sFs(2x+2) & cFs(2x+1) \\ cFs(2x+1) & sFs(2x) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Ясно, что матрицы (23), (24) являются обобщением Q-матрицы (6) на непрерывную область.

2.2. ***Инверсные «золотые» матрицы.*** Выше мы ввели обратные Q-матрицы Фибоначчи, задаваемые (13) и (14). Воспользовавшись (20), мы можем представить обратные матрицы (13) и (14) в терминах симметричных гиперболических функций Фибоначчи (17) и (18) следующим образом:

$$Q^{-2k}=\begin{pmatrix} cFs(2k-1) & -sFs(2k) \\ -sFs(2k) & cFs(2k+1) \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$Q^{-2k-1}=\begin{pmatrix} -sFs(2k) & cFs(2k+1) \\ cFs(2k+1) & -sFs(2k+2) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где k – дискретная переменная, $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$.

Если заменить дискретную переменную k в матрицах (25) и (26) на непрерывную переменную x, мы получим две необычные матрицы $Q_0(-x)$ и $Q_1(-x)$, которые являются функциями непрерывной переменной x:

$$Q_0(-x)=\begin{pmatrix} cFs(2x-1) & -sFs(2x) \\ -sFs(2x) & cFs(2x+1) \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$Q_1(-x)=\begin{pmatrix} -sFs(2x) & cFs(2x+1) \\ cFs(2x+1) & -sFs(2x+2) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Очень просто доказать, что матрицы (27) и (28) являются обратными к матрицам (23) и (24), соответственно, то есть,

$$Q_0(x)\times Q_0(-x)=I \text{ и } Q_1(x)\times Q_1(-x)=I,$$

где I – единичная матрица.

2.3. ***Детерминанты «золотых» матриц.*** Вычислим детерминанты матриц (23) и (24):

$$\det Q_0(x)=cFs(2x+1)cFs(2x-1)-\left[sFs(2x)\right]^2 \tag{29}$$

$$\det Q_1(x)=cFs(2x+2)cFs(2x)-\left[sFs(2x+1)\right]^2. \tag{30}$$

Сравним формулы (29) и (30) с тождествами (19) для симметричных гиперболических функций Фибоначчи. Так как тождества (19) справедливы для всех значений переменной x, в частности, для значения $2x$, тогда из (29) и (30) вытекают следующие тождества:

$$\det Q_0(x) = 1 \quad (31)$$

$$\det Q_1(x) = -1 \quad (32)$$

Заметим, что тождества (31) и (32) являются обобщением *формулы Кассини* для чисел Фибоначчи на непрерывную область.

Таким образом, «золотые» матрицы (23), (24), введенные в [4], являются уникальными квадратными 2-матрицами, обладающими рядом восхитительных математических свойств. Во-первых, они являются функциями непрерывной переменной *x*. Во-вторых, их элементами являются симметричные гиперболические функции Фибоначчи, введенные в [5]. В-третьих, их детерминант не зависит от значения переменной *x* и всегда равен либо 1, либо (-1), что вытекает из свойств симметричных гиперболических функций Фибоначчи.

3. Приложения *Q*–матриц Фибоначчи и «золотых» матриц

Особенность моего математического творчества, как инженера по образованию (Харьковский авиационный институт, 1961), состоит в том, что я всегда стремился к приложениям тех или иных математических результатов, которые я получал.

3.1. ***Новая теория кодирования, основанная на матрицах Фибоначчи.*** Этот результат описан мною в статье [6]. Суть нового метода кодирования состоит в представлении исходной информации в виде квадратной 2-матрицы с последующим ее умножением на кодирующую матрицу Фибоначчи типа (6) (кодирование) и затем на декодирующую матрицу Фибоначчи типа (13) или (14). Анализ нового метода избыточного кодирования обнаруживает его фантастическую корректирующую способность по сравнению с известными алгебраическими кодами. **Выигрыш в корректирующей способности превышает 1 000 000 и более раз!**

3.2. ***«Золотая» криптография.*** Этот результат описан мною в статье [4]. «Золотая» криптография также основана на матричном умножении, но в качестве кодирующей и декодирующей матриц используются «золотые» матрицы типа (23), (24) и (27), (28), соответственно.

