Алексей Стахов и Иван Райлян

«Идея Гармонии» как связующее звено между философией и математикой.

Путь сквозь тысячелетия от Гермеса, Хеси-Ра, Пифагора, Платона, Евклида до современной «Математики Гармонии»

… То ли Пифагор говорит языком Гермеса, то ли Гермес языком Пифагора

Иоганн Кеплер

Математика владеет не только истиной, но и высокой красотой – красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства.

Бертран Рассел

Содержание

1. Введение. Назад к истокам: можно ли вернуться к единству философии и математики?

В некоторых статьях, посвященных философии и математике, опубликованных на сайте Тринитаризма, поднимаются фундаментальные вопросы современного мировоззрения о причинах и последствиях фрагментации научного знания, о несовершенстве человеческого инструмента познания и о возможности возврата к истокам науки. Можно ли вернуться к истокам, переосмыслив их принципы и применить к проблемам наших дней? И если и можно, то зачем?

Когда-то, еще во времена Пифагора, философия и математика были едины, что позволяло ученым мужам того времени видеть Реальность и с помощью математических средств обучать своих последователей мудрости Природы… Возвращение к истокам нужно не для того, чтобы копировать образ жизни древних философов и ученых, но чтобы научиться у них видению Реальности. Разве не удивительно, что сегодня чтобы кого-то лечить, нужна целая поликлиника с десятками врачей (имеющих к тому же фрагментарное представление о человеке и его здоровье), тогда как раньше Авиценна или Парацельс излечивали с помощью знаний о душе, о ритмах природы и свойствах трав и минералов?

Концепции герметической философии, изложенные в этой статье, взяты из работ современного учителя герметизма – **Дарио Саласа Соммера**, автора многих известных книг в этой области [1, 2]. Сразу же отметим, что многочисленные интернетовские публикации на тему герметизма, различные фантазии о магах, спиритуалистах и прочей «бесовщины» не имеют ничего общего с настоящей *герметической философией,* которая развивается в современной науке Дарио Саласом Соммэром.

В статье [3] Дарио Салас обращает внимание на необходимость поиска связи герметической философии с «Математикой Гармонии» [4]:

«Изначально Философия и Наука были едины в неутомимом поиске ключей к бытию и в стремлении постичь тайны жизни и Вселенной. Но по прошествии многих веков, вследствие самых разных причин интеллектуальная деятельность и экспериментальная практика разошлись настолько, что кажутся сейчас совершенно разными, даже противоположными вещами.

Несколько лет назад я ознакомился с работами профессора Алексея Стахова на страницах его Музея Гармонии и был приятно удивлен количеством и качеством наблюдаемых природных явлений, отражающих главный смысл всего живущего – Эволюцию. Принципы и закономерности Золотой пропорции, проявляющейся в Природе, как будто подсказывают человеку его потерянный путь – гармоничное развитие и эволюцию согласно единым космическим законам...

Именно этим и занимается Философия Герметизма, утверждая, что единственный смысл нашей жизни заключается в эволюции индивидуального сознания, состоящей в развитии истинно человеческих качеств, отличающих нас от животных. Но, к сожалению, эта цель была забыта в погоне за всевозможными чувственными удовольствиями, и сегодня человеку очень сложно понять и осознать цель своего пребывания на Земле. Возможно, что с помощью Математики Гармонии сформируется ряд критериев, который покажет человечеству, что у нас есть не множество, а только две возможности: следовать пути эволюции – или быть поглощенными Природой».

Идея Гармонии, как основы Мироздания, как вселенской энергии, регулирующей порядок «Как вверху так и внизу, как внутри так и снаружи» является фундаментальной и в «Кибалионе» **Гермеса Трисмегиста** и трудах философов всех эпох нашей цивилизации, и в современных работах Дарио Саласа, Эдуарда Сороко и других ученых космистов.

Выдающийся белорусский философ Эдуард Сороко начинает свою замечательную книгу «Структурная гармонию систем» [5] следующими словами: *«Если и существуют «вечные» проблемы, которые постоянно держит в поле зрения исследовательская мысль, то среди них в первую очередь можно назвать проблему гармонии. Наука, физика в частности, по словам Б.Г. Кузнецова, всегда имела своей извечной фундаментальной целью «найти в лабиринте наблюдаемых фактов объективную гармонию» ... То же можно сказать в адрес философии,* *искусства (живописи, музыки, архитектуры) и других областей самореализации «человеческого духа ..».*

Что же такое «гармония»? В.П. Шестаков в книге [6] выделяет, по крайней мере, три типа понимания гармонии: *математическое, эстетическое и художественное.* В математическом смысле гармония понимается как равенство или соразмерность частей друг с другом и части с целым. Такое понимание выражалось в виде определенных числовых пропорций. При этом, как подчеркивает Шестаков [6], «*математическое понимание гармонии фиксирует прежде всего количественную определенность гармонии, но оно не заключает в себе представления об эстетическом качестве гармонии, ее выразительности, связи с красотой*». Именно такое представление о гармонии было присуще пифагорейцам, которые выражали гармонию через числовые пропорции.

Эти три типа гармонии являются отражением той самой герметической идеи о Гармонии Вселенной, проявляющейся на все планах Творения. Гению Пифагора суждено было перенести на математический язык те знания и мудрость, которых он достиг за длительные годы посвящения в Египте. Гармония, выраженная математическим языком, была образцом единения души и разума со вселенной, которую пифагорейцы считали за скрытую основу и философии, и религии.

К творениям природы и науки наиболее применимо математическое понимание гармонии. В «Большой Советской Энциклопедии» мы находим следующее определение «гармонии»: *"Гармония - соразмерность частей и целого, слияние различных компонентов объекта в единое органическое целое. В гармонии получают внешнее выявление внутренняя упорядоченность и мера бытия"*.

Можно утверждать, что «проблема гармонии» возникла одновременно с возникновением науки. А когда возникла наука? Существуют различные ответы на этот вопрос. Общепринятая точка зрения состоит в том, что наука как система производства нового знания впервые возникла в середине первого тысячелетия до н.э. в Древней Греции, когда были созданы уникальные условия для бурного развития науки, появились первые философские школы и были созданы математика и теоретическое естествознание. Однако, как подчеркивает Эдуард Сороко [5], *«веские аргументы имеет и другая точка зрения, отодвигающая время зарождения науки по меньшей мере еще на тысячу лет в прошлое»*. В качестве убедительного аргумента для обоснования такой точки зрения Сороко указывает на выдающиеся достижения технологии, полученные в древнем мире: Древний Китай (изготовление бумаги, фарфора и шелка, изобретение компаса и пороха, сооружение судов с высокими мореходными качествами и арочных мостов), Древний Египет (развитая техника перегородчатой эмали, изготовление искусственных камней, в частности, лазурита, уникальная строительная технология, использованная при строительстве пирамид, создание египетского календаря, который является прообразом современного календаря и др.), Ближний Восток (искусственное опыление финиковых пальм, золочение изделий методом электролитического осаждения, развитые астрономические наблюдения и др.), Вавилон (изобретение позиционного принципа представления чисел, техника математических вычислений, справочник на 44 глиняных табличках, содержащий таблицы объемов геометрических тел, площадей, кубов, обратных дробей, трактат по агрономии, предсказание солнечных и лунных затмений, достижения в области медицины). Все эти факты дают нам право, говоря о возникновении науки, утверждать, что задолго до греческой цивилизации основы науки и философии возникли в Вавилоне, Древнем Египте и других странах античного мира.

Приведенное выше высказывание Дарио Саласа Соммэра является «ключевым» для данной статьи, которая написана в развитие статьи [7]. Цели настоящей статьи состоят в следующем:

1. Проанализировать важнейшие достижения античной науки, связанные с развитием «идеи гармонии»

2. Показать историческую связь герметической философии и «Математики Гармонии»

3. Сформулировать истинную цель математики, которая была поставлена перед математикой Евклидом в своих «Началах»

4. Показать связь «Математики Гармонии» с «Началами» Евклида

5. Показать влияние античных идей на развитие «Математики Гармонии» – нового междисциплинарного направления современной науки.

2.1. *Герметическая философия.*

Уже на раннем этапе возникновения науки как важнейшего «социального института» в Древнем Египте была создана первая философская система – *герметическая философия*, основанная на 7 Герметических Принципах образовавших основу научного мировоззрения. Эта философская система и стала «наукой всех наук». Существует реальное историческое лицо, стоявшее у истоков «науки всех наук». Создателем *герметической философии* считается легендарный **Гермес Трисмегист**, что означает «трижды великий». Имеется много письменных сведений, подтверждающих, что Гермес Трисмегист был реальной исторической личностью. Древнейшее упоминание о Гермесе Трисмегисте содержится в трактате **Цицерона** «О природе богов», где сообщается, что Египтяне называли его Тотом, и так же они называли первый месяц в Египетском календаре. Адепты христианства **Лактанций** и **Августин** указывают, что Гермес Трисмегист был известен как весьма древний автор ряда «герметических» произведений, в подлинности которых отцы церкви не сомневались. Лактанций в своем трактате «О гневе божьем» указывает, что Трисмегист гораздо древнее Пифагора и Платона. Он считает Трисмегиста одним из важнейших языческих провидцев, предсказавших приход христианства. Лактанций доказывает, что языческая мудрость согласуется с христианским учением, в подтверждение этой мысли он обильно цитирует по-гречески трактат Гермеса «Совершенное слово», известный сейчас в латинском переводе как «Асклепий».

Считается, что Гермесом были написаны 42 рукописи**,** наиболее известные из которых - "Пастух людей" и "Изумрудный стол". От имени Гермеса происходит слово "герметический" ("заполненный"), так как его сочинения были полны мудрости. 42 рукописи Гермеса тысячелетиями хранились в Александрийской библиотеке и исчезли во время пожара. Египетские жрецы, хранители герметической мудрости, вынесли рукописи из огня и спрятали в одном из тайных святилищ в далёких египетских пустынях. Частичные отрывки из этих книг сохранились лишь в греческих переводах...

Одним из наиболее известных произведений Гермеса Трисмегиста является «**Изумрудная Скрижаль**» — короткая работа, которая является первоисточником известной оккультной аксиомы: «То, что находится внизу, аналогично тому, что находится наверху». Изумрудная скрижаль так же намекает на тройственный закон и тройственную достоверность, за владение знанием о которых Гермес и получил своё имя Трисмегист. История сообщает, что Изумрудная скрижаль была найдена **Александром Великим** в **Хевроне**, по общему мнению, в гробнице Гермеса. Гермесу приписывают ряд важнейших открытий, в частности, создание Египетского солнечного календаря, который является прообразом современного Григорианского календаря. Считается также, что Гермес стоял у истоков древнеегипетской науки и что он дал египтянам знания по медицине, химии, астрологии, геометрии и ораторскому искусству.

Герметическая наука, мать всех наук, остается неизменно чистой со времени ее зарождения на Земле и ревностно оберегается от искажений. Будучи живой наукой о развитии человека, она ищет способы и методы для обучения, свойственные данной эпохе. Поэтому мы можем увидеть в историческом плане, как и в какой форме, проявлялись труды носителей этого знания – Пифагора, Кеплера, Леонардо да Винчи, Джордано Бруно, Кампанеллы, Бэкон, Корнелиуса Агриппы и др. В наше время герметическая традиция представлена в работах чилийского исследователя Дарио Саласа Соммэра, основателя философской школы, где вот уже около 50 лет проходят обучение те, кто стремится к духовному совершенству.

Основываясь на герметической философии, Дарио Салас создал метод, названный им «практической философией», который позволяет достичь более высокого уровня сознания. Как упоминалось, Дарио Салас написал много интересных книг в развитие герметической философии [1, 2].

Несмотря на критическое отношение «материалистической науки» к «герметической философии», ее идеи оказались чрезвычайно живучими. На протяжении многих веков ее последователями были: в период Древней Греции – **Пифагор и Платон,** в эпоху Возрождения - **Пико делла Мирандола, Джордано Бруно, Томмазо Кампанелла, Парацельс, Лука Пачоли.** Определённую дань герметизму отдали многие мыслители XVI-XVII веков: **Коперник, Кеплер, Фрэнсис Бэкон и Исаак Ньютон**.

Главные принципы сакральной геометрии описаны в статье [7].

2.2. *«Золотое Сечение» в Великой Пирамиде.*

«…Величайшим среди чудес света древнего мира является Великая Пирамида близ Гиз, Она – молчаливый свидетель неизвестной цивилизации, которая, завершив предустановленный ей век, ушла в забвенье. Выразительная в своем молчании, потрясающая в своем великолепии, божественная в простоте, Великая Пирамида является воистину проповедью в камне. Кто были те просвещенные математики,

спланировавшие ее пропорции, мастера ремесел, руководившие работами, искусные каменотесы, делавшие блоки из камней?» (Мэнли Холл, 1926 год).

Сложно допустить, чтобы мудрецы древнего Египта использовали пирамиды всего лишь как гробницы для царей. Согласно многим свидетельствам пирамиды служили местом инициаций и связи жрецов с Космосом. Некоторые современные теории приписывают им важнейшую функцию по управлению земным ядром, положению земной оси и, возможно, вращению земного шара.

Анализ геометрических соотношений Великой Пирамиды (пирамиды Хеопса), проведенных Николаем Васютинским [8], показал, что главной геометрической идеей Великой Пирамиды является «золотое сечение». В основе этой пирамиды лежит «золотой» прямоугольный треугольник, в котором отношение гипотенузы к малому катету равно «золотой пропорции» $\Phi = 1.618$, а отношение большего катета к меньшему равно отношению гипотенузы к большему катету и равно $\sqrt{\Phi} = 1.272$. Существует только один прямоугольный треугольник с таким отношением сторон, причем «теорема Пифагора» для такого треугольника выражается следующим изящным соотношением: $\Phi^2 = \Phi + 1$. Если теперь взять отношение внешней суммарной площади Великой Пирамиды (сумма площадей ее четырех граней) к ее основанию, то она в точности равна «золотой пропорции» $\Phi = 1.618$! В этом и состоит главная «геометрическая тайна» Великой Пирамиды, адресованная создателями пирамиды к своим потомкам. Главный вывод, вытекающий из этого исследования, состоит в том, что древние египтяне знали «золотое сечение», которое стало позже главным эстетическим каноном древнегреческой эпохи и эпохи Возрождения.

2.3. *Тайна Египетского календаря.*

Одним из первых солнечных календарей был египетский, созданный в 4-м тысячелетии до н.э. Согласно легенде, создателем *Египетского календаря* является **Гермес Трисмегист**. Первоначально египетский календарный год состоял из 360 дней. Год делился на 12 месяцев ровно по 30 дней в каждом. Однако позже было обнаружено, что такая длительность календарного года не соответствует астрономическому. И тогда египтяне добавили к календарному году еще 5 дней, которые, однако, не были днями месяцев. Это были 5 праздничных дней, соединявших соседние календарные годы. Таким образом, египетский календарный год имел следующую структуру: $365 = 12\times30 + 5$. Заметим, что именно египетский календарь является прообразом современного календаря.

Возникает вопрос: почему Гермес разделил календарный год на 12 месяцев? Ведь существовали календари с другим количеством месяцев в году. Например, в календаре майя год состоял из 18 месяцев по 20 дней в месяце. Следующий вопрос, касающийся египетского календаря: почему каждый месяц имел ровно 30 дней (точнее суток)? Можно поставить некоторые вопросы и по поводу египетской системы измерения времени, в частности, по поводу выбора таких единиц времени, как *час, минута, секунда*. В частности, возникает вопрос: почему единица часа была выбрана таким образом, чтобы она 24 раза укладывалась в сутки, то есть, почему 1 сутки = 24 (2×12) часа? Далее: почему 1 час = 60 минут, а 1 минута = 60 секунд? Эти же вопросы относятся и к выбору единиц угловых величин, в частности: почему окружность разбита на 360°, то есть, почему $2\pi=360°=12\times30°$? К этим вопросам добавляются и другие, в частности: почему астрономы признали целесообразным считать, что существует 12 «зодиакальных» знаков, хотя на самом деле в процессе своего движения по эклиптике Солнце пересекает 13 созвездий? И еще один «странный» вопрос: почему вавилонская система счисления имела весьма необычное основание – число 60?

