Г. Я. Мартыненко

Решение нелинейных уравнений методом повторных радикалов

В вычислительной математике хорошо известен метод решения нелинейных уравнений, называемый методом итераций (Мысовских, 1998, с. 374). Одним из таких методов является метод повторных радикалов, который достаточно широко используется в математике гармонии при интерпретации классического золотого сечения и его обобщений.

В работе (Мартыненко, 2009), опубликованной в рамках первой on-line конференции по золотому сечению, сказано, что исследование обобщений Фибоначчи в качестве побочного эффекта дает способы решения нелинейных уравнений любого порядка. В этой краткой заметке это тема получила развитие путем введения коэффициентов, сообщающих уравнению и расчетной формуле большую общность.

В данной заметке приводится повторный радикал, с помощью которого вычисляются положительные корни уравнения, задающего в общем виде все обсуждаемые (и не обсуждаемые) обобщения золотого сечения:

$$ax^z - bx^q - c = 0$$

Перепишем это уравнение так:

$$x^z - \frac{b}{a}x^q - \frac{c}{a} = 0$$

z и $q > 0$, а $z > q$.

Повторный радикал, с помощью которого вычисляется корень уравнения, имеет вид:

$$x \to \sqrt[q]{\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\sqrt[\frac{z}{q}]{\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\sqrt[\frac{z}{q}]{\frac{c}{a} + \ldots}}}$$

Пример:

$c = 5{,}1; b = 2{,}5; a = 2; z = 3{,}1; q = 1{,}5.$ Тогда: $x \approx 1{,}797.$

Подставляя в уравнение вычисленное значение корня, убеждаемся в справедливости наших вычислений.

Если в уравнении знак перед свободным членом поменять на противоположный, то обобщенный повторный радикал приобретает вид:

$$x \to \sqrt[q]{-\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\sqrt[\frac{z}{q}]{-\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\sqrt[\frac{z}{q}]{-\frac{c}{a} + \ldots}}}$$

Например, для уравнения $x^7 - 13x^2 + 5 = 0$ повторный радикал выглядит так:

$$x \to \sqrt{-5 + 13\sqrt[\frac{7}{2}]{-5 + 13\sqrt[\frac{7}{2}]{-5 + 13\sqrt[\frac{7}{2}]{-5 + \ldots}}}} \to 1{,}618,$$

т.е. с помощью этого радикала мы получаем решение, равное золотому числу.

Попутно отметим, что с помощью предложенного метода могут быть вычислены корни всех трехчленных уравнений, находящихся в пространстве золотого сечения и его обобщений.

Например, для золотого сечения наш повторный радикал превращается в

$$x \to \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1} \ldots}} \to 1{,}618$$

Для серебряного сечения Падована-Газале имеем:

$$x \to \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \ldots}}} \to 1{,}325,$$

а для уравнения А.Стахова:

$$x \to \sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\ldots}}} \to 1{,}466 .$$

Обратим также внимание на возможное изменение знака на противоположный перед вторым членом исходного уравнения.

Это изменение происходит при переходе переменной к обратной величине, т. е. при замене переменной $x = \frac{1}{y}$.

Получаем новое уравнение: $$a\left(\frac{1}{y}\right)^z - b\left(\frac{1}{y}\right)^q - c = 0$$

или $$a - by^{z-q} - cy^z = 0$$

В итоге получаем: $$cy^z + by^{z-q} - a = 0 ,$$

$$y^z + \frac{b}{c}y^{z-q} - \frac{a}{c} = 0 .$$

Подставив в это уравнение $y = \frac{1}{x} = \frac{1}{1{,}7197} = 0{,}5815$ и значения коэффициентов из приведенного выше примера, убеждаемся в справедливости данного решения.

Литература

Мартыненко Г.Я. Классификационный треугольник уравнений, связанных с золотым сечением // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15306, 27.05.2009.

Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. Уч. пособие. СПб: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 1998. - 472 с.