3.3. ***Преобразования Фибоначчи-Лоренца и «золотая» интерпретация специальной теории относительности (СТО).*** Этот результат получен мною совместно с выдающимся российским математиком **Самуилом Арансоном** и недавно опубликован в канадско-американском математическом сборнике “Congressus Numerantium” [7]. Суть статьи состоит в том, что классические *преобразования Лоренца*, лежащие в основе СТО, заменяются на *преобразования Фибоначчи-Лоренца*, в которых используются «золотые» матрицы (23), (24). Такой подход приводит к переосмысливанию СТО и новой «золотой» интерпретации эволюции Вселенной, начиная с «Большого Взрыва».

Заключение

1. Теория «золотых» матриц [4], связанная с «теорией Q-матрицы Фибоначчи» [3], является новым математическим результатом “современной теории чисел Фибоначчи». Эти матрицы уникальны в силу следующих причин. Во-первых, они являются функциями непрерывной переменной x. Во-вторых, их элементами являются симметричные гиперболические функции Фибоначчи, введенные в [5]. В-третьих, их детерминант не зависит от значения переменной x и всегда равен либо 1, либо (-1), что вытекает из свойств симметричных гиперболических функций Фибоначчи.
2. Прикладное значение матриц Фибоначчи и «золотых» матриц состоит в разработке на их основе нового способа избыточного кодирования информации [5], «золотой» криптографии [4] и введении преобразований Фибоначчи-Лоренца [7], которые приводят к переосмысливанию СТО и новой «золотой» интерпретации эволюции Вселенной, начиная с «Большого Взрыва».
3. В основе «золотых» матриц лежат симметричные гиперболические функции Фибоначчи, введенные **Алексеем Стаховым** и **Борисом Розиным** в 2005 г. [5]. В своей статье [8] я показал, что именно эти функции Природа использует в ботаническом явлении филлотаксиса, что блестяще доказано в «геометрии Боднара» [9]. В настоящей статье показано применение этих уникальных функций при создании «золотых» матриц, которые используются в других сферах современной науки (теоретическая физика, теория кодирования и криптография).
4. Настоящая статья написана исключительно на основе новых научных результатов, полученных мною и моим соавторами в период с 2005 по 2008 гг. [2, 4-8].

Литература

1. Стахов А.П., Слученкова А.А., Щербаков И.Г. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. Санкт-Петербург: Питер, 2006.
2. А.П. Стахов, О моих новых научных результатах в области теории «золотого сечения и чисел Фибоначчи», опубликованных в ведущих международных журналах и сборниках за последние 5 лет (ответ С.Л. Василенко) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15470, 13.08.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161527.htm
3. Hoggat, V.E., Jr. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Boston, MA: Houghton Mifflin (1969).
4. Stakhov, A. *The “golden” matrices and a new kind of cryptography*. Chaos, Solitons & Fractals, 32(3), (2007), 1138-1146.
5. Stakhov, A., Rozin, B. *On a new class of hyperbolic function*. Chaos, Solitons & Fractals, 23 (2) (2005), 379-389.
6. Stakhov, A. *Fibonacci matrices, a generalization of the “Cassini formula,” and a new coding theory*. Chaos, Solitons & Fractals, 30(1) (2006), 56-66.
7. Stakhov A.P., Aranson S.Ch. *“Golden” Fibonacci Goniometry, Fibonacci-Lorentz Transformations, and Hilbert’s Fourth Problem //* Congressus Numerantium, 193, 2008, 119-156.
8. А.П. Стахов, Какой тип «золотых» гиперболических функций использует Природа в ботаническом явлении филлотаксиса? // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15476, 16.08.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321148.htm
9. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов, 1994.