А.П. Стахов

Роль гиперболических функций Фибоначчи и Люка в развитии современной науки и «современной теории чисел Фибоначчи» (к обоснованию «Математики Гармонии»)

1. Введение

В статье «Теории чисел Фибоначчи» этапы большого пути (к завершению международной online конференции «Золотое Сечение в современной науке») http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322077.htm я сформулировал несколько идей, которые могут стать предметом дискуссии для специалистов в этой области. Наиболее важная из них состоит в том, что, по моему мнению, в развитии «теории чисел Фибоначчи можно выделить два исторических периода:

1. **Классический период**, отсчет которого начинается с «Начал» Евклида, а его продолжение связано с работами французских математиков 19 в. **Люка**, который ввел *числа Люка,* и **Бине**, который ввел *формулы Бине.* Существенный вклад в развитие теории чисел Фибоначчи внес советский математик **Николай Воробьев** [2] и американский математик **Вернер Хоггатт** [3], создатель Фибоначчи-Ассоциации. Завершение этого длительного исторического периода можно приурочить к концу 20-го века, когда были опубликованы 2 замечательные книги – книга английского математика **Вайды** [4] (1989) и книга американского математика **Дунлапа** [5] (1997), в которой описаны все математические результаты, полученные математиками-фибоначчистами, представителями американской Фибоначчи-Ассоциации.

2. **Современный период**, который начинается с *алгоритмической теории измерения* [6, 7], *кодов и компьютеров Фибоначчи* [7], *«золотых» гиперболических функций и новой геометрической теории филлотаксиса* [8, 9], *гиперболических функций Фибоначчи и Люка,* введенных в [10, 11], а также с различных *обобщений чисел Фибоначчи и «золотой пропорции»,* наиболее известными из которых являются *p-числа Фибоначчи* [6, 7], *обобщенные золотые сечения* [7, 12] и «*металлические пропорции*» [13-16].

Настоящая статья является первой из серии статей, задуманных автором для обоснования «современной теории чисел Фибоначчи», которую в работе [17] автор назвал **«Математикой Гармонии».** Автор имеет намерение написать несколько статей в развитие статьи [1]. Приведу названия некоторых из них:

1. Роль алгоритмической теории измерения в развитии теории измерения и «современной теории чисел Фибоначчи»

2. Роль кодов Фибоначчи и арифметики Фибоначчи в развитии теории компьютеров и современной «теории чисел Фибоначчи»

3. Роль систем счисления с иррациональными основаниями в развитии теории чисел и «современной теории чисел Фибоначчи»

4. Роль обобщенных p-чисел Фибоначчи и обобщенных p-сечений в развитии «современной теории чисел Фибоначчи»

5. Роль «металлических пропорций» и «золотой» фибоначчиевой гониометрии в развитии теории гиперболических функций и «современной теории чисел Фибоначчи».

Задача настоящей статьи – показать фундаментальную роль *гиперболических функций Фибоначчи и Люка* в развитии современной науки и «современной теории чисел Фибоначчи».

2. Формулы Бине и гиперболические функции Фибоначчи и Люка

2.1. ***Гиперболические функции.*** Одним из важнейших достижений современной науки является осознание того факта, что мир окружающей нас Природы является «гиперболическим». Как известно, приоритет в создании неевклидовой геометрии принадлежит русскому геометру **Николаю Лобачевскому**, который в 1827 г. предложил новую геометрическую систему («геометрию Лобачевского»), основанную на *гиперболических функциях*:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{1}$$

Гиперболические функции были введены итальянским математиком **Винченцо Риккати** (Vincenzo Riccati) в 1757 году. Он получил их из рассмотрения единичной гиперболы. Дальнейшее исследование свойств гиперболических функций было проведено **Ламбертом**. Напомним некоторые тождества для гиперболических функций (1):

$$[ch(x)]^2 - [sh(x)]^2 = 1 \tag{2}$$

Свойство четности

$$sh(-x) = -shx; ch(-x) = chx; th(-x) = -thx \tag{3}$$

Формулы сложения

$$sh(x+y) = shxchy + shychx;\ ch(x+y) = chxchy + shyshx \tag{4}$$

Производные

$$(shx)' = chx; (chx)' = shx; (thx)' = \frac{1}{ch^2x} \tag{5}$$

Интегралы

$$\int shxdx = chx + C; \int chxdx = shx + C; \int thxdx = \ln chx + C \tag{6}$$

В начале 20-го века в физике возникает потребность в использовании новых геометрических идей. Это было связано с созданием Эйнштейном *специальной теории относительности* (1905 г.). В 1908 г., то есть спустя три года после обнародования специальной теории относительности, немецкий математик Герман Минковский дал оригинальную геометрическую интерпретацию специальной теории относительности, основанную на гиперболических функциях.

2.2. ***Формулы Бине.*** Пожалуй, наиболее важным результатом «классической теории чисел Фибоначчи» [2, 3] являются формулы, выведенные в 19 в. известным французским математиком Бине. Эти формулы, называемые *формулами Бине,* связывают числа Фибоначчи F_n и числа Люка L_n с золотой пропорцией $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

В работе [18] формулы Бине были представлены в виде, который редко используется в математической литературе.

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\Phi^{2k+1} + \Phi^{-(2k+1)}}{\sqrt{5}}, & n = 2k+1; \\ \dfrac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\Phi^{2k} - \Phi^{-2k}}{\sqrt{5}}, & n = 2k \end{cases} \quad (7)$$

$$L_n = \begin{cases} \Phi^n + \Phi^{-n} = \Phi^{2k} + \Phi^{-2k}, & n = 2k; \\ \Phi^n - \Phi^{-n} = \Phi^{2k+1} - \Phi^{-(2k+1)}, & n = 2k+1 \end{cases} \quad (8)$$

где дискретная переменная k принимает значения из множества: 0, ±1, ±2, ±3, … .

Анализ формул (7), (8) дает нам возможность ощутить истинное «эстетическое наслаждение» и еще раз убедиться в мощи человеческого разума. Действительно, ведь мы знаем, что числа Фибоначчи и числа Люка всегда являются целыми числами. С другой стороны, любая степень золотой пропорции является иррациональным числом. Отсюда вытекает, что целые числа L_n и F_n с помощью формул (7) и (8) выражаются через специальные иррациональные числа. Таким образом, формулы (7), (8) являются своеобразным связующим звеном между целыми числами и иррациональными.

2.3. ***Гиперболические функции Фибоначчи и Люка.*** Сравнение формул Бине (7), (8) с классическими гиперболическими функциями – функцией *гиперболического синуса shx* и *гиперболического косинуса chx*, задаваемыми формулами (1) - показывает, что формулы Бине по своей структуре подобны гиперболическому синусу и косинусу (1). Это наблюдение и лежит в основе нового класса гиперболических функций, введенного **Алексеем Стаховым** и **Иваном Ткаченко** в [10]. Для этого дискретная переменная k в формулах (9), (10) просто была заменена непрерывной переменной *x,* которая принимает значения из множества действительных чисел.

Дальнейшее развитие идея гиперболических функций Фибоначчи и Люка получила в работе **Алексея Стахова** и **Бориса Розина** [11]. В этой работе были введены так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка.*

Симметричный гиперболический синус Фибоначчи

$$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \quad (9)$$

Симметричный гиперболический косинус Фибоначчи

$$cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \quad (10)$$

Симметричный гиперболический синус Люка

$$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x} \quad (11)$$

Симметричный гиперболический косинус Люка

$$cLs(x) = \Phi^{x} + \Phi^{-x} \tag{12}$$

Числа Фибоначчи и Люка связаны с введенными выше симметричными гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка следующими соотношениями:

$$F_n = \begin{cases} sFs(n), & для \quad n = 2k \\ cFs(n), & для \quad n = 2k+1 \end{cases}; \quad L_n = \begin{cases} cLs(n), & для \quad n = 2k \\ sLs(n), & для \quad n = 2k+1 \end{cases}. \tag{13}$$

На Рис. 1 и 2 приведены графики введенных выше функций (9)-(12).

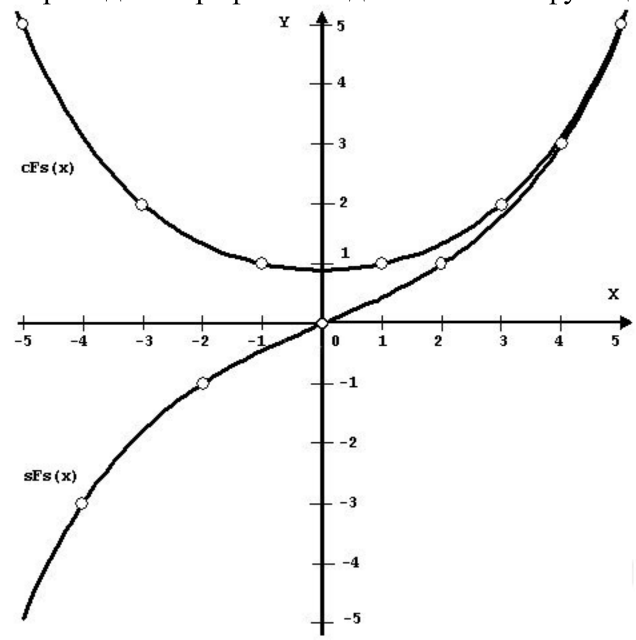

Рисунок 1. Симметричные гиперболические функции Фибоначчи

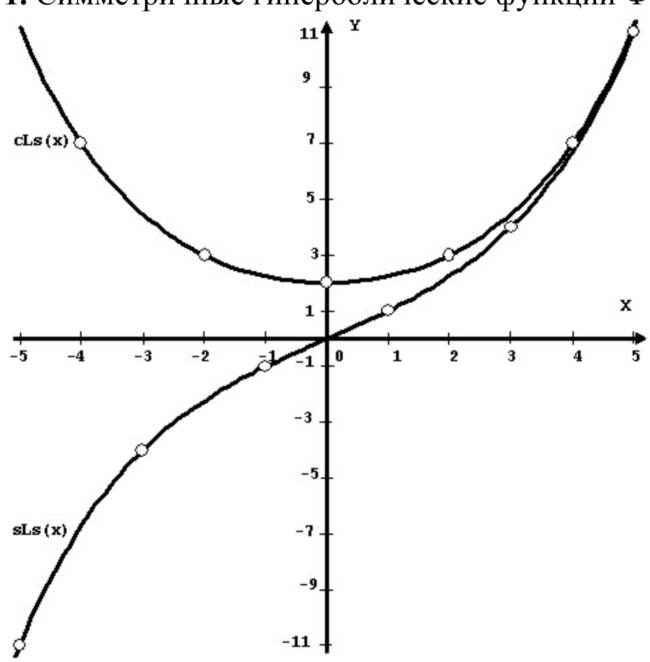

Рисунок 2. Симметричные гиперболические функции Люка

Как следует из Рис. 1 и 2, графики функций (9)-(12) являются симметричными и подобны графикам классических гиперболических функций (1). Заметим, что в точке x=0 симметричный косинус Фибоначчи $cFs(x)$ принимает значение $cFs(0)=\frac{2}{\sqrt{5}}$, а симметричный косинус Люка $cLs(x)$ в этой точке принимает значение $cLs(0) = 2$. Важно подчеркнуть, что числа Фибоначчи F_n с четными индексами (n = 0, ±2, ±4, ±6, …) «вписываются» в симметричный синус Фибоначчи $sFs(x)$ в дискретных точках x = 0, ±2, ±4, ±6, …, а числа Фибоначчи F_n с нечетными индексами (n = ±1, ±3, ±5, …) «вписываются» в симметричный косинус Фибоначчи $cFs(x)$ в дискретных точках x = ±1, ±3, ±5 …. С другой стороны, числа Люка с четными индексами «вписываются» в симметричный косинус Люка $cLs(x)$ в дискретных точках x = 0, ±2, ±4, ±6 …, а числа Люка с нечетными индексами «вписываются» в симметричный синус Люка $sLs(x)$ в дискретных точках x = ±1, ±3, ±5 ….

Симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка связаны между собой следующими простыми соотношениями:

$$sFs(x) = \frac{sLs(x)}{\sqrt{5}}; \qquad cFs(x) = \frac{cLs(x)}{\sqrt{5}}.$$

3. Рекуррентные свойства симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка

Симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка (9)-(12) являются обобщением чисел Фибоначчи и Люка на «непрерывную» область и, следовательно, они обладают *рекуррентными свойствами.* С другой стороны, они подобны классическим гиперболическим функциям (1) и, следовательно, они обладают *гиперболическими свойствами.* Некоторые из «рекуррентных свойств» функций (9)-(12) приведены в Табл. 2.

Таблица 2. Рекуррентные свойства симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка

Тождества для чисел Фибоначчи и Люка	Тождества для симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка	
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$	$sFs(x+2) = cFs(x+1) + sFs(x)$	$cFs(x+2) = sFs(x+1) + cFs(x)$
$F_n^{\ 2} - F_{n+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1}$	$[sFs(x)]^2 - cFs(x+1)\ cFs(x-1) = -1$	$[cFs(x)]^2 - sFs(x+1)\ sFs(x-1) = 1$
$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$	$sLs(x+2) = cLs(x+1) + sLs(x)$	$cLs(x+2) = sLs(x+1) + cLs(x)$
$L_n^2 - 2(-1)^n = L_{2n}$	$[sLs(x)]^2 + 2 = cLs(2x)$	$[cLs(x)]^2 - 2 = cLs(2x)$
$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$	$cFs(x+1) + cFs(x-1) = cLs(x)$	$sFs(x+1) + sFs(x-1) = sLs(x)$
$F_n + L_n = 2F_{n+1}$	$cFs(x) + sLs(x) = 2sFs(x+1)$	$sFs(x) + cLs(x) = 2cFs(x+1)$

Например, знаменитая «формула Кассини» [2, 3]

$$F_n^{\ 2} - F_{n+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1}, \tag{14}$$

которая представляет собой одно из важнейших тождеств, связывающих три соседних числа Фибоначчи, в терминах симметричных гиперболических функций Фибоначчи (9), (10) представляется в виде двух «непрерывных» тождеств:

$$[sFs(x)]^2 - cFs(x+1)\ cFs(x-1) = -1 \tag{15}$$

$$[cFs(x)]^2 - sFs(x+1)\ sFs(x-1) = 1, \tag{16}$$

которые можно рассматривать как обобщение «формулы Кассини» (14) на непрерывную область.

4. Гиперболические свойства симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка

Начнем с простейших «гиперболических свойств», которые являются аналогами свойств (2)-(6). Как показано в [11], аналогом формулы (2) являются следующие формулы для симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка:

$$[cFs(x)]^2 - [sFs(x)]^2 = \frac{4}{5};\ [cLs(x)]^2 - [sLs(x)]^2 = 4. \qquad (17)$$

Симметричные гиперболические функций Фибоначчи и Люка обладают свойством четности, подобным (3), поскольку

$$sFs(-x) = -sFs(x); cFs(-x) = cFs(x);\ sLs(-x) = -sLs(x); cLs(-x) = cLs(x) \quad (18)$$

Также легко вывести формулы, которые являются аналогами формул (4)-(6).

Некоторые из «гиперболических свойств» симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка приведены в Табл. 3.

Таблица 3. Гиперболические свойства симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка

Классические гиперболические функции	Симметричные гиперболические функции Фибоначчи	Симметричные гиперболические функции Люка
$[ch(x)]^2 - [sh(x)]^2 = 1$	$[cFs(x)]^2 - [sFs(x)]^2 = \frac{4}{5}$	$[cLs(x)]^2 - [sLs(x)]^2 = 4$
$sh(-x) = -shx; ch(-x) = chx$	$sFs(-x) = -sFs(x); cFs(-x) = cFs(x)$	$sLs(-x) = -sLs(x); cLs(-x) = cLs(x)$
$ch(x\pm y) = ch(x)ch(y) \pm$ $\pm sh(x)sh(y)$	$\frac{2}{\sqrt{5}} cFs(x\pm y) = cFs(x)cFs(y) \pm$ $\pm sFs(x)sFs(y)$	$2cLs(x\pm y) = cLs(x)cLs(y) \pm$ $\pm sLs(x)sLs(y)$
$sh(x\pm y) = sh(x)ch(y) \pm$ $ch(x)sh(y)$	$\frac{2}{\sqrt{5}} sFs(x\pm y) = sFs(x)cFs(y) \pm$ $\pm cFs(x)sFs(y)$	$2sLs(x\pm y) = sLs(x)cLs(y) \pm$ $\pm cLs(x)sLs(y)$
$ch(2x) = [ch(x)]^2 + [sh(x)]^2$	$\frac{2}{\sqrt{5}} cFs(2x) = [cFs(x)]^2 + +[sFs(x)]^2$	$2cLs(2x) = [cLs(x)]^2 +$ $+[sLs(x)]^2$
$sh(2x) = 2\, sh(x)ch(x)$	$\frac{1}{\sqrt{5}} sFs(2x) = sFs(x)cFs(x)$	$sLs(2x) = sLs(x)cLs(x)$
$[ch(x)]^{(n)} = \begin{cases} sh(x), & for\ \ n = 2k+1 \\ ch(x), & for\ \ n = 2k \end{cases}$	$[cFs(x)]^{(n)} = \begin{cases} (\ln(\Phi))^n sFs(x), & for\ \ n = 2k+1 \\ (\ln(\Phi))^n cFs(x), & for\ \ n = 2k \end{cases}$	$[cLs(x)]^{(n)} = \begin{cases} (\ln(\Phi))^n sLs(x), & for\ \ n = 2k+1 \\ (\ln(\Phi))^n cLs(x), & for\ \ n = 2k \end{cases}$

Таким образом, введенные выше симметричные гиперболические функции полностью сохраняют свойства классических гиперболических функций (Табл. 3), но при этом обладают новыми («рекуррентными») свойствами, подобными свойствам чисел Фибоначчи и Люка (Табл. 2). При этом, в отличие от классических гиперболических функций, новые гиперболические функции имеют «дискретный аналог» в виде чисел Фибоначчи и Люка, с которыми согласно (13) указанные функции совпадают, когда непрерывная переменная x принимает «дискретные» значения: 0, ±1, ±2, ±3, … . Заметим, что тождества (15)-(18), как и остальные тождества, приведенные в Табл. 2 и 3, подчеркивают фундаментальный характер введенных выше гиперболических функций Фибоначчи и Люка.

5. Геометрия Боднара

Как известно, числа Фибоначчи и Люка составляют основу так называемого «закона филлотаксиса» [8]. Согласно этому закону число левых и правых спиралей на поверхности так называемых филлотаксисных объектов (сосновой шишки, ананаса, кактуса, головки подсолнечника и т.д.) описывается отношениями соседних чисел Фибоначчи, то есть:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}: \quad \frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\ldots\rightarrow\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (19)$$

Эти отношения характеризуют «симметрию» филлотаксисного объекта. При этом, для каждого филлотаксисного объекта характерно свое отношение соседних чисел Фибоначчи из (19), которое называется *порядком симметрии.*

Наблюдая филлотаксисные объекты в завершенном состоянии и наслаждаясь упорядоченным рисунком на его поверхности, мы всегда задаем себе вопрос: как в процессе роста на его поверхности формируется фибоначчиевая решетка? Эта проблема и составляет основу *загадки филлотаксиса*, которая представляет собой одну из наиболее интригующих загадок ботаники. Суть ее состоит в том, что у большинства видов биоформ в процессе роста происходит изменение порядков симметрии, задаваемых (19). Известно, например, что головки подсолнечника, находящиеся на разных уровнях одного и того же стебля, имеют разные порядки симметрии: чем старше диск, тем выше порядок его симметрии. Это означает, что в процессе роста происходит закономерное изменение (возрастание) порядка симметрии и это изменение симметрии осуществляется по закону:

$$\frac{2}{1}\rightarrow\frac{3}{2}\rightarrow\frac{5}{3}\rightarrow\frac{8}{5}\rightarrow\frac{13}{8}\rightarrow\frac{21}{13}\rightarrow\ldots \qquad (20)$$

Изменение порядков симметрии филлотаксисных объектов в соответствии с (20) называется *динамической симметрией* [8]. Ряд ученых, исследовавших эту проблему, предполагают, что явление филлотаксиса имеет фундаментальное междисциплинарное значение. Например, по мнению В.И. Вернадского, *проблема биологической симметрии является ключевой проблемой биологии.*

Итак, явление динамической симметрии (20) обнаруживает свою особую роль в геометрической проблеме филлотаксиса. Напрашивается предположение, что за числовой закономерностью (20) кроются определенные геометрические законы, которые, возможно, и составляют суть секрета ростового механизма филлотаксиса и их раскрытие имело бы большое значение для разрешения проблемы филлотаксиса в целом. Эта фундаментальная проблема и была решена украинским исследователем Олегом Боднаром [8]. Боднару удалось построить оригинальную геометрическую теорию филлотаксиса, в основе которой лежит предположение, что геометрия филлотаксисных объектов является гиперболической, а изменение порядков симметрии филлотаксисного объекта в процессе своего роста основывается на *гиперболическом повороте,* который является основным преобразующим движением гиперболической геометрии. При этом главная особенность «геометрии Боднара» состоит в том, что для описания математических соотношений новой геометрии он ввел так называемые *«золотые» гиперболические функции*, которые имеют следующий вид:

«Золотой» синус

$$Gsh(x) = \frac{\Phi^{x} - \Phi^{-x}}{2} \qquad (21)$$

«Золотой» косинус

$$Gch(x) = \frac{\Phi^{x} + \Phi^{-x}}{2} \qquad (22)$$

Сравнивая формулы (21), (22) с формулами (1), мы замечаем, что Боднар при вводе «золотых» гиперболических функций просто произвел замену в (1) числа *e* (основания натуральных логарифмов) на число Φ («золотая пропорция»).

Сравнивая формулы (21), (22) с формулами (9), (10), легко убедиться, что они совпадают с точностью до постоянных коэффициентов (в функциях (21), (22) в знаменателе используется число 2, а в функциях (9), (10) – число $\sqrt{5}$). Но формулы (9), (10) обладают тем неоспоримым преимуществом, что при дискретных значениях непрерывной переменной $x\left(x=0,\pm1,\pm2,\pm3,...\right)$ они вырождаются в формулы Бине (7), которые задают числа Фибоначчи, расширенные в сторону отрицательных значений дискретной переменной *n.* Как показывает изучение «геометрии Боднара», при использовании своих «золотых» гиперболических функций для описания геометрических свойств «фибоначчиевых» решеток, он вынужден был использовать «поправочный коэффициент» $\frac{2}{\sqrt{5}}$, при умножении на который функции (21) и (22) превращаются в симметричные гиперболический синус и косинус Фибоначчи, задаваемые выражениями (9), (10). Поэтому мы имеем все основания утверждать, что «геометрия Боднара» на самом деле построена на использовании гиперболических функций Фибоначчи (9) и (10), основанных на формулах Бине (7).

Таким образом, «геометрия Боднара» является блестящим примером эффективного применения гиперболических функций Фибоначчи и Люка для моделирования процессов роста филлотаксисных объектов, то есть гиперболические функции Фибоначчи и Люка являются *новыми и весьма эффективными математическими моделями* той части биологического мира, который имеет отношение к явлению филлотаксиса. В этом и состоит фундаментальное значение открытия Олега Боднара не только для ботаники, но и для всей биологии.

6. Заключение: роль гиперболических функций Фибоначчи и Люка в развитии современной науки и «современной теории чисел Фибоначчи»

Обсуждая эту роль, мне хотелось бы привлечь внимание к трем важнейшим выводам:

1. **Теория гиперболических функций Фибоначчи и Люка является новым этапом в развитии «теории чисел Фибоначчи».** Она обобщает понятия классических чисел Фибоначчи и Люка и расширяет «теорию чисел Фибоначчи» на «непрерывную» область. Числа Фибоначчи и Люка являются частными («дискретными») случаями гиперболических функций Фибоначчи и Люка и совпадают с последними при дискретных значениях непрерывной переменной $x\left(x=0,\pm1,\pm2,\pm3,...\right)$. При этом любое тождество для гиперболических функций Фибоначчи и Люка автоматически превращается в соответствующее тождество для чисел Фибоначчи и Люка, если воспользоваться «формулой связи» (13). И наоборот, любому тождеству для чисел Фибоначчи и Люка однозначно соответствуют некоторое тождество для гиперболических функций Фибоначчи и Люка. То есть, мы можем сделать заключение, что **«классическая теория чисел Фибоначчи», описанная в книгах [2]-[5], как бы "вырождается» и переходит на новую ступень развития, которой и является *теория гиперболических функций Фибоначчи и Люка.***
2. Следующим важным следствием введения нового класса гиперболических функций является осознание того, что классические гиперболические функции (1), которые широко используются в математике и теоретической физике, начиная с Лобачевского, не являются единственной математической моделью «гиперболических миров» природы. Параллельно с гиперболической геометрией, основанной на классических гиперболических функциях («гиперболическая геометрия Лобачевского», «четырехмерный мир Минковского» и др.), в Природе наблюдается и другая гиперболическая геометрия, основанная на гиперболических функциях Фибоначчи и Люка. «Золотой» гиперболический мир, основанный на такой геометрии («геометрии Боднара»), существует объективно и независимо от нашего сознания. Этот мир с удивительной настойчивостью проявляет себя, прежде всего, в живой природе, в частности, он обнаруживают себя на поверхности сосновых шишек, ананасов, кактусов, головок подсолнечника, корзинок цветов и т.д. в виде филлотаксисных спиралей, основанных на числах Фибоначчи, числах Люка и других числовых рекуррентных рядах подобного типа («закон филлотаксиса»). **Подчеркнем еще раз, что гиперболические функции Фибоначчи и Люка, лежащие в основе явления филлотаксиса, не являются «выдумкой» математиков-фибоначчистов, а отражают важнейшую математическую закономерность, лежащую в основе геометрии живой природы.**
3. Наконец, последний вывод касается оценки роли гиперболических функций Фибоначчи и Люка в развитии современной науки в целом. В своем классическом труде «Аналитическая теория тепла» (1822) великий французский математик и физик **Жан Батист Жозеф Фурье** (1768-1830)

следующим образом оценивает роль математического метода в решении физических проблем: *«Глубокое изучение природы – наиболее плодотворный источник математических открытий. Такое изучение не только обладает преимуществами хорошо намеченной цели, но и исключает возможность неясной постановки задач и бесполезных выкладок. Оно является надежным средством построения самого анализа и позволяет открывать наиболее значительные идеи, которым суждено навсегда сохраниться в науке.* ***Фундаментальны те идеи, которые отражают явления природы»*** (выделено – А.С.)**.** Олег Боднар после глубокого изучения явления филлотаксиса показал, что гиперболические функции Фибоначчи и Люка являются **естественными функциями Природы,** отражающими важнейший закон природы – закон филлотаксиса. Из этих рассуждений мы можем сделать вывод, что, следуя Фурье, **гиперболические функции Фибоначчи и Люка, введенные Стаховым, Ткаченко, Розиным (а также Боднаром) в работах [9, 10, 11]**, могут быть отнесены к разряду **фундаментальных открытий** современного теоретического естествознания. И поэтому им суждено навсегда сохраниться в науке.

Литература:

1. Стахов А.П. Теории чисел Фибоначчи: этапы большого пути (к завершению международной online конференции «Золотое Сечение в современной науке») // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15313, 30.05.2009
2. Воробьев Н.Н. *Числа Фибоначчи*, Москва, Наука, 1969.
3. Hoggat, V. E. *Fibonacci and Lucas Numbers*, Houghton-Mifflin, Palo Alto, California, 1969.
4. Vajda, S. *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications*. Ellis Horwood limited (1989).
5. Dunlap, R.A. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. World Scientific (1997).
6. Витенько И.В., Стахов А.П. *Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования.* Приборы и системы автоматики, вып. 11, Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1970.
7. Стахов А.П. *Введение в алгоритмическую теорию измерения*. Москва, Советское Радио, 1977 г.
8. Боднар О.Я. *Геометрия филлотаксиса*. Доклады Академии наук Украины, 1992, № 9.
9. Боднар О.Я. *Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве.* Львов, 1994.
10. Стахов А.П., Ткаченко И.С. *Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи*. Доклады Академии наук УССР, 1993, № 7.
11. Stakhov A, Rozin B. *On a new class of hyperbolic functions*. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.
12. Э.М. Сороко. *Структурная гармония систем*. Минск: Наука и техника, 1984.

13. Vera W. de Spinadel. *From the Golden Mean to Chaos*. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
14. Gazale Midhat J. *Gnomon. From Pharaohs to Fractals*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (русский перевод, 2002 г.)
15. Kappraff Jay. *Beyond Measure. A Guided Tour through Nature, Myth, and Number.* Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2002.
16. Татаренко А.А. «T_m *— принцип» — всемирный закон гармонии* // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12575, 10.11.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320002.htm
17. Stakhov, A.P. *The Golden Section and Modern Harmony Mathematics.* In the book "Applications of Fibonacci Numbers," Vol. 7 (1998), 393-399.
18. Стахов А.П. *Коды золотой пропорции*. – М.: Радио и связь, 1984. - 152 с.