С.Л. Василенко

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ПРОПОРЦИЯ В ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ

«Читай не затем, чтобы противоречить и опровергать, не затем, чтобы принимать на веру; и не затем, чтобы найти предмет для беседы; но чтобы мыслить и рассуждать» Френсис Бэкон (1561–1626), английский философ.

Введение. Теория "золотого" сечения (ЗС) не богата разнообразием, однако везде где она ступает, оставляет за собой яркие, неповторимые и уникальные образы.

Это и числа Фибоначчи, которые просто задаются, но порождают целое научное направление разностных (возвратных) уравнений и других приложений. Это и цепные дроби, где ЗС проявляет самую медленную сходимость среди других иррациональных чисел, а также известные редкостные математические свойства константы ЗС в виде тождеств числа Ф.

Тем не менее, знакомство с основами ЗС и выявленными его многочисленными проявлениями (во всяком случае, так утверждают их авторы) показывает ощутимую брешь между качественными и количественными признаками, между четкими математическими зависимостями и архи-приближенным их выражением в практических задачах. Не в смысле точности выражения результата, но в смысле уверенности, что это именно проявление золотого сечения, пусть и «зашумленное», а не отражение иных закономерностей или числовых выражений, например, числа $6\pi^{-2}$, имеющего свое достаточно четкое физическое обоснование.

А когда ЗС в явной форме не прослеживается, придумываются и вводятся его разные инварианты, где очень трудно отличить (отделить) рациональное зерно от плевел хотя бы потому, что при искусном преобразовании любое число можно «вывернуть наизнанку» для получения или достижения востребованного результата.

И такая неуверенность, вызванная отсутствием надежной и многоплановой теории ЗС, присутствует всегда, вследствие чего различные приложения ЗС, среди которых много новых интересных и полезных решений, воспринимаются все-таки больше на веру.

В итоге получается: с одной стороны, уникальная пропорция и редкостные тождества ЗС, выражающие понятие «целого», и с другой стороны, многочисленные применения, возможно, по праву претендующие на отражение ЗС, но что зачастую не очевидно (не факт), и потому между ними огромный разрыв. – Разрыв, в контексте отсутствия связующих теоретических нитей, что заставляет «мыслить и рассуждать» (по Ф. Бэкону), двигаясь дальше.

Расширение исследовательских средств ЗС. Для изложения материала нам понадобится аппарат алгебраических и разностных уравнений, где обычно индексом n обозначается порядок уравнений или многочленов, поэтому такую индексацию сохраним и мы.

В рекуррентных последовательностях также часто употребляют этот индекс, но чтобы исключить неувязки, для числовых рядов целесообразнее использовать нижний индекс t, который, по сути, адекватен развитию процессов во времени.

Тогда параметр t в виде нижнего индекса – это то же самое, что дискретное время.

И это нисколько не мешает в случае необходимости перейти в непрерывную область.

В математике [1, гл. 5; 2–4] формула вида

$$x_{n+t} = a_1 x_{n+t-1} + a_2 x_{n+t-2} + \ldots + a_n x_t = \sum_{j=1}^{n} a_j x_{n+t-j} \qquad (1)$$

называется *линейным однородным разностным* (возвратным) *уравнением* n-го порядка с постоянными коэффициентами a_j, $a_n \neq 0$, $n \in \mathrm{N}$ – числа натурального ряда.

Его линейность обусловлена тем, что вместе с последовательностями $x_{n+t} \neq y_{n+t}$ уравнению (1) удовлетворяет и их линейная комбинация $c_1 x_{n+t} + c_2 y_{n+t}$, где c_1, c_2 – константы.

Однородность уравнения (1) отличает его от уравнений типа

$$x_{n+t} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_{n+t-j} + u(t),$$

где $u(t)$ – некоторая, в общем случае, произвольная числовая последовательность.

При заданных n начальных условиях (затравочных числах) $X_{\text{o}} = (x_0, x_1, \ldots x_{n-1})$ уравнение (1) определяет *линейную рекуррентную* (*возвратную*) *последовательность*: начиная с исходной точки $t = 0$, каждый ее элемент x_{n+t} вычисляется через n предшествующих.

Выражение

$$P(x) \equiv x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_n = x^n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j x^{n-j}, \qquad (2)$$

с коэффициентами из (1), – есть характеристический полином степени $\deg P(x) = n$ разностного уравнения (1).

Корнями полинома (2) называется решение алгебраического уравнения $P(x) = 0$.

Теорема Бернулли[1]. Если λ_1 – единственный наибольший по модулю корень уравнения $P(x) = 0$, а остальные его корни $|\lambda_j| < |\lambda_1|, j = \overline{2, n}$, то для практически любого набора начальных данных $X_{\text{o}} = (x_0, x_1, \ldots x_{n-1})$ линейная возвратная (рекуррентная) последовательность (1) обладает свойством $\lim\limits_{t \to \infty} x_{t+1}/x_t = \lambda_1$.

Приведем некоторые элементы доказательства [2], которые помогают прояснить возникновение предельных свойств.

Поскольку по условию $|\lambda_j| < |\lambda_1|$, то $|\lambda_j/\lambda_1| < 1$ и $(\lambda_j/\lambda_1)^t \underset{t \to \infty}{\to} 0$.

Ограничим случаем, когда все корни λ_j различны, тогда согласно теории разностных уравнений общий член последовательности (1) можно представить в виде [1, с. 347]

$$x_t = c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t + \ldots + c_n \lambda_n^t = \sum\nolimits_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^t,$$

где числа-константы $(c_1, \ldots, c_n)$ определяются с помощью начальных условий $X_{\text{o}} = (x_0, x_1, \ldots x_{n-1})$ из системы n линейных уравнений $\sum\nolimits_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^s = x_s, \quad s = \overline{0, n-1}$.

Отсюда следует

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{\sum\nolimits_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^{t+1}}{\sum\nolimits_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^t} = \frac{\lambda_1^{t+1}}{\lambda_1^t} \cdot \frac{c_1 + \sum\nolimits_{j=2}^{n} c_j (\lambda_j/\lambda_1)^{t+1}}{c_1 + \sum\nolimits_{j=2}^{n} c_j (\lambda_j/\lambda_1)^t} \underset{t \to \infty,\, c_1 \neq 0}{\Rightarrow} \lambda_1. \qquad (3)$$

Таким образом, согласно теореме Бернулли отношение двух соседних членов возвратной последовательности стремится к максимальному по модулю корню характеристического алгебраического уравнения, – практически для любого набора начальных условий X_{o}, за ис-

---

[1] Даниил Бернулли (1700–1782) выдающийся швейцарский физик и математик, сын Иоганна Бернулли. В его работе «Замечания о рекуррентных последовательностях» (1732) изложен рекуррентный метод решения алгебраических уравнений.

ключением такого, который может привести к нулевой константе $c_1 = 0$, когда предельный переход не гарантируется.

Следует сказать, что Бернулли формулировал свою теорему, преследуя цель построения формализованных процедур для рекуррентно-приближенного вычислении корней алгебраических уравнений произвольного порядка. Позже эта задача была обобщена французским математиком А. Пуанкаре для полиномов с переменными коэффициентов, – доказательство его теоремы приведено в работе [1, с. 347–359]

Однако ничто не мешает решать обратную задачу: заранее зная либо специально задавая то или иное число в виде максимального по модулю корня некоторого полинома, исследовать свойства образующихся рекуррентных последовательностей.

В частности, представляет интерес, изучение поведения и сходимости линейных возвратных последовательностей к золотому сечению.

Так мы приходим к центральному, на наш взгляд, пониманию и выделению общего пространства «золотоносных» уравнений (моделей) и адекватных им числовых последовательностей, которое сформулируем в виде следующей теоремы-следствия Бернулли.

Центральная теорема золотого сечения. Если все корни полинома $P(x)$ по модулю $|\lambda_j| < \Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, $j = \overline{1, n}$, то линейная возвратная (рекуррентная) последовательность, порождаемая алгебраическим уравнением $P(x)\cdot\left(x^2 - x - 1\right) = 0$, практически для любого набора начальных данных $X_{\text{o}} = (x_0, x_1, \ldots x_{n+1})$ и целочисленных значений k имеет асимптотическое свойство $\lim\limits_{t\to\infty} x_{t+k}/x_t = \Phi^k$.

Доказательство. В соответствии с основной теоремой высшей алгебры и теоремой Безу для полинома степени $n \geq 1$ существует его единственное линейное представление (с точностью до перестановки сомножителей) в виде произведения линейных множителей $P(x) \equiv \prod_{j=1}^{n}\left(x - \lambda_j\right)$.

И, наоборот, с учетом правила суммирования степеней $\deg(f\cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$ перемножение двух полиномов $P(x)\cdot\left(x^2 - x - 1\right)$ единственным образом приводит к новому полиному $\mathcal{P}(x)$ степени $n+2$ с корнями λ_j, $j = \overline{1, n}$ и $\left(1 \pm \sqrt{5}\right)/2$.

С учетом условия теоремы, наибольшим по модулю корнем полинома $\mathcal{P}(x)$ является Ф. Тогда согласно теореме Бернулли линейная возвратная (рекуррентная) последовательность, порождаемая алгебраическим уравнением $\mathcal{P}(x) = P(x)\cdot\left(x^2 - x - 1\right) = 0$, в своей асимптотике отношения соседних элементов имеет константу золотого сечения $\lim\limits_{t\to\infty} x_{t+1}/x_t = \Phi$.

Из соотношения (3) при замене $t+1$ на $t+k$ естественным образом вытекает и более общее утверждение $\lim\limits_{t\to\infty} x_{t+k}/x_t = \Phi^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, что и доказывает теорему.

Таким образом, из центральной теоремы золотого сечения (ЦТ ЗС) следует, что кроме классического квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$ и соответствующей аддитивной рекурсии Фибоначчи $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$, любое алгебраическое уравнение вида $P(x)\cdot\left(x^2 - x - 1\right) = 0$ в его адекватном рекуррентном представлении также обусловливает золотое сечение, если все корни полинома $P(x)$ по модулю меньше Ф.

Например, алгебраическое уравнение $\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - x - 1\right) = x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 1$ и его «двойник» в виде линейного однородного возвратного уравнения 4-го порядка

$x_{t+4} = x_{t+3} + 2x_{t+2} - x_{t+1} - x_t$ приводят к золотому сечению, поскольку Ф – здесь наибольший по абсолютной величине действительный корень.

В то же время, уравнение $(x-1)(x-2)\left(x^2 - x - 1\right) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 2$ и соответствующая рекуррентная последовательность $x_{t+4} = 4x_{t+3} - 4x_{t+2} - x_{t+1} + 2x_t$ порождают асимптоту $\lim\limits_{t\to\infty} x_{t+1}/x_t = 2 > \Phi$.

ЦТ ЗС существенным образом расширяет наши представления о широте, а возможно, и универсальности проявления ЗС в окружающем нас мире.

Теорема нисколько не ограничивает порядок n алгебраического и возвратного уравнений, тем самым, осуществляя важное и многостороннее обобщение (не только в общей концепции ЗС) и создавая условия для теоретического обоснования интегрирующего начала ЗС в развитии многих природных процессов и явлений. Следовательно, в общем случае мы имеем дело с n-мерным линейным (векторным) пространством решений (проявлений) золотого сечения, базисом которого могут служить любые n линейно независимые наборы чисел $X_{\text{о}} = (x_0, x_1, \ldots x_{n-1})$, не равные одновременно нулю.

Частные случаи.

Представляет интерес рассмотреть некоторые частные способы задания полинома $P(x)$.

1. Использование p-сечений [5].

Данная модель описывается полиномом $x^{p+1} - x^p - 1$, который при степенном показателе $p = 1$ превращается в квадратное уравнение золотого сечения.

Отметим, что p-сечения – удобные математические формы, которые имеют хорошую геометрическую интерпретацию и широкие возможности в кодировании информации.

Для наших исследований они обладают дополнительными особенностями:

– наличие в полиноме рядом стоящих старших степеней;
– все корни полинома по модулю меньше Ф.

Исходя из ЦТ, p-сечения легко «насыщаются» свойствами ЗС для любых значений p

$$\left(x^{p+1} - x^p - 1\right)\left(x^2 - x - 1\right) = 0. \qquad (4)$$

В таком виде, не теряя свойств p-сечений, они приобретает новые качества, обусловленные уникальными свойствами гармонической пропорции.

В развернутом виде алгебраическое уравнение (4) приобретает вид:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0, & p = 1, \\ x^5 - 2x^4 + x + 1 = 0, & p = 2, \\ x^{p+3} - 2x^{p+2} + x^p - x^2 + x + 1 = 0, & p \geq 3. \end{cases}$$

Последнее соотношение (рис. 1) можно видоизменить как $x^p\left(x^3 - 2x^2 + 1\right) = x^2 - x - 1$ или $x^p(x-1)\left(x^2 - x - 1\right) = x^2 - x - 1$, которое после деления на трехчлен "золотого сечения" $x^2 - x - 1$ возвращает нас к исходной модели p-сечения, что вполне закономерно и подтверждает правильность выполненных преобразований.

Соответствующие (4) рекуррентные последовательности имеют вид

$$\begin{cases} x_{t+4} = 2x_{t+3} + x_{t+2} - 2x_{t+1} - x_t, & p = 1, \\ x_{t+5} = 2x_{t+4} - x_{t+1} - x_t, & p = 2, \\ x_{t+p+3} = \left(2x_{t+p+2} - x_{t+p}\right) + \left(x_{t+2} - x_{t+1} - x_t\right), & p \geq 3. \end{cases}$$

и согласно теореме Бернулли в своей относительной асимптотике стремятся к золотому сечению $\lim\limits_{t\to\infty} x_{t+k}/x_t = \Phi^k$.

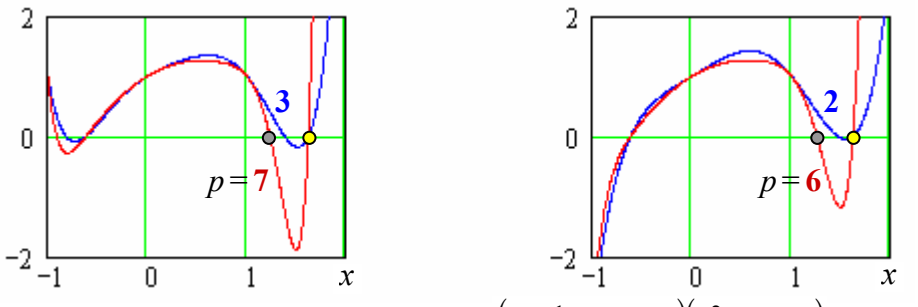

Рис. 1. Графики полиномов вида $\left(x^{p+1} - x^p - 1\right)\left(x^2 - x - 1\right)$:
корень справа – число Φ золотого сечения; левее – корень p-сечения

А как же сами p-сечения?

Для того чтобы проследить их свойства в числовых последовательностях нам понадобится следующая теорема [2].

Теорема. Если λ_1, λ_2 – корни уравнения $P(x) = 0$, а остальные его корни строго меньше этих корней по модулю $|\lambda_j| < |\lambda_2| \leq |\lambda_1|, j = \overline{3, m}$, то для практически любого набора начальных данных $X_o = (x_0, x_1, \ldots x_{n-1})$ линейная возвратная (рекуррентная) последовательность (1) обладает свойством $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{H}_{2,t+1}/\mathrm{H}_{2,t} = \lambda_1\lambda_2$, где $\mathrm{H}_{2,t} = \begin{vmatrix} x_t & x_{t+1} \\ x_{t+1} & x_{t+2} \end{vmatrix} = x_t x_{t+2} - x_{t+1}^2$ – определитель Ганкеля 2-го порядка.

Исходя из данной теоремы, после деления на первый корень $\lambda_1 = \Phi$, имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}x_{t+3} - x_{t+2}^2}{x_t x_{t+2} - x_{t+2}^2} \cdot \frac{x_t}{x_{t+1}} = \lambda_2,$$

где λ_2 – действительный положительный корень p-сечения алгебраического уравнения (4).

Таким образом, модель (4) органически объединяет свойства двух математических конструкций: гармонической пропорции и p-сечений.

2. Использование полинома $P(x) = x^{p+1} - x - 1$ [6].

Старшая степень для удобства сопоставления оставлена, как и в пункте 1.

В отличие от выше рассмотренного случая, данный полином характеризуется большим разнесением старших степеней у переменной x.

Исходя из ЦТ ЗС, он также легко дополняется свойствами ЗС для любых значений p

$$\left(x^{p+1} - x - 1\right)\left(x^2 - x - 1\right) = 0. \qquad (4)$$

Алгебраическое уравнение (4) в каноническом представлении и соответствующее ему возвратное уравнение для разных значений степени полинома p имеют вид (рис. 2):

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0, & p = 1, \\ x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x + 1 = 0, & p = 2, \\ x^{p+3} - x^{p+2} - x^{p+1} - x^3 + 2x + 1 = 0, & p \geq 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{t+4} = 2x_{t+3} + x_{t+2} - 2x_{t+1} - x_t, & p = 1, \\ x_{t+5} = x_{t+4} + 2x_{t+3} - 2x_{t+1} - x_t, & p = 2, \\ x_{t+p+3} = \left(x_{t+p+2} + x_{t+p+1}\right) + \left(x_{t+3} - 2x_{t+1} - x_t\right), & p \geq 3. \end{cases}$$

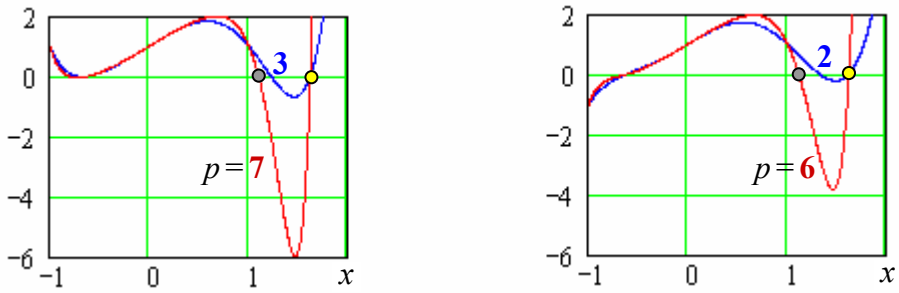

Рис. 2. Графики полиномов вида $\left(x^{p+1} - x - 1\right)\left(x^2 - x - 1\right)$:
корень справа – число Ф золотого сечения; левее – корень исходного полинома

Выводы.

Предложена и доказана центральная теорема золотого сечения, согласно которой ЗС представляется n-мерным линейным пространством решений (проявлений), базисом которого могут служить любые n линейно независимые наборы чисел $X_o = (x_0, x_1, \ldots x_{n-1})$, не равные одновременно нулю.

Это означает, что в общем случае сотни, миллиарды разных чисел (произвольных соразмерных начальных условий или объектов) посредством возвратной рекурсии, описываемой однородным линейным разностным уравнением n-го порядка, могут группироваться (объединяться), создавая одно целое с аттрактором в виде гармонической пропорции.

Основной практической задачей становится выбор и теоретическое обоснование приемлемых ("удобоваримых") рекурсий, отражающих физические закономерности природных образований, процессов и явлений. Одна из таких рекурсий предложена в работе [7].

Литература.

1. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.
2. *Утешев А.Ю.* Разностное уравнение и рекуррентная последовательность. – http://pmpu.ru/vf4/recurr.
3. *Утешев А.Ю.* Полиномы и алгебраические уравнения от одной переменной. – http://pmpu.ru/vf4/polynomial.
4. *Сушкова М.В.* Приложения Жордановой нормальной формы // Математика в ВУЗе / Интернет-журнал СПбГТУ. – 2002. – № 2. – http://www.spbstu.ru/public/m_v/index.html.
5. *Витенько И.В.*, *Стахов А.П.* Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. – В кн. Приборы и системы автоматики. – Вып. 11. – Харьков: ХГУ, 1970.
6. *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов: Пер. с англ. – М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 272 с. / Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 /.

7. *Василенко С.Л.* Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения. – Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.