Анализируя египетский календарь, а также египетские системы измерения времени и угловых величин, мы обнаруживаем, что в них с удивительным постоянством повторяются четыре числа: 12, 30, 60 и производное от них число $360 = 12\times30$. Возникает вопрос: существует ли какая-либо фундаментальная научная идея, которая могла бы дать простое и логичное объяснение использованию этих чисел в египетских системах?

Для ответа на это вопрос обратимся к *додекаэдру* (см. ниже Рис. 1-4). Напомним, что все геометрические соотношения додекаэдра основаны на золотой пропорции.

Знали ли египтяне додекаэдр? Историки математики признают, что древние египтяне обладали сведениями о правильных многогранниках. Но знали ли они все пять правильных многогранников, в частности, додекаэдр и икосаэдр, как наиболее сложные из них? Древнегреческий математик Прокл приписывает построение правильных многогранников Пифагору. Но ведь многие математические теоремы и результаты (в частности «Теорему Пифагора») Пифагор позаимствовал у древних египтян в период своей весьма длительной «командировки» в Египет (по некоторым сведениям Пифагор прожил в Египте 22 года!). Поэтому мы можем предположить, что знание о правильных многогранниках Пифагор, возможно, также позаимствовал у древних египтян (а возможно, у древних вавилонян, потому что согласно легенде Пифагор прожил в Вавилоне 12 лет). Но существуют и другие, более веские доказательства того, что египтяне владели информацией о всех пяти правильных многогранниках. В частности, в Британском Музее хранится игральная кость эпохи Птоломеев, имеющая форму икосаэдра, то есть «Платонового тела», дуального додекаэдру. Все эти факты дают нам право выдвинуть гипотезу о том, что *египтянам был известен додекаэдр*. И если это так, то из этой гипотезы вытекает весьма стройная система, позволяющая дать объяснение происхождению египетского календаря, а заодно и происхождению египетской системы измерения временных интервалов и геометрических углов.

Как известно, додекаэдр имеет 12 граней, 30 ребер и 60 плоских углов на своей поверхности. Если исходить из гипотезы, что египтяне знали додекаэдр и его числовые характеристики 12, 30, 60, то, каково же было их удивление, когда они обнаружили, что этими же числами выражаются циклы Солнечной системы, а именно, 12-летний цикл Юпитера, 30-летний цикл Сатурна и, наконец, 60-летний цикл Солнечной системы. Таким образом, **между такой совершенной пространственной фигурой, как додекаэдр, и Солнечной системой, существует глубокая математическая связь!** Такой вывод сделали античные ученые. Это и привело к тому, что додекаэдр был принят в качестве «главной фигуры», которая символизировала «Гармонию Мироздания». И тогда египтяне решили, что все их главные системы (календарная система, система измерения времени, система измерения углов) должны соответствовать числовым параметрам додекаэдра! Поскольку по представлению древних движение Солнца по эклиптике имело строго круговой характер, то, выбрав 12 знаков Зодиака, дуговое расстояние между которыми равнялось ровно 30°, египтяне удивительно красиво согласовали годичное движение Солнца по эклиптике со структурой своего календарного года: *один месяц соответствовал перемещению Солнца по эклиптике между двумя соседними знаками Зодиака!* Более того, перемещение Солнца на один градус соответствовало одному дню в египетском календарном году! При этом эклиптика автоматически получалась разделенной на 360°. Разделив каждые сутки на две части, следуя додекаэдру, египтяне затем каждую половину суток разделили на 12 частей (12 граней додекаэдра) и тем самым ввели *час* – важнейшую единицу времени. Разделив один час на 60 минут (60 плоских углов на поверхности додекаэдра), египтяне таким путем ввели *минуту* – следующую важную единицу времени. Точно также они ввели *секунду* – наиболее мелкую на тот период единицу времени.

Таким образом, выбрав додекаэдр в качестве главной «гармонической» фигуры мироздания, и строго следуя числовым характеристикам додекаэдра 12, 30, 60, египтянам удалось построить чрезвычайно стройный календарь, а также системы измерения времени и угловых величин. Напомним, что главной числовой пропорцией додекаэдра является «золотое сечение», воплощенное египтянами в пирамиде Хеопса!

Вот такие удивительные выводы вытекают из сопоставления додекаэдра с Солнечной системой. И если наша гипотеза правильна (пусть кто-нибудь попытается ее опровергнуть), то отсюда следует, что вот уже много тысячелетий человечество живет «под знаком золотого сечения»! И каждый раз, когда мы смотрим на циферблат наших часов, который также построен на использовании числовых характеристик додекаэдра 12, 30 и 60, мы прикасаемся к главной «Тайне Мироздания» - золотому сечению, сами того не подозревая!

2.4. ***Панели Хеси-Ра.***

Доказательством высочайшего уровня развития египетской цивилизации является открытие, сделанное российским архитектором Игорем Шмелевым. Описание открытия содержится в брошюре «Феномен Древнего Египта» [9]. Шмелев провел тщательный геометрический анализ «панелей Хеси-Ра», извлеченных археологами из захоронения древне-египетского зодчего по имени Хеси-Ра, жившего в период правления фараона Джосера (27-й век до н.э.). Этот анализ привел его к сенсационному открытию: *«Но теперь, после всестороннего и аргументированного анализа методом пропорций мы получаем достаточные основания утверждать, что панели Хеси-Ра - это система правил гармонии, кодированная языком геометрии… Итак, в наших руках конкретные вещественные доказательства, «открытым текстом» повествующие о высочайшем уровне абстрактного мышления интеллектуалов из Древнего Египта. Автор, резавший доски, с изумительной точностью, ювелирным изяществом и виртуозной изобретательностью продемонстрировал правило ЗС (золотого* *сечения) в его широчайшем диапазоне вариаций. В результате была рождена ЗОЛОТАЯ СИМФОНИЯ, представленная ансамблем высокохудожественных произведений, не только свидетельствующих о гениальной одаренности их создателя, но и убедительно подтверждающих, что автор был посвящен в магические таинства гармонии. Этим гением был Золотых Дел Мастер по имени Хеси-Ра».*

Кто же такой Хеси-Ра? Древние тексты сообщают, что Хеси-Ра был «начальник Дестиуса и начальник Бута, начальник врачей, писец фараона, жрец Гора, главный архитектор фараона, Верховный начальник десятки Юга и резчик». Он был также первый физик, и можно говорить, что он был первым ученым, упоминаемым когда-либо в истории нашей цивилизации после Гермеса.

Анализируя перечисленные выше регалии Хеси-Ра, Шмелев обращает особое внимание на тот факт, что Хеси-Ра был жрецом Гора. Ведь Гор в Древнем Египте считался Богом гармонии и, следовательно, быть жрецом Гора – значит исполнять функции хранителя гармонии. Как вытекает из его имени, Хеси-Ра был посвящен в ранг служителя Бога Ра (Бога Солнца). Шмелев предполагает, что это высокое звание было дано Хеси-Ра за *«разработку эстетических … принципов в системе канона, отражающего гармонические основы мироздания … Ставка на гармонический принцип открывала древнеегипетской цивилизации путь к небывалому расцвету культуры, подъем которой приходится как раз на время правления Джосера – период, когда полностью сложилась система письменных знаков. Поэтому не исключено, что пирамида Джосера стала первым экспериментальным сооружением, за которым - согласно программе, разработанной под руководством и при участии Хеси-Ра - следовало возведение цепи единого комплекса Великих пирамид в Гизе».*

И еще одна цитата из брошюры Шмелева [9]: *«Остается только признать, что цивилизация Древнего Египта – это супер-цивилизация, которая изучена нами крайне поверхностно и требует качественно нового подхода к освоению всего ее богатейшего наследия … Результаты исследований панелей из захоронения Хеси-Ра доказывают, что истоки современной науки и культуры находятся в необозримых пластах истории, питающих творчество мастеров наших дней великими идеями, которые издавна одухотворяли устремления выдающихся представителей человечества. И наша задача – не утратить единства связующей нити».*

2.5. *Гипотеза Шмелева: герметическая философия как египетская «теория гармонии».*

Как подчеркивает Шмелев [9], *«предание гласит, что древние египтяне получили знание в виде системы представлений о мироустройстве от легендарного мудреца Гермеса Трисмегиста, что переводится как Гермес Триждывеличайший. Но величайшим может быть только то, что целостно, т.е. ЕДИНО. Получается, что Гермес был трижды единым? Малоубедительно. Но если вспомнить, что «закупоренность», «закрытость», т.е. «тайна» восходит к понятию «гермес», то легендарное имя обретает смысл в выражении «тайна триединства», чему в* *современной трактовке может соответствовать ТЕОРИЯ ГАРМОНИИ, ибо принцип триплетности, триадности составляет ядро резонансного феномена (сигнал – эхо - резонанс), который образует феноменологический базис теории гармонии. А тогда получается, что теория гармонии была разработана задолго до того, как древнеегипетская цивилизация вступила в фазу наивысшего расцвета культуры. Не исключено, что совершенное применение методологии теории гармонии было тем прочным фундаментом, на котором покоилась цивилизация золотого века, когда в основе учения древних мудрецов лежала духовная материя (безинерциальная материя Информации). Правильное владение ею давало возможность человеку гармонично развиваться в едином потоке законов Природы...*

Вероятно, сознавая важность теории гармонии, иерофанты Древнего Египта приняли решение зашифровать ее математические аспекты средствами геометрии для сохранения и передачи знания грядущим поколениям, что было блестяще исполнено гением Хеси-Ра»

Таким образом, согласно Шмелеву герметическая философия тесно связана с «теорией гармонии». Согласно Шмелеву, «теория Гармонии», представляет собой «систему правил гармонии», созданных великим египетским зодчим Хеси-Ра и воплощенных им в «панелях Хеси-Ра» [9]. В современной науке идеи гармонии развиваются в работах Иосифа Шевелева [10-14], Эдуарда Сороко [5], Джея Каппраффа [15], Скотта Олсена [16], Алексея Стахова [4, 17, 18] и многих других исследователей.

3. Платоновы тела – величайшее геометрическое открытие античной науки

3.1. *Правильные многогранники.*

Теории многогранников посвящено много книг. Одной из наиболее известных является книга английского математика М. Веннинджера «Модели многогранников» [19]. Книга начинается с описания так называемых *правильных многогранников*, то есть, многогранников, образованных простейшими правильными многоугольниками одного типа. Эти многогранники принято называть *Платоновыми телами* (Рис. 1), названными так в честь древнегреческого философа Платона, который использовал правильные многогранники в своей *космологии*.

Мы начнем наше рассмотрение с *правильных многогранников*, гранями которых являются *равносторонние треугольники*. Первый из них – это *тетраэдр* (Рис.1-1). В тетраэдре три равносторонних треугольника встречаются в одной вершине; при этом их основания образуют новый равносторонний треугольник. Тетраэдр имеет наименьшее число граней среди Платоновых тел и является трехмерным аналогом плоского правильного треугольника, который имеет наименьшее число сторон среди правильных многоугольников.

Следующее тело, которое образуется равносторонними треугольниками, называется *октаэдром* (Рис.1-3). В октаэдре в одной вершине встречаются четыре треугольника; в результате получается пирамида с четырехугольным основанием. Если соединить две такие пирамиды основаниями, то получится симметричное тело с восемью треугольными гранями – *октаэдр*.

Теперь можно попробовать соединить в одной точке пять равносторонних треугольников. В результате получится фигура с 20 треугольными гранями – *икосаэдр* (Рис.1-5).

Следующая правильная форма многоугольника – *квадрат*. Если соединить три квадрата в одной точке и затем добавить еще три, мы получим совершенную форму с шестью гранями, называемую *гексаэдром* или *кубом* (Рис. 1-2).

Наконец, существует еще одна возможность построения правильного многогранника, основанная на использовании следующего правильного многоугольника – *пентагона*. Если собрать 12 пентагонов таким образом, чтобы в каждой точке встречалось три пентагона, то получим еще одно Платоново тело, называемое *додекаэдром* (Рис.1-4).

многогранники

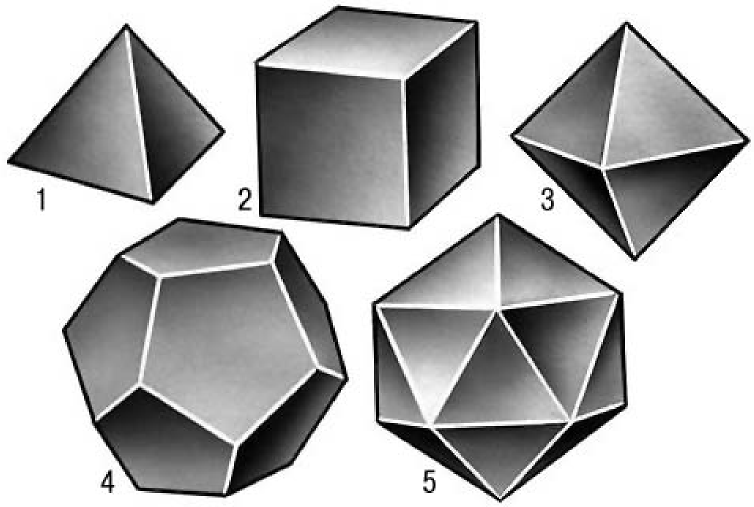


Рисунок 1. Платоновы тела: (1) тетраэдр; (2) куб или гексаэдр; (3) октаэдр; (4) додекаэдр; (5) икосаэдр

Существуют удивительные геометрические связи между всеми *правильными многогранниками*. Так, например, *куб* (Рис.1-2) и *октаэдр* (Рис.1-3) дуальны, т.е. получаются друг из друга, если центры тяжести граней одного принять за вершины другого и обратно. Аналогично дуальны *додекаэдр* (Рис.1-4) и *икосаэдр* (Рис.1-5). *Тетраэдр* (Рис.1-1) дуален сам себе. Додекаэдр получается из куба построением “крыш” на его гранях (способ Евклида), вершинами тетраэдра являются любые четыре вершины куба, попарно не смежные по ребру, то есть из куба могут быть получены все остальные правильные многогранники. Сам факт существования всего пяти действительно правильных многогранников удивителен - ведь правильных многоугольников на плоскости бесконечно много!

3.2. ***Числовые характеристики Платоновых тел.***

Основными числовыми характеристиками *Платоновых тел* является число сторон грани *m,* число граней, сходящихся в каждой вершине, *m,* число граней *Г*, число вершин *В,* число ребер *Р* и число плоских углов *У* на поверхности многогранника Эйлер открыл и доказал знаменитую формулу *В* - *Р* + *Г* = 2, связывающую числа вершин, ребер и граней любого выпуклого многогранника. Указанные выше числовые характеристики приведены в Табл. 1.

Таблица 1. Числовые характеристики Платоновых тел

Многогранник	*m*	*n*	*Г*	*В*	*Р*	*У*
Тетраэдр	3	3	4	4	6	12
Гексаэдр (куб)	4	3	6	8	12	24
Октаэдр	3	4	8	6	12	24
Икосаэдр	3	5	20	12	30	60
Додекаэдр	5	3	12	20	30	60

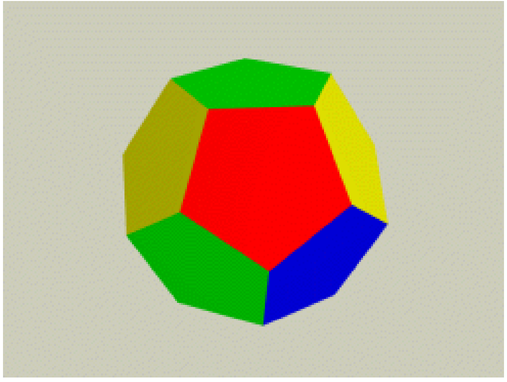
3.3. ***Космология Платона.***

Платоновы тела занимали важное место в философской концепции Платона об устройстве мироздания. Четыре многогранника олицетворяли в ней четыре сущности или "стихии". Платон считал, что атомы этих стихий имеют форму правильных многогранников. При этом *Тетраэдр* символизировал *Огонь*, так как его вершина устремлена вверх; *Икосаэдр* - *Воду*, так как он самый "обтекаемый" многогранник; *Куб* - *Землю*, как самый "устойчивый" многогранник; *Октаэдр* - *Воздух*, как самый "воздушный" многогранник; пятый же многогранник, *Додекаэдр*, символизировал все мироздание, его по латыни стали называть quinta essentia («пятая сущность»). Он воплощал в себе "все сущее", «Вселенский разум», символизировал все мироздание и считался *главной геометрической фигурой мироздания.*

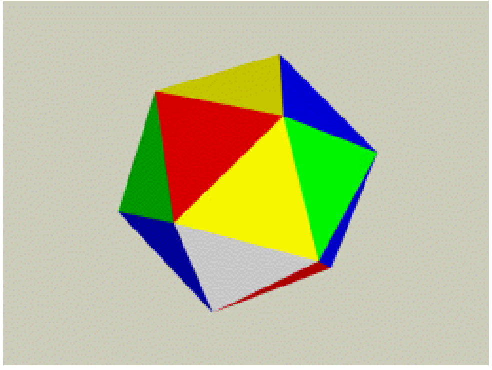
Не случайно, что один из авторов открытия фуллеренов, Нобелевский лауреат **Гарольд Крото** в свой Нобелевской лекции начинает свой рассказ о симметрии как «основе нашего восприятия физического мира» и ее «роли в попытках его всестороннего объяснения» именно с *Платоновых тел* и «элементов всего сущего»: *«Понятие структурной симметрии восходит к античной древности... Наиболее известные примеры можно, конечно, обнаружить в диалоге "Тимей" Платона, где в разделе 53, относящемся к "Элементам", он пишет: "Во-первых, каждому (!), разумеется, ясно, что огонь и земля, вода и воздух суть тела, а всякое тело — сплошное" (!!) Платон обсуждает проблемы химии на языке этих четырех элементов и связывает их с четырьмя Платоновыми телами (в то время только четырьмя, пока Гиппарх не открыл пятый — додекаэдр). Хотя на первый взгляд такая философия может показаться несколько наивной, она указывает на глубокое понимание того, каким образом в действительности функционирует Природа».*

3.4. *Связь додекаэдра и икосаэдра с «золотым сечением».*

Додекаэдр и двойственный ему икосаэдр (Рис. 2) занимают особое место среди Платоновых тел.



(а)



(б)

Рисунок 2. Додекаэдр (а) и икосаэдр (б)

Прежде всего, необходимо подчеркнуть, что геометрия додекаэдра и икосаэдра связана с золотой пропорцией. Действительно, гранями додекаэдра являются пентагоны, т.е. правильные пятиугольники, основанные на золотом сечении. Если внимательно посмотреть на икосаэдр, то можно увидеть, что в каждой вершине икосаэдра сходится пять треугольников, внешние стороны которых образуют пентагон. Уже этих фактов достаточно, чтобы убедиться в том, что золотое сечение играет существенную роль в конструкции этих двух Платоновых тел.

Но существуют более глубокие математические подтверждения фундаментальной роли, которую играет золотое сечение в икосаэдре и додекаэдре. Известно, что эти тела имеют три специфические сферы. Первая (внутренняя) сфера вписана в тело и касается его граней. Обозначим радиус этой внутренней сферы через R_i. Вторая или средняя сфера касается ее ребер. Обозначим радиус этой сферы через R_m. Наконец, третья (внешняя) сфера описана вокруг тела и проходит через его вершины. Обозначим ее радиус через R_c. В геометрии доказано, что значения радиусов указанных сфер для додекаэдра и икосаэдра, имеющего ребро единичной длины, выражаются через золотую пропорцию Φ (Табл. 2).

Таблица 2. Золотая пропорция в сферах додекаэдра и икосаэдра

Многогранник	R_c	R_m	R_i
Икосаэдр	$\frac{1}{2}\Phi\sqrt{3-\Phi}$	$\frac{1}{2}\Phi$	$\frac{\Phi^2}{2\sqrt{3}}$
Додекаэдр	$\frac{\Phi\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\Phi^2}{2}$	$\frac{\Phi^2}{2\sqrt{3-\Phi}}$

Заметим, что отношение радиусов $\frac{R_c}{R_i} = \frac{\sqrt{3(3-\Phi)}}{\Phi}$ одинаково, как для икосаэдра, так и для додекаэдра. Таким образом, если додекаэдр и икосаэдр имеют одинаковые вписанные сферы, то их описанные сферы также равны между собой. Доказательство этого математического результата дано в *Началах* Евклида.

В геометрии известны и другие соотношения для додекаэдра и икосаэдра, подтверждающие их связь с золотой пропорцией [18]. Таким образом, существует огромное количество соотношений, полученных еще античными математиками, подтверждающих замечательный факт, что именно золотая пропорция является главной пропорцией додекаэдра и икосаэдра, и этот факт является особенно интересным с точки зрения так называемой *«додекаэдро-икосаэдрической доктрины»*, которую мы рассмотрим ниже.

4. Гипотеза Прокла: новый взгляд на «Начала» Евклида

4.1. *Обсуждение гипотезы Прокла.*

В настоящее время каждый школьник знает, кто такой Евклид, который написал самое значительное математическое сочинение греческой эпохи – *Начала* Евклида. Это научное произведение создано им в 3 в. до н. э. и содержит основы античной математики: элементарную геометрию, теорию чисел, алгебру, теорию пропорций и отношений, методы определения площадей и объемов и др. Евклид подвел в этом сочинении итог трехсотлетнему развитию греческой математики и создал прочный фундамент для дальнейшего развития математики.

Возникает вопрос: с какой целью Евклид написал свои «Начала»? На первый взгляд, кажется, что ответ на этот вопрос очень простой: главная цель Евклида состояла в том, чтобы изложить основные достижения греческой математики за 300 лет, предшествующих Евклиду, используя «аксиоматический метод» изложения материала. Действительно, «Начала» Евклида являются главным трудом греческой науки, посвященным аксиоматическому построению геометрии и математики. Такой взгляд на «Начала» наиболее распространен в современной математике.

Однако, кроме «аксиоматической» точки зрения существует и другая точка зрения на мотивы, которыми руководствовался Евклид при написании «Начал». Эта точка зрения высказана греческим философом и математиком **Проклом Диадохом** (412-485), одним из наиболее блестящих комментаторов «Начал». Заметим, что Прокл Диадох был последовательным сторонником Платона. Около 450 г. Прокл становится главой Платоновской Академии в Афинах.

Среди математических сочинений Прокла наиболее известным является его Комментарий к первой книге *Начал* Евклида. В этом Комментарии он выдвигает следующую необычную гипотезу, которую называют *гипотезой Прокла*. Суть ее состоит в следующем. Как известно, 13-я, то есть, заключительная книга *Начал* посвящена изложению теории пяти правильных многогранников, которые играли главенствующую роль в *космологии Платона* и в современной науке известны под названием *Платоновых тел*. Именно на это обстоятельство и обращает внимание Прокл. Как подчеркивает Эдуард Сороко [5], по мнению Прокла, Евклид *«создавал «Начала» якобы не с целью изложения геометрии как таковой, а чтобы дать полную систематизированную теорию построения пяти «Платоновых тел», попутно осветив некоторые новейшие достижения математики»*.

Анализ *гипотезы Прокла* содержится и в других источниках [20-22]. В книге [20] высказывается та же мысль, что и в книге Сороко [5]: **«***Согласно Проклу, главная цель «Начал» Евклида состояла в том, чтобы изложить построение так называемых Платоновых тел»*.

В книге [21] эта идея получает дальнейшее развитие: *«Прокл, еще раз рассмотрев всех предшествующих математиков Платоновского кружка, говорит: "Евклид жил позже, чем математики Платоновского кружка, но раньше, чем Эратосфен и Архимед, ... Он принадлежал к школе Платона и был хорошо знаком с философией Платона и именно поэтому он поставил главной целью своих «Начал» построение так называемых Платоновых тел»*. Этот комментарий важен для нас тем, что в нем обращается внимание на связь Евклида с Платоном. Платон полностью разделял философию Платона и его космологию, основанную на Платоновых телах; именно поэтому он и поставил главной целью своих *Начал* создание геометрической теории Платоновых тел.

4.2. *«Космический кубок» Иоганна Кеплера.*

Обсуждая *гипотезу Прокла*, мы должны также изложить точку зрения **Иоганна Кеплера** на эту проблему.

Иоганн Кеплер (1571-1630)

Эта точка зрения изложена Кеплером в его первой книге *Mysterium Cosmographicum*, опубликованной в 1596 г. В этой книге Кеплер попытался найти скрытую гармонию Солнечной системы. Он сопоставил орбиты пяти планет, известных в то время, с *Платоновыми телами*. После проверки многочисленных гипотез, связанных с расположением планет, Кеплер нашел следующую геометрическую модель Солнечной системы, основанную на *Платоновых телах* (Рис. 3):

«Земля (орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия».

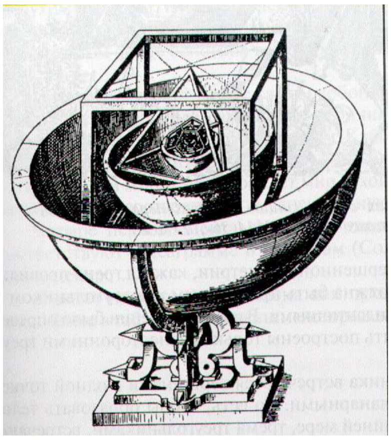


Рисунок 3. Кеплеровская модель Солнечной системы («Космический кубок»)

«Космический кубок» Кеплера (Рис. 3), которая вставляет *Платоновы тела* в планетные сферы, воплощает эту модель в реальности. Наиболее ценное сокровище античной геометрии, *Платоновы тела,* были использованы для создания *Космической чаши.* После этого Кеплер имел право заявить, что он осознал Солнечную систему, как бы создав ее собственными руками.

После открытия Кеплеровских астрономических законов (особенно первого закона об эллиптическом характере планетных орбит) книга *Mysterium Cosmographicum* потеряла свое первоначальное значение (хотя бы потому, что планетные орбиты на самом деле оказались не круговыми), тем не менее, Кеплер до конца своей жизни верил в скрытую математическую гармонию Вселенной. В 1621г. по настоянию своих последователей он переиздал *Mysterium Cosmographicum* со многими изменениями и дополнениями.

Craig Smorinsky обсуждает в книге [22] влияние идей Платона и Евклида на Иоганна Кеплера*: «Кеплеровский проект в Mysterium Cosmographicum состоял в том, чтобы дать "истинные и совершенные причины для чисел, величин и периодических движений небесных орбит". Совершенные причины должны основываться на простых принципах математического порядка, который Кеплер нашел в Солнечной системе, используя многочисленные геометрические демонстрации. Общая схема его модели была взята Кеплером из Платоновского Тимея, но математические соотношения для Платоновых тел (пирамида, куб,* *октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) были взяты Кеплером из трудов Евклида и Птоломея. При этом Кеплер следовал Проклу в том, что “главная цель Евклида состояла в том, чтобы построить геометрическую теорию так называемых Платоновых тел”. Кеплер полностью был очарован Проклом, которого он часто цитирует и называет «пифагорейцем».*

Из этой цитаты мы можем сделать вывод, что Кеплер использовал Платоновы тела для создания своего *Космического кубка*, но при этом все математические соотношения для Платоновых тел были взяты им из 13-й книги *Начал*, то есть, он объединил в своих исследованиях *космологию Платона* с *Началами* Евклида. При этом он полностью верил в *гипотезу Прокла*, что первичной целью *Начал* было дать завершенную геометрическую теорию Платоновых тел, которые и были использованы Кеплером в его геометрической модели Солнечной системы (Рис. 3).

4.3. *Феликс Клейн: «Икосаэдр – главный геометрический объект математики».*

В 19 в. к Платоновым телам обратился выдающегося немецкий математик **Феликс Клейн** (1849-1925). Кроме *Эрлангенской программы* и других выдающихся математических достижений, гениальность Феликса Клейна проявилась также в том, что более, чем 100 лет назад, он сумел предсказать выдающуюся роль «Платоновых Тел», в частности, икосаэдра, в будущем развитии науки, в частности, математики. В 1884 г. Феликс Клейн опубликовал одну книгу *Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени* [23], посвященную роли икосаэдра в развитии математики.

Как известно, икосаэдр (а вместе с ним двойственный к нему додекаэдр) занимают особое место в «живой» природе; форму икосаэдра имеют некоторые вирусы и радиолярии, то есть, икосаэдральная форма и пентагональная симметрия являются фундаментальными в организации живого вещества.

Следуя идеям Евклида и Кеплера, Феликс Клейн пытается преодолеть «фрагментарность» математики, основываясь на Платоновых телах. В книге [23] делается попытка определить и объяснить место икосаэдра в математике. Согласно Ф. Клейну, ткань математики широко и свободно разбегается листами отдельных зачастую слабо связанных теорий («фрагментарность» математики). Но есть объекты, в которых сходятся несколько листов, - своеобразные точки ветвления. Их геометрия связывает листы и позволяет охватить общематематический смысл разных теорий. Именно таким математическим объектом, по мнению Клейна, является икосаэдр. *Клейн трактует икосаэдр как математический объект, из которого расходятся ветви пяти математических теорий: геометрия, теория Галуа, теория групп, теория инвариантов и дифференциальные уравнения.*

Таким образом, главная идея Клейна чрезвычайно проста: *«каждый уникальный геометрический объект, так или иначе, связан со свойствами икосаэдра».*

В чем же состоит значение идей выдающегося математика с точки зрения теории гармонии? Прежде всего, в качестве объекта, объединяющего «главные листы» математики выбрано «тело Платона» - икосаэдр, основанный на золотом сечении. Отсюда естественным образом вытекает мысль, что именно золотое сечение и является той главной геометрической идеей, которая, согласно Клейну, может объединить всю математику.

Современники Клейна не сумели по достоинству понять и оценить революционный характер «икосаэдрической» идеи Клейна. Ее значение было понято ровно через 100 лет, то есть только в 1984 г., когда израильский физик Дан Шехтман опубликовал заметку, подтверждающую существование специальных сплавов (названных квазикристаллами), обладающих так называемой «икосаэдрической» симметрией, то есть симметрией 5-го порядка, что строго запрещено классической кристаллографией.

4.4. *Значение гипотезы Прокла для развития математики.*

Таким образом, *гипотеза Прокла* позволяет высказать предположение, что хорошо известные в античной науке *Пифагорейская доктрина о числовой гармонии Мироздания* и *Космология Платона*, основанная на правильных многогранниках, были воплощены в величайшем математическом сочинении греческой математики, *Началах* Евклида. С этой точки зрения **мы можем рассматривать *Начала* Евклида как первую попытку создать “Математическую теорию Гармонии», что было главной идеей греческой науки.**

Какое же значение имеет *гипотеза Прокла* для истории математики и ее будущего развития. *Гипотеза Прокла* возвращает нас к истокам математики, в частности, к *Началам* Евклида и позволяет выработать цельный взгляд на математику, что может привести к пересмотру всей математики и восстановлению той цели, которая была сформулирована Евклидом для математики на начальном этапе ее развития. Согласно *гипотезе Прокла* [5, 20-22] главной целью, которую ставил Евклид при написании своих «Начал», было дать законченную геометрическую теорию «Платоновых Тел», которые выражали в античной науке «Гармонию Мироздания». Для построения теории «Платоновых Тел» Евклид ввел в Книге II задачу «о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» (Теорема II.11), названым позже «золотым сечением». Таким образом, *Начала* Евклида являются первой попыткой создать «Математическую теорию гармонии», основанную на «Платоновых Телах» и «Золотом Сечении», то есть, **Евклид в своих «Началах» четко сформулировал перед математикой главную цель математики - раскрытие математическом языком «Гармонии Мироздания».**

В 17 веке Иоганн Кеплер развил идеи Евклида в своей книге *Гармония мира*. Свое восхищение «золотым сечением» он выразил в следующих широко известных словах: *«В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».*

В 19 в. выдающийся математик Феликс Клейн выдвинул предположение, что икосаэдр, одно из важнейших тел Платона, является главной геометрической фигурой математики, которая позволяет объединить все важнейшие разделы математики: *геометрию, теорию Галуа, теорию групп, теорию инвариантов и дифференциальные уравнения.*

4.5. ***Квазикристаллы.***

Новейшие научные открытия, основанные на правильных многогранниках, являются подтверждением гениальности Евклида, Кеплера и Клейна, которые в своих сочинениях предсказали роль Платоновых тел в развитии науки. Одним из таких открытий являются *квазикристаллы*, открытые экспериментально израильским физиком **Даном Шехтманом**. 12 ноября 1984 г. в небольшой статье, опубликованной в авторитетном журнале «Physical Review Letters”, Дан Шехтман предъявил экспериментальное доказательство существования металлического сплава с исключительными свойствами. При исследовании методами электронной дифракции этот сплав проявил все признаки кристалла. Его дифракционная картина составлена из ярких и регулярно расположенных точек, совсем как у кристалла. Однако эта картина характеризуется наличием «икосаэдрической» или «пентангональной» симметрии, строго запрещенной в кристалле из геометрических соображений. Такие необычные сплавы были названы *квазикристаллами.* Менее чем за год были открыты многие другие сплавы подобного типа. Их было так много, что квазикристаллическое состояние оказалось намного более распространенным, чем это можно было бы представить.

Понятие квазикристалла представляет фундаментальный интерес, потому что оно обобщает и завершает определение кристалла. Теория, основанная на этом понятии, заменяет извечную идею о «структурной единице, повторяемой в пространстве строго периодическим образом», ключевым понятием *дальнего порядка.* Как подчеркивает в статье «Квазикристаллы» известного физика Гратиа [24], *«это понятие привело к расширению кристаллографии, вновь открытые богатства которой мы только начинаем изучать. Его значение в мире минералов можно поставить в один ряд с добавлением понятия иррациональных чисел к рациональным в математике».*

Заметим, что открытие квазикристаллов, стало достойным подарком к 100-летию публикации книги Клейна об икосаэдре [23].

4.6. ***Фуллерены.***

Открытие фуллеренов - новой формы существования одного из самых распространенных элементов на Земле – углерода, признано одним из удивительных и важнейших открытий в науке XX столетия [25]. За свое открытие - обнаружение углеродных кластеров состава С60 и С70 – американские ученые **Р. Керл, Р. Смолли и Г. Крото** в 1996 г. были удостоены Нобелевской Премии по химии. Ими же и была предложена структура фуллерена С60, похожая на оболочку футбольного мяча. Как известно, оболочка футбольного мяча скроена из 12 пентагонов и 20 гексагонов. Наиболее стабильный изомер имеет структуру **усеченного икосаэдра**, который был известен еще Архимеду. Этот изомер С60 получил название «Бакминстерфуллерен» в честь известного архитектора по имени R. Buckminster Fuller, создавшего сооружения, куполообразный каркас которых сконструирован из пентагонов и гексагонов. Российские ученые А.В. Елецкий и Б.М. Смирнов в статье [25] отмечают, что *«фуллерены, существование которых было установлено в середине 80-х, а эффективная технология выделения которых* *была разработана в 1990 г., в настоящее время стали предметом интенсивных исследований десятков научных групп. За результатами этих исследований пристально наблюдают прикладные фирмы. Поскольку эта модификация углерода преподнесла ученым целый ряд сюрпризов, было бы неразумным обсуждать прогнозы и возможные последствия изучения фуллеренов в ближайшее десятилетие, но следует быть готовым к новым неожиданностям».*

4.7. *Платоновы тела и элементарные частицы.*

В этой части нашей статьи мы хотели бы привлечь внимание к статье **Л.И. Верховского** «Платоновы тела и элементарные частицы», опубликованной в 2006 г. в журнале «Химия и жизнь» [26]. Статья начинается цитатой известного российского физика академика Л.Б. Окуня: *«Физиков можно назвать охотниками за симметриями: в некотором смысле они отличаются от остальных людей тем, что отыскивают в природе все более скрытые и все более фундаментальные типы симметрий».* И не случайно, что удивительные симметрии *Платоновых тел* привлекли внимание специалистов в области элементарных частиц.

Главная идея статьи [26] состоит в том, что *«возможно именно в правильных многогранниках заключен тот единый геометрический принцип, который позволит раскрыть внутреннюю логику мира частиц, предсказать их свойства".*

В заключительной части статьи, названной «Вперед к Платону», Верховский пишет: *«Среди Платоновых тел наиболее интересен икосаэдр, и с ним сталкиваются порой совершенно неожиданно, в самых разных разделах математики. Этот факт должен послужить эвристикой при работе над единой теорией элементарных частиц – ведь в природе наверняка воплощена самая изощренная абстрактная структура. Ее нахождение - прометеева задача наших дней.*

Как писал Вернер Гейзенберг, «развитие физики выглядит так, словно в конце концов будут найдены очень простые законы природы – такие, какими их надеялся увидеть Платон». Не исключено, что эти законы окажутся связанными с правильными многогранниками. Даже когда знания о физической реальности были еще очень скудны, находились мыслители (Платон, Кеплер), видевших в этих фигурах ключ к ее пониманию. Наверное, они составляют тот арьергард, который всегда впереди».

А вот еще одна статья «Кварковый икосаэдр, заряды и угол Вайнберга», написанная известным российским физиком проф. **Ю.С. Владимировым** (кафедра теоретической физики Московского университета) [27]. В статье показано, что *«понятие поколений кварков и значения зарядов электрослабых взаимодействий кварков связаны с дискретными симметриями икосаэдра, в 12 вершинах которого помещены левые и правые компоненты кварков шести ароматов».*

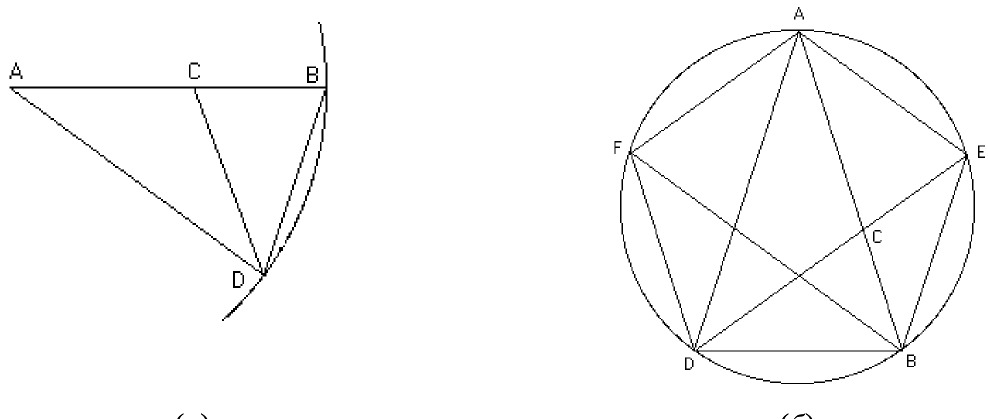
Таким образом, статьи [26, 27] демонстрируют наличие устойчивого интереса современной теоретической физики к правильным многогранникам, открытым в античную эпоху, в частности, к икосаэдру и додекаэдру – наиболее «изощренным» Платоновым телам. И не исключено, что именно Плановые тела станут математической основой современной *Единой теории элементарных частиц*, которая еще далека от завершения.

5. Божественная пропорция

5.1. *Зачем Евклид ввел «задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении»?*

Для ответа на этот вопрос мы вновь возвратимся к *Платоновым телам*. Мы знаем, что гранями *Платоновых тел* могут быть только три вида правильных многоугольников: *правильный треугольник* (тетраэдр, октаэдр, икосаэдр), *квадрат* (куб) и *правильный пятиугольник или пентагон* (додекаэдр). Для того чтобы сконструировать *Платоновы тела*, мы должны прежде всего уметь геометрически (то есть, с помощью линейки и циркуля) построить грани Платоновых тел. Евклид не имел никаких проблем с построением *правильного* или *равностороннего треугольника* и *квадрата*, однако столкнулся с определенными трудностями при конструировании *пентагона.*

Именно для этой цели Евклид ввел Теорему II.11 («о делении отрезка в крайнем и среднем отношении»). Используя Теорему II.11, Евклид конструирует *«золотой» равнобедренный треугольник,* чьи углы при основании равны удвоенному углу при вершине (Рис. 4-*а*). Для этого мы разделим отрезок *AB* точкой *C* в *золотом сечении*. Затем мы проводим окружность с центром в точке *A* и радиусом *AB*. После этого выберем на окружности точку *D* таким образом, чтобы *AC* = *CD* = *BD*, и проведем отрезок *AD*. Полученный таким образом треугольник *ABD* обладает тем свойством, что углы *B* и *D* при его основании *BD* равны удвоенному углу при его вершине *A*.



(*а*) (*б*)

Рисунок 4. «Золотой» равнобедренный треугольник (*а*) и пентагон (*б*)

А теперь перейдем к конструированию *пентагона* (Рис. 4-*б*). Для этого начнем с треугольника *ABD* и проведем окружность через точки *A*, *B* и *D* (Рис. 4-*б*). После этого разделим угол *ADB* пополам и проведем отрезок *DE* до его пересечения с окружностью в точке *E*. Заметим, что этот отрезок пересекается в точке *C* с отрезком *AB*, разделяя его в *золотом сечении*. Подобным же образом находим точку *F* на окружности и затем находим *регулярный пентагон AEBDF*.

Геометрическое построение пентагона с помощью линейки и циркуля стало основой для построения завершенной геометрической теории додекаэдра, что и было сделано Евклидом в XIII-й, то есть, заключительной Книге своих *Начал*.

5.2. ***Золотое сечение.***

Сформулированная Евклидом «задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» в современной науке называется «золотым сечением». Для трех геометрических отрезков (в общем случае трех величин) – самый больший из них *AB*, средний *CB*, меньший *AC*, таких, что

$$AB=CB+AC, \tag{1}$$

отношение большего отрезка и среднего равно отношению среднего к меньшему (Рис. 5), то есть,

$$\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{AC} \tag{2}$$

Рисунок 5. Деление отрезка в крайнем и среднем отношении («золотое сечение»)

Если учесть соотношения (1) и (2), то задача (2) сводится к решению следующего алгебраического уравнения:

$$x^2 = x + 1 \tag{3}$$

Из «физического смысла» пропорции (2) вытекает, что искомое решение уравнения (3) должно быть положительным числом, откуда вытекает, что решением задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении является положительный корень уравнения (3), который мы обозначим через Φ, то есть

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ . \tag{4}$$

5.3. ***Уникальные математические свойства «золотой пропорции».***

В течение нескольких тысячелетий *золотое сечение* была предметом восторженного внимания со стороны выдающихся ученых и математиков, включая **Пифагора, Платона, Евклида, Леонардо да Винчи, Луку Пачоли, Иоганна Кеплера** и др. В 20-м веке в математике возрождается интерес к золотому сечению и обнаруживаются некоторые уникальные математические свойства *золотой пропорции* (4). Эти свойства выделяют её среди других иррациональных чисел. Например, в работах российских математиков **А.Я. Хинчина** [28] и **Н.Н. Воробьева** [29] доказано, что главная особенность *золотой пропорции* (4) состоит в том, что среди всех иррациональных чисел она *хуже всего аппроксимируется рациональными дробями*. Чтобы объяснить это свойство, напомним, что *цепная дробь* (или *непрерывная дробь*) — это математическое выражение вида

$$\left[a_0;a_1,a_2,a_2,...\right]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+...}}}, \tag{5}$$

где a_0 есть целое число и все остальные a_n натуральные числа (то есть положительные целые). Любое вещественное число можно представить в виде цепной дроби (конечной или бесконечной). Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рационально. Число представляется периодической цепной дробью тогда и только тогда, когда оно является квадратичной иррациональностью. Заметим, что n-ой *подходящей дробью* для цепной дроби $x=\left[a_0;a_1,a_2,a_3,...\right]$ называется конечная цепная дробь типа $x=\left[a_0;a_1,a_2,...,a_n\right]$, значение которой равно некоторому рациональному числу $\frac{p_n}{q_n}$.

Доказано [28, 29], что представление *золотой пропорции* (4) в виде *непрерывной дроби* типа (5) имеет следующий вид:

$$\Phi=\left[1;1,1,1,...\right]=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}} \qquad (6)$$

Поскольку все коэффициенты непрерывной дроби (6) являются единицами, то отсюда непосредственно вытекает, что непрерывная дробь (6) является наиболее медленно сходящейся. **В этом и состоит уникальность «золотой пропорции» среди других иррациональных чисел!**

Если теперь мы будем аппроксимировать *золотую пропорцию* Φ, представленную в виде (6), *подходящими дробями* типа m/n, то мы придём к числовой последовательности, состоящей из отношений соседних чисел Фибоначчи F_n:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},...\to\Phi=\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (7)$$

Эта последовательность чисел выражает ни что иное, как знаменитый *закон филлотаксиса* [30], в соответствии с которым Природа конструирует сосновые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечников и другие ботанические объекты. Другими словами, Природа использует уникальное математическое свойство *золотой пропорции,* задаваемое (6), (7), в своих замечательных конструкциях!

Явление *филлотаксиса* известно в науке со времен Кеплера. Считается, что именно Иоганн Кеплер установил соотношение (7), задающее связь *чисел Фибоначчи* с *золотой пропорцией.* Поэтому формула (7) называется *формулой Кеплера*.

Среди других математических свойств золотой пропорции известны такие:

1. Представление золотой пропорции в радикалах

$$\Phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}} \qquad (8)$$

2. Свойство мультипликативности и аддитивности золотой пропорции:

$$\Phi^n=\Phi^{n-1}+\Phi^{n-2}=\Phi\times\Phi^{n-1};\; n=0,\pm1,\pm2,\pm3,... \qquad (9)$$

Основываясь на (9), мы можем построить «золотую» геометрическую прогрессию:

$$\left\{\Phi^n, n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\right\}, \qquad (10)$$

в которой каждый член связан с предыдущими членами свойством аддитивности ($\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$) и свойством мультипликативности ($\Phi^n = \Phi \times \Phi^{n-1}$). Поскольку каждой геометрической прогрессии типа (10) в геометрии соответствует некоторая *логарифмическая спираль*, то, по мнению многих исследователей, свойство (9) выделяет золотую прогрессию (10) среди других геометрических прогрессий и является причиной широкого распространения именно *«золотой» логарифмической спирали* в формах и структурах живой природы.

Математические свойства «золотой пропорции», задаваемые (6)-(9), не были известны античным мыслителям. Несмотря на это, их гениальная интуиция выбрала именно «золотое сечение» в качестве главного «гармоничного» числа. Платон рассматривал число Φ как наиболее обязательное из всех математических отношений и делал его ключом к пониманию физики космоса.

В 1859 г. немецкий ученый Цейзинг писал: *«Для того, чтобы целое, разделенное на две неравные части, казалось прекрасным с точки зрения формы, между меньшей и большей частями должно быть такое же отношение, что и между большей частью и целым».*

5.4. *"Divine Proportione".*

Культура Древней Греции и культура Рима и Византии – вот два мощных потока духовных ценностей, слияние которых дало ростки нового, титанов Ренессанса. Титан – это самое точное слово по отношению к таким людям, как **Леонардо да Винчи, Микеланджело, Николай Коперник, Альберт Дюрер**. В эту замечательную плеяду по праву входит и великий итальянский математик **Лука Пачоли**.

Лука Пачоли (1445 - 1514)

В 1472 г. Лука Пачоли осуществляет пострижение в монахи францисканского ордена, что дает ему возможность заниматься наукой. События показали, что он сделал правильный выбор. В 1477 г. он получает профессорское кресло в университете Перуджи. Когда в 1496 году в Милане – крупнейшем городе и государстве Италии - в университете открыли кафедру математики, занять ее был приглашен Лука Пачоли.

В это время Милан был центром науки и искусства, в нем жили и творили выдающиеся ученые и художники – и одним из них был *Леонардо да Винчи*. Под непосредственным влиянием Леонардо да Винчи Пачоли начинает писать свою великую книгу *De Divine Proportione* («Божественная пропорция»). Новая книга Пачоли, изданная в 1509 г., оказала заметное влияние на современников. Изданный ин-кварто, фолиант Пачоли был одним из первых прекрасных образцов книгопечатного искусства Италии. Историческое значение книги состояло в том, что это было первое математическое сочинение, целиком посвященное «золотому сечению». Есть все основания полагать, что именно Леонардо да Винчи стоял у истоков этой книги! Более того. По существу Леонардо принадлежит не только идея книги, но его, в некотором смысле, можно считать соавтором этой книги, поскольку именно он был художником, иллюстрировавшим эту выдающуюся книгу. Он нарисовал 60 (!) великолепных рисунков к книге Пачоли, которые сохраняют свою художественную ценность до настоящего времени.

Книга «Божественная пропорция» является одним из первых математических сочинений, в котором христианская доктрина о Боге как творце Вселенной получает научное обоснование. Пачоли называет золотое сечение «божественным» и выделяет ряд свойств золотой пропорции, которые, по его мнению, присущи самому Богу:

«Первое заключается в том, что существует только она одна, и невозможно привести примеры пропорций другого рода или хоть сколько-нибудь отличающихся от нее. Эта единственность, согласно с политическим и философским учениями. Есть высочайшее свойство самого Бога. Второе свойство есть свойство святой триединости, а именно, как в божестве одна и та же сущность заключается в трех лицах – отце, сыне и святом духе, так же и одна и та же пропорция этого рода может иметь место только для трех выражений, а для большего и меньшего выражений не существует. Третье свойство заключается в том, что, подробно тому, как Бог не может быть ни определен, ни словом разъяснен, наша пропорция не может быть выражена ни доступным нам числом, ни какой бы то ни было рациональной величиной и остается скрытой и тайной и поэтому математиками названа иррациональной. Четвертое свойство заключается в том, что, подобно тому, как Бог никогда не изменяется и представляет все во всем и все в каждой своей части, и наша пропорция для всякой непрерывной и определенной величины одна и та же, велики или малы эти части, никаким образом не может быть ни изменена, ни по иному воспринята рассудком. К названным свойствам вполне справедливо можно присоединить пятое свойство, заключающееся в том, что, подобно тому, как Бог вызвал к бытию небесную добродетель, иначе называемую пятой субстанцией, а с ее помощью – четыре других простых тела, именно, четыре элемента – землю, воду, воздух и огонь, а с их помощью вызвал к бытию всякую вещь в природе, так и наша священная пропорция, согласно Платону в его «Тимее», дает формальное бытие самому небу, ибо ему приписывается вид тела, называемый додекаэдром, которое невозможно построить без нашей пропорции».

5.5. *Числа Фибоначчи.*

Упомянутые выше *числа Фибоначчи* F_n были открыты в 13 в. известным итальянским математиком и поклонником арабской культуры **Леонардо из Пизы** (по прозвищу **Фибоначчи**). Числа Фибоначчи задаются следующим рекуррентным соотношением, которое, кстати, является первым в истории математики рекуррентным соотношением:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2};\ F_1 = F_2 = 1, \tag{11}$$

то есть, каждое число Фибоначчи F_n получается из двух начальных («базовых») чисел $F_1 = F_2 = 1$ рекуррентно, как сумма двух предыдущих чисел Фибоначчи F_{n-1} и F_{n-2}. В результате получается следующая широко известная последовательность Фибоначчи:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... \tag{12}$$

5.6. *Числа Люка.* Не менее известными в современной математике являются *числа Люка,* введенные в 19-м веке французским математиком Люка. Числа Люка L_n задаются следующим рекуррентным соотношением:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2};\ L_1 = 1, L_2 = 3, \tag{13}$$

Рекуррентная формула (13) порождает еще одеу широко известную последовательность, известную под названием *числа Люка*:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... \tag{14}$$

Доказано, что числа Фибоначчи (12) и числа Люка (14) могут быть расширены в сторону отрицательных значений индексов *n*, то есть, когда индексы *n* принимают значения из множества: $n = 0, -1, -2, -3, \ldots$.

Расширенные таким образом числа Фибоначчи и Люка представлены в Таблице 3.

Таблица 3. Расширенные числа Фибоначчи и Люка

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
F_{-n}	0	1	–1	2	–3	5	–8	13	–21	34	–55
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
L_{-n}	2	–1	3	–4	7	–11	18	–29	47	–76	123

Как вытекает из Табл. 3, члены последовательностей F_n и L_n обладают рядом удивительных математических свойств. Например, для нечетных $n=2k+1$ члены последовательностей F_n and F_{-n} совпадают, то есть $F_{2k+1} = F_{-2k-1}$, а для четных $n = 2k$ они противоположны по знаку, то есть: $F_{2k} = -F_{-2k}$. Что касается чисел Люка L_n, то здесь все наоборот, то есть $L_{2k} = L_{-2k}$; $L_{2k+1} = -L_{-2k-1}$.

5.7. *Формула Кассини.*

Кассини – это знаменитая династия французских астрономов. Наиболее известным из них считается основатель этой династии **Джовани Доменико Кассини** (1625-1712). Именем Джовани Кассини названы многие астрономические объекты: «Кратер Кассини» на Луне, «Кратер Кассини» на Марсе, «Щель Кассини» - промежуток в кольцах Сатурна, «Законы Кассини» - три открытые Кассини законы движения Луны. Но оказывается имя Кассини широко известно не только в астрономии, но и в математике.

Кассини обнаружил удивительную закономерность, которая связывает любые три соседние числа в последовательности Фибоначчи:

Квадрат некоторого числа Фибоначчи F_n всегда отличается от произведения двух соседних чисел Фибоначчи F_{n-1} и F_{n+1}, которые его окружают, на 1, причем знак этой единицы зависит от индекса n числа Фибоначчи F_n; если индекс n является четным числом, то число 1 берется с минусом, а если нечетным, то с плюсом.

Указанное свойство чисел Фибоначчи Кассини выразил в виде следующей общей математической формулы:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}. \qquad (15)$$

Эта удивительная формула вызывает благоговейный трепет, если представить себе, что она справедлива для любого целого значения n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$), и истинное эстетическое наслаждение, потому что чередование +1 и –1 в указанном выше математическом выражении при последовательном прохождении n от -∞ до +∞ вызывает неосознанное чувство ритма и гармонии.

5.8. *Формулы Бине.*

В 19-м столетии французский математик **Жак Бине** (1786-1856) вывел две замечательные формулы, связывающие числа Фибоначчи и Люка с *золотой пропорцией*:

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}; \qquad L_n = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n} \qquad (16)$$

Заметим, что эти формулы были открыты **Абрахамом де Муавром** (1667-1754) и **Николаем Бернулли** (1687-1759) на одно столетие раньше Жака Бине. Однако в современной математической литературе эти формулы называются *формулами Бине.*

В чем необычность формул (16)? Для этого напомним, что числа Фибоначчи и Люка F_n и L_n всегда являются целыми числами (см. Табл. 3), в то время как «золотая пропорция» $\Phi=\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ и число $\sqrt{5}$ являются иррациональными числами. Формулы (16) задают абсолютно точное представление целых чисел F_n и L_n через «золотую пропорцию» Φ и число $\sqrt{5}$. Таким образом, формулы Бине (16) являются как бы связующим звеном между целыми и иррациональными числами. Именно поэтому мы имеем полное право отнести формулы Бине (16) к разряду выдающихся математических формул, а саму «золотую пропорцию» $\Phi=\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ к разряду важнейших математических констант.

5.9. ***Золотой прямоугольник.*** Широкое распространение в искусстве получил «золотой» прямоугольник, в котором отношение большей стороны к меньшей равно «золотой пропорции» Φ (рис. 6). Рассмотрим случай простейшего золотого прямоугольника, в котором $AB=\Phi$ и $BC = 1$.

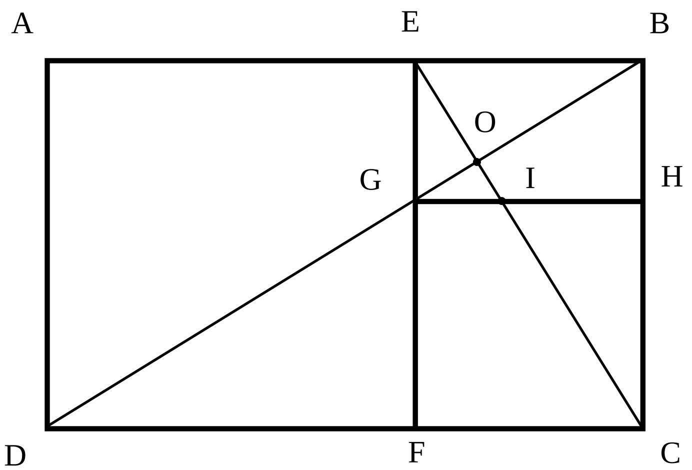


Рисунок 6. Золотой прямоугольник

Найдем теперь на отрезках *AB* и *DC* точки *E* и *F*, которые делят соответствующие стороны *AB* и *DC* в «золотом сечении». Ясно, что $AE=DF=1$, тогда $EB=AB-AE=\Phi-1=\frac{1}{\Phi}$. Соединим теперь точки *E* и *F* отрезком *EF* и назовем этот отрезок *золотой линией*. При этом с помощью золотой линии *EF* золотой прямоугольник *ABCD* оказывается разделенным на два прямоугольника *AEFD* и *EBCF*. Ясно, что прямоугольник *AEFD* является квадратом.

Рассмотрим теперь прямоугольник *EBCF*. Поскольку его большая сторона $BC=1$, а меньшая $EB=\frac{1}{\Phi}$, то отсюда следует, что их отношение $BC:EB=\Phi$ и, следовательно, прямоугольник *EBCF* является «золотым»! Таким образом, золотая линия *EF* расчленяет исходный золотой прямоугольник *ABCD* на квадрат *AEFD* и новый золотой прямоугольник *EBCF*. Проведем теперь диагонали *DB* и *EC* «золотых» прямоугольников *ABCD* и *EBCF*. Из подобия треугольников *ABD*, *FEC*, *BCE* вытекает, что точка *G* разделяет «золотым сечением» диагональ *DB*. Проведем теперь новую золотую линию *GH* в золотом прямоугольнике *EBCF*. Ясно, что золотая линия *GH* разделяет золотой прямоугольник *EBCF* на квадрат *GHCF* и новый золотой прямоугольник *EBHG*. Повторяя многократно эту процедуру, мы получим бесконечную последовательность квадратов и золотых прямоугольников, которые в пределе сходятся к точке *O*.

Заметим, что такое бесконечное повторение одних и тех же геометрических фигур, то есть квадрата и золотого прямоугольника, вызывает у нас неосознанное эстетическое чувство ритма и гармонии. Считается, что именно это обстоятельство является причиной того, что многие предметы прямоугольной формы, с которыми человек имеет дело (спичечные коробки, зажигалки, книги, чемоданы), зачастую имеют форму золотого прямоугольника.

5.10. *Пентагон, пентаграмма, пентагональная симметрия.*

Пентаграмма, построенная по принципу золотой пропорции, была известна в Древнем Египте как звезда Сириуса. В ходе посвящения в герметических храмах неофиту демонстрировался этот образ как символ эволюции. Человеком пентаграммы назывался тот, кто сумел развить в себе волевое начало как 5-й элемент, и с его помощью подчинить 4 стихии, из которых состоит душа человека. И ныне мы можем видеть этот символ как элемент государственных эмблем многих стран.

Пифагорейцы уделяли *пентаграмме*, пятиконечной звезде, образованной диагоналями *правильного пятиугольника* или *пентагона*, особое внимание (Рис. 7).

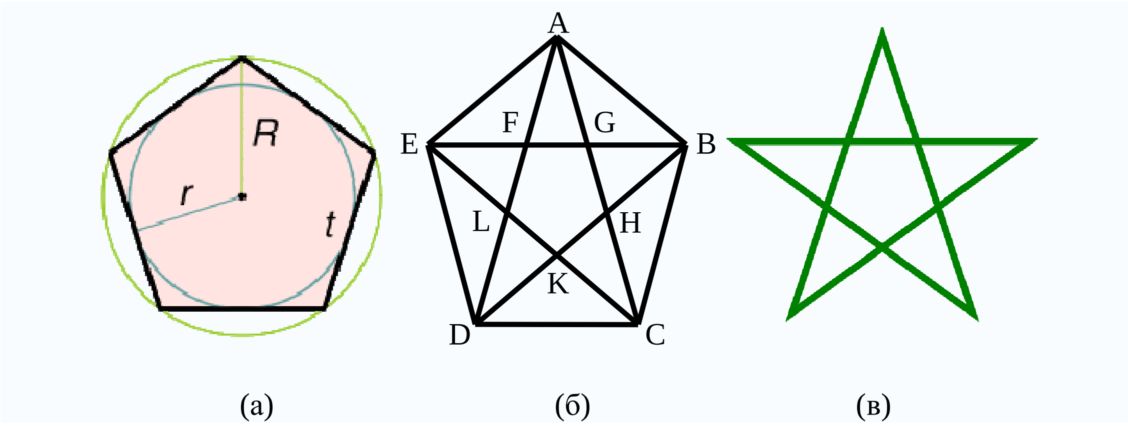


Рисунок 7. Правильный пятиугольник (а), пентагон и пентаграмма (б), пентаграмма (в)

Доказано, что точки пересечения диагоналей в пентагоне (Рис. 7-б) всегда являются точками золотого сечения. При этом они образуют новый пентагон *FGHKL*. В новом пентагоне можно провести диагонали, пересечение которых образуют еще один пентагон и этот процесс может быть продолжен до бесконечности. Таким образом, пентагон *ABCDE* как бы состоит из бесконечного числа пентагонов, которые каждый раз образуются точками пересечения диагоналей. Эта бесконечная повторяемость одной и той же геометрической фигуры создает чувство ритма и гармонии, которое неосознанно фиксируется нашим разумом. Видимо, именно благодаря совершенной форме и богатству математических свойств пентаграмма (Рис. 7-в) была выбрана пифагорейцами в качестве символа здоровья и тайного опознавательного знака. С легкой руки пифагорейцев пятиконечная звезда и сегодня является символом многих государств и реет на флагах едва ли не половины стран мира.

Следует отметить, что пентагон и пентаграмма имеют глубокие природные корни. В живой природе широко распространены формы, основанные на «пентагональной» симметрии (морские звезды, морские ежи, цветы). Пятилепестковыми являются цветы кувшинки, шиповника, боярышника, гвоздики, груши, черемухи, яблони, земляники. Ниже на Рис. 8 приведены примеры «пентагональной» симметрии в природе.

а)

б)

в)

г)

Рисунок 8. Примеры пентагональной симметрии в природе: (а) китайская роза; (б) яблоко в разрезе; (в) морская звезда; (г) кактус

Свойство наличия пяти пальцев на руке или пяти костей, или костных зачатков на органах, соответствующих руке человека и многих животных («пентадактильность»), являются дополнительным свидетельством широкого распространения пятиугольных форм в морфологии биологического и растительного мира.

5.11. *Спираль Фибоначчи.*

Рассмотрим теперь еще раз ряд Фибоначчи: 1,1,2,3,5,8,13,21, … . Возьмем два маленьких квадрата со стороной, равной 1 (площадь каждого квадрата будет равна 1) и сложим их вместе.

