С.Л. Василенко

ОБЩЕЕ И ЧАСТНОЕ В СИСТЕМАТИКЕ ЗОЛОТОЙ ПРОПОРЦИИ. ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Вместо вступления. Продолжая начатую тему [1], когда уже нет необходимости представлять вводную часть, позволим себе (за все время личного пребывания на страницах АТ) вместо преамбулы небольшое отступление.

С «Академией Тринитаризма» я встретился благодаря триалектике и работам П.Я. Сергиенко, Р.Г. Баранцева и др., когда решил воплотить старые задумки на тему: «И да, и нет», – как третьего состояния, которое также сродни «Ни да, ни нет».

Здесь и нечеткие множества, и пограничные состояния, учение о троице и т.д.

Начал собирать материалы (с уклоном в экологию и знаний о воде), наткнулся на триалектику и стал ее штудировать. Позже на сайте мое внимание привлек «Институт ЗС», вспомнил юность, когда еще в школе самостоятельно изучал пирамиды, бином Ньютона, метод индукции, – так и переключился на золотое сечение (ЗС).

С большим удовольствием перечитал многие работы.

Особенно поразило то воодушевление, с каким ученые, инженеры и специалисты самых разных направлений активно вели поиски и с упоением обсуждали, на первый взгляд, незамысловатую пропорцию – едва различимую на общем фоне человеческих знаний.

Нашлись люди, которые до сих пор в г. Харькове тепло отзываются и помнят Алексея Петровича Стахова. Это придало мне дополнительную энергию, чувство сопереживания и сопричастности к идеям ЗС, которые благодаря его неукротимой энергии и энтузиазму витали в нашем городе в 70-е годы.

Теперь ближе к основной теме, и несколько слов об отклике проф. А.П. Стахова [2], где уже своим названием статьи он фактически отмежевался от сути дискуссии, еще раз подчеркнув и обозначив значимость «обобщения (?) … Золотого Сечения».

Как опытный капитан, Алексей Петрович, весьма тактично перевел Василенко на запасное «поле Фибоначчи», на котором по его же словам все равно делать нечего. Провел обстоятельный ликбез о кроликах, которые (перефразируя известную в Украине шутливую интермедию) – «не только ценный мех, но и 2–3 кг "легкоусвояемых" … золотых (?) p-сечений», и мягко переключил акценты на второстепенные вопросы.

Это не сарказм, поскольку p-сечения, если у них убрать невразумительную "позолоту" и рассматривать как некоторый подкласс или частный случай алгебраических уравнений, в самом деле, просты для понимания, а к их свойствам мы еще будем не раз возвращаться. Что касается непривычной единицы измерения золота, то этот вопрос – к авторам миниатюры.

Поэтому, принимая все сказанное в [2] с должным пониманием и признательностью, и не тратя особых усилий на поиск дополнительных аргументов, отметим только две детали:

1. Возможно, не все обратили внимания, поэтому позволим себе повториться, почему особо выделялась именно харьковская работа Витенько–Стахова (1970).

Да потому, что она действительно была пионерной. А уже через два года известный математик В. Хогатт [3] на основе модифицированной пирамиды Паскаля обобщил широкий класс триалектической (трехзвенной) формы числовых рядов, куда вошли не только последовательности Люка, Трибоначи или p-числа (сечения) Стахова, но и уравнения Газаля металлические пропорции Шпинадель, гармоники Татаренко, бесконечно-тиражируемые последовательности Косинова и еще многие другие.

Названные авторы, несомненно, расширили знания в общем развитии наших представлений о пропорции и математике гармонии, предлагают полезные формулы, приводят интересные философские "размышлизмы", но, увы, ни числовые ряды (после В. Хогатта), а тем более, "золотое" сечение (как константу) или математическую пропорцию (как соотношение чисел) они не обобщают.

2. Никто не предлагает переиначивать обобщенные числа – на "золотые" числа Фибоначчи, но образное выражение, взятое в кавычки «золотые ряды», только подчеркивает наличие в них асимптот в виде золотой пропорции, чего не скажешь о многих других рядах.

Переименовывать тоже ничего не надо. Желательно просто убрать из научной лексики некорректную идиому «обобщение золотой пропорции», а также само слово "золотое" там, где оно не несет смысловой нагрузки в контексте увязки с золотой пропорцией. Вот и все.

Хотя, судя по последним публикациям [4] профессор А.П. Стахов в очередной раз повторяет известные и им же описанные в десятках работ (25-летней давности) «коды (?) золотой пропорции» без дополнительных признаков новизны.

И если с представлением натуральных чисел в системе счисления Бергмана еще понятно (пусть даже в записи через те же двоичные числа), что же дополнительное и полезное привносят p-числа (по сравнению с Бергманом), по-прежнему остается не ясным.

В частности, небезынтересно увидеть реальное представление в данных системах счисления (например, для $p = 4$) широко распространенных иррациональных и трансцендентных чисел π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sin\alpha$ и т.п., а также конкретные преимущества (раз-два-три) и элементную базу такого выражения в составе «конкретного компьютера будущего», «современной теории чисел Фибоначчи» и «новых информационных технологий», возможно в криптографии.

Кролики как объект перехода от частного к общему. О кроликах, в работе [1] нет ни одного слова, но если дискуссия плавно переходит из плоскости обоснованности научной терминологии и обобщения понятий в русло фермерского хозяйства 13-го века, то почему бы и не вспомнить о них.

Действительно, как-то уже подзабывается или не предается особого значению тому, что в своем исторически развитии числа Фибоначчи произошли из задачи о симпатичных кроликах. А если и вспоминают, то с некоторым снисходительным оттенком иронии или поучительным школьным уроком.

На страницах АТ много интересных публикаций об истории ЗС.

Чаще всего они носят описательно-познавательный характер, отвечая на вопросы: кто, когда и что сделал? При этом не часто встретишь исследования на тему: как и почему?

Хотя можно попытаться проникнуть в глубину процесса развития знаний и проанализировать непростые внутренние механизмы и логику "процессов сборки", результаты которых сегодня многим кажутся тривиальными, но в свое время достигались мучительными поисками и усилиями человеческой мысли.

Отдавая должное нашим предкам, попробуем себе все же представить, как та же задача о дивных кроликах и безликих числах Фибоначчи могла бы решаться современным исследователем, начиная с исходных позиций.

Представляется, что молодым ученым, будет небезынтересно.

Это важно и потому, что «хотя понятие тождества такое простое, оно не редко вызывает путаницу … Тождество, очевидно, располагает к тому, чтобы люди, которые не перепутали бы знак и предмет в других контекстах, путали их в этом контексте. Среди таких людей – большинство математиков, предпочитающих смотреть на уравнения как на установления отношений между числами, которые каким-то образом равны, но различны» [5, с. 89–90].

Итак, рассмотрим простой пример известной взаимосвязи чисел Фибоначчи с "золотой" пропорцией, который позволяет проследить скрытую «физику перехода».

Для математиков и не только для них эти числа уже давно стали самостоятельным объектом исследования. И они смотрят на них как на абстрактные структуры (числовые последовательности, ряды), порожденные рекурсией (индекс t – порядковые номера ряда):

$$F_{t+1} = F_t + F_{t-1}. \qquad (1)$$

Математику все равно, какие числа он складывает, и ему безразлично, что за ними стоит. Физик или биолог, все время удерживает в подсознании конкретную задачу, и в равенстве для него фигурируют не просто числа, а те же кролики, люди, килограммы, планеты и т.д.

То есть уравнение связи (1) содержит или подразумевает в себе соотнесение однотипных или соразмерных предметов (вещей) с определенными единицами измерения, которые характеризуют вполне осязаемые объекты, выбранные для исследования.

Можно несколько смягчить (ослабить) это утверждение с заменой на менее категоричное условие: формализованные последовательности чисел *могут иметь единицы измерения*.

Единица физической величины – это тоже физическая величина (с фиксированным размером), которой условно присвоено числовое значение 1 для количественного выражения однородных объектов. Различают основные, производные, кратные, дольные, когерентные, системные и внесистемные единицы измерений [http://www.glossary.ru].

Когда хотят освободиться от единиц измерения, то обычно переходят к относительным величинам, которые уже становятся просто числовыми значениями (символами), после чего математик, биолог или фермер говорят уже на сопредельном языке. Хотя понятно, что физическая величина, которая безразмерна в одной системе физических величин, может быть размерной в другой системе.

Поступим и мы также, разделив обе части равенства (1), допустим на $F_t \neq 0$:

$$\frac{F_{t+1}}{F_t} = 1 + \left(\frac{F_t}{F_{t-1}}\right)^{-1}. \qquad (2)$$

В таком виде исходная задача (1) уже полностью абстрагирована и сводится к решению уравнения.

Решить данное уравнение – значит найти все последовательности, удовлетворяющие исходному соотношению.

И если из (1) сразу не видно, как его разрешать аналитически, то (2) дает нам сразу подсказку: дробные отношения – есть не что иное, как знаменатель q некоторой геометрической прогрессии, откуда следует $q = 1 + q^{-1}$ или $q^2 - q - 1 = 0$.

Таким образом, перейдя от физически измеряемых объектов к безразмерным величинам, мы не только окончательно перешли на абстрактный язык математики, но и легко вышли на базовое решение в виде квадратного уравнения, которое далее приводит нас к "золотой" пропорции, аналитической формуле Бине [6, с. 25] и т.д.

Напрашиваются промежуточные выводы:

1) Алгебраическое уравнение второй степени и золотая пропорция являются ключом для аналитического (формульного, не рекурсивного) решения задачи построения числового ряда (1), что дополнительно проявляется при разложении числа Фидия в цепную дробь.

2) Параллельно устанавливается еще одно важное (на сегодня уже известное) свойство: помимо аддитивных признаков, рекуррентно-аддитивная форма (1) содержит в себе внутренние мультипликативные свойства через геометрическую прогрессию.

Особо подчеркнем, что последние проявляются в явном виде только через относительные (освобожденные от единиц измерения) параметры!

Более того, относительные единицы – как раз и есть переходной мостик, между алгебраическим уравнением и последовательностями, между ЗС и числами Фибоначчи.

3) Равенство (1) предполагает наличие начальных условий, соответствующее квадратное уравнение таковых не требует, тем самым, являясь общей формой по отношению к возвратным последовательностям.

То есть квадратное уравнение в структурированном виде охватывает все числовые последовательности типа (1) независимо от затравочных чисел (F_0, F_1).

Вот такие получаются кролики…

О полезности алхимии в теории пропорции. Термин «алхимии» здесь употребляется исключительно в позитивном смысле, когда в процессе безуспешных поисков получения золота из известных элементов ученые параллельно открыли ряд новых химических элементов и описали многие их свойства. Поэтому разные пути расширения знаний и выявления новых качеств любой пропорции неизменно полезны.

В связи с этим кратко хотелось бы остановиться на работах Г.Я. Мартыненко, которые читаются всегда с большим интересом.

Сначала позволим себе высказать одно, на наш взгляд, критическое замечание, лежащее в русле основной темы.

Так, уравнения типа $x^{2k} - x^k - 1 = 0$, которые простой заменой переменной $y = x^k$ приводятся к квадратному уравнению ЗС и соответствующим решениям $x = \sqrt[k]{\Phi}$, им предлагается назвать «обобщением Г. Мартыненко» [7]. Это нормально, почему бы и нет, но лишний раз выкристаллизовывает, насколько въедливы метастазы лженаучного «обобщения ЗС», о чем говорилось в статье [1].

Объективности ради, следует сказать, что его другая работа [8] подсказала идею проверить некоторые особенности рассматриваемых им рядов в общем виде и попытаться обобщить результат на любую степень n исследуемых классов характеристических многочленов.

Оказалось, что для алгебраического уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ сумма членов соответствующей возвратно-аддитивной последовательности $x_{3+t} = x_{1+t} + x_t$ равна

$$\sum_{i=0}^{t} x_i = x_{t+5} - x_1 - x_2 .$$

«Коварная» пятерка, на которую сетует автор, как раз и появляется, из-за выбора им начальных условий $x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$. Какие-либо дополнительные суммирующие закономерности для расширительного уравнения $x^n - x - 1 = 0$, $n > 3$ скорее всего, отсутствуют.

По характеристическому уравнению $x^n - x^{n-1} - 1 = 0$ методом индукции удалось найти общую формулу для суммирования эквивалентного аддитивного ряда $x_{n+t} = x_{n-1+t} - x_t$, $t = 0, 1, 2, ...$

$$\sum_{i=0}^{t} x_i = x_{n+t} - x_{n-1} .$$

«Магическая тройка» [8] вовсе не магическая, а определяется все тем же выбранным начальным условием $x_2 = 3$ (с начальной нумерацией ряда $t = 0$), изменение которого приводит к вполне объяснимой «магии других чисел».

В целом же наблюдается довольно неожиданный результат, что на накопительную сумму влияет только одно начальное условие x_{n-1}, и она не зависит от других "затравочных" чисел $(x_0, x_1, ..., x_{n-2})$, как и в простой модели для чисел Фибоначчи, в чем просматриваются некоторые аналогии с цепями Маркова.

В математике, и в частности линейной алгебре, эти уравнения известны давно, но никто и никогда их не связывает с золотым сечением, хотя в квадратичном случае $n = 2$ они могут приводить к числу Ф.

Сами алгебраические уравнения с конкретным решением допустимо рассматривать частным случаем более широкого понятия "пропорции", которая адекватно справедлива для и других числовых соотношений: мультипликативных, дифференциальных, интегральных и др. (рис. 1).

Если некоторый подкласс алгебраических уравнений независимо от их порядка всегда содержит корень в виде числа Ф, то к таким уравнениям (характеристическим многочленам) вполне приемлема классификация «обобщенного уравнения ЗС». Оно наследует все свойства константы гармонической пропорции, а новая целостность обретает и дает новые знания в части аддитивной многомерности соответствующих линейных разностных уравнений с произвольным количеством начальных условий.

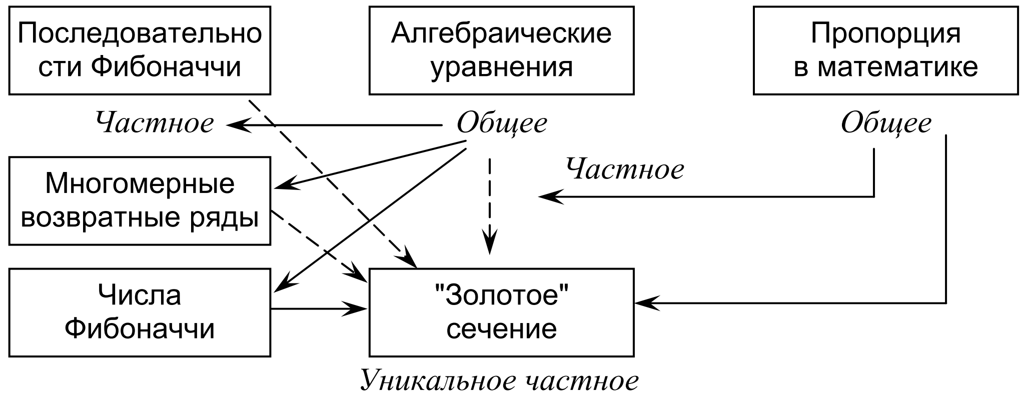

Рис. 1. Соотношение общего-частного в системе
«Пропорция – Алгебраические уравнения – Рекуррентные ряды – Золотое сечение»:
$-\,-\!\!\rightarrow$ – возможные (в отдельных случаях) причинно-следственные связи

То есть золотое сечение может быть частным случаем не только в двухзвенной суммирующей рекурсии, но и в рекуррентных последовательностях с большим числом аддитивных слагаемых (табл. 1), что вовсе не означает, что эти рекурсии каким-либо образом обобщают золотое сечение как уникальную константу.

Обратим внимание на характерную особенность, связанную с наличием двух подряд идущих старших степеней в уравнениях (табл. 1), что обеспечивает их быструю сходимость к их максимальному по модулю корню (теорема Бернулли).

Таблица 1

Примеры алгебраических уравнений с их наибольшими корнями
и соответствующих линейных рекуррентных (возвратных) последовательностей

Степень	Линейные алгебраические уравнения			
n	$x^n = x^{n-1} + 1$	$x^n = x^{n-1} + x + 1$	$x^n = x^{n-1} + 2x + 1$	$x^n = x^{n-1} + x^3 + x + 1$
1	2			
2	1,618034	2,414214		
3	1,465571	1,839287	2,147899	
4	1,380278	1,618034	1,794310	
5	1,324718	1,497094	1,618034	
6	1,285199	1,419633	1,510855	1,618034
7	1,255423	1,365255	1,438138	1,506667
8	1,232055	1,324718	1,385237	1,433086
9	1,213150	1,293188	1,344842	1,380278
10	1,197491	1,267875	1,312879	1,340254
11	1,184276	1,247048	1,286890	1,308720
12	1,172951	1,229574	1,265297	1,283144

13	1,163120	1,214676	1,247040	1,261925
$x_{n+t} =$	$x_{n-1+t} + x_t$	$x_{n-1+t} + x_{1+t} + x_t$	$x_{n-1+t} + 2x_{1+t} + x_t$	$x_{n-1+t} + x_{3+t} + x_{1+t} + x_t$
Адекватные линейно-разностные (возвратные) уравнения, $t = 0, 1, 2, ...$				

Рассмотрим, например, уравнение $x^n = x^{n-1} + x + 1$ с трехзвенной рекурсией $x_{n+t} = x_{n-1+t} + x_{1+t} + x_t$ и максимальным по модулю действительным корнем λ.

a) $\underline{n = 2}$, $x^2 - 2x - 1 = 0$, $\lambda = 1 + \sqrt{2}$.

b) $\underline{n = 3}$, $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, $\lambda = \frac{1}{3}\left(c + \frac{4}{c} + 1\right) \approx 1{,}839$, где $c = \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}$.

Алгебраическое уравнение порождает известную последовательность Трибоначчи [9] $T_{3+t} = T_{2+t} + T_{1+t} + T_t$, $(T_0, T_1, T_2) = (0, 0, 1)$, такую, что $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{T_{t+1}}{T_t} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{T_{t-1} + T_t + T_{t+1}}{T_{t+1}} \approx 1{,}839$.

Конкретно данное уравнение может быть обобщено путем введения коэффициентов $x^3 - a_2 x^2 - a_1 x - a_0 = 0$ с порождением новых числовых последовательностей

$$x_{t+3} = a_2 x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t .$$

С учетом свойств рядов T_t, x_t методом индукции установлено, что эти ряды связаны с базовыми числами Трибоначчи следующим соотношением

$$x_{t+3} = x_2 T_{t+3} + (x_1 a_1 + x_0 a_0) T_{t+2} + a_0 x_1 T_{t+1} ,$$

где x_0, x_1, x_2 – произвольные начальные условия;
a_1, a_2, a_3 – коэффициенты генератора;
$T_{t+1}, T_{t+2}, T_{t+3}$ – исходные числа обычной последовательности Трибоначчи.

В частном случае $(x_0, x_1, x_2) = (0, 0, 1)$ справедлива комбинаторная формула, полученная по данным работы [10] на основе обобщенной пирамиды Паскаля (трехгранного пирамидального массива),

$$x_{t+2} = \sum_{s=0}^{\lceil t/2 \rceil} \sum_{r=0}^{\lceil t/3 \rceil} C_{t-s-2r}^{s+r} \, C_{s+r}^{r} \, a_0^r \, a_1^s \, a_2^{t-2s-3r} ,$$

где для удобства записи принята нумерация $t = 1, 2, 3, ...$ (со второго ненулевого члена ряда);
$\lceil \xi \rceil = \mathrm{trunc}(\xi)$ – целая часть ξ (наибольшее целое число, не превосходящее ξ);
$C_n^i = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$ – биномиальные коэффициенты; $C_u^v = 0, u < v$.

c) $\underline{n = 4}$, $x^4 - x^3 - x - 1 = 0$, $\lambda = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Данное уравнение является частным случаем обобщенного уравнения гармонической пропорции или золотого сечения [11].

d) $\underline{n = 8}$, $x^8 - x^7 - x - 1 = 0$, $\lambda = \frac{c}{6} + \frac{2}{c} \approx 1{,}32472$, где $c = \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{69}}$.

Кстати, подобное решение мы наблюдаем в самых разных алгебраических уравнениях, например, $x^5 - x^2 - x - 1 = 0$, $x^3 - x - 1 = 0$, $x^5 - x^4 - 1 = 0$, последнее из которых в литературе иногда называется p-сечением $(p = 4)$.

Таким образом, исходное уравнение $x^n = x^{n-1} + x + 1$ содержит целый «букет частных решений»: так называемую "металлическую" пропорцию $(m = 2, n = 2)$, классический ряд Трибоначи $(n = 3)$, золотое сечение $(n = 4)$, одно p-сечение $(p = 4, n = 8)$ и прочие.

Довольно легко составить еще сотни, тысячи разнообразных подклассов алгебраических уравнений, которые содержат ЗС своим частным случаем, но при других степенях характеристического многочлена "уводят решение" в совершенно иные плоскости, далекие от числа Ф.

Можно ли в таком случае считать их обобщением самого ЗС? Конечно, нет.

В противном случае это будет элементарно безграмотно и псевдопереводом всей линейной алгебры на интерпретацию ЗС.

Но что-то все-таки подобные уравнения группируют вокруг себя? Безусловно, да.

Они образуют подклассы алгебраических уравнений с теми или иными свойствами и решениями в виде самых разнообразных действительных корней, одним из которых в отдельных случаях может быть число Ф.

Но, оставаясь всего лишь частным в таком подклассе, это число далее никоим образом не распространяет свои свойства на остальные независимые решения уравнения в зависимости от его старшей степени n.

В частности, все представленные решения (табл. 1) также никакого отношения к числу Ф не имеют, за исключением отдельных случаев, когда само Ф является корнем того или иного алгебраического уравнения.

Подобных примеров можно привести много.

Так, уравнение $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ имеет два мнимых и три действительных корня: $(-\Phi, \phi = \Phi^{-1}, 1)$. Сумма действительных корней равна 0, сумма всех корней (по теореме Виета) равна: –1.

Если положить начальные условия единице, то аддитивная рекурсия образует тривиальный единичный устойчивый ряд.

Но стоит лишь чуть сдвинуть хотя бы одно из начальных условий, например $x_4 = 0{,}99$, то возникает процесс настройки числовых последовательностей на свою асимптоту – Ф (рис. 2), – «эффект шарика на сомбреро».

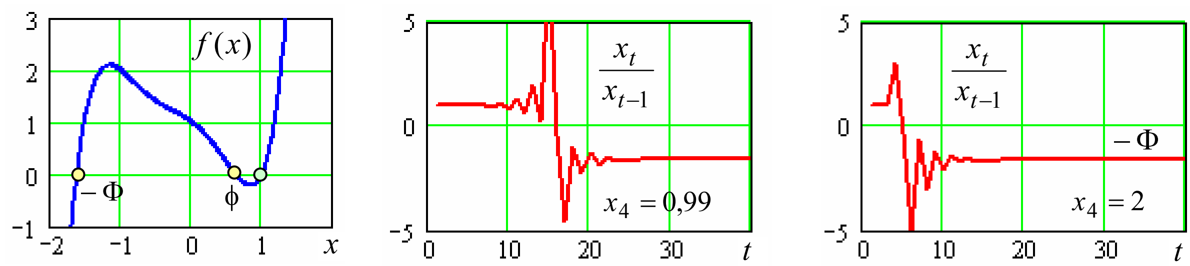

Рис. 2. Особенности поведения алгебраического уравнения
$f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ с настройкой рекурсии на число $-\Phi$

Другое уравнение $f(x) = (x + \phi)(x - \Phi)(x - 1)^k$ имеет только действительные корни: пару $(-\phi, \Phi)$ и k-кратный корень, равный единице.

При начальных условиях $(x_0, x_1) = (k + 2, k + 1)$ данное уравнение воспроизводит числовую последовательность $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t - k$.

В определенном смысле его можно считать обобщением квадратного уравнения ЗС, поскольку асимптотой адекватной возвратной последовательности является Ф, однако уравнение содержит множество "неудобоваримых" иррациональных коэффициентов, что делает его мало похожим на базовое квадратное уравнение ЗС.

Точно так же, когда в уравнения искусственно внедряются числа Фибоначчи, что, как показано в работах [11, 12], приводит к существенному нарушению плавной (хотя и знакопеременной) и быстрой сходимости.

Литература.

1. *Василенко С.Л.* Общее и частное в систематике золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15307, 28.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322073.htm.

2. *Стахов А.П.* Обобщения задачи о кроликах, чисел Фибоначчи и Золотого Сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15310, 28.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322076.htm.

3. *Hoggatt V.E.* Generalized Fibonacci Numbers in Pascal's Pyramid // Fibonacci Quart. 1972. – Vol. 10. – № 3. – P. 271–275, 293.

4. *Стахов А.П.* Роль систем счисления с иррациональными основаниями (кодов золотой пропорции) в развитии теории систем счисления, теории компьютеров и «современной теории чисел Фибоначчи» (к обоснованию «Математики Гармонии») // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15341, 14.06.2009.

5. *Куайн Уиллард Ван Орман*. Слово и объект: Пер. с англ. – М.: Логос, Праксис, 2000. – 386 с. – http://quine-ocr.narod.ru/.

6. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 5-е изд. – М.: Наука, 1984. – 144 с.

7. *Мартыненко Г.Я.* Классификационный треугольник уравнений, связанных с золотым сечением // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15306, 27.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322072.htm.

8. *Мартыненко Г.Я.* Кумулятивные суммы последовательностей Мидхата Газале и Алексея Стахова // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15167, 16.03.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322017.htm.

9. *Feinberg M.* Fibonacci-Tribonacci. Fibonacci Quart. 1. – 1963. – P. 71–74.

10. *Кузьмин О.В.* Обобщения чисел Фибоначчи и Трибоначчи // Оптимизация, управление, интеллект. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2000. – Вып. 4. – С. 188–198. – http://ellib.library.isu.ru/showdoc.php?id=4906.

11. *Василенко С.Л.* Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения. – Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.

12. *Василенко С.Л.* Стилистический ряд индуцированных отклонений // Академия Тринитаризма. – М.: Эл № 77-6567, публ.15343, 15.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321118.htm.