А.П. Стахов

«Металлические пропорции», формулы Газале, «золотая» фибоначчиева гониометрия и их роль в развитии гиперболической геометрии, современного теоретического естествознания и «современной теории чисел Фибоначчи» (к обоснованию «Математики Гармонии»)

1. Введение

В своей статье «**Роль гиперболических функций Фибоначчи и Люка в развитии современной науки и «современной теории чисел Фибоначчи» (к обоснованию «Математики Гармонии»)»** http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321113.htm я попытался убедить читателей в том, что введение гиперболических функций Фибоначчи и Люка, основанных на формулах Бине [1, 2], может быть отнесено к разряду фундаментальных открытий современной науки, поскольку эти функции, как показано в работах Олега Боднара [3], являются «естественными» функциями природы и лежат в основе такое явления живой Природы как филлотаксис.

В работе [4] мне удалось обобщить симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка, основываясь на «формулах Газале» [5], и построить так называемую «золотую» фибоначчиевую гониометрию (такое название введено в работе [6]).

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы обосновать роль «металлических пропорций», формул Газале и «золотой» фибоначчиевой гониометрии в развитии гиперболической геометрии, современного теоретического естествознания и «современной теории чисел Фибоначчи».

2. λ – числа Фибоначчи и «металлические пропорции»

2.1. λ – *числа Фибоначчи*

Зададимся положительным числом $\lambda > 0$ и рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1) + F_\lambda(n); \qquad F_\lambda(0) = 0, F_\lambda(1) = 1. \tag{1}$$

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ рекуррентное соотношение (1) сводится к рекуррентному соотношению

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad F_0 = 0, F_1 = 1, \tag{2}$$

задающему классические числа Фибоначчи. Основываясь на этой аналогии, числовые последовательности, генерируемые рекуррентным соотношением (1), назовем числовые последовательности, порождаемые (1), λ-*числами Фибоначчи*. Поскольку каждое число $\lambda > 0$ генерирует свою собственную последовательность типа (1), то это означает, что множество новых рекуррентных числовых последовательностей, задаваемых (1), бесконечно. Заметим, что при $\lambda = 2$ рекуррентное соотношение (1) сводится к виду:

$$F_2(n+2)=2F_2(n+1)+F_2(n); \qquad F_2(0)=0, F_2(1)=1. \tag{3}$$

Эта рекуррентная формула порождает так называемые *числа Пелля*: 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378...

2.2. *Металлические пропорции*

Представим рекуррентное соотношение (1) в виде:

$$\frac{F_\lambda(n+2)}{F_\lambda(n+1)}=\lambda+\frac{1}{\frac{F_\lambda(n+1)}{F_\lambda(n)}}. \tag{4}$$

При $n \to \pm\infty$ выражение (4) сводится к квадратному уравнению

$$x^2-\lambda x-1=0. \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет два корня:

$$x_1=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{\lambda-\sqrt{4+\lambda^2}}{2}. \tag{6}$$

Обозначим через Φ_λ положительный корень x_1 и рассмотрим новый класс математических констант, задаваемых следующей формулой:

$$\Phi_\lambda=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}. \tag{7}$$

Заметим, что для случая $\lambda=1$ формула (7) принимает вид выражения

$$\Phi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{8}$$

задающего классическую *золотую пропорцию*.

Формула (7) была введена в «современную теорию чисел Фибоначчи» независимо друг от друга многими учеными (Шпинадель, Газале, Каппрафф, Татренко), но первой это сделала аргентинский математик **Вера Шпинадель** [7], которая назвала математические константы, задаваемые выражением (7), *металлическими пропорциями*. Если в (7) мы примем $\lambda = 1, 2, 3, 4$, тогда мы получим следующие математические константы, имеющие согласно Шпинадель следующие названия:

$$\Phi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,(\text{золотая пропорция}, \lambda=1); \quad \Phi_2=1+\sqrt{2}\,(\text{серебряная пропорция}, \lambda=2);$$

$$\Phi_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\,(\text{бронзовая пропорция}, \lambda=3); \quad \Phi_4=2+\sqrt{5}\,(\text{медная пропорция}, \lambda=4).$$

Остальные *металлические пропорции* $(\lambda \ge 5)$ не имеют специальных названий:

$$\Phi_5=\frac{5+\sqrt{29}}{2}; \quad \Phi_6=3+2\sqrt{10}; \quad \Phi_7=\frac{7+2\sqrt{14}}{2}; \quad \Phi_8=4+\sqrt{17}\ldots$$

Нетрудно доказать [7], что корень x_2 может быть выражен через *металлическую пропорцию* (7) следующим образом:

$$x_2=-\frac{1}{\Phi_\lambda}=\frac{\lambda-\sqrt{4+\lambda^2}}{2}. \tag{9}$$

Используя алгебраическое уравнение (5), легко доказать [7] следующие замечательные свойства *металлических пропорций* (7):

$$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{\ldots}}}}\ ; \qquad \Phi_\lambda = \lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \ldots}}} \tag{10}$$

Заметим, что эти соотношения являются обобщением аналогичных свойств для классической *золотой пропорции* ($\lambda = 1$):

$$\Phi_1 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}\ ; \qquad \Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} \tag{11}$$

3. Формулы Газале

Используя металлические пропорции (7), **Мидхат Газале** в книге [5] вывел следующую формулу, которая задает λ-*числа Фибоначчи* (1) в аналитическом виде:

$$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}\ , \tag{12}$$

где n=0,±1,±2,±3,…

В работе [4] выведена подобная аналитическая формула для λ-*чисел Люка*:

$$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}\ , \tag{13}$$

где n=0,±1,±2,±3,…

Формулы (12) и (13) названы в [4] *формулами Газале* в честь **Мидхата Газале,** который, как упоминалось, впервые вывел формулу (12) в книге [5]. Заметим, что для случая $\lambda = 1$ *формулы Газале* (12) и (13) сводятся к *формулам Бине*:

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}\ ; \qquad L_n = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n} \tag{14}$$

Как показано в [4], λ-числа Люка (13) могут быть также заданы с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$L_\lambda(n) = \lambda L_\lambda(n-1) + L_\lambda(n-2);\, L_\lambda(0) = 2,\, L_\lambda(1) = \lambda\ . \tag{15}$$

Заметим, что λ-числа Люка (15) для случая $\lambda = 1$ сводятся к классическим числам Люка:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}; \quad L_0 = 2,\ F_1 = 1, \tag{16}$$

Представим *формулы Газале* (12) и (13) для отрицательных значений n в виде:

$$F_\lambda(-n) = \frac{\Phi_\lambda^{-n} - (-1)^{-n} \Phi_\lambda^{n}}{\sqrt{4+\lambda^2}} \tag{17}$$

$$L_\lambda(-n) = \Phi_\lambda^{-n} + (-1)^{-n} \Phi_\lambda^{n}. \tag{18}$$

Сравнивая попарно формулы (12) и (17), а затем формулы (13) и (18) для четных (n=2k) и нечетных (n=2k+1) значений n, мы приходим к следующему заключению:

$$F_\lambda(2k) = -F_\lambda(-2k) \text{ и } F_\lambda(2k+1) = F_\lambda(-2k-1) \qquad (19)$$

и

$$L_\lambda(2k) = L_\lambda(-2k) \text{ и } L_\lambda(2k+1) = -L_\lambda(-2k-1). \qquad (20)$$

Это означает, что для заданного положительного числа $\lambda > 0$ последовательность λ-чисел Фибоначчи (1) в бесконечном диапазоне n=0, ±1, ±2, ±3, … является симметричной относительно λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(0) = 0$. При этом необходимо учитывать, что λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(2k)$ и $F_\lambda(-2k)$ противоположны по знаку.

Подобный вывод мы можем сделать и для λ-чисел Люка, то есть последовательность λ-чисел Люка (22) в бесконечном диапазоне n=0, ±1, ±2, ±3, … также является симметричной относительно λ-числа Люка $L_\lambda(0) = 2$. При этом также необходимо учитывать, что λ-числа Люка $L_\lambda(2k+1)$ и $L_\lambda(-2k-1)$ противоположны по знаку.

Заметим, что для случая $\lambda = 2$ *формулы Газале* (12) и (13) генерируют числовые последовательности, известные как *числа Пелля* и *числа Пелля-Люка*, соответственно.

Несложно вывести следующее тождество для λ-чисел Фибоначчи

$$F_\lambda^2(n) - F_\lambda(n-1)F_\lambda(n+1) = (-1)^{n+1}. \qquad (21)$$

Заметим, что формула (21) является обобщением классической *формулы Кассини*

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}. \qquad (22)$$

к которой формула (21) сводится при $\lambda = 1$.

4. Гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка

4.1. ***Определение гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка.*** Формулы Газале (12) и (13) являются исходными для введения нового класса гиперболических функций – *гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка* [4]. Рассмотрим эти функции.

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Фибоначчи

$$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x - \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right], \qquad (23)$$

$$cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x + \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right]. \qquad (24)$$

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Люка

$$sL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}=\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \tag{25}$$

$$cL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}=\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \tag{26}$$

где x – непрерывная переменная и $\lambda>0$ - любое положительное число.

λ-числа Фибоначчи и Люка связаны с гиперболическими λ-функциями Фибоначчи и Люка следующими соотношениями:

$$F_\lambda(n) \;=\; \begin{cases} sF_\lambda(n), & n=2k \\ cF_\lambda(n), & n=2k+1 \end{cases}; \qquad L_\lambda(n) \;=\; \begin{cases} cL_\lambda(n), & n=2k \\ sL_\lambda(n), & n=2k+1 \end{cases}. \tag{27}$$

Это означает, что для дискретных значений непрерывной переменной $x=n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$ λ-функции Фибоначчи и Люка сводятся к λ-числам Фибоначчи и Люка.

Также легко установить, что функции (23)-(26) связаны друг с другом очень простыми соотношениями:

$$sF_\lambda(x) \;=\; \frac{sL_\lambda(x)}{\sqrt{4+\lambda^2}}; \qquad cF_\lambda(x) \;=\; \frac{cL_\lambda(x)}{\sqrt{4+\lambda^2}}. \tag{28}$$

Это означает что функции (23) и (24) совпадают с функциями (25) и (26) с точностью до постоянного коэффициента $\dfrac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}$.

Заметим, что для случая $\lambda=1$ гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка (23)-(26) сводятся к *симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка*, введённым в работе [2]:

<u>Симметричный гиперболический синус и косинус Фибоначчи</u>

$$sFs(x)=\frac{\Phi^x-\Phi^{-x}}{\sqrt5}; \qquad cFs(x)=\frac{\Phi^x+\Phi^{-x}}{\sqrt5}. \tag{29}$$

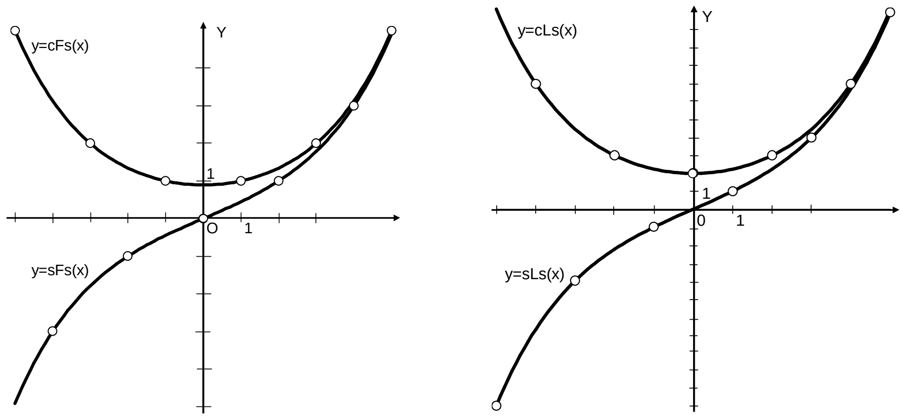
<u>Симметричный гиперболический синус и косинус Люка</u>

$$sLs(x)=\Phi^x-\Phi^{-x}; \qquad cLs(x)=\Phi^x+\Phi^{-x}, \tag{30}$$

где $\Phi=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ - *золотая пропорция.*

4.2. ***Графики гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка.*** Рассмотрим графики симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка, приведенные в работе [2] (Рис. 1). Графики гиперболических $\lambda-$функций Фибоначчи и Люка имеют форму, аналогичную графикам для симметричных гиперболических функциям Фибоначчи и Люка. Отличие состоит в том, что в точке x=0, гиперболический λ-косинус Фибоначчи (24) принимает значение

$cF_\lambda(0)=\dfrac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}$, а гиперболический λ-косинус Люка (26) принимает значение $cL_\lambda(0)=2$.



(a) *(b)*

Рисунок 1. Графики симметричных гиперболических функций Фибоначчи (*a*) и Люка (*b*)

Важно также подчеркнуть, что λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ с четными значениями *n* = 0, ±2, ±4, ±6, … «вписываются» в график гиперболического λ-синуса Фибоначчи $sF_\lambda(x)$ в точках *x* = 0, ±2, ±4, ±6, …, в то же время λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ с нечетными значениями *n* = ±1, ±3, ±5, … «вписываются» в график гиперболического λ-косинуса Фибоначчи $sF_\lambda(x)$ в точках *x* = ±1, ±3, ±5 …. (Рис. 1-*a*).

С другой стороны, λ-числа Люка $L_\lambda(n)$ с четными значениями *n* «вписываются» в график гиперболического λ-косинуса Люка $cL_\lambda(x)$ в точках *x* = 0, ±2, ±4, ±6 …, и λ-числа Люка $L_\lambda(n)$ с нечетными значениями *n* «вписываются» в график гиперболического λ-синуса Люка $sL_\lambda(x)$ в точках *x* = ±1, ±3, ±5 …. (Рис. 1-*b*).

По аналогии с симметричными гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка [2], мы можем ввести другие виды гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, в частности, гиперболические λ-тангенсы, котангенсы, секансы и косекансы и т.д.

4.3. ***Частные случаи гиперболических λ- функций Фибоначчи и Люка.*** Прежде всего отметим, что **формулы (23)-(26) задают бесконечное множество различных гиперболических λ-функций, поскольку каждое число $\lambda>0$ генерирует свой собственный вариант гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка типа (23)-(26). Количество новых гиперболических функций совпадает с количеством действительных чисел $\lambda>0$. При этом все**

известные гиперболические функции являются частными случаями общего класса гиперболических функций, задаваемых (23)-(26).

Рассмотрим характерные случаи гиперболических λ-функций (23)-(26), соответствующих различным значениям λ.

Для случая $\lambda = 1$ *золотая пропорция* (8) является основанием гиперболических 1-функций Фибоначчи и Люка, которые для этого случая совпадают с симметричными гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка (29) и (30). В дальнейшем мы будем называть функции (29) и (30) *«золотыми» гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка*.

Для случая $\lambda = 2$ *серебряная пропорция* $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$ является основанием нового класса гиперболических функций, которые мы будем называть *«серебряными» гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка*:

$$sF_2(x) = \frac{\Phi_2^x - \Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^x - \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\right], \tag{31}$$

$$cF_2(x) = \frac{\Phi_2^x + \Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^x + \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\right], \tag{32}$$

$$sL_2(x) = \Phi_2^x - \Phi_2^{-x} = \left(1+\sqrt{2}\right)^x - \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}, \tag{33}$$

$$cL_2(x) = \Phi_2^x + \Phi_2^{-x} = \left(1+\sqrt{2}\right)^x + \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}. \tag{34}$$

Для случая $\lambda = 3$ *бронзовая пропорция* $\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ является основанием нового класса гиперболических функций, которые мы будем называть *«бронзовыми» гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка*:

$$sF_3(x) = \frac{\Phi_3^x - \Phi_3^{-x}}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x - \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}\right], \tag{35}$$

$$cF_3(x) = \frac{\Phi_3^x + \Phi_3^{-x}}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x + \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}\right], \tag{36}$$

$$sL_3(x) = \Phi_3^x - \Phi_3^{-x} = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x - \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}, \tag{37}$$

$$cL_3(x) = \Phi_3^x + \Phi_3^{-x} = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x + \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}. \tag{38}$$

Для случая $\lambda = 4$ *медная пропорция* $\Phi_4 = 2+\sqrt{5}$ является основанием нового класса гиперболических функций, которые мы будем называть *«медными» гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка*:

$$sF_4(x) = \frac{\Phi_4^x - \Phi_4^{-x}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^x - \left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}\right], \tag{39}$$

$$cF_4(x)=\frac{\Phi_4^x+\Phi_4^{-x}}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^x+\left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}\right], \tag{40}$$

$$sL_4(x)=\Phi_4^x-\Phi_4^{-x}=\left(2+\sqrt{5}\right)^x-\left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}, \tag{41}$$

$$cL_4(x)=\Phi_4^x+\Phi_4^{-x}=\left(2+\sqrt{5}\right)^x+\left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}. \tag{42}$$

Сравним теперь гиперболические λ-функции Люка (25) и (26) с классическими гиперболическими функциями:

$$sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \tag{43}$$

Нетрудно доказать [4], что для случая

$$\Phi_\lambda=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}=e \tag{44}$$

гиперболические λ-функции Люка (25) и (26) совпадают с классическими гиперболическими функциями (43) с точностью до постоянного коэффициента 1/2 , то есть

$$sh(x)=\frac{sL_\lambda(x)}{2}\ \text{ и }\ ch(x)=\frac{cL_\lambda(x)}{2}. \tag{45}$$

Используя (44), после простых преобразований мы можем вычислить значение λ_e, для которого выражение (44) является верным:

$$\lambda_e=e-\frac{1}{e}=2sh(1)\approx 2.35040238. \tag{46}$$

Таким образом, согласно (45) классические гиперболические функции (43) является частным случаем гиперболических λ-функций Люка для случая (46).

5. Важнейшие формулы для «золотой» λ-гониометрии Фибоначчи

Таким образом, перечень гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, задаваемых (23)-(26), можно продолжать до бесконечности. Этот факт дает нам основание утверждать, что функции (23)-(26) образуют основу общей теории гиперболических функций, которые, с одной стороны, обладают всеми свойствами классических гиперболических функций («гиперболические свойства») и, с другой стороны, обладают «рекурсивными свойствами», подобными свойствам λ-чисел Фибоначчи и Люка, задаваемыми рекуррентными соотношениями (1) и (16).

Ниже приведены соотношения, связывающие *золотую пропорцию* (8) с *металлическими пропорциями* (7) (таблица 1) и классические гиперболические функции (43) с гиперболическими λ-функциями Фибоначчи (23) и (24) (таблица 2).

Таблица 1. Связь золотой пропорции с металлическими пропорциями

Золотая пропорция ($\lambda = 1$)	Металлические пропорции ($\lambda > 0$)
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$
$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}$	$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{\ldots}}}}$
$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$	$\Phi_\lambda = \lambda + \cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\ldots}}}$
$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1}$	$\Phi_\lambda^n = \lambda\Phi_\lambda^{n-1} + \Phi_\lambda^{n-2} = \Phi_\lambda \times \Phi_\lambda^{n-1}$
$F(n) = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}$	$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$L(n) = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n}$	$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}$
$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$ $cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$	$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$ $cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x}$ $cLs(x) = \Phi^x + \Phi^{-x}$	$sL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}$ $cL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}$

Таблица 2. Основные формулы «золотой» фибоначчиевой гониометрии

Формулы для классических гиперболических функций	Формулы для гиперболических лямбда - функций Фибоначчи
$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}; cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$sh(x+2) = 2sh(1)ch(x+1) + sh(x)$ $ch(x+2) = 2sh(1)sh(x+1) + ch(x)$	$sF_\lambda(x+2) = \lambda cF_\lambda(x+1) + sF_\lambda(x)$ $cF_\lambda(x+2) = \lambda sF_\lambda(x+1) + cF_\lambda(x)$
$sh^2(x) - ch(x+1)ch(x-1) = -ch^2(1)$ $ch^2(x) - sh(x+1)sh(x-1) = ch^2(1)$	$\left[sF_\lambda(x)\right]^2 - cF_\lambda(x+1)cF_\lambda(x-1) = -1$ $\left[cF_\lambda(x)\right]^2 - sF_\lambda(x+1)sF_\lambda(x-1) = 1$
$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$	$\left[cF_\lambda(x)\right]^2 - \left[sF_\lambda(x)\right]^2 = \frac{4}{4+\lambda^2}$
$sh(x+y) = sh(x)ch(x) + ch(x)sh(x)$ $sh(x-y) = sh(x)ch(x) - ch(x)sh(x)$	$\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}} sF_\lambda(x+y) = sF_\lambda(x)cF_\lambda(x) + cF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$ $\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}} sF_\lambda(x-y) = sF_\lambda(x)cF_\lambda(x) - cF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$
$ch(x+y) = ch(x)ch(x) + sh(x)sh(x)$ $ch(x-y) = ch(x)ch(x) - sh(x)sh(x)$	$\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}} cF_\lambda(x+y) = cF_\lambda(x)cF_\lambda(x) + sF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$ $\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}} cF_\lambda(x-y) = cF_\lambda(x)cF_\lambda(x) - sF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$
$ch(2x) = 2sh(x)ch(x)$	$\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}} cF_\lambda(2x) = sF_\lambda(x)cF_\lambda(x)$
$\left[ch(x) \pm sh(x)\right]^n = ch(nx) \pm sh(nx)$	$\left[cF_\lambda(x) \pm sF_\lambda(x)\right]^n = \left(\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}\right)^{n-1} \left[cF_\lambda(nx) \pm sF_\lambda(nx)\right]$

Красота формул, приведенных в Таблицах 1 и 2, завораживает. Обращаясь к принципу «математической красоты» Дирака, мы имеем полное право предположить, что «золотая» фибоначчиевая гониометрия [4] может представлять фундаментальный интерес как для математики, в частности, для гиперболической геометрии, так и для всего теоретического естествознания. Решение 4-й проблемы Гильберта, изложенное в [6], является подтверждением этого вывода.

6. Четвертая Проблема Гильберта

В докладе «*Математические проблемы*», сделанном на II Международном Конгрессе математиков, происходившем в Париже с 6 по 12 августа 1900 года, **Давид Гильберт** (1862-1943) сформулировал свои знаменитые 23 математические проблемы, которые в значительной степени определили развитие математики 20-го века. Этот доклад, охватывающий проблемы математики в целом, был несколько раз опубликован в подлиннике и в переводах и является уникальным явлением в истории математики и в математической литературе.

Русский перевод доклада **Давида Гильберта** и комментарии к нему даны в работе [8]. 4-ая проблема Гильберта названа им «**ПРОБЛЕМОЙ О ПРЯМОЙ КАК КРАТЧАЙШЕМ СОЕДИНЕНИИ ДВУХ ТОЧЕК».** Как подчеркивается в Wikipedia [9], *"в математике, 4-я проблема Гильберта относится к разряду фундаментальных проблем геометрии. В ее формулировке, полученной из оригинала, суть проблемы состоит в нахождении геометрий, чьи аксиомы наиболее близки к Евклидовой геометрии, если при этом сохраняются аксиомы порядка и инцидентности, аксиома конгруэнтности ослаблена, и аксиома о параллельных опущена»*.

Отметим, что у самого Гильберта в его докладе априори (или даже явно) предполагается возможность замены *аксиомы Евклида о параллельных* (ибо она опущена) другими аксиомами. Поэтому Гильберт в качестве геометрий, наиболее близких к евклидовой геометрии, называет *геометрию Лобачевского* (*гиперболическую геометрию*) и *геометрию Римана* (*эллиптическую геометрию*). Саму же 4-ю проблему Гильберт формулирует так: «*Более общий вопрос, возникающий при этом, заключается в следующем: возможно ли ещё с других плодотворных точек зрения построить геометрии, которые с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии*».

В математической литературе *4-я проблема Гильберта* иногда считается сформулированной в весьма расплывчатой форме, что затрудняет ее окончательное решение. Как подчеркивается в [9], «*оригинальная формулировка 4-й проблемы Гильберта является весьма расплывчатой для получения определенного ответа*».

Несмотря на критическое отношение математиков к *4-й проблеме Гильберта*, необходимо подчеркнуть ее чрезвычайную важность для развития математики, в частности, геометрии. Без всякого сомнения, интуиция **Гильберта** привела его к выводу, что *геометрии Лобачевского, Римана* и другие неевклидовые геометрии не исчерпывают все варианты возможных неевклидовых геометрий. *4-я проблема Гильберта* нацеливает исследователей на поиск новых неевклидовых геометрий, которые являются ближайшими геометриями к обыкновенной евклидовой геометрии.

Именно в силу «специфичности» 4-й проблемы Гильберта, которая в течение целого столетия не поддавалась решению и поэтому названа математиками «*весьма расплывчатой для получения определенного ответа*», ее оригинальное решение, полученное в [6], весьма неожиданным. Хотя она основывалась на «золотой» фибоначчиевой гониометрии, разработанной мною [4], но без участия выдающегося математика доктора физико-математических наук профессора **Самуила Арансона**, одного из ведущих российских математиков в области гиперболической геометрии, решение 4-й проблемы Гильберта было бы невозможным.

Суть этого решения состоит в следующем. Как известно, классическая модель *плоскости Лобачевского* в *псевдосферических координатах* (u,v), $0 < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, имеющей гауссову кривизну $K = -1$ (интерпретация Бельтрами гиперболической геометрии на псевдосфере), имеет вид:

$$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2 \tag{47}$$

где ds – элемент длины, $sh(u)$ - гиперболический синус. Как вытекает из (47), определяющую роль в *плоскости Лобачевского* играет *гиперболический синус*.

В работе [6] в связи с *4-ой проблемой Гильберта*, с использованием *«золотой» фибоначчиевой гониометрии*, предложено бесконечное множество *метрических форм плоскости Лобачевского* в зависимости от вещественного параметра $\lambda > 0$. Эти метрические формы задаются в координатах $(u,v), 0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty$, имеют *гауссову кривизну* $K = -1$ и представляются следующей общей формулой:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4}\left[sF_\lambda(u)\right]^2(dv)^2, \tag{48}$$

где $\Phi_\lambda = \dfrac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$ - *металлическая пропорция* и $sF_\lambda(u)$ - гиперболический λ-синус Фибоначчи. Назовем формы (48) *метрическими λ-формами плоскости Лобачевского*.

Так как каждому действительному $\lambda > 0$ соответствует свое выражение для *метрической λ-формы плоскости Лобачевского*, задаваемое (48), то это означает, что существует бесконечное число геометрий Лобачевского, соответствующих (48). В этом и состоит ответ на вопрос, сформулированный Гильбертом в его 4-й Проблеме: «*возможно ли ещё с других плодотворных точек зрения построить геометрии, которые с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии*». Да, возможно. Число таких геометрий, задаваемых формулой (48), бесконечно. Каждую из них можно считать такой же близкой к обыкновенной евклидовой геометрии, как и классическая геометрия Лобачевского.

Рассмотрим теперь характерные случаи метрических λ-форм плоскости Лобачевского, задаваемых (48):

1) «Золотая» метрическая форма плоскости Лобачевского

Для случая $\lambda = 1$ мы имеем $\Phi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803 -$ *золотая пропорция,* и, следовательно, метрическая форма (48) сводится к следующему:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_1)(du)^2 + \frac{5}{4}\left[sFs(u)\right]^2(dv)^2, \tag{49}$$

где $\ln^2(\Phi_1) = \ln^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.231565$ и $sFs(u) = \frac{\Phi_1^u - \Phi_1^{-u}}{\sqrt{5}}$ - симметричный гиперболический синус Фибоначчи (31).

Будем называть метрическую форму (49) *«золотой» метрической формой плоскости Лобачевского*. Заметим, что гиперболическая геометрия, задаваемая (49), соответствует «геометрии Боднара» [3], то есть являются гиперболической геометрией такого ботанического явления как филлотаксис.

Этот факт заставляет нас более внимательно отнестись к другим гиперболическим геометриям, соответствующим случаям $\lambda = 2,3,4,...$

2) «Серебряная» метрическая форма плоскости Лобачевского

Для случая $\lambda = 2$ мы имеем $\Phi_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2.1421$ - *серебряная пропорция*, и, следовательно, метрическая форма (48) сводится к следующему:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_2)(du)^2 + 2\left[sF_2(u)\right]^2(dv)^2, \tag{50}$$

где $\ln^2(\Phi_2) \approx 0.776819$ и $sF_2(u) = \frac{\Phi_2^u - \Phi_2^{-u}}{2\sqrt{2}}$.

Будем называть метрическую форму (50) *«серебряной» метрической формой плоскости Лобачевского*.

3) «Бронзовая» метрическая форма плоскости Лобачевского

Для случая $\lambda = 3$ мы имеем $\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3.30278$ - *бронзовая пропорция* и, следовательно, форма (48) сводится к следующему:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_3)(du)^2 + \frac{13}{4}\left[sF_3(u)\right]^2(dv)^2 \tag{51}$$

где $\ln^2(\Phi_3) \approx 1.42746$ и $sF_3(u) = \frac{\Phi_3^u - \Phi_3^{-u}}{\sqrt{13}}$.

Будем называть метрическую форму (51) *«бронзовой» метрической формой плоскости Лобачевского.*

4) «Медная» метрическая форма плоскости Лобачевского

Для случая $\lambda = 4$ мы имеем $\Phi_4 = 2+\sqrt{5} \approx 4.23607$ - *медная пропорция* и, следовательно, форма (48) сводится к следующему:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_4)(du)^2 + 5\left[sF_4(u)\right]^2(dv)^2, \tag{52}$$

где $\ln^2(\Phi_4) \approx 2.08408$ и $sF_4(u) = \frac{\Phi_4^u - \Phi_4^{-u}}{2\sqrt{5}}$. .

Будем называть метрическую форму (52) *«медной» метрической формой плоскости Лобачевского*

5) **Классическая метрическая форма плоскости Лобачевского**

Для случая $\lambda = \lambda_e = 2sh(1) \approx 2.350402$ мы имеем $\Phi_{\lambda_e} = e \approx 2.7182$ - *число Непере* и, следовательно, метрическая форма плоскости Лобачевского сводится к классическому выражению (48).

В таблице 3 сведены выражения для всех рассмотренных выше частных случаев метрических λ-форм плоскости Лобачевского.

Таблица 3. Метрические $\lambda-$формы Лобачевского

Название	λ	Φ_λ	Аналитическое выражение
Метрическая $\lambda-$форма Лобачевского	$\lambda>0$	$\Phi_\lambda=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2+\frac{4+\lambda^2}{4}[sF_\lambda(u)]^2(dv)^2$
"Золотая" форма	$\lambda=1$	$\Phi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.61803$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_1)(du)^2+\frac{5}{4}[sFs(u)]^2(dv)^2$
"Серебряная" форма	$\lambda=2$	$\Phi_2=1+\sqrt{2}\approx 2.1421$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_2)(du)^2+2[sF_2(u)]^2(dv)^2$
"Бронзовая" форма	$\lambda=3$	$\Phi_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\approx 3.30278$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_3)(du)^2+\frac{13}{4}[sF_3(u)]^2(dv)^2$
"Медная" форма	$\lambda=4$	$\Phi_4=2+\sqrt{5}\approx 4.23607$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_4)(du)^2+5[sF_4(u)]^2(dv)^2$
Классическая форма	$\lambda_e\approx 2.350402$	$\Phi_{\lambda_e}=e\approx 2.7182$	$(ds)^2=(du)^2+sh^2(u)(dv)^2$

Рассмотренный выше подход приводит к постановке следующей проблемы, важной для всего теоретического естествознания. Если в Природе проявляет себя «золотая» гиперболическая геометрия, описываемая выражением (49) («геометрия Боднара» или «геометрия филлотаксиса), то возникает вопрос: существуют ли в Природе какие-либо другие физические, химические, ботанические или биологические явления, гиперболическая геометрия которых соответствует новым $\lambda-$геометриям Лобачевского, например, «серебряной», «бронзовой», «медной» и другим геометриям?

Вполне возможно, что такие явления существуют. Первым кандидатом на роль такой геометрии, возможно, является «серебряная» геометрия, соответствующая *числам Пелля,* уже зарекомендовавшим себя в математике и теоретическом естествознании [7, 10, 11].

7. Заключение: роль «металлических пропорций» и «золотой» фибоначчиевой гониометрии в развитии гиперболической геометрии, современного теоретического естествознания и «современной теории чисел Фибоначчи»

Обсуждая эту роль, мне хотелось бы привлечь внимание к следующим выводам:

1. «Металлические пропорции», введенные в «современную теорию чисел Фибоначчи» аргентинским математиком **Верой Шпинадель** и другими учеными (**Газале, Каппрафф, Татаренко**) независимо друг от друга, **представляют собой широкое обобщение классической «золотой пропорции» и расширяют наши представления о «гармонических» пропорциях.**
2. «Металлические пропорции» лежат в основе **«формул Газале»,** которые задают новые классы рекуррентных числовых последовательностей и являются обобщением «формул Бине», что представляет фундаментальный интерес для развития «современной теории чисел Фибоначчи».

3. «Металлические пропорции» являются основаниями нового класса гиперболических функций – *гиперболических* $\lambda -$*функций Фибоначчи и Люка,* которые составляют основу *«золотой» фибоначчиевой гониометрии.* **Эта гониометрия представляет фундаментальный интерес для гиперболической геометрии, подтверждением чего является оригинальное решение 4-й проблемы Гильберта, нацеленной на развитие гиперболической геометрии.**
4. **«Золотая» фибоначчиевая гониометрия и порождаемые ею новые гиперболические геометрии ставят перед теоретическим естествознанием проблему поиска таких физических, химических, ботанических или биологических явлений Природы, гиперболическая геометрия которых соответствует новым** $\lambda -$**геометриям Лобачевского, например, «серебряной», «бронзовой», «медной» и другим** $\lambda -$**геометриям.**

Литература

1. Стахов А.П., Ткаченко И.С. *Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи*. Доклады Академии наук УССР, 1993, № 7.
2. Stakhov A, Rozin B. *On a new class of hyperbolic functions*. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.
3. Боднар О.Я. *Геометрия филлотаксиса*. Доклады Академии наук Украины, 1992, № 9.
4. Стахов А.П., Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006
5. Gazale Midhat J. *Gnomon. From Pharaohs to Fractals*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (русский перевод, 2002 г.)
6. Стахов А.П., Арансон С.Х. Золотая фибоначчиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14816, 04.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm
7. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004)
8. Александров П.С. **(**общий редактор**).** Проблемы Гильберта. М.: Наука. 1969. **-** 240 с.
9. Hilbert's Fourth Problem. Wikipedia**.** The Free Encyclopedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_fourth_problem
10. Dujella Andrej. A problem of Diophantus and Pell numbers. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, Kluwer Academic Publishers, 1998.
11. Long, Calvin T. and Webb, William A. Analysis of the Euclidean and related algorithms. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, Kluwer Academic Publishers, 1998.