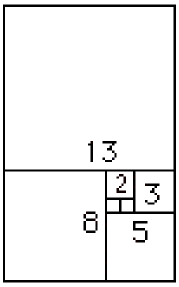
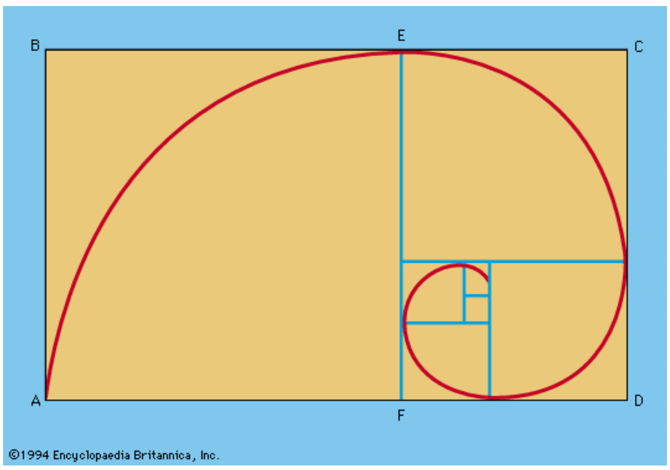


Рисунок 9. Прямоугольник Фибоначчи

В результате образуется прямоугольник размером 2×1, называемый «двойным квадратом». Затем на большей стороне «двойного квадрата» построим новый квадрат размером 2×2. В результате получим прямоугольник размером 3×2. На большей стороне этого прямоугольника построим новый квадрат размером 3×3; в результате получим новый прямоугольник размером 5×3. Продолжая этот процесс, мы будем последовательно получать прямоугольники, в которых стороны являются соседними числами Фибоначчи, то есть, имеют размеры: 8×5, 13×8, 21×13 и т.д. (Рис. 9). Такие прямоугольники будем называть *прямоугольниками Фибоначчи.*



(а)

(б)

Рисунок 10. Спираль Фибоначчи (а) и спираль наутилуса (б)

А теперь в каждом из квадратов, образующих прямоугольник Фибоначчи, мы можем провести дугу, представляющую собой четверть окружности. Соединяя эти дуги, мы получим некоторую кривую, которая напоминает по форме спираль (Рис. 10-а). Строго говоря, эта кривая не является спиралью с математической точки зрения, но она является очень хорошей аппроксимацией спиралей, которые широко встречаются в природе. В дальнейшем кривую на Рис. 10-а мы будем называть *спиралью Фибоначчи.*

Великий поэт и естествоиспытатель Гете считал спиральность одним из характерных признаков всех организмов, проявлением самой сокровенной сущности жизни. Спирально закручиваются усики растений и рога барана, по спирали происходит рост тканей в стволах деревьев, по спирали расположены семечки в подсолнечнике. Каждый из нас много раз восхищался формой морских раковин, которые также построены по спиралевидному закону. На Рис. 10-б изображена раковина *наутилуса,* построенная по принципу спирали Фибоначчи.

6. Что такое «Математика Гармонии»?

6.1. ***Что такое «гармония» и может ли она стать предметом математического исследования?*** Как известно, «в каждой науке столько науки, сколько математики». Математизация науки состоит в том, что для все большего числа «качественных» понятий вводится «мера», в результате чего эти понятия приобретают «количественный» характер, после чего эти понятия становятся предметом математического исследования. Примером такого «качественного» понятия является «информация». Крупнейшее достижение Клода Шеннона состоит в том, что ему удалось использовать понятие «энтропия», имеющее вполне определенное количественное выражение, в качестве меры «информации», в результате чего Шеннон создал «математическую теорию информации».

Возникает вопрос: возможно ли подобное с таким «качественным» понятием как «гармония»? То есть, возможно ли построение «математической теории гармонии» или «математики гармонии»? Попытаемся изложить «методологические основы» новой математики – *Математики Гармонии.* Как упоминалось, математика изучает количественные аспекты того или иного явления. И начиная математический анализ понятия «гармонии», мы должны сконцентрировать наше внимание на количественных аспектах этого понятия. Что такое «гармония» с количественной точки зрения? Чтобы ответить на это вопрос, мы начнем с выяснения значения слова «гармония». Как известно, слово «гармония» имеет греческое происхождение. В переводе с греческого, это слово означает *связь, согласие.*

Существуют различные определения понятия «гармония». Согласно мнению крупнейшего специалиста в этой области проф. В.П. Шестакова [6], существует *математическое понимание «гармонии»,* которое выражено в определении этого понятия, данного в Большой Советской Энциклопедии:

«Гармония – соразмерность частей и целого, слияние различных компонентов объекта в единое органическое целое. В Гармонии получают внешнее выявление внутренняя упорядоченность и мера бытия».

Анализ значения слова «гармония» и его определения показывает, что наиболее важными, «ключевыми» понятиями, которые лежат в основе «гармонии», являются следующие: *связь, согласие, комбинация, упорядоченность.* Возникает вопрос: какой раздел математики изучает подобные понятия? Поиски ответа на этот вопрос приводят нас к комбинаторному анализу. Как известно, «*комбинаторика занимается различного вида сочетаниями (соединениями), которые можно образовать из элементов некоторого конечного множества. Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова combinary – сочетать, соединять*».

Из этого рассмотрения вытекает, что латинское слово *combinary* и греческое слово *гармония* имеют близкие значения и могут быть переведены как *комбинация* или *соединение.* Это дает нам право выдвинуть гипотезу, что именно «законы комбинаторного анализа» могут быть использованы для анализа понятия «гармония» с количественной точки зрения.

Другой аспект исследования гармонии связан с проблемой *симметрии.* Как подчеркивает Шестаков [6], *«исследование симметрии в современном значении этого понятия давно вышло за пределы собственно эстетики. Эта проблема изучается в современной физике, химии, математике, кристаллографии».* В этой связи было выдвинуто ряд новых концептуальных подходов к изучению принципа симметрии. Главная идея таких подходов состоит в том, что именно законы симметрии являются отражением законов гармонии в природе. Выдающийся российский специалист в области кристаллографии А.В. Шубников в статье *Гармония в природе и искусстве* (Природа, 1927, №7-8, с. 609-622) определяет гармонию как порядок, сравнивая ее с тем порядком, который исследует наука, открывая и познавая законы природы: *«Закон, гармония, порядок лежат в основе не только научной работы, но и всякого художественного произведения».*

Другое направление исследования математической гармонии связано с пониманием гармонии как *пропорции.* По существу понятие «симметрии» тесно связано с понятием «пропорции», поскольку «симметрия» как раз и означает соразмерность частей какого-либо целого как в отношении между собой, так и в соотношении с целым.

Таким образом, в «Математике Гармонии» мы акцентируем основное внимание на *математической гармонии.* Ясно, что математическое понимание гармонии принимает, как правило, математический вид и может быть выражено в виде определенных числовых пропорций и определенных рекуррентных соотношений. **Исследование числовых пропорций и рекуррентных соотношений, выражающих количественно «гармонические отношения», объективно существующие в природе, и является предметом «Математики Гармонии» [4].**

6.2. *Новые результаты в «теории чисел Фибоначчи».*

Исследования французских математиков 19 в. Люка и Бине стали «стартовой площадкой» для российского математика **Николая Воробьева** и американского математика **Вернера Хоггатта**, которые первыми поняли роль «золотого сечения» и чисел Фибоначчи в развитии современной математики. Брошюра Воробьева «Числа Фибоначчи» [29], первое издание которой вышло в 1961 г., получила широчайшую известность в научном мире и приобщила огромное число образованных людей к этой теме. По инициативе Вернера Хоггатта в США была организована математическая Фибоначчи-Ассоциация и учрежден специальный математический журнал «The Fibonacci Quarterly”, который сыграл большую роль в развитии «теории чисел Фибоначчи».

Изначально «теория чисел Фибоначчи» сформировалась как математическая теория, направленная на изучение двух математических объектов: *золотого сечения*, возникшего в античной науке, и *чисел Фибоначчи*, введенных в 13-м веке. Числа Фибоначчи и золотое сечение широко проявляют себя в Природе. Они являются «естественными» объектами Природы и существуют в Природе независимо от нашего сознания и существования. Поэтому, **согласно Фурье, «теория чисел Фибоначчи» может быть отнесена к разряду фундаментальных теорий современной науки.** В течение более чем двухтысячелетнего изучения этих объектов было получено много интересных математических свойств и тождеств для этих объектов, наиболее известные из которых названы именами их авторов: *числа Люка*, *формула Кеплера*, *формула Кассини*, *формулы Бине* и др. Теория чисел Фибоначчи, золотой пропорций и их приложений описана в многочисленных англоязычных и русскоязычных книгах [29, 32-36]. Именно наличие этих книг и даже специализированного математического журнала “The Fibonacci Quarterly” являются весомыми доказательствами того факта, что эта теория состоялась и получила международное признание.

К разряду новых математических результатов в этой области относятся следующие:

6.1.1. *Q-матрица Фибоначчи.* Теория *Q*-матрицы Фибоначчи была разработана Вернером Хогаттом в его книге [32]. Под *Q*-матрицей Фибоначчи понимается следующая квадратная матрица:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Хоггатт доказал, что при возведении матрицы (17) в *n*-ю степень мы получаем следующую матрицу

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где F_{n-1}, F_n, F_{n+1} – числа Фибоначчи.

Если теперь вычислить детерминант матрицы (18), то мы получим следующее выражение

$$\det Q^n = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \tag{19}$$

которое представляет собой ни что иное, как знаменитую *формулу Кассини* (15), связывающую три соседних числа Фибоначчи F_{n-1}, F_n, F_{n+1} ($n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$).

6.1.2. *Система Бергмана.* В математике существует одна «странная» традиция. Математикам свойственно недооценивать фундаментальные математические открытия своих современников. К сожалению, действительно эпохальные математические открытия вначале подвергаются резкой критике и даже осмеянию со стороны известных математиков (так случилось в 19 в. с геометрией Лобачевского) и только спустя примерно 50 лет, как правило, после смерти авторов математических открытий, новые математические теории признаются и занимают достойное место в математике. Драматические судьбы Лобачевского, Абеля и Галуа и других математиков слишком хорошо известны, чтобы их подробно здесь описывать.

В 1957 г. американский математик **Джордж Бергман** опубликовал статью *A number system with an irrational base* [45] в известном математическом журнале *Mathematics Magazine*. В этой статье автор предложил весьма необычное расширение понятия позиционной системы счисления. Он предложил использовать в качестве основания системы счисления золотую пропорцию $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Если теперь использовать последовательность чисел Φ^i $\{i=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ в качестве «весов разрядов» некоторой двоичной системы счисления, то мы получим «двоичную» (то есть использующую цифры 0 и 1) систему счисления, имеющую иррациональное основание Ф. Система счисления Бергмана может быть задана следующим математическим выражением:

$$A = \sum_i a_i \Phi^i \qquad (20)$$

где A – некоторое действительное число, a_i – двоичные цифры 0 или 1, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$, Φ^i – вес i-й цифры в системе счисления (95), Ф («золотая пропорция») — основание системы счисления.

К сожалению, статья Бергмана [45] не была замечена в тот период ни математиками, ни инженерами. Журналисты были удивлены только тем фактом, что Джордж Бергман написал свою статью в возрасте 12 лет, в связи с чем в журнале «TIMES» была даже опубликована статья о юном математическом даровании Америки. Но математики того времени, впрочем как и сам Бергман, не сумели оценить значение этого открытия для развития математической науки. Прошло 50 лет с момента публикации статьи Бергмана [45]. И в соответствии с «математической традицией» настала пора оценить роль «системы Бергмана» в развитии современной математики.

Важно подчеркнуть, что любое натуральное число может быть представлено в виде конечной суммы степеней «золотой пропорции» в виде «формулы Бергмана» (20). И если бы пифагорейцы знали «формулу Бергмана» для натуральных чисел, то, зная отношение пифагорейцев к натуральным числам и «золотому сечению», нет никаких сомнений в том, что их знаменитый тезис: «Все есть число», был бы заменен на новый тезис: «Все есть золотая пропорция»!

Стратегический просчет математиков 20-го века состоит в том, что **они просто не заметили математическое открытие юного американского математика Джорджа Бергмана, которое по праву может быть отнесено к разряду крупнейших математических открытий в области систем счисления (после открытия вавилонянами позиционного принципа представления чисел) и которое может дать начало новой теории чисел, основанной на «золотой пропорции».** «Формула Бергмана» (20) открывает новый путь в развитии аналитической теории чисел, как показано в статье [46], и является основой для «золотой» информационной технологии [47, 48].

6.1.3. ***Гиперболические функции Фибоначчи и Люка.*** Новым результатом в этой области являются так называемые *гиперболические функции Фибоначчи и Люка* [49-51] и новая геометрическая теория филлотаксиса, созданная украинским исследователем Олегом Боднаром [30]. Обсуждению роли этих открытий для развития современной науки посвящена статья [52].

Рассмотрим так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка,* введенные в [50, 51]:

Симметричный гиперболический синус Фибоначчи

$$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{21}$$

Симметричный гиперболический косинус Фибоначчи

$$cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{22}$$

Симметричный гиперболический синус Люка

$$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x} \tag{23}$$

Симметричный гиперболический косинус Люка

$$cLs(x) = \Phi^x + \Phi^{-x}, \tag{24}$$

где x – непрерывная переменная.

Числа Фибоначчи (11) и *числа Люка* (13) связаны с введенными выше симметричными гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка следующими соотношениями:

$$F_n = \begin{cases} sFs(n), n = 2k \\ cFs(n), n = 2k+1 \end{cases}; \quad L_n = \begin{cases} cLs(n), n = 2k \\ sFs(n), n = 2k+1 \end{cases}. \tag{25}$$

где $n = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$.

Смысл формул (25) состоит в том, что числа Фибоначчи и числа Люка совпадают с гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка, задаваемыми (21)-(24), при дискретных значениях непрерывной переменной x.

Симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка (21)-(24) являются расширением чисел Фибоначчи и Люка на «непрерывную» область. С одной стороны, эти функции обладают *рекуррентными свойствами,* подобными свойствам чисел Фибоначчи и Люка. С другой стороны, они подобны классическим гиперболическим функциям

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{26}$$

и, следовательно, обладают *гиперболическими свойствами.*

Приведем только два примера необычных математических свойств гиперболических функций Фибоначчи и Люка. Знаменитое тождество (15), называемое *формулой Кассини,* в теории гиперболических функций Фибоначчи выражается в виде двух «непрерывных» тождеств:

$$[sFs(x)]^2 - cFs(x+1)\, cFs(x-1) = -1;\ [cFs(x)]^2 - sFs(x+1)\, sFs(x-1) = 1, \qquad (27)$$

а широко известное тождество для классических гиперболических функций

$$\left[chx\right]^2 - \left[shx\right]^2 = 1 \qquad (28)$$

для гиперболических функций Фибоначчи и Люка выглядит следующим образом:

$$[cFs(x)]^2 - [sFs(x)]^2 = \frac{4}{5};\ [cLs(x)]^2 - [sLs(x)]^2 = 4. \qquad (29)$$

Блестящим подтверждением фундаментальной роли гиперболических функций Фибоначчи и Люка в исследовании природных явлений является новая геометрическая теория филлотаксиса, разработанная Олегом Боднаром [30].

6.3. *Теория p-чисел Фибоначчи.*

В процессе развития «классической теории чисел Фибоначчи» возникло много обобщений чисел Фибоначчи и золотой пропорции. Одним из наиболее известных являются *p-числа Фибоначчи*. Рассмотрим основы «теории p-чисел Фибоначчи» и их приложений в современной науке:

6.3.1. ***Рекуррентное соотношение для p-чисел Фибоначчи.*** Понятие *p-чисел Фибоначчи* было введено **Игорем Витенько** и **Алексеем Стаховым** в 1970 г. в статье [37]. В этой статье было получено ряд новых математических результатов. Главный из них – это открытие так называемых «фибоначчиевых» алгоритмов измерения (аналого-цифрового преобразования), основанных на специальных числовых последовательностях, задаваемых следующим рекуррентным соотношением:

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1);\ F_p(1) = F_p(2) = \ldots = F_p(p+1) = 1\ (p = 0,1,2,3,\ldots) \qquad (30)$$

На том основании, что при p=1 это рекуррентное соотношение задает *числа Фибоначчи* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., найденные числовые последовательности были названы *p-числами Фибоначчи*. Теория *p-чисел Фибоначчи и золотых* была развита в книге [38].

6.3.2. ***Золотые p-пропорции.*** Если взять отношение соседних p-чисел Фибоначчи $\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)}$ и устремить n в бесконечность, то мы придем к новому классу математических констант

$$\underbrace{\lim}_{n\to\infty} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = \Phi_p \qquad (31)$$

где Φ_p - положительный корень следующего алгебраического уравнения

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0. \qquad (32)$$

Числа Φ_p были названы в [38] *золотыми p-пропорциями* на том основании, что при p=1 константа Φ_p совпадает с классической «золотой пропорцией».

В книге [38] показано, что *p-числа Фибоначчи* тесно связаны с *треугольником Паскаля* и *биномиальными коэффициентами* («диагональные суммы» треугольника Паскаля), то есть, *p-числа Фибоначчи* выражают некоторые новые, неизвестные ранее свойства треугольника Паскаля. В книге [38] выведена следующая формула, позволяющая выразить *p-числа Фибоначчи* через биномиальные коэффициенты:

$$F_p\left(n+1\right)=C_n^0+C_{n-p}^1+C_{n-2p}^2+C_{n-3p}^3+C_{n-4p}^4+\ldots \tag{33}$$

Заметим, что для случая p=0 формула (33) сводится к широко известному свойству треугольника Паскаля:

$$2^n=C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n. \tag{34}$$

6.3.3. Q_p ***-матрицы Фибоначчи.*** В работе [53] **Алексей Стахов** ввел понятие Q_p-матрицы Фибоначчи, которая является обобщением Q-матрицы Фибоначчи (18), исследованной Вернером Хоггаттом:

$$Q_p=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Доказано [53], что при возведении Q_p-матрицы (35) в n-ю степень мы получаем следующую матрицу:

$$Q_p^n=\begin{pmatrix} F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+2) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+2) & F_p(n-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-1) & F_p(n-2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p-1) \\ F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p+1) & F_p(n-p) \end{pmatrix}, \tag{36}$$

элементами которой являются p-числа Фибоначчи.

Доказано [53], что для заданных $p=0,1,2,3,\ldots$ и $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ детерминант матрицы (35) задается выражением:

$$\det Q_p^n=\left(-1\right)^{pn}. \tag{37}$$

Если теперь вычислить детерминант матрицы (36) согласно правилам вычисления детерминантов, то, используя (37), мы получим обобщенный вариант *формулы Кассини* (15).

Например, для случая p=2 формулы (36) и (11) следующий вид, соответственно:

$$Q_2^n=\begin{pmatrix} F_2(n+1) & F_2(n) & F_2(n-1) \\ F_2(n-1) & F_2(n-2) & F_2(n-3) \\ F_2(n) & F_2(n-1) & F_2(n-2) \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$\det Q_2^n=1. \tag{39}$$

Свое дальнейшее развитие теория p-чисел получила в статьях [54, 55], опубликованных в известном физическом журнале “Chaos, Solitons and Fractals”, основанном Нобелевским Лауреатом Ильей Пригожиным. В этих статьях выведены *обобщенные формулы Бине для p-чисел Фибоначчи* и *p-чисел Люка,* которые задаются следующим рекуррентным соотношением:

$$L_p(n) = L_p(n-1) + L_p(n-p-1);\ L_p(0) = p+1,\ L_p(1) = L_p(2) = ... = L_p(p) = 1 \quad (40)$$

6.4. ***Приложения p-чисел Фибоначчи и золотой p-пропорции.***

В рамках теории p-чисел Фибоначчи получено ряд прикладных математических результатов, имеющих важное значение для информатики:

6.4.1. ***Алгоритмическая теория измерения*** [37-41] – новое направление в математической теории измерения и теоретической метрологии. При этом наиболее важным прикладным результатом этой теории явились ***«фибоначчиевые» алгоритмы аналого-цифрового преобразования*** **[37, 38],** которые затем стали основой для проектирования уникальных по своим техническим параметрам аналого-цифровых преобразователей, превышающих мировой уровень по точности и метрологической стабильности [56].

6.4.2. ***Коды Фибоначчи, арифметика Фибоначчи, компьютеры Фибоначчи.*** Важным прикладным результатом, вытекающим из алгоритмической теории измерения, явились *p-коды Фибоначчи,* которые стали основой для разработки новой компьютерной арифметики – *арифметики Фибоначчи* [57], которая, в свою очередь, стала основой для нового направления в развитии компьютерной техники – *компьютеров Фибоначчи* [38, 56].

6.4.3. ***Коды золотой пропорции*** – новый класс систем счисления с иррациональными основаниями, которые вместе с системой Бергмана могут стать основой новой информационной технологии – *«Золотой» Информационной Технологии* [47, 48].

6.4.4. ***Новая теория кодирования, основанная на матрицах Фибоначчи.*** В статье [58] изложены основы новой теории кодирования, основанной на Q- и Q_p-матрицах Фибоначчи (18) и (36). **По своей корректирующей способности новые коды превышают классические алгебраические коды в 1 000 000 и больше раз, что имеет важное прикладное значение для создания информационных систем повышенной надежности.**

6.4.5. ***Цифровая обработка сигналов.*** В работах [59, 60] разработаны. "быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов" (преобразования Фибоначчи-Мерсенна и Фибоначчи-Ферма и другие, подобные дискретным преобразованиям Фурье), основанные на p-числах Фибоначчи. Принципиальным требованиям в новых преобразованиях является представление информации и их обработка в p-кодах Фибоначчи (чем больше p, тем алгоритм эффективней). Как подчеркивается в [59, 60], для реализации таких преобразований требуются процессоры в p-кодах Фибоначчи с большим p.

6.4.6. ***Фибоначчиевые системы кодирования сложных математических объектов.*** В книге В.А. Лужецого [61] приведен один очень интересный результат. **Его суть состоит в том, что не только числа, но и более сложные математические объекты (комплексные числа, векторы, квартенионы и октавы, матрицы и даже функции) могут представляться в *p*-коде Фибоначчи со значениями *p*=1, 2, 3, 7.** При этом в книге показано, как над такими p-кодами выполнять арифметические операции. Эта идея выводит на совершенно новые типы процессоров для обработки сложных математических объектов. И здесь *p*-арифметика Фибоначчи для больших значений *p* играет главенствующую роль. Здесь *p* не выбирают, оно задается рекуррентной формулой для данного математического объекта. Например, комплексные числа являются элементами 2-мерного пространства, поэтому для их кодирования используются классические числа Фибоначчи; при этом в качестве «затравочных» чисел выбираются числа 1 и *i* (мнимая единица). Таким путем вычисляются веса «фибоначчиевых» разрядов для представления комплексных чисел. Рекуррентное соотношение для 2-чисел Фибоначчи (p=2) используются для представления 3-мерных векторов; при этом в качестве «затравочных» чисел используются числа: *i, j, k.* Для кодирования квартернионов используются 3-числа Фибоначчи, а для кодирования октав используются 7-числа Фибоначчи и т.д.

6.4.6. ***Закон структурной гармонии систем.*** Начиная с Пифагора, ученые связывали понятие гармонии с единственной золотой пропорцией. **"Закон структурной гармонии систем», сформулированной Сороко [5], утверждает, что гармоничное состояние системы, соответствующее классической золотой пропорции, не является единственным и что для одной и той же системы может существовать бесконечное количество "гармоничных" состояний, соответствующих обобщенным золотым *p*-пропорциям.** Существование таких состояний подтверждается многочисленными примерами из различных областей знаний [5].

Приведенные выше математические свойства *p-чисел Фибоначчи и золотой p-пропорции* и их приложения показывают, что «теория *p*-чисел Фибоначчи» имеет для современной науки не меньшее значение, чем классическая «теория чисел Фибоначчи».

6.5. ***Теория $\lambda-$чисел Фибоначчи и «металлических пропорций».***

Это направление развито в работах Шпинадель, Газале, Каппраффа, Татаренко и др. авторов. Наличие книг [42-44], посвященных развитию этого направления, является подтверждением большого интереса современной науки к этому направлению, но их значимость для развития современной науки будет определяться реальными приложениями

6.5.1. $\lambda-$***числа Фибоначчи.*** Зададимся положительным числом $\lambda>0$ и рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$F_\lambda(n+2)=\lambda F_\lambda(n+1)+F_\lambda(n); \qquad F_\lambda(0)=0, F_\lambda(1)=1. \tag{41}$$

Заметим, что для случая $\lambda=1$ рекуррентное соотношение (41) сводится к рекуррентному соотношению (11), задающему классические числа Фибоначчи. Основываясь на этой аналогии, числовые последовательности, генерируемые рекуррентным соотношением (41), будем называть λ-*числами Фибоначчи.* Поскольку каждое число $\lambda>0$ генерирует свою собственную последовательность типа (41), то это означает, что множество новых рекуррентных числовых последовательностей, задаваемых (41), теоретически бесконечно.

6.5.2. ***Металлические пропорции.*** Из рекуррентного соотношения (41) легко перейти к квадратному уравнению:

$$x^2 - \lambda x - 1 = 0. \tag{42}$$

Рассмотрим положительный корень уравнения (42)

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \tag{43}$$

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ формула (43) принимает вид выражения

$$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{44}$$

задающего классическую *золотую пропорцию*.

Формула (43) была введена в «современную теорию чисел Фибоначчи» независимо друг от друга многими учеными (Шпинадель, Газале, Каппрафф, Татренко), но первой это сделала аргентинский математик **Вера Шпинадель** [42], которая назвала математические константы, задаваемые выражением (43), *металлическими пропорциями*. Если в (43) мы примем $\lambda = 1, 2, 3, 4$, тогда мы получим следующие математические константы, имеющие согласно Шпинадель следующие названия:

$$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,(\text{золотая пропорция}, \lambda = 1); \quad \Phi_2 = 1+\sqrt{2}\,(\text{серебряная пропорция}, \lambda = 2);$$

$$\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}\,(\text{бронзовая пропорция}, \lambda = 3); \quad \Phi_4 = 2+\sqrt{5}\,(\text{медная пропорция}, \lambda = 4).$$

Остальные *металлические пропорции* ($\lambda \ge 5$) не имеют специальных названий:

$$\Phi_5 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}; \quad \Phi_6 = 3+2\sqrt{10}; \quad \Phi_7 = \frac{7+2\sqrt{14}}{2}; \quad \Phi_8 = 4+\sqrt{17}.$$

Используя алгебраическое уравнение (42), легко доказать [42] следующие замечательные свойства *металлических пропорций* (43):

$$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{\ldots}}}}\,; \qquad \Phi_\lambda = \lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \ldots}}} \tag{45}$$

Заметим, что эти соотношения являются обобщением аналогичных свойств для классической *золотой пропорции* ($\lambda = 1$), задаваемых выражениями (6) и (8).

6.5.3. ***Формулы Газале.*** Используя металлические пропорции (43), **Мидхат Газале** в книге [43] вывел следующую формулу, которая задает λ*-числа Фибоначчи* (41) в аналитическом виде:

$$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}, \tag{46}$$

где $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

В работе [63] выведена подобная аналитическая формула для λ*-чисел Люка*:

$$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}, \tag{47}$$

где n=0,±1,±2,±3,…

Формулы (46) и (47) названы в [63] *формулами Газале* в честь **Мидхата Газале,** который, как упоминалось, впервые вывел формулу (46) в книге [43]. Заметим, что для случая $\lambda=1$ *формулы Газале* (45) и (47) сводятся к *формулам Бине* (16). Как показано в [63], λ-числа Люка (47) могут быть также заданы с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$L_\lambda(n)=\lambda L_\lambda(n-1)+L_\lambda(n-2);L_\lambda(0)=2,L_\lambda(1)=\lambda\,. \qquad (48)$$

Заметим, что λ-числа Люка (48) для случая $\lambda=1$ сводятся к классическим числам Люка (13).

6.5.4. ***Гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка.*** Формулы Газале (46) и (47) являются исходными для введения нового класса гиперболических функций – *гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка* [63]. Рассмотрим эти функции:

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Фибоначчи

$$sF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right], \qquad (49)$$

$$cF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right]. \qquad (50)$$

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Люка

$$sL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}=\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \qquad (51)$$

$$cL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}=\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \qquad (52)$$

где x – непрерывная переменная и $\lambda>0$ - любое положительное число.

λ-числа Фибоначчи и Люка связаны с гиперболическими λ-функциями Фибоначчи и Люка следующими соотношениями:

$$F_\lambda(n) \;=\; \begin{cases} sF_\lambda(n), & n=2k \\ cF_\lambda(n), & n=2k+1 \end{cases}; \qquad L_\lambda(n) \;=\; \begin{cases} cL_\lambda(n), & n=2k \\ sL_\lambda(n), & n=2k+1 \end{cases}. \qquad (53)$$

Это означает, что для дискретных значений непрерывной переменной $x=n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$ λ-функции Фибоначчи и Люка сводятся к λ-числам Фибоначчи и Люка.

Легко установить, что функции (65)-(68) связаны друг с другом очень простыми соотношениями:

$$sF_\lambda(x) \;=\; \frac{sL_\lambda(x)}{\sqrt{4+\lambda^2}}; \qquad cF_\lambda(x) \;=\; \frac{cL_\lambda(x)}{\sqrt{4+\lambda^2}}. \qquad (54)$$

Заметим также, что для случая $\lambda = 1$ гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка (49)-(52) сводятся к *симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка* (21)-(24), введённым в [51].

Важно отметить, что **формулы (49)-(52) задают бесконечное множество различных гиперболических λ-функций, поскольку каждое число $\lambda > 0$ генерирует свой собственный вариант гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка типа (49)-(52). Количество новых гиперболических функций совпадает с количеством действительных чисел $\lambda > 0$. При этом все известные гиперболические функции являются частными случаями общего класса гиперболических функций, задаваемых (49)-(52).**

Сравнение гиперболических λ-функции Люка (67) и (68) с классическими гиперболическими функциями (26) приводит к выводу, что для случая

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} = e \tag{55}$$

гиперболические λ-функции Люка (51) и (52) совпадают с классическими гиперболическими функциями (26) с точностью до постоянного коэффициента 1/2 , то есть

$$sh(x) = \frac{sL_\lambda(x)}{2} \quad \text{и} \quad ch(x) = \frac{cL_\lambda(x)}{2}. \tag{56}$$

Используя (55), после простых преобразований мы можем вычислить значение λ_e, для которого выражение (71) является верным:

$$\lambda_e = e - \frac{1}{e} \approx 2.35040238...$$

6.6. *Четвертая Проблема Гильберта.*

В докладе «*Математические проблемы*», сделанном на II Международном Конгрессе математиков, происходившем в Париже с 6 по 12 августа 1900 года, **Давид Гильберт** (1862-1943) сформулировал свои знаменитые 23 математические проблемы, которые в значительной степени определили развитие математики 20-го века. Этот доклад, охватывающий проблемы математики в целом, был несколько раз опубликован в подлиннике и в переводах и является уникальным явлением в истории математики и в математической литературе. В математической литературе *4-я проблема Гильберта* иногда считается сформулированной в весьма расплывчатой форме, что затрудняет ее окончательное решение. Несмотря на критическое отношение математиков к *4-й проблеме Гильберта*, необходимо подчеркнуть ее чрезвычайную важность для развития математики, в частности, геометрии. Без всякого сомнения, интуиция **Гильберта** привела его к выводу, что *геометрии Лобачевского, Римана* и другие неевклидовые геометрии не исчерпывают все варианты возможных неевклидовых геометрий. *4-я проблема Гильберта* нацеливает исследователей на поиск новых неевклидовых геометрий, которые являются ближайшими геометриями к обыкновенной евклидовой геометрии.

Именно в силу «специфичности» 4-й проблемы Гильберта, которая в течение целого столетия не поддавалась решению и поэтому названа математиками «*весьма расплывчатой для получения определенного ответа*», ее оригинальное решение, полученное **Алексеем Стаховым** и **Самуилом Арансоном** в [63], является весьма неожиданным. Она основывалась на «золотой» фибоначчиевой гониометрии [62]. Суть этого решения состоит в следующем. Как известно, классическая модель *плоскости Лобачевского* в *псевдосферических координатах* (u,v), $0 < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, имеющей гауссову кривизну $K = -1$ (интерпретация Бельтрами гиперболической геометрии на псевдосфере), имеет вид:

$$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2 \qquad (57)$$

где ds – элемент длины, $sh(u)$ - гиперболический синус. Как вытекает из (57), определяющую роль в *плоскости Лобачевского* играет *гиперболический синус*.

В работе [63] в связи с *4-ой проблемой Гильберта*, с использованием *«золотой» фибоначчиевой гониометрии* [62], предложено бесконечное множество *метрических форм плоскости Лобачевского* в зависимости от вещественного параметра $\lambda > 0$. Эти метрические формы задаются в координатах $(u,v), 0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty$, имеют *гауссову кривизну* $K = -1$ и представляются следующей общей формулой:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4}\left[sF_\lambda(u)\right]^2(dv)^2, \qquad (58)$$

где $\Phi_\lambda = \dfrac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$ - *металлическая пропорция* и $sF_\lambda(u)$ - гиперболический λ-синус Фибоначчи. Назовем формы (58) *метрическими* λ*-формами плоскости Лобачевского.*

Так как каждому действительному $\lambda > 0$ соответствует свое выражение для *метрической λ-формы плоскости Лобачевского*, задаваемое (58), то это означает, что существует бесконечное число геометрий Лобачевского, соответствующих (58). В этом и состоит ответ на вопрос, сформулированный Гильбертом в его 4-й Проблеме: «*возможно ли ещё с других плодотворных точек зрения построить геометрии, которые с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии*». Да, возможно. Число таких геометрий, задаваемых формулой (58), бесконечно. Каждую из них можно считать такой же близкой к обыкновенной евклидовой геометрии, как и классическая геометрия Лобачевского. В таблице 3 сведены выражения для всех рассмотренных выше частных случаев метрических λ-форм плоскости Лобачевского.

Таблица 3. Метрические $\lambda-$формы Лобачевского

Название	λ	Φ_λ	Аналитическое выражение
Метрическая $\lambda-$форма Лобачевского	$\lambda>0$	$\Phi_\lambda=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2+\frac{4+\lambda^2}{4}\left[sF_\lambda(u)\right]^2(dv)^2$
"Золотая" форма	$\lambda=1$	$\Phi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx1.61803$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_1)(du)^2+\frac{5}{4}\left[sFs(u)\right]^2(dv)^2$
"Серебряная" форма	$\lambda=2$	$\Phi_2=1+\sqrt{2}\approx2.1421$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_2)(du)^2+2\left[sF_2(u)\right]^2(dv)^2$
"Бронзовая" форма	$\lambda=3$	$\Phi_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\approx3.30278$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_3)(du)^2+\frac{13}{4}\left[sF_3(u)\right]^2(dv)^2$
"Медная" форма	$\lambda=4$	$\Phi_4=2+\sqrt{5}\approx4.23607$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_4)(du)^2+5\left[sF_4(u)\right]^2(dv)^2$
Классическая форма	$\lambda_e\approx2.350402$	$\Phi_{\lambda_e}=e\approx2.7182$	$(ds)^2=(du)^2+sh^2(u)(dv)^2$

Рассмотренный выше подход приводит к постановке следующей проблемы, важной для всего теоретического естествознания. Если в Природе проявляет себя «золотая» гиперболическая геометрия («геометрия Боднара» или «геометрия филлотаксиса), то возникает вопрос: существуют ли в Природе какие-либо другие физические, химические, ботанические или биологические явления, гиперболическая геометрия которых соответствует новым $\lambda-$геометриям Лобачевского, например, «серебряной», «бронзовой», «медной» и другим геометриям?

7. Заключение.

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:

1. «Идея Гармонии» является «вечной» проблемой науки. Она объединяет все сферы человеческой культуры, включая науку и искусство. В своих истоках она восходит к Первому Герметическому Принципу – *Принципу Разума,* согласно которому Природа устроена рационально в соответствии с природными законами гармонии. «Проблема гармонии» возникла одновременно с возникновением герметической философии. Создателем математических основ египетской «теории гармонии» является выдающийся древнеегипетский зодчий Хеси-Ра, жрец Бога Ра (Бога Солнца) *«разработавший эстетические … принципы в системе канона, отражающего гармонические основы мироздания»*. С египетской науки «проблема гармонии» перекочевала в древнегреческую науку, в которая она заняла центральное место в философии Пифагора, Платона и в математике Евклида.
2. «Идея Гармонии», которая связывалась в древнегреческой науке с «Платоновыми телами», занимает центральное место в «Началах» Евклида. Согласно «гипотезе Прокла» главная цель, которую ставил Евклид при написании своих «Начал», было построение геометрической теории «Платоновых тел». Для геометрического построения «додекаэдра» Евклид ввел в своих «Началах» задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении (Теорема II.11), известною в современной науке как «золотое

сечение». Таким образом, «Начала» Евклида являются первой попыткой создать «Математическую теорию гармонии», основанную на «Платоновых Телах» и «золотом сечении», то есть, **Евклид в своих «Началах» четко сформулировал перед математикой главную цель математики - раскрытие математическом языком «Гармонии Мироздания».** В 17 в. идеи Евклида были использованы Иоганном Кеплером для создания «Космического кубка». Так Кеплер назвал геометрическую модель Солнечной системы, основанную на «Платоновых телах». В 19 веке выдающийся математик Феликс Клейн предпринял попытку объединить важнейшие разделы математики на основе «икосаэдра» - одного из важнейших «тел Платона».

3. Современные научные открытия, основанные на правильных многогранниках (квазикристаллы, фуллерены, теория элементарных частиц и др.), являются блестящим подтверждением гениальной интуиции Евклида, Кеплера и Клейна, которые в своих сочинениях предсказали выдающуюся роль «Платоновых тел» в развитии науки.
4. Современная «Математика Гармонии», восходящая к «Началам» Евклида, является отражением в математике главной тенденции современной науки – возрождение интереса к «проблеме гармонии», «Платоновым телам» и «золотому сечению». Эта новая математика ставит перед собой ту же цель, которую Евклид поставил перед математикой более двух тысячелетий назад – раскрытие математическим языком «Гармонии Мироздания» и создание новых математических моделей «гармонических явлений и процессов» Природы. В настоящее время в рамках «Математики Гармонии» получено ряд новых математических результатов, которые представляют интерес для современной математики, информатики и теоретического естествознания. Главными из них являются следующие:
5. **Теория гиперболических функций Фибоначчи и Люка.** Эта теория обобщает понятия классических чисел Фибоначчи и Люка и расширяет «теорию чисел Фибоначчи» на «непрерывную» область. Числа Фибоначчи и Люка являются частными («дискретными») случаями гиперболических функций Фибоначчи и Люка и совпадают с последними при дискретных значениях непрерывной переменной $x\ (x = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...)$. При этом любое тождество для гиперболических функций Фибоначчи и Люка автоматически превращается в соответствующее тождество для чисел Фибоначчи и Люка, если воспользоваться «формулой связи». И наоборот, любому тождеству для чисел Фибоначчи и Люка однозначно соответствуют некоторое тождество для гиперболических функций Фибоначчи и Люка. То есть, мы можем сделать заключение, что **«классическая теория чисел Фибоначчи», описанная в книгах [6, 30-32], как бы “вырождается» и переходит на новую ступень развития, которой и является *теория гиперболических функций Фибоначчи и Люка.***
6. Следующим важным следствием введения нового класса гиперболических функций является осознание того, что классические гиперболические функции, которые широко используются в математике и теоретической

физике, начиная с Лобачевского, не являются единственной математической моделью «гиперболических миров» природы. Параллельно с гиперболической геометрией, основанной на классических гиперболических функциях («гиперболическая геометрия Лобачевского», «четырехмерный мир Минковского» и др.), в Природе наблюдается и другая гиперболическая геометрия, основанная на гиперболических функциях Фибоначчи и Люка. «Золотой» гиперболический мир, основанный на такой геометрии («геометрии Боднара»), существует объективно и независимо от нашего сознания. Этот мир с удивительной настойчивостью проявляет себя, прежде всего, в живой природе, в частности, он обнаруживают себя на поверхности сосновых шишек, ананасов, кактусов, головок подсолнечника, корзинок цветов и т.д. в виде филлотаксисных спиралей, основанных на числах Фибоначчи, числах Люка и других числовых рекуррентных рядах подобного типа («закон филлотаксиса»). **Подчеркнем еще раз, что гиперболические функции Фибоначчи и Люка, лежащие в основе явления филлотаксиса, не являются «выдумкой» математиков-фибоначчистов, а отражают важнейшую математическую закономерность, лежащую в основе геометрии живой природы.**

7. Наконец, последний вывод касается оценки роли гиперболических функций Фибоначчи и Люка в развитии современной науки в целом. В своем классическом труде «Аналитическая теория тепла» (1822) великий французский математик и физик **Жан Батист Жозеф Фурье** (1768-1830) следующим образом оценивает роль математического метода в решении физических проблем: *«Глубокое изучение природы – наиболее плодотворный источник математических открытий. Такое изучение не только обладает преимуществами хорошо намеченной цели, но и исключает возможность неясной постановки задач и бесполезных выкладок. Оно является надежным средством построения самого анализа и позволяет открывать наиболее значительные идеи, которым суждено навсегда сохраниться в науке.* ***Фундаментальны те идеи, которые отражают явления природы»*** (*выделено – А.С.*)**.** Олег Боднар после глубокого изучения явления филлотаксиса показал, что гиперболические функции Фибоначчи и Люка являются **естественными функциями Природы,** отражающими важнейший закон природы – закон филлотаксиса. Из этих рассуждений мы можем сделать вывод, что, следуя Фурье, **гиперболические функции Фибоначчи и Люка**, могут быть отнесены к разряду **фундаментальных открытий** современного теоретического естествознания. И поэтому им суждено навсегда сохраниться в науке.
8. **Установление связи чисел Фибоначчи с треугольником Паскаля** следует считать одним из важных математических результатов современной теории чисел Фибоначчи. Исследование «оптимальных алгоритмов измерения» и «диагональных сумм» треугольника Паскаля привело к обобщению чисел Фибоначчи (p-числа Фибоначчи) и «золотой пропорции» (золотая p-пропорция).
9. **Открытие «металлических пропорций»,** которые являются еще одним обобщением «золотой пропорции», стало важным этапом в развитии

«Математики Гармонии». Это открытие привело к созданию общей теории гиперболических функций («золотой» фибоначчиевой гониометрии), что стало основой для решения 4-й Проблемы Гильберта.

10. **«Математика Гармонии» является источником новых идей в компьютерной науке.** «Компьютеры Фибоначчи» и «золотые» компьютеры, основанные на кодах Фибоначчи и кодах золотой пропорции, могут стать альтернативой классическим «неймановским компьютерам» и привести к созданию «Золотой» Информационной Технологии – основе прорывных информационных технологий будущего.
11. **У Математики Гармонии есть шанс стать связующим звеном между математикой и философией герметизма. Возможно, что со временем возникнут условия, при которых положения Математики Гармонии смогут применяться для обоснования необходимости следования человека путем эволюции и Гармонии с окружающим миром.**

Литература

1. Дарио Салас Соммэр. Мораль XXI века. М.: Издательский дом «София», 2004 г.
2. Дарио Салас Соммэр. Развитие внутреннего мира. Москва: Научная книга, 2008 г.
3. Дарио Салас Соммэр, От Золотой Математики к Золотому Поведению // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15105, 20.02.2009
4. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009
5. Сороко Э.М. «Структурная гармония систем». Минск: Наука и техника, 1984.
6. Шестаков В.П. Гармония как эстетическая категория. М.: Наука, 1973
7. Дарио Салас Соммэр, А.П. Стахов, «Золотая» Герметическая Философия // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15144, 09.03.2009
8. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. Москва: Молодая гвардия, 1990.
9. Шмелев И.П. Феномен Древнего Египта. Минск: Лотаць, 1993.
10. Шевелев И. Геометрическая гармонрия. Кострома, 1963
11. Шевелев И. Логика архитектурной гармонии. Москва: Стройиздат, 1973
12. Шевелев И. Принцип пропорции. Москва: Стройиздат, 1986.
13. Шевелев И., Марутаев М., Шмелев И. Золотое сечение. М.: 1990
14. Шевелев И. Метаязык живой природы. М.: Воскресенье, 2000
15. Kappraff Jay. *Beyond Measure. A Guided Tour through Nature, Myth, and Number.* Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2002.
16. Olsen Scott. The Golden Section. Nature’s Greatest Secret. New York: Walker Publishing Company, 2006.
17. Стахов А.П. Золотое сечение, священная геометрия и математика гармонии. В сборнике «Метафизика. Век XXI. М.: БИНОМ, 2006. – с. 174-215.
18. Стахов А.П., Слученкова А.А., Щербаков И.Г. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. СПБ: Питер, 2006.
19. М. Венниджер. Модели многогранников. Москва: Мир, 1974.

20. Charles H. Kann. Pythagoras and Pythagoreans. A Brief History. Hackett Publishing Co, Inc 2001
21. Leonid Zhmud. The origin of the History of Science in Classical Antiquity. Published by Walter de Gruyter, 2006
22. Craig Smorinsky. History of Mathematics. A Supplement. Springer, 2008
23. Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнен6ий пятой степени. Пер. с нем. М.: Наука, 1989.
24. Гратиа Д. Квазикристаллы. Успехи физических наук, 1988, том 156, вып. 2.
25. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены. Успехи физических наук, 1993, том 163, №2.
26. Верховский Л.И. Платоновы тела и элементарные частицы. Химия и жизнь, 2006, №6.
27. Владимиров Ю.С. «Кварковый икосаэдр, заряды и угол Вайнберга». Труды международной конференции «Проблемы гармонии, симметрии и золотого сечения в природе, науке и искусстве». Винница, 22-25 октября 2003 г.
28. Хинчин А.Я. Цепные дроби. Изд.4, 2004. 112 с. (первое издание – 1935 г.)
29. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978.
30. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994.
31. Stakhov, A.P. *The Golden Section and Modern Harmony Mathematics*. In the book “Applications of Fibonacci Numbers,” Vol. 7 (1998), 393-399.
32. Hoggat, V. E. *Fibonacci and Lucas Numbers*, Houghton-Mifflin, Palo Alto, California, 1969.
33. Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. - Ellis Horwood limited, 1989.
34. Dunlap R.A. The Golden Ratio and Fibonacci Numbers. World Scientific, 1997.
35. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. М.: Молодая гвардия, 1990.
36. Коробко В.И. Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1998.
37. Витенько И.В., Стахов А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.
38. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва: Советское Радио, 1977 г.
39. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. Москва: Знание, 1979 г.
40. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва: Радио и связь, 1984 г.
41. Stakhov, A.P. The Golden Section in the Measurement Theory. Computers & Mathematics with Applications, 17(4-6) (1989), 613-638.
42. Vera W. de Spinadel. *From the Golden Mean to Chaos*. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
43. Gazale Midhat J. *Gnomon. From Pharaohs to Fractals*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (русский перевод, 2002 г.)
44. Kappraff Jay. *Beyond Measure. A Guided Tour through Nature, Myth, and Number.* Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2002.
45. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.

46. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.
47. А.П. Стахов, Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология. Часть 1. Математика Гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14876, 16.09.2008
48. А.П. Стахов, Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология. Часть 2. «Золотая» Информационная Технология // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14878, 19.09.2008
49. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993 г.
50. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.
51. Stakhov A. Rozin B. The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, Volume 8, No. 3, 2006 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)
52. А.П. Стахов, Роль гиперболических функций Фибоначчи и Люка в развитии современной науки и «современной теории чисел Фибоначчи»(к обоснованию «Математики Гармонии») // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15334, 10.06.2009
53. Stakhov AP. A generalization of the Fibonacci *Q*-matrix. Доклады Академии наук Украины, 1999, №9, с. 46-49.
54. Stakhov, A., Rozin, B. *Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers*. Chaos, Solitons & Fractals, 27(5) (2006), 1162-1177.
55. Stakhov, A., Rozin, B. The continuous functions for the Fibonacci and Lucas p-numbers. Chaos, Solitons & Fractals, 28(4) (2006), 1014-1025.
56. Помехоустойчивые коды: Компьютер Фибоначчи, Москва, Знание, серия «Радиоэлектроника и связь», вып.6, 1989 г.
57. Стахов А.П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн. Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.
58. Stakhov A. Fibonacci matrices, a generalization of the “Cassini formula”, and a new coding theory. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 30, Issue 1, 56-66.
59. Chernov, V.M., Pershina, M.V. Fivonacci-Mersenne and Fibonacci-Fermat discrete transforms. Boletin de Informatica. Mozambique: Publishing House of the Eduardo Mondlane University, Special issue “The Golden Section: Theory and Applications”, No 9/10 (1999).
60. Stankovic, R.S., Stankovic, M., Astola, J.T., Egizarian, K. Fibonacci Decision Diagram. Tampere International Center for Signal Processing (2000).
61. В.А. Лужецький. Висконадійні математичні процесори Фібоначчі. Винница, Универсум, 2000.
62. Стахов А.П., Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006

63. Стахов А.П., Арансон С.Х. Золотая фибоначчиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14816, 04.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm