Д.Клещев

ВОЗВРАЩЕНИЕ ОРФЕЯ

гармония и дисгармония современной математики

His ornari aut mori. [1]

D.Kleschev

RETURNING ORPHEUS

the harmony and disharmony of modern mathematics

Его гармония – в его дисгармонии,
его единство – в его вражде.

П.Флоренский

С древнейших времен представление о бесконечности вдохновляло человека, вселяло религиозный трепет, сводило с ума, являлось предметом ожесточенных дискуссий. Мифологема бесконечности как атрибут божественной истины, космогоническая константа и тайна вечной жизни прослеживается во всех без исключения культурах и выступает связующей нитью для истории всей человеческой цивилизации.

В самых ранних ведических преданиях отчетливо запечатлен акт человеческого сознания, направленный на осмысление принципов конечного и бесконечного. Согласно дошедшим до нас ведическим текстам, именно в результате борьбы между асурами, проявлениями Дити и Адити («ограниченности» и «безграничности»), возникает и исчезает все сущее. Гигантский змей Ананта («бесконечность»), на кольцах которого отдыхает защитник вселенной Вишну, в то же время являет собой воплощение Шивы, стремящегося поглотить и разрушить мир, создаваемый из едино-сущего Брахмы. Ведическая культура в иносказательной форме прекрасно передает противоречия, неизбежно возникающие на самом высоком уровне абстракций, и, судя по всему, такое парадоксальное восприятие считалось носителями ведической культуры источником мудрости и божественных откровений [2].

Подобные синкретичные представления повторяются во многих культурах, переживавших на протяжении огромного исторического периода и величественный подъем, и неожиданный упадок. Однако за всем разнообразием религиозных представлений всюду прослеживается архетип змеи, олицетворяющей собой парадоксальное состояние хаоса. Прародительница богов Тиамат в шумеро-аккадской культуре, космический змей Апоп в культуре древнего Египта, образ дракона в восточной культурной традиции, древнегреческий змей Тифон, хранитель священного центра Гео, пернатый змей толтеков Кецаль-коатль, мировой змей Мидгарда в скандинавской мифологии, древний змий иудео-христианства. По мере развития каждой культуры недетерминированное мифологическое сознание сменялось более дифференцированным формальным подходом. Четкое разделение на божественное и демоническое (связанное с низвержением змея и его расчленением), упорядочение небесной иерархии и обрядов вело к наивысшему расцвету культурной традиции. Вместе с тем, сеяло семена раздора, вызывало религиозный раскол, становилось причиной истощения и деградации культуры.

---

[1] Гравюра из философского трактата П.Флоренского «Столп и утверждение истины». Перевод с лат. «Принять венец либо умереть».

[2] Неопределенность мифологических образов, возникающих из наблюдений и обобщений чувственного опыта, допускает их произвольную интерпретацию и позволяет им проявлять «вневременную» устойчивость. Так, сплошь и рядом встречающееся в мифах представление о зарождении вселенной посредством «первозданных космических вод», с точки зрения накопленных человеком знаний воспринимается как весьма наивное объяснение, не имеющее никакого отношения к происхождению изучаемой нами вселенной. Однако если учесть способность молекулы воды формировать в пространстве «золотой треугольник» *H-O-H* с углом в вершине, равным *108°*, (*109,5°-104,5°* в зависимости от агрегатного состояния), то подобные космогонические предания, связанные с мифологемой «космического яйца» и представлением об изначальном хаосе, обретают иное звучание. Помимо обыденной зооморфной интерпретации рождения вселенной, «первозданные космические воды», как одно из проявлений гармонического отношения числа *Ф*, можно рассматривать как символическое обозначение смены нестабильного хаотичного состояния системы вполне упорядоченной структурой.

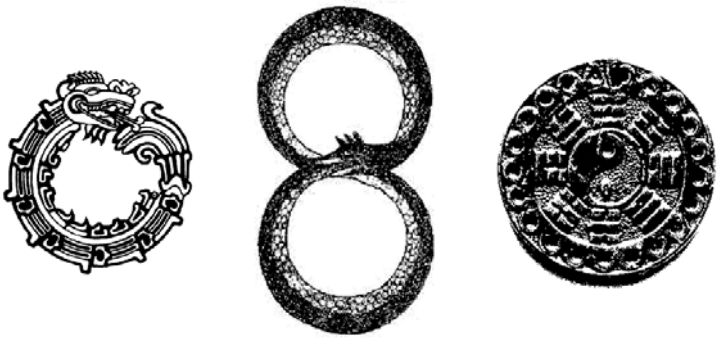


Рис.1. *Образ змеи в культурах народов мира и мифологема бесконечности.*

Переход от религиозно-мифологического восприятия к научному складывался в рамках астрономических и вычислительных традиций древнего Египта, Вавилона и Китая, но государственное устройство древних царств, использовавших религию для укрепления власти, вряд ли могло способствовать развитию науки. Поэтому становление научного мировоззрения стало возможным только в эпоху античности на базе более архаичного общественного строя древней Греции. Пробудив дремавшие силы человеческой мысли, древнегреческим философам удалось испытать торжество логоса над хаосом и заложить фундамент многих наук. Однако им же было суждено столкнуться с вездесущими парадоксами бесконечности, которые были известны прежде и которые предопределили скорый возврат античной науки к мистицизму, а в последствии к многовековому сдерживанию и преследованию научного детерминизма со стороны христианской церкви.[3]

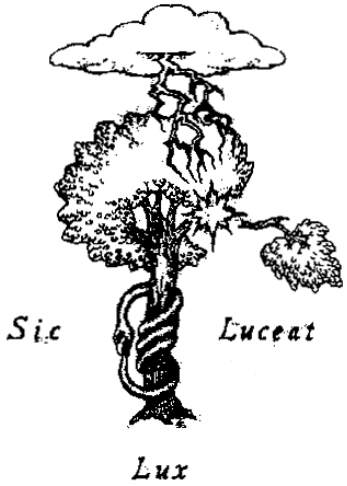


Рис.2. *Гравюра из книги Артуро Перес-Реверте. Взаимосвязь архетипа змеи и мирового древа.*

Одним из первых древнегреческих мыслителей, исследовавших понятие бесконечности вне теологической традиции, следует назвать Анаксимандра. Вопреки во многом еще мифологическим воззрениям своего учителя Фалеса, началом всего сущего он полагал движение бесконечного (το απειρον), благодаря которому с течением времени происходит трансформация всех вещей, включая неисчислимые космосы.[4] Так как в учении Анаксимандра божественное сознание не упоминалось в качестве необходимой первопричины движения материи, то именно его можно по праву считать основоположником научного материализма.[5] Бесконечная множественность и бесконечная целостность, отождествляемая со свойствами единицы, привлекали внимание многих мыслителей и тщательно изучались в философских школах периода античности. Но если говорить о парадоксах бесконечности, то наиболее показательными с точки зрения математики являются, конечно же, апории Зенона Элейского.

Противоречия, обнаруженные учеником Парменида Зеноном, могут быть рассмотрены на примере апории «Ахиллес и черепаха»: быстроногий герой никогда не догонит черепаху, которая ползет на некотором расстоянии *a* впереди него. Пока Ахиллес, бегущий в *k* раз быстрее черепахи, преодолевает расстояние *a*, черепаха

---

[3] В целом христианскую цивилизацию можно рассматривать как закономерное продолжение синкретичной мифологической традиции. Не взирая на то, что образ древнего змия однозначно назван в христианстве первоисточником лжи, история беспристрастно свидетельствует о делах самой церкви как о делах, не столь поборающих, сколько приумножающих силу змия. Речь, разумеется, не только о взаимном неприятии религии и науки, но об имманентных свойствах религиозного мировосприятия, в котором (равно как в научном, и об этом будет сказано далее) происходит смешение и смещение изначальных условий. Так, обусловленная психологически вера в божественный разум приводит к тому, что в действительности преклоняются перед чем-то противоположным и по самой своей сути иррациональным (ибо кто может сказать: «Я познал Бога»?). Здесь, кажется, будет уместным упоминание Апокалипсиса, одной из самых таинственных книг Писания, в которой говорится о богоотступничестве христианских церквей и высвобождении змия-искусителя, обольщающего народы. К представлению об изначальной синкретичности христианства можно прийти также при более внимательном прочтении главной христианской молитвы О́тче нашъ, к которому, заметим, обращаются не иначе как «и не введи́ насъ во искуше́нїе, но изба́ви насъ от лука́ваго».

[4] Концепция многих космосов, возникающих и исчезающих «в назначенный временем срок», находит закономерное отражение в астрофизике, в которой допускается гипотеза возникновения расширяющейся вселенной в результате взрыва сингулярной точки с последующим формированием мира элементарных частиц и мира астрономических объектов.

[5] При всем уважении к философу-идеалисту А.Ф.Лосеву как исследователю античности, написанная им в приступе ненависти к материализму «Диалектика мифа» не вызывает ничего, кроме чувства сожаления. Напрасно философ взялся говорить о мифологичности науки, разрывая при этом всякую обратную связь между наукой и мифологией, чтобы таким дурным способом получить «*абсолютную мифологию*». Запутываясь сам и запутывая других, он выводит вожделенную первичную идею, которая, впрочем, оказывается совершенно безумной. Раз потенция истинного существует в «*абсолютной мифологии*» вместе с потенцией ложного в неразличимом виде, стало быть, все можно, и нет никаких законов, стало быть, Я в раю, в котором нет Логоса. Именно таковы устремления тех, кто использует разум для утверждения безумия.

В действительности же диалектика заключается в том, что в меру непознанности иррационализм точно так же свойственен жрецам науки, как для синкретичной мифологии свойственно живописание объективной реальности, позволяющее улавливать в ней многообразие смысловых оттенков. Стоит лишь только произвести в мифологии усечение всего «ненужного» и материального, как она сразу мертвеет и обращается в несвязанный бред, не имеющий никакой ни возвышенной, ни даже сакраментальной значимости.

Между тем, как раз дословно переведенное латинскими авторами как materia («ткань») древнегреческое определение υλη (имеющее обиходное значение «лес», «дерево», «древесина»), относит нас к широко распространенному мифологическому представлению о мировом древе, пронизывающем все уровни вселенной. Вот об этой мифологеме божественной материи, удаленной от порой такого пагубного антропоцентризма, и надлежит, прежде всего, поразмыслить змиеискателям, пеняющим на материализм и называющим его Левиафаном за довольно тонкое внешнее сходство образа змия с образом древа, которое и достигается-то с помощью иллюзии, то есть в биологическом смысле мимикрией.

успеет проползти расстояние $\frac{a}{k}$, пока Ахиллес преодолевает расстояние $\frac{a}{k}$, черепаха успеет проползти еще один промежуток $\frac{a}{k^2}$ … Выходит, Ахиллес никогда не догонит черепаху, так как расстояние, разделяющее их, можно делить до бесконечности. Более того, допустим, что Ахиллес догонит черепаху, то есть пройденный им путь будет равен пути черепахи $S_A = S_{Ch}$. Запишем все промежутки, пройденные Ахиллесом и черепахой:

$$S_A = a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} \ldots ; \; S_{Ch} = \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} \ldots \; .$$

Как видим, если черепаха проползет два промежутка, то Ахиллесу, потребуется пробежать три отрезка пути. Записав общее число промежутков, пройденных черепахой, через *A*, мы получим парадоксальное равенство *1+A=A*, означающее, как полагали (а некоторые полагают и теперь), что часть некоторого множества может быть равна всему этому множеству. Однако подлинный динамический смысл этого равенства связан, безусловно, со смещением пространственной координаты $A - A = -1$ или $0 = -1$ (отсутствие разделяющего расстояния равно целостному отсутствию всего разделяющего расстояния).

Инфинитные парадоксы Зенона оказали значительное влияние на становление античной и средневековой математики. Помимо всего прочего, есть основания утверждать, что в апориях Зенона Элейского впервые был выдвинут математический тезис о существовании актуальной бесконечности, который в конце XIX века послужил основанием для возникновения теории бесконечных множеств Г.Кантора. Хотя сам Зенон, разумеется, отдавал себе отчет в том, что не только Ахиллес, но и любой другой, в состоянии догнать черепаху, а стрела, выпущенная и летящая прямо в цель, обязательно в нее попадает.

Математические доводы Зенона Элейского подчеркивали глубокий диалектический характер представления о бесконечности, поэтому Аристотель полагал родоначальником диалектики его, а не более раннего предшественника Зенона философа Гераклита. Что же касается самого Аристотеля, то из всех античных ученых ему первому удалось разобраться в логических затруднениях, возникающих с введением в математику понятия бесконечности. Опровергая идеалистические воззрения своего учителя Платона, Аристотель указывал, что бесконечное не существует актуально как бесконечное тело или величина, воспринимаемая непосредственно органами чувств, что бесконечное существует только потенциально и обнаруживается индуктивно, в процессе движения. Так, расстояние между бегущим с постоянной скоростью Ахиллесом и черепахой может уменьшаться до бесконечности только при условии, что, начиная с некоторого момента, станет возможно бесконечное уменьшение размеров самих Ахиллеса и черепахи. В предельном значении, при условии, что Ахиллес и черепаха не будут иметь размеров вообще, что равнозначно совершенному их отсутствию.[6]

Рис.3. *Рафаэль Санти. «Афинская школа». Леонардо да Винчи в образе Платона и Аристотель.*

Поскольку допущение существования актуальной бесконечности уже во времена античности приводило к противоречивым умозаключениям, не удивительно, что многие математики и философы спустя сотни и тысячи лет после Аристотеля так или иначе подтверждали сформулированную им теорему «Infinitum actu non datur». Парадоксальность понятия актуальной бесконечности неоднократно подчеркивали Лейбниц, Декарт, Кант, Гаусс, Коши, Пуанкаре, Брауэр, Лузин, а также другие выдающиеся ученые. Справедливости ради уместно напомнить высказывание самого Г.Кантора, который признавался, что к идее формализации актуальной бесконечности он пришел «почти против собственной воли и в противоречии с ценными для него традициями, логически вынужденный к этому ходом многолетних усилий и попыток».[7] Он действительно проделал неимоверную умственную работу для того, чтобы разрешить парадоксы бесконечности и устранить открытые им самим логические противоречия в теории бесконечных множеств.[8] Однако усилий талантливого математика оказалось недостаточно, погрузившись в мир парадоксальных абстракций, его пытливый ум не выдержал нагрузки, ученый лишился способности связанно мыслить и был вынужден провести остаток дней в психиатрической клинике. Впрочем, Г.Кантор далеко не единственный математик XX века, столкнувшийся с душевной болезнью подобного рода.

---

[6] Примечательно то, что известное высказывание Аристотеля «Amicus Plato, sed magis amica est veritas» (с лат. «Платон друг, но более великий друг истина», изначально имело ироническое значение, так как греч. прозвище Πλάτων означает «широкий») используется в рамках научной парадигмы как манифестация борьбы с идеализмом платонического мира, в котором сами по себе могут существовать парадоксальные абстракции. В то же время, ни что иное как целиком и полностью идеалистическое допущение актуальной бесконечности, против которого возражал Аристотель, лежит в основании теории множеств, которая в настоящее время выдается академическим сообществом за подлинно научную теорию.

Совершенно аналогичная манипуляция имела место в прошлом, когда средневековые ученые и схоласты ссылались на ошибочное астрономическое учение Аристотеля о небесных сферах, но преднамеренно выпускали из внимания обоснованное с точки зрения логики аристотелевское утверждение «Infinitum actu non datur» (с лат. «Актуальная бесконечность не существует»). Так как религиозное, в частности, иудео-христианское мировосприятие абсолютизирует божественный разум через актуализацию бесконечности, то положение о существовании потенциальной бесконечности и только ее неизбежно приводит такого религиозного человека к атеизму. Во всяком случае, именно таков был генезис данного направления, и такова была его историческая взаимосвязь с иудео-христианством.

[7] Г.Кантор. Труды по теории множеств. М., 1985. С.73.

[8] Согласно теории Г.Кантора, бесконечное множество, составленное из всех трансфинитных чисел, являясь вполне упорядоченным, выражается трансфинитным числом Ω. Но тогда трансфинитное число Ω должно оказаться больше всех трансфинитных чисел и, соответственно, больше самого себя, что невозможно. Данное противоречие устраняется, если рассматривать трансфинитное число Ω в качестве потенции бесконечного множества всех трансфинитных чисел, то есть, если признать, что, вообще говоря, любое трансфинитное число отнюдь не выражается через актуально бесконечное множество.

Взгляни на эти врата, карлик, - продолжал я, - у них два лица.
Две дороги сходятся здесь…Они противоречат друг другу…Но если бы
кто-нибудь прошел по ним все дальше и дальше, думаешь ли ты,
карлик, что эти пути будут вечно противоречить друг другу?

Ф.Ницше

С самого начала своего возникновения теория бесконечных множеств подвергалась жесткой критике со стороны научного сообщества, и особенно тяжело на самочувствии Г.Кантора сказалось отторжение многими математиками его гипотезы континуума. Многочисленные в то время сторонники аксиомы Архимеда, утверждающей потенциальный характер бесконечности, еще в конце XIX века обвинили создателя теории бесконечных множеств в злоупотреблении формальными методами и спекулятивной подмене бесконечного ряда онтологически завершенным (а значит, конечным) значением.[9] Не прекращались нападки на теорию бесконечных множеств и после того, как стали очевидны ее заслуги в становлении математической логики и в формировании абстрактно-модернистского подхода в математике.[10]

Например, гарвардский физик П.Бриджмен, лауреат Нобелевской премии, продолжал утверждать следующее: «Операции, используемые при построении непрерывной десятичной дроби, не могут быть завершены, поэтому незаконно постулировать выполнение других операций, которые предполагается осуществлять далее, после невозможности завершения построения непрерывной десятичной дроби».[11] Комментируя это возражение, касающееся диагонального метода Г.Кантора, авторитетный исследователь теории бесконечных множеств А.Френкель приводил в ответ довольно логичное объяснение. В самом деле, казалось бы, для доказательства несчетности бесконечного множества совсем не обязательно завершать построение непрерывной десятичной дроби, для этого достаточно, «чтобы для каждого данного действительного числа имелся закон, который позволял бы продолжать его разложение сколь угодно долго».[12] Закон, о котором идет речь при извлечении $\sqrt{2} = x$, остается одним и тем же для каждого шага бесконечной десятичной дроби x, а раз так, нет никакого формального запрета мыслить образующуюся бесконечную последовательность как единое целое.

Рис.4.*Свое же угрызает. Гравюра из трактата П.Флоренского.*

Однако нельзя опровергнуть факт того, что закон построения непрерывной десятичной дроби $\sqrt{2} = x$ остается законом только при возможности его бесконечного применения. Примененный единожды либо конечное число раз данный закон утрачивает свою силу. Если бы это было не так, то бесконечный процесс действительно имел бы завершенный характер, так как свойством завершенности обладал бы каждый конечный, следовательно, и бесконечно большой, шаг рассматриваемой последовательности (то есть, если бы выполнялось, например, равенство $1{,}4^2 = 2$). Поскольку ничего подобного мы не наблюдаем, то вряд ли формальные методы анализа в состоянии развеять все неясности и сомнения в абсолютной справедливости введения актуальной бесконечности.[13] То же самое можно сказать о законе построения числа π, которое затем приводится А.Френкелем в качестве другой бесконечной последовательности, мыслимой как единое целое. Но и этот закон, согласно формуле Ф.Виета, представляет собой потенциально бесконечный процесс:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots$$

---

[9] С тех пор мало что изменилось, разве только то, что число сторонников потенциальной бесконечности, открыто заявляющих в наши дни о некорректности использованного в теории множеств подхода, заметно поубавилось. Но тогда, на рубеже веков, признание теории бесконечных множеств оказалось тесно связано с именем Д.Гильберта, с восторгом ее воспринимавшего, будучи убежденным, что со временем вопрос об отсутствии противоречий аксиоматического построения геометрии будет решен. На II Международном Парижском Конгрессе Д.Гильберт обращал внимание математического сообщества, что ключом к их устранению является отыскание и разрешение противоречий в аксиомах арифметики. Однако со временем произошло нечто иное. Главная задача, сформулированная Д.Гильбертом (устранение противоречий), отошла на второй план, зато нескрываемое восхищение выдающегося математика теорией бесконечных множеств стало трактоваться как строгое доказательство ее справедливости (хотя ни Д.Гильберт, ни какой-либо другой математик такого строгого доказательства не приводил). Более того, ни кто иной как Д.Гильберт настаивал, что «необходимо согласиться, что состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов теории бесконечных множеств, на продолжительное время невыносимо».

[10] Точно так же нельзя, например, отвергать ценность математических, логических и естественно научных достижений, сделанных средневековыми схоластами, учеными и алхимиками эпохи Возрождения. Без изучения их трудов невозможно себе представить всю полноту и сложность хода исторического развития цивилизации.

[11] Много позже другой лауреат Нобелевской премии, физик Е.Вигнер, рассматривая кризисные явления фундаментальной науки (Е.Вигнер. Этюды о симметрии. М., 1971, С.174), тоже упоминал о вероятной ошибке, связанной с представлением об иррациональных числах, замечая, что «правила действий, производимые над последовательностями, то есть над иррациональными числами, также относятся к категории правил, которые были сформулированы так, что воспроизводили правила действий над уже известными нам величинами». Вообще закономерно, что наибольшую неудовлетворенность «абстрактной» математикой проявляли и проявляют именно физики, хорошо понимающие глубинный методологический раскол математики и физики, возникший в XX веке.

[12] А.Френкель. О диагональном методе Г.Кантора // перевод Я.В.Шрамко. Вестник Московского университета. Серия 7. Философия. №5, 2003, С.62-67

[13] Столь же неубедительным в этом смысле является так называемое формальное доказательство существования бога, согласно которому достаточно просто сослаться на существование слова «Бог», чтобы считать доказанным данное понятие объективно-существующим. При этом очевидно, что само по себе слово «Бог» не обладает необходимыми божественными свойствами разумности, вездесущности, вечности, равно как завершенная математическая формулировка закона построения десятичной дроби не обладает необходимыми свойствами самой бесконечной десятичной дроби, которая с ее помощью задается.

В ходе исследования аксиом геометрии и теории чисел Д.Гильберт пришел к выводу, что из аксиом анализа с помощью одних только его методов невозможно доказать ни отсутствие, ни наличие противоречий для двух аксиом, допускающих различную интерпретацию бесконечности.[14] Аксиома Архимеда, соответствующая представлению о потенциальной бесконечности, и аксиома Г.Кантора, соответствующая понятию об актуальной бесконечности, принимаются одинаково истинными, а раз так, то применение к ним закона исключенного третьего, позволяющего вывести из утверждения *А* противоположное заключение *не-А*, становится невозможным.[15] Тем самым Д.Гильберт подтверждал мнение Л.Кронекера, настаивавшего на том, что методы анализа не позволяют достигать всей полноты математической строгости.[16]

Однако предложенный Д.Гильбертом компромиссный подход получил свое развитие в неожиданных для математики результатах, полученных К.Гёделем. Если Д.Гильберт, хорошо осведомленный о противоречиях в теории бесконечных множеств и сам обнаруживший в ней логический парадокс пересчета, получивший название «Гранд Отель», не критиковал теорию Г.Кантора из опасения, что таким образом будут навсегда утрачены весьма важные онтологические моменты, содержащиеся в ней, то К.Гёдель высказал предположение, что математика с набором существующих в ней аксиом вообще не может быть наукой, лишенной противоречий.

Парадоксальное предположение К.Гёделя оказало огромное влияние на последующее развитие абстрактно-модернистской математики. Так, в 1963 году П.Коэн доказал, что из аксиом теории множеств нельзя ни доказать, ни опровергнуть гипотезу континуума Г.Кантора. По существу же, доказательство П.Коэна явилось своего рода апогеем всей теоретико-множественной школы Г.Кантора, замкнувшим круг безрезультатных поисков выхода из противоречий понятия актуальной бесконечности. В рамках теории множеств продолжали выводиться трансфинитные абстракции, но былого энтузиазма и единства среди представителей данной школы уже не наблюдалось. Не случайно поэтому, что спустя всего несколько лет, в 1968 году, группа математиков, писавшая под псевдонимом Н.Бурбаки и ставившая своей целью изложение математики с точки зрения теории множеств, известила о своем распаде.

Разумеется, восторженное высказывание Д.Гильберта «Никто не сможет изгнать нас из рая, который создал для нас Георг Кантор» неоднократно подвергалось сомнению на протяжении всего XX века. Так, например, Л.Брауер, ученик Д.Гильберта, назвал теорию множеств Г.Кантора «патологическим казусом в истории математики, от которого грядущие поколения придут в ужас». Однако ни мнение Л.Брауера, ни критика Л.Виттгенштейна, ни альтернативные идеи П.Вопенка о «необозримом конечном», ни взгляды прочих исследователей никак не могли повлиять на сложившееся отношение к теории бесконечных множеств, так как были основаны исключительно на интуитивном подходе.[17] Переход от интуитивной критики теории множеств Г.Кантора к критике, основанной на законах логики, наметился лишь во второй половине XX века, благодаря работам Д.Хофштадтера и некоторых других ученых. Но полностью он был осуществлен сравнительно недавно замечательным русским математиком и философом А.Зенкиным.[18]

---

[14] А.В.Васильев. Вступительная статья «От Евклида до Гильберта» // Д.Гильберт. Основания геометрии. Петроград, 1923, С.XXVIII.

[15] Аксиома Архимеда: «Если даны два отрезка *AB* и *CD (AB > CD)*, то на прямой *AB* можно от точки *A* отложить отрезок *CD* последовательно столько раз, что получится отрезок *AN*, больший или равный отрезку *AB*, то есть можно найти целое число *x*, при котором будут выполнены неравенства $x \cdot CD > AB$, $(x - 1) \cdot CD < AB$».

Более ранний предшественник Архимеда Евдокс Книдский сравнивал две величины как отношения $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{\gamma}{\delta}$, и говорил, что они равны, если для любых натуральных чисел *m* и *n* выполняется одно из трех условий: 1) либо $m\cdot\alpha < n\cdot\beta$ и $m\cdot\gamma < n\cdot\delta$; 2) либо $m\cdot\alpha = n\cdot\beta$ и $m\cdot\gamma = n\cdot\delta$; 3) либо $m\cdot\alpha > n\cdot\beta$ и $m\cdot\gamma > n\cdot\delta$. Вплоть до XIX века аксиома Архимеда оставалась единственной аксиомой измерения, пока не была дополнена аксиомой Р.Дедекинда, включившей в рассмотрение отрезки, заданные иррациональными числами, что позволило говорить о получении непрерывности для всех действительных чисел. Теория Р.Дедекинда любопытна тем, что изложена она в полном соответствии с математической традицией, берущей начало от Евдокса. На основании того, что поле рациональных чисел обозначалась Р.Дедекиндом как «данная целиком» совокупность Q, большинство математиков сходится во мнении, что в аксиоме Р.Дедекинда уже использовалось понятие актуальной бесконечности. Однако при этом упускается из вида, что непрерывность задана в теории Р.Дедекинда не совокупностью Q (она как раз разрывается, чтобы нашлось место для всех иррациональных чисел), а с помощью иррационального сечения Q, то есть последовательным делением всех действительных чисел на рациональные и иррациональные. Потому как множество всех действительных чисел было у него разделено на две части, оно никак не может выступать совокупностью «данной целиком». Введенное обозначение Q корректнее рассматривать как общий для всех рациональных чисел закон, согласно которому любое рациональное число можно представить как отношение двух конечных целых чисел.

Попытка мыслить бесконечное множество действительных чисел в качестве единого целого была предпринята Г.Кантором. Согласно аксиоме Г.Кантора, любая последовательность вложенных друг в друга отрезков, длины которых стремятся к нулю, имеет одну общую точку. При этом очевидно, что бесконечная последовательность вложенных отрезков $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3\ldots$ задана Г.Кантором потенциально, к выводу об актуальном характере бесконечности он приходит только тогда, когда получает общую точку сходимости *0*. В этом смысле Аксиома Г.Кантора есть ни что иное как обобщение апории Зенона Элейского об Ахиллесе и черепахе, только если Зенон утверждал, что Ахиллес никогда не догонит черепаху, то Г.Кантор, рассматривая предельное значение *0*, полагал обратное. Но допущение актуальной бесконечности в равной степени приводит к исчезновению объектов исследования. В апории Зенона отсутствуют Ахиллес и черепаха, у Г.Кантора исчезают отрезки, которые, сходясь в общей точке *0*, становятся нульмерными, но нульмерным объектом в геометрии по определению является точка, а не отрезок.

[16] Л.Кронекер отрицательно относился к теории иррациональных чисел. Будучи убежденным последователем К.Ф.Гаусса, он говорил о необходимости арифметизации математики, чем немало обескураживал многих ученых конца XIX века. Переживания Л.Кронекера за будущность математики отразились в его дискуссии с К.Вейерштрассом, к которому, между прочим, были обращены следующие слова: «Скоро арифметика покажет настоящие точные пути анализу и убедит в неверности всех тех умозаключений, с которыми работает современный, так называемый, анализ».

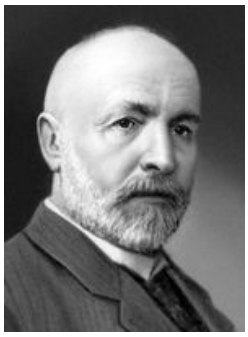
[17] Математическое творчество, как и любое другое творчество, немыслимо без интуиции, которая, в свою очередь, не может быть сведена к одним лишь принципам формальной логики. Такое обоснование интуитивному подходу в математике давал А.Пуанкаре. Многие математики воспринимали интуитивные методы как покушение на строгость научной методологии. Но, как показали результаты, полученные интуиционистом Л.Брауером, установившим ряд неточностей в теории бесконечных множеств, формально-логический подход отнюдь не исключает вероятность получения ошибочных суждений.

[18] Употребившего так много душевных и умственных сил на то, чтобы «пробить» и закрепить в научной среде полученное им логически строгое доказательство теоремы Аристотеля «Infinitum actu non datur», но так и не дождавшегося должного внимания к данной проблеме со стороны академического сообщества.

Необходимо уяснить, что бесконечность лишена наглядного смысла
и без более подробного исследования лишена всякого смысла вообще,
так как существует только то, что конечно.

Д.Гильберт

По приданию Эпименид из Крита открыл остроумный логический парадокс: «Один критянин сказал, что все критяне лжецы. Лжец ли он?». Если он лжец, то он говорит неправду, соответственно, на острове Крит найдется хотя бы один не-лжец, но тогда честным критянином может оказаться сам говорящий. В этом случае утверждение, что все критяне лжецы, будет правдивым, но тогда окажется, что и сам говорящий тоже лжец, а если он лжец…[19] Исследуя подобные логические парадоксы, А.Зенкин обратил внимание на их поразительное сходство с логической структурой, которая задана в доказательстве несчетности всех действительных чисел Г.Кантора.[20]



«Я вижу это, но не верю этому». Г.Кантор о равномощности точек стороны и площади квадрата.

Теорема Г.Кантора.

{Тезис ***A*:**} ***Множество действительных чисел X – несчетно***.[21]

Доказательство. Допустим, что множество X – *счетно* {Тезис ***He-A***:}. В таком случае существует пересчет всех действительных чисел из X, то есть некоторое взаимно-однозначное соответствие между всеми д.ч. из X и всеми натуральными числами из $N=\{1,2,3, \ldots\}$. Пусть, например, есть искомый *произвольный* пересчет всех д.ч. из X:

{Тезис ***B***:} $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ (1)

Тогда, следуя диагональному методу Г.Кантора, пересчет (1) может быть поставлен во взаимно-однозначное соответствие с так называемым диагональным действительным числом, образованным последовательностью $\sqrt{2}$ и отличающимся по *способу построения* от всех д.ч. из X, то есть пусть существует некий другой пересчет всех д.ч.:

{Тезис ***He-B***:} $y_1 = 0, y_{11}\, y_{12}\, y_{13} \ldots$ (2)

Получаем противоречие, так как оказалось, что *счетное* множество действительных чисел из X не содержит всех действительных чисел (отрезок $\sqrt{2}$ визуально длиннее единичного отрезка), а значит, множество всех действительных чисел *несчетно*.

А.Зенкин: «Уберите теорему Г.Кантора, и весь этот блистательный супертрансфинитный Вавилон рассыплется».

Возражение А.Зенкина заключается в следующем: по условию Г.Кантора пересчет всех д.ч. из X потенциально бесконечен (его нельзя остановить на каком-то конечном шаге) и *произволен*. Поэтому ничто не мешает нам добавить к исходному бесконечному пересчету (1) пересчет диагонального действительного числа (2):

$$y_1,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n \qquad (1.1)$$

Более того, только так мы и получаем взаимно-однозначное соответствие стороны и диагонали квадрата, так что оно в любом случае выполняется, хотим мы того или нет. Этот новый *произвольный* бесконечный пересчет (1.1) уже будет содержать все необходимые для утверждения *счетности* действительные числа {Тезис ***B***:}. Очевидно, к пересчету (1.1) можно снова применить диагональный метод и, сославшись на иной *способ построения*, опять выдвинуть предположение, что в (1.1) не содержится всех д.ч. другого диагонального числа y_2 {Тезис ***He-B***:}. Но тогда, опираясь на *произвольность* эталона $X=[0,1]$ и бесконечность множества X, не трудно сделать очередной пересчет и показать, что X может содержать все д.ч. любого диагонального действительного числа, так как любой интервал $[0,1]$ можно построить тем же способом, что диагональное число (Рис.5.):

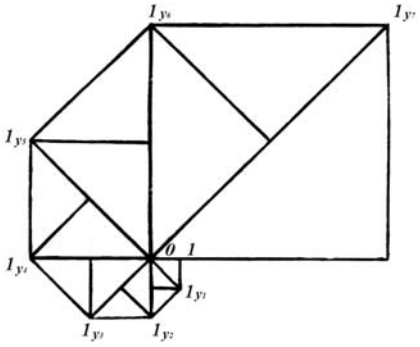


Рис.5. *Диагональный метод Г.Кантора и бесконечный пересчет по А.Зенкину.*

$$y_2,\ y_1,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n;$$
$$y_3,\ y_2,\ y_1,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n;$$
$$y_4,\ y_3,\ y_2,\ y_1,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n.$$

Сама формально-логическая структура доказательства Г.Кантора имеет потенциально бесконечный характер ($He\text{-}A \to B \to He\text{-}B \to B \to He\text{-}B \to B \to \ldots$), а раз так, то в полном соответствии с логическим законом исключенного третьего, множество всех действительных чисел X – *счетно*.

---

[19] Для того, чтобы исключить множество других критян, парадокс Эпименида записывается как «Я – лжец. Лжец ли я?». Тогда парадоксу будет соответствовать следующая формальная запись: $A \to He\text{-}A \to A \to He\text{-}A \to A \to \ldots$ Если я соврал, что я – лжец, то в этом я, конечно, лжец, но то, что я честно в том сознался, лишь подтверждает, что все мои возможные утверждения не могут быть ложными. Построение из одних только ложных утверждений, если и возможно, то приводит к бесконечному перебору всех ложных утверждений. Но если исключить единственно истинное для них утверждение, что все они ложны, произойдет утрата способности к нахождению смысловых значений. Тогда как построение из одних только истинных утверждений возможно, и каждая попытка назвать истинное утверждение ложным будет признана ложной и не войдет в перебор.

[20] Помимо А.Зенкина изучением логической структуры доказательства Г.Кантора занимался С.Бычков и другие специалисты, указавшие на недостаточную логическую обоснованность примененного Г.Кантором диагонального метода.

[21] Для доказательства несчетности всех действительных чисел Г.Кантор рассматривал интервал всех действительных чисел X, расположенных на числовой прямой от 0 до 1. По основанию данного отрезка можно построить квадрат, диагональ которого выразится числом $\sqrt{2}$. При этом очевидно, что для каждой точки диагонали квадрата можно установить взаимно-однозначное соответствие с точками прямой на интервале от 0 до 1, иначе при последовательном отображении противоположных сторон квадрата мы бы обнаружили, что его стороны неравны.

Приведенное А.Зенкиным доказательство счетности всех действительных чисел X применимо не только для диагонального метода. Из условия произвольности выбора эталона длины и бесконечности пересчета действительных чисел любой одномерный объект, не зависимо от способа его построения, например, разорванную окружность, можно представить единичным отрезком на числовой прямой. То же самое можно сказать о множествах действительных чисел, которые образованы эталонами и соответствующими им объектами других размерностей (из любой площади можно построить площадь произвольного двухмерного эталона, или единичного квадрата, из любого объема можно построить трехмерный эталон, или единичный куб, и т.д.).

Неизбежно возникает принципиальный для истории науки вопрос. Почему Г.Кантор сам не мог исправить ошибку в своем доказательстве? Неужели ни он, ни многие другие математики, написавшие в XX веке сотни тысяч учебников и миллионы математических статей, не видели всю противоречивую сущность актуальной бесконечности, и все оппоненты А.Зенкина до сих пор критикуют его доказательство лишь из корыстных соображений, чтобы не допустить оттока своей научно-исследовательской «паствы». Оказывается, есть еще одно обстоятельство, которое не позволяет осуждать Г.Кантора и его последователей и обвинять в преднамеренном искажении понятия бесконечности.

Вся логика теоретико-множественной школы Г.Кантора неразрывно связана с арифметическим представлением об иррациональных числах. Конечно, существуют псевдо-периодические десятичные дроби, такие как *0,123456789…* или *0,101001000…*, запись которых основана на потенциально-бесконечных закономерностях ($n+1$ и 10^n, где n – последовательность натуральных чисел).[22] Но разве есть подобная закономерность в последовательности, образованной пресловутым $\sqrt{2}=1,414213562\ldots$, а значит, по все той же формуле Виета, разве в праве мы говорить о какой-либо закономерности в последовательности числа π? Раз такие закономерности не установлены, то о какой потенциальной бесконечности мы говорим, если положение сколь угодно удаленной цифры никак не определено в данной последовательности, а общий арифметический закон построения для таких бесконечных десятичных дробей имеет все признаки актуально завершенного. Поэтому Г.Кантор в своем трактате по теории множеств писал: «Можно безусловно сказать: трансфинитные числа стоят или падают вместе с конечными иррациональными числами. По своему внутреннему существу они подобны друг другу, ибо как те, так и другие суть определенно отграниченные образования или модификации актуально бесконечного».[23]

Рис.6. *«Существует ли Бог в трансфинитном рае Г.Кантора?». Философский вопрос А.Зенкина.*

Вряд ли кто-то в состоянии опровергнуть такой точный вердикт Г.Кантора. Устав от дискуссий, А.Зенкин был вынужден признать, что приведенное Г.Кантором доказательство «ничего не доказывает и сводит вопрос о счетности или несчетности множества X к вопросу о *вере*».[24] Иными словами, как пророчески было замечено Д.Гильбертом, суть спора сводится к аксиомам арифметики, то есть утверждениям, принимаемым в математике без доказательств. Если бы ошибка была достаточно очевидной, то уже сам Д.Гильберт, вдоль и поперек изучивший все аксиомы, разумеется, нашел бы ее. Но аксиоматическая ошибка может содержаться в общепризнанной теореме, доказательство которой не является корректным, следовательно, принимаемой всеми, по сути, без доказательств. И такой теоремой в математике является теорема о несоизмеримости стороны и диагонали единичного квадрата.

Характер рассуждений теперь, конечно же, изменился, но трудности, как и прежде, возникают в связи с пропастью между понятиями дискретного и непрерывного, этим неизменным камнем преткновения, играющим чрезвычайно важную роль в математике, философии и даже физике.

А.Френкель

Из сочинения Ямвлиха «О пифагорейской жизни» мы узнаем, как один из пифагорейцев, разгласивший тайну несоизмеримости непосвященным, был изгнан из пифагорейского общества. В знак того, что бывшие товарищи стали считать недостойного умершим, они соорудили ему гробницу.[25] По традиции пифагорейской школы имени Пифагора приписывались все поздние теоремы и доказательства, поэтому трудно сказать, было ли на самом деле известно

---

[22] По определению рациональным числом является такое число, которое можно представить в виде отношения целых чисел $\frac{m}{n}$, $n \neq 0$. Иначе говоря, в полном соответствии с определением, целые числа m и n могут быть как конечными, так бесконечными целыми числами, что не противоречит представлению о бесконечных периодических десятичных дробях. Но тогда любую десятичную дробь можно рассматривать в качестве отношения целых чисел m и n, так что разница между рациональными и иррациональными числами практически сводится на нет. Вся сложность логической совместимости двух классов действительных чисел, действительно, состоит лишь в нахождении способа упорядочения для последовательности цифр исследуемых десятичных дробей. Формально такая возможность задана в аксиоме выбора и теореме Цермело об упорядочении любого бесконечного множества, которую немало критиковали, хоть она и возникла внутри все той же абстрактно-модернистской школы.

[23] Г.Кантор. Труды по теории множеств. М., 1985, С. 283-284.

[24] А.Зенкин. Infinitum Actu Non Datur. (Из последнего текста для журнала «Вопросы философии»)

[25] Фрагменты ранних греческих философов / ответ. ред. И.Д.Рожанский. М., 1989, Ч.I., С.152.

понятие о несоизмеримости самому Пифагору, который большую часть математических представлений заимствовал у жрецов древнего Египта и Вавилона. Достоверно можно говорить лишь о том, что теорема о несоизмеримости стороны и диагонали единичного квадрата тщательно охранялась посвященными в ее тайну, ибо само существование такой теоремы приводило к нарушению всей пифагорейской картины мира.

Если взглянуть на современную теорему об иррациональности $\sqrt{2}$, то мы обнаружим, что в ее основе лежит все та же теорема несоизмеримости, доказанная методом четных и нечетных более двух тысяч лет назад. Необычным в ней является уже то, что понятие четности или нечетности применимо только к целым числам по отдельности. Что касается самих непрерывных десятичных дробей, то применение к ним данного понятия становится невозможным, так нельзя, например, сказать, что число *1,22(2)* является четным либо нечетным.

Рис.7. *Пифагор. Иллюстрация из книги Мэнли Палмера Холла «Тайное учение всех времен».*

Теорема I.

Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.

Доказательство будем проводить методом от противного. Предположим, существует рациональное число $\frac{m}{n}$, квадрат которого равен *2*, то есть $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Если целые числа m и n имеют общие множители, то дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить, поэтому мы в праве сразу же предположить, что данная дробь несократима. Из условия $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ вытекает, что $m^2 = 2n^2$.

Поскольку число $2n^2$ четно, то и число m^2 тоже должно быть четным. Но тогда будет четным и число m. Таким образом, получается, что число $m=2k$, где k – некоторое целое число. Подставляя число $2k$ в формулу $m^2 = 2n^2$, получаем: $4k^2 = 2n^2$, откуда $n^2 = 2k^2$. В таком случае число n^2 будет четным; но тогда будет четным и число n. Выходит, что числа m и n четные. А это противоречит тому, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима. Следовательно, наше исходное предположение о существовании дроби $\frac{m}{n}$, удовлетворяющей условию $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, неверно, то есть среди всех рациональных чисел нет такого, квадрат которого был бы равен *2*.[26]

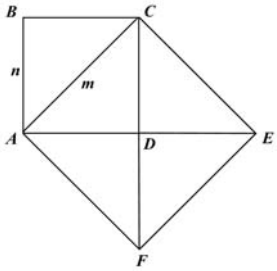


Рис.8. *Если отрезки m и n несоизмеримы, то что мы делаем, когда записываем: √2=1,414213562…*

Так как нахождение общего отрезка, который в *AB* укладывался бы ровно *n* раз, а в *AC* ровно *m* раз, противоречит ***Теореме I***, то считается, что отношение *AB* к *AC* сводится к отношению двух несоизмеримых отрезков (Рис.8.). Такое доказательство несоизмеримости было приведено пифагорейцами, не имевшими представления о десятичных дробях, и с тех самых пор такое доказательство перекочевывает из одного учебника в другой без какой-либо критики или желания понять, что же все-таки в нем доказывается.[27]

При более внимательном прочтении доказательства, хорошо виден главный его изъян, который состоит в том, что число k принимается обязательно только целым числом. То есть, совершенно никак не учитывается возможность того, что $\sqrt{2}$ может оказаться бесконечной десятичной дробью. В самом деле, ничто не мешает принять число k в качестве дробного значения $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда выражение $n^2=2k^2$ примет вид $1^2=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, и отношение $\frac{m}{n}$ окажется несократимым. Причем, это неопровержимый арифметический факт, так как $\sqrt{2}^2$ можно записать несократимой дробью $\frac{2}{1}$, которая не может быть получена возведением в квадрат сократимой дроби.

По всем законам арифметики дробь $\frac{m}{n}$, о которой говорится в ***Теореме I***, не может быть сократимой, поэтому доказательство ***Теоремы I*** нельзя признать логически строгим. Более того, принимая число k в качестве дробного, мы ни в коей мере не доказываем, что число $\sqrt{2}$ является бесконечной непериодической десятичной дробью. Выходит, утверждение о непериодичности $\sqrt{2}$ не подтверждено никакими доказательствами и фактически принимается нами в качестве аксиомы. Если кого-то интересуют действительные геометрические и арифметические доказательства, а не

---

[26] Е.С.Кочетков, Е.С.Кочеткова. Алгебра и элементарные функции. М., 1966, Ч.I., С.88.

[27] В истории науки известно немало примеров длительного существования ошибочных умозаключений. Широко известным историческим казусом, связанным с пифагорейской школой, является знаменитая теорема о сумме двух степеней с одинаковыми показателями из учебника арифметики Диофанта, опровергнутая только в XVII веке выдающимся французским математиком П.Ферма.

спекулятивные манипуляции, то такие доказательства находятся, но только для обратного утверждения о том, что $\sqrt{2}$ представляет собой бесконечную периодическую десятичную дробь.

В 1911 году Л.Брауер доказал, что не существует топологического отображения, которое связывало бы два евклидовых пространства E^a и E^b, если $a \neq b$. Это значит, что попытка пифагорейцев найти соотношение диагонали *AC* и стороны *AB* для квадрата (двухмерного объекта) с помощью некоего эталона длины или отрезка (одномерного объекта), является заведомо невыполнимой задачей. Между тем, решение для поставленной пифагорейцами задачи существует. Для этого достаточно разбить квадрат *ABCD* на элементы одинаковой размерности, тогда сторона квадрата *AB* выразится тем же числом элементов, что его диагональ *AC* (Рис.9.): *(э)AB=(э)AC=4*.

Разбив квадрат на элементы одинаковой разрядности, мы получили ортогональный квадрат *ABCD* и несколько непривычные для нас диагональный квадрат *ACEF* и мнимый диагональный квадрат *A(CC′)E′(FF′)*, для которых, заметим, продолжает выполняться необходимое для квадрата условие равенства сторон. Сравнивая площади квадратов *ACEF* и *ABCD*, мы приходим к следующей формулировке:

$$(Sэ)ACEF = 2(Sэ)ABCD - (2n - 1) \text{ или } 2n^2 - (2n - 1),$$

где *n* – число элементов стороны ортогонального квадрата *ABCD*.

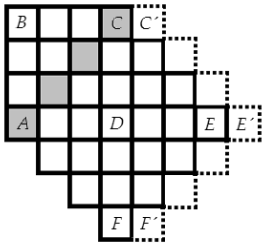


Рис.9. *Ортогональный квадрат ABCD и диагональный квадрат ACEF.*

Для диагонального квадрата *ACEF*, построенного по диагонали ортогонального квадрата *ABCD* со стороной *(э)AB = 4* (Рис.9.), будет справедливо равенство $(Sэ)ACEF = 2 \cdot 4^2 - (2 \cdot 4 - 1) = 25$. Обратим внимание, что площадь полученного нами диагонального квадрата *(Sэ)ACEF=25* совпадает с площадью некоторого ортогонального квадрата $x^2 = 5^2 = 25$. Они абсолютно равны по числу элементов!

Поэтому мы в праве предположить, что извлечение квадратного корня из числа *2* на самом деле сводится к решению аналогичной задачи, другими словами, к нахождению диагонального квадрата *ACEF*, равного некоторому ортогональному квадрату x^2.

Принципиальным отличием здесь будет выступать только то условие, что необходимый нам диагональный квадрат *ACEF* должен строиться по диагонали конечного десятичного ортогонального квадрата *ABCD*: 10^2, 100^2, 1000^2… и так далее, пока не найдется нужное значение. Используя формулу $(Sэ)ACEF = 2(Sэ)ABCD - (2x - 1)$, перейдем к рассмотрению площадей соответствующих диагональных квадратов *ACEF*, построенных по диагонали конечных десятичных квадратов *ABCD*:

$2 \cdot 10^2 - (2 \cdot 10 - 1) = 181$;

$2 \cdot 100^2 - (2 \cdot 100 - 1) = 19801$;

$2 \cdot 1000^2 - (2 \cdot 1000 - 1) = 1998001$ и т.д.

Извлекая квадратные корни из чисел *181*, *19801*, *1998001* и т.д., мы действительно будем приближаться к десятичному значению числа $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$

$\sqrt{181} = 13{,}453624\ldots$;

$\sqrt{19801} = 140{,}716026\ldots$;

$\sqrt{1998001} = 1413{,}506632\ldots$

Сравнивая полученные приближения с десятичным значением $\sqrt{2}$, целая часть которого была увеличена на соответствующую им разрядность, мы обнаружим на каждом шаге десятичный остаток, приближающийся к значению десятичной дроби $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707106781\ldots$:

$14{,}142135\ldots - 13{,}453624\ldots = 0{,}688511\ldots$;

$141{,}421356\ldots - 140{,}716026\ldots = 0{,}705330\ldots$;

$1414{,}213562\ldots - 1413{,}506632\ldots = 0{,}707242\ldots$

Таким образом, получив конечное значение, необходимое для построения диагонального квадрата *ACEF* с заданными параметрами, десятичная дробь, $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$ окажется периодической:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\_707\_707\_(707\_),$$

где нижнее подчеркивание _ обозначает недостающие члены конечной последовательности.

В самом деле, соединив найденные значения и переместив запятую целых частей в положение после первой единицы, моно сравнить их с оригинальным значением дроби *1,414213562…* и убедиться, что десятичный остаток второго порядка будет также приближаться к значению десятичной дроби $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707106781\ldots$:

1,41421356237309504880168872420 97… – 1,3453624688511… = 0,0688510…;

1,41421356237309504880168872420 97… – 1,40716026705330… = 0,00705329…;

1,41421356237309504880168872420 97… – 1,41350663270724 2… = 0,00707240… .

То есть вслед за первым периодом *707_* в дроби *1,414_707_707_(707_)* должен следовать второй, точно такой же, за ним третий, четвертый и так далее до бесконечности. Как и в любой другой периодической десятичной дроби. Конечная последовательность *1,414_* приводит к образованию искомого периода *(707_)*, который, в свою очередь, при десятичном $n \to \infty$ задает необходимое бесконечное множество точек евклидовой диагонали для квадрата со стороной, равной единице.

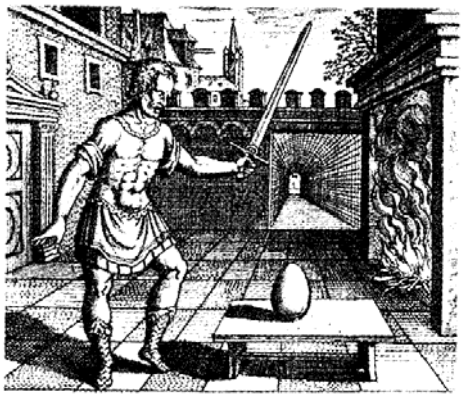


Рис.10. *Философское яйцо. Гравюра из трактата Михаэля Майера «Убегающая Аталанта». Объять необъятное можно, но только частями.*

Чтобы понять, почему запись периодической десятичной дроби *1,414_707_707_(707_)* в виде отношения $\frac{m}{n}$ полагается большинством математиков в принципе невозможной, необходимо сделать еще одно замечание. Когда в современной математике говорят, что любое целое число можно представить десятичной дробью и с периодом *(0)*, и с периодом *(9)*, под этим подразумевают процесс бесконечного приближения с недостатком к данному целому числу: *1,9*; *1,99*; *1,999*; *1,9999…* $\infty \to 2$. Разумеется, стремиться к значению *2* не воспрещается и посредством других десятичных приближений, но отношение тождества выполнимо только для приближения, недостаток которого на каждом шаге составляет единицу. Потому что только в этом случае правила перевода десятичных дробей в обыкновенные позволяют получить пропорцию для двух частей уравнения.[28]

При этом обычно упускается из вида, что каждому шагу приближения с недостатком на числовой прямой соответствует симметрично заданное приближение с избытком к тому же самому числу: *2,1*; *2,01*; *2,001*; *2,000…1* $\infty \to 2$. (Рис.11.) Так вот, рассмотрение таких приближений с избытком почему-то напрочь игнорируется. Нам известно лишь то, что извлечение корней для радикалов, несводимых к целым числам, приравнивается к десятичным дробям с периодом *(9)*: $\sqrt{2}^2 = 1{,}99(9)$; $\sqrt[3]{2}^3 = 1{,}99(9)$ и т.д. Но приравнивание различных степеней несводимых радикалов к одной и той же непрерывной десятичной дроби с периодом *(9)* наводит на мысль, что для каждой точки пространства размерности E^a все-таки должно устанавливаться взаимно однозначное соответствие с каждой точкой пространства размерности E^b, что противоречит теореме Л.Брауера.[29]

Устранить эту неопределенность можно только введением десятичных приближений с избытком, которые не являются непрерывными, а значит, для каждого несводимого радикала найдется одна и только одна точка в полной мере удовлетворяющая каждому конкретному решению. Например, для $\sqrt{2}$ это будет точка *2,00_1*, для $\sqrt[3]{2}$ точка *2,000000_1* и т.д. Легко убедиться, что данный метод полностью согласуется с правилами перевода бесконечных десятичных дробей в обыкновенные. Так, для числа *2* будет справедлива запись:

$$1{,}99(9) = 2{,}00\ldots - 0{,}00\ldots 1 = 2 = 2{,}00\ldots + 0{,}00\ldots 1 = 2{,}00\ldots\infty 1,$$

или

$$1{,}99(9) = \frac{20\ldots - 1 - (2-1)}{9\ldots} = \frac{19\ldots - 1}{9\ldots} = \frac{18\ldots}{9\ldots} = 2$$

$$2{,}00\ldots\infty 1 = \frac{20\ldots + 1 - (2+1)}{9\ldots} = \frac{21\ldots - 3}{9\ldots} = \frac{18\ldots}{9\ldots} = 2\ .$$

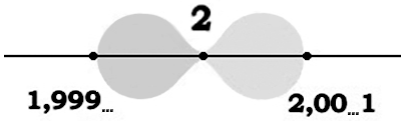


Рис.11. *Бесконечное приближение к числу 2 с недостатком и с избытком.*

Тогда не останется никаких причин, по которым корни несводимых к целым числам радикалов нельзя было бы представить отношением двух целых чисел *m* и *n*, $n \neq 0$. В частности, применив для $\sqrt{2}$ правила перевода десятичных дробей в обыкновенные, мы получим:

$$\frac{1414\_707\_ - 1414\_}{999\_000\_} = 1{,}414\_\ 707\_707\_(707\_).$$

Рассмотрим квадраты чисел, образующихся в числителе дроби на каждом шаге приближения к искомому конечному значению *1414_707_ −1414_*:

147-14=133, $133^2 = 17689$;

14170-141=14029, $14029^2 = 196812841$;

1414707-1414=1413293, $1413293^2 = 1997397103849$;

141427071-14142=141412929, $141412929^2 = 19997616488359041$;

14142170710-141421=14142029289, $14142029289^2 = 199996992410933845521$ и т.д.

---

[28] За ненадобностью правила перевода десятичных дробей в обыкновенные практически выброшены из современных учебных программ. Ведь школьники, изучающие десятичные дроби и осваивающие степени, сталкиваются с трудностями, которые не имеют в математике внятного, согласующегося с логикой объяснения. Не случайно в этом юном возрасте происходит выделение способных к математике детей, тогда как у большинства учащихся более целостное и интуитивное сознание начинает отторгать внушаемые вместе с изучением математики сомнительные идеи.

[29] Как раз такое поразительное заключение было сделано Г.Кантором, получившим доказательство взаимно однозначного соответствия точек стороны и площади квадрата. Результат достаточно странный, особенно если учесть, что по Г.Кантору сторона квадрата не может содержать всех точек его диагонали, но вот, оказалось, может содержать все точки его площади, что само по себе весьма парадоксально.

Порядок и разрядность в расположении цифр полученных приближений соответствуют приближению к числу *199_700000_1000_*, которое получается при возведении в квадрат отношения целых чисел $\frac{m}{n}$, равного десятичному приближению с избытком *2,00_1*:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{(1414\_707\_-1414\_)^2}{999\_000\_^2} = \frac{199\_700000\_1000\_}{99\_800\_1000000\_} = 2{,}00\_1.$$

Мы нашли всего одно единственное дискретное значение *2,00_1*, выразимое отношением целых чисел m^2 и n^2, и этого вполне достаточно для возможности выполнения бесконечного приближения к числу *2*. Необходимость и достаточность существования одного такого значения исходит из единственности значения *1,414_*, стоящего до начала периода дроби *1,414_707_707_(707_)* и задающего всю конечную последовательность периода *(707_)*. Только так мы можем задать такую десятичную разрядность, при которой становится возможно нахождение сколь угодно большого числа периодов *(707_)*. Ничто не мешает извлекать квадраты из чисел *2,00_00_1*; *2,00_00_00_1*; *2,00_00_00_00_1* и т.д., стоящих на числовой прямой ближе к значению *2*, и получать соответствующие приближения к значению бесконечной периодической десятичной дроби *1,414_707_707…*; *1,414_707_707_707…*; *1,414_707_707_707_707…* и т.д. То же самое можно сказать о симметрично заданных десятичных приближениях с недостатком *1,999_999_*; *1,999_999_999_*; *1,999_999_999_999_* и т.д.[30]

Для более целостного представления полученных результатов приведем построение периодической десятичной дроби $\sqrt{2}$ в рамках евклидовой геометрии. Пусть целое число n элементов ортогонального квадрата *ABCD* стремится к бесконечности. Тогда разница диагонали *AC* и диагонали *x* квадрата, равновеликого диагональному квадрату *ACEF*, выразится пределом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2} - \sqrt{2n^2 - 2n - 1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

В самом деле, разница $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ наблюдается при построении ортогональных квадратов *ABCD*, состоящих из любого целого числа элементов, так что диагональ заштрихованного элемента (Рис.12.) при любом $n \neq 0$ будет разделена на две равные части. Теперь заметим, что существует такое разбиение ортогонального квадрата, при котором $S(э)ACEF = x^2$. Другими словами, повернув элементы диагонального квадрата *ACEF=25* на *45°*, мы обнаружим, что сторона $x = AC - y$.

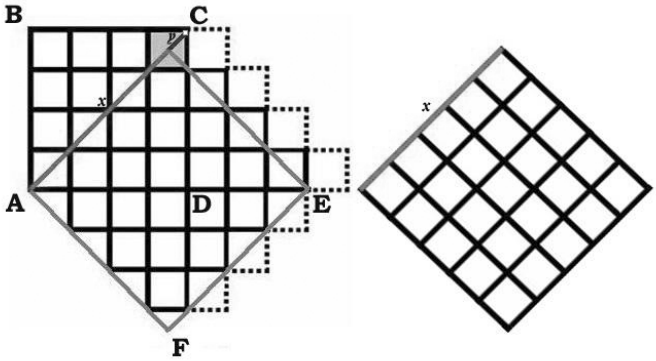


Рис.12. *Переход от элементарной топологии к евклидовой геометрии и построение периодической десятичной дроби √2.*

Построенный по основанию десятичного квадрата $S(э)ABCD = 1000\_^2$ наш диагональный квадрат $S(э)ACEF = 199\_800\_1 = 1414\_^2 = x^2$ тоже равен по числу элементов ортогональному. Поэтому, повернув $S(э)ACEF = 199\_800\_1$ на *45°*, мы так же обнаружим, что $x = AC - y$. Тогда для заштрихованного элемента (Рис.12.) станет возможно аналогичное разбиение на элементы, кратное числу десятичного квадрата $S(э)ABCD = 1000\_^2$, и для него вновь найдется диагональный квадрат $199\_800\_1 = 1414\_^2 = x^2$. Следовательно, найдется и еще более мелкий крайний элемент, евклидовая диагональ которого будет также разделена на две равные части. Для наглядности местоположение этого крайнего элемента обозначено белой точкой на диагонали *AC* (Рис.12.). При этом окажется, что диагональная разница теперь будет определяться тождеством $1414\_,707\_ = AC - y'$.

Так как дробь *1,414_707_707_(707_)* является бесконечной периодической десятичной дробью, то данный процесс разбиения каждого крайнего элемента можно продолжать до бесконечности. Тогда мы перейдем к дискретной решетке, состоящей из бесконечного числа элементов, диагональ которой будет задана числом *1414_,707_707_(707_)*, переместив запятую в положение после первого знака, мы получим значение *1,414_707_707_(707_)*, которым и соизмеряется сторона и диагональ единичного квадрата.

---

[30] Иллюзия существования актуальной бесконечности, привитая нашему сознанию не без помощи калькулятора, имеющего конечную разрядность, подсказывает нам, что одного шага десятичного приближения недостаточно для появления у $\sqrt{2}$ бесконечного числа периодов. Но, на самом деле, точно такие же результаты мы получаем при последовательном рассмотрении десятичных приближений и для квадратного числа *4=3,99(9)*: $\sqrt{3{,}9} = 1{,}9748417658131499017438 4\ldots$; $\sqrt{3{,}99} = 1{,}9974984355438178915780 3\ldots$; $\sqrt{3{,}999} = 1{,}9997499843730465697708 0\ldots$.

Если всерьез полагать, что $\sqrt{2}$ дает непериодическую десятичную дробь, вся математика превращается в театр абсурда. В самом деле, бесконечное непериодическое десятичное значение может получиться только тогда, когда извлечение $\sqrt{2}$ удовлетворяет равенству $1{,}414...^2 = 1{,}999...a_1a_2a_3...$, где $a_1a_2a_3...$ – неопределенная последовательность, состоящая не только из девяток. Но равенство $2=1{,}99(9)$ возможно тогда и только тогда, когда $1{,}99(9)$ является периодической десятичной дробью, то есть числом, в дробной части которого стоят только девятки. Таким образом, представление о непериодичности $\sqrt{2}$ по всем законам логики полностью исключает строгое равенство $\sqrt{2^2} = 1{,}99(9) = 2$.[31]

Все, что было сказано об извлечении $\sqrt{2}$, можно повторить для всех радикалов, несводимых к целым числам. Так, для любых несводимых квадратных радикалов описанный метод позволяет получить период, равный $\frac{x}{2}$, для несводимых кубических радикалов период, равный $\frac{x}{3}$, для несводимых биквадратных радикалов, равный $\frac{x}{4}$, и т.д., где x – конечная последовательность, стоящая до начала периода десятичной дроби.[32] Отрицая эти арифметические закономерности, мы не просто бросаем вызов классической математике или возражаем высказыванию К.Ф.Гаусса, назвавшему арифметику царицею математики, но безответственно строим здание математической науки на зыбкой почве иррационализма, возражаем против всякой логики и самого разума.

Троица во Единице и Единица в Троице для рассудка ничего
не обозначает, если только брать это выражение с его истинным,
не противоствующим рассудку содержанием; это – своего рода $\sqrt{2}$.[33]

П.Флоренский

Рис.13. *Андрей Рублев. Св.Троица. Верю, ибо разумно.*

Что ожидает математику, нашу фундаментальную науку и всю современную цивилизацию, которая избрала для себя путь иррационализма, понять несложно. Мы привыкли к «иррациональности» окружающего нас мира и порой не замечаем, что главной причиной этой иррациональности являемся мы сами. Всему, что в меру нашего частичного или полного непонимания остается необъяснимым, присуща доля иррационализма. Поэтому невозможно требовать от человека рациональности во всем, но культура, перенасыщенная лукавыми идиомами, логическими парадоксами и безумием, саморазрушается неминуемо.[34]

Так неоднократно случалось в истории древних цивилизаций. Однако в наши дни культурная деградация настигает на высоком технологическом уровне, что предопределяет свои особенности. Сходство же состоит во всевозрастающей иррационализации науки. В конце XIX века Г.Кантор тонко уловил направление развития и тайную доктрину «чистой математики», к созданию которой имел самое непосредственное отношение: «Я считаю, что метафизика и математика по праву должны находиться во взаимосвязи и что в периоды их решающих успехов они находятся в братском единении. Затем, как показывала история до сих пор, к несчастью, между ними, обычно очень скоро, начинается ссора, которая длится в течение ряда поколений и которая может разрастись до того, что враждующие братья уже не знают, да и не хотят знать, что они всем обязаны друг другу».[35]

---

[31] По этой причине о *периодических* десятичных дробях с периодом (9) принято говорить как о числах, не являющихся рациональными! Чтобы ни у кого не возникало недоуменных вопросов, это «исключение, подтверждающее правило», не принято выставлять на показ в учебниках по математике.

[32] Например, приведем извлечение $\sqrt[3]{5}$. Куб для данного радикала будет находиться по формуле $5n^3 - (5n - 1)$, где n примем за число элементов стороны искомого десятичного куба, задающего последовательность, стоящую до начала периода. Получаем приближения:
$\sqrt{4951} = 17{,}0437167790714993197945202572 96...$;
$\sqrt{4999501} = 170{,}9919059584384968024470998285 3...$;
$\sqrt{4999995001} = 1709{,}9753767985232387909906145576...$

Сравним полученные приближения с оригинальным значением десятичной дроби $\sqrt[3]{5} = 1{,}709975946676696989353108872542 9...$, домноженным на разрядность взятых нами приближений:
$17{,}0997594667669698935310887254 29... - 17{,}0437167790714993197945202572 96... = 0{,}0560426876954705737365684681 3...$;
$170{,}9975946676696989353108872542 9... - 170{,}9919059584384968024470998285 3... = 0{,}0056887092312021328637874257...$;
$1709{,}9759466676696989353108872542 9... - 1709{,}9753767985232387909906145576... = 0{,}0005698781737505621182579 85...$

С поправкой на соответствующую разрядность каждое из них приближается к значению $\frac{\sqrt[3]{5}}{3} = 0{,}5699919822255656631177029575143 1...$ Выразив значение конечным целым числом, стоящим до начала периода, перейдем к периодической десятичной дроби $\sqrt[3]{5} = 1{,}709\_569\_569\_(569)$. В чем можно убедиться, соединив последовательности, образующиеся на каждом шаге рассмотренных приближений, так, как если бы они образовали непрерывную десятичную дробь, и сравнив их с оригинальным значением $\sqrt[3]{5}$:
$1{,}7099759466676696989353108872542 9... - 1{,}7043716\ 560426 = 0{,}00560426...$
$1{,}7099759466676696989353108872542 9... - 1{,}709919059\ 56887092 = 0{,}000056887092...$
$1{,}7099759466676696989353108872542 9... - 1{,}70997537679\ 5698781737 = 0{,}000000569878173 7...$

[33] Именно что обозначает с содержанием, непротивоствующим рассудку. Триединством выступает логически обоснованное тождество приближений с избытком и недостатком, обеспечивающее непрерывность числовой прямой и записанное нами при рассмотрении $\sqrt{2}$ равенством $1{,}99(9)=2=2{,}00..\infty 1$.

[34] Ибо нелогичное не может быть вечным. Предки наши знание об этом укоренили в происхождении удивительного слова *человекъ*: челом сопричастный вечности. Нужно быть совершенным профаном, не имеющим никакого представления о способе ведического мышления, чтобы приводить смехотворную этимологию «чело, данное на век» или же «целый отпущен век». Ни то, ни другое, ни третье (скажем, «чело, у которого веки») никак не отражает исключительного признака, по которому происходит выделение. Искажение смысла связано, очевидно, с утверждением низости, тварности и ничтожности человеческого сознания, неспособного воспринимать сверхразумную иррациональную истину, самый краешек которой доступен только через усвоение символизма того или иного религиозного обряда.

[35] Г.Кантор. Труды по теории множеств. М., 1985, С.246.

Глубокая историческая взаимосвязь метафизики и математики сомнений не вызывает, но лишь в той ее части, которая касается иллюзий отсутствующего Логоса. Поэтому всякому исследователю, насколько это возможно, не мешало бы относиться к метафизике с большим пиететом, ибо хоть иллюзия отсутствующего Логоса и не является жизненной потребностью для существования истинного, а все же необходима для определения ложного. Профессор математики и священник П.Флоренский по этому поводу заметил: «Отрицающий актуально-бесконечное в каком бы то ни было отношении тем самым отрицает и потенциальную бесконечность в том же отношении».[36] Это недопонимание следует уточнить, потому что исследователи потенциальной бесконечности ни в коей мере не отрицают актуально-бесконечное, признавая тезис о его существовании как ложное утверждение. Да, существуют утверждения истинные, и в том же отношении существуют утверждения ложные. Отрицание истинности тезиса о существовании актуальной бесконечности не есть нигилизм, к нигилизму приходят именно что адепты актуальной бесконечности, ход умозаключений и доказательств которых ведут к отрицанию самой логики и определенности.

Динамической целостностью располагает только константа, заданная относительно той или иной системы переменных. Такой абсолютной инвариантной константой является единица, сохраняющая целостность при любой системе переменных: $1^n = 1$, где n – любое действительное число, конечное, либо бесконечное множество. Весь спор ведется вокруг того, следует ли признать, что такими же свойствами обладает нулевое значение. Если мы признаем 0 второй инвариантной константой, то, безусловно, существует два типа бесконечности, потому что такое признание обозначает актуальность существования пустого множества. Тогда, раз пустое множество актуально, не содержит ни одного элемента и является подмножеством любого множества, действительно, найдется сколь угодно много актуально бесконечных множеств.

Однако нулевое значение, несмотря ни на что, не обладает всеми необходимыми свойствами константы. В частности, если рассматривать нуль вне системы переменных значений, то мы обнаружим, что данное значение не обладает инвариантным постоянством: $0^0=1$. Другими словами, попытка построить пустое множество без отношения к чему-либо не приводит нас к ожидаемому сохранению значения. Вместо всегда-пустого множества мы получили непустое, а раз так, нельзя говорить о нем как об актуально-существующем. Пустое множество такое же потенциальное, или счетное, как и все остальные. Поразительное сходство свойств нулевого значения с единицей возникает лишь от того, что нуль являет собой бесконечное удаление и отражение единицы: $-0{,}00...\infty 1=0=0{,}00...\infty 1$. Но стоит помыслить пустое множество существующим актуально, как мы неизбежно приходим к логическому противоречию.

Только усвоив знание об этом, мы сумеем восстановить подлинную суть бесконечности, не уронив законов логики. Только так мы сумеем сохранить научный детерминизм, более того, только так мы имеем возможность обнаружить естественную живую сущность синкретичной мифологии, о которой и не помышляют иррациональные умы, выдающие за истину представление о завершенной бесконечности. Так, например, философ А.Ф.Лосев, ссылаясь на мифические образы и символы, утверждает, что миф, будучи конечным и обозримым, и есть *сам по себе* завершенная истина, подобно тому, как «бесконечное и конечное хорошо синтезируются в современной математике под именем актуальной бесконечности. Бесконечность мыслится не расплывающейся в бездне абсолютной тьмы, так что уже не видно ни конца ни края этой бесконечности. Эта бесконечность есть нечто осмысленное и оформленное, – в этом смысле конечное».[37] Довольно будет привести всего один мифологический образ змея Ананты, на котором отдыхает небесный защитник Вишну (единица) и в котором воплощается разрушитель Шива (нуль), чтобы показать несостоятельность выводимой им «*абсолютной мифологии*».[38] Ананта-Шеша, поглощающий вселенную (перемножение на нуль любого множества), остающийся при этом неизменным (возведение нуля в любую ненулевую степень), чье могущество привлекает и простирается настолько, что он может уничтожить все сущее, тем не менее, сам по себе не существует, что обнаруживается, когда настает момент, и миру является повергающий его небесный воитель Вишну ($0^0=1$).

В скандально известной статье «Антинаучная революция и математика» академик В.И.Арнольд охарактеризовал пагубное воздействие иррационализма на современное общество и математическую науку следующим образом: «В середине XX столетия обладавшая большим влиянием мафия «*левополушарных математиков*» сумела заменить всю содержательную сторону математического образования тренировкой в формальном манипулировании абстрактными понятиями… Страшно подумать, какого сорта влияние оказывают бурбакинисты на (очевидно, неглупых) студентов, превращая их в формальные машины; ...абстрактное описание математики непригодно ни для обучения, ни для каких-либо практических приложений, даже опасно, приводя к трагедиям типа Чернобыля.[39] Эти «*левополушарные преступники*» создали современное резко отрицательное отношение общества и правительств к математике. Результатом могут стать массовый гипноз и социальные потрясения».[40]

---

[36] П.А.Флоренский. Столп и утверждение истины / под ред. В.В.Степина, М., 1990, ТI(II), С.497. В том же месте философ употребляет известный нам еще из доказательства Г.Кантора ничем не обоснованный алогичный переход от потенциальной бесконечности к актуальной: «Чтобы была возможна потенциальная бесконечность, должно быть возможно беспредельное изменение. Но, ведь, для последнего необходима «область» изменения, которая сама уже не может меняться, т.к. в противном случае пришлось бы потребовать область изменения для области и т.д. Она, однако, не является конечной и, следовательно, должна быть признана актуально-бесконечной». Признать справедливость слов «она, однако, не является конечной» не представляется возможным. Из собственных определений философа следует совершенно иное. Для потенциальной бесконечности, которая «есть переменное конечное количество», должна находиться и переменно конечная область изменения, тогда по необходимости найдется и область для области и т.д.

[37] А.Ф.Лосев. Диалектика мифа. М., 1990.

[38] Полное имя змея произносится как Ананта-Шеша (Ananta-Śeṣa или «Бесконечный Шеша»), что в переводе означает буквально «то, что остается» и происходит от санскритского корня «шиш» (śiṣ), который хорошо знаком каждому русскому человеку по выражению «шиш-голова», слову «шишка», и одноименной фигуре «шиш», слагаемой из пальцев рук, имеющей древние языческие корни, а потому считающейся неприличной (хотя все неприличие ее и состоит в схожести со свернувшейся кольцами змеей).

[39] Более подробно процесс программирования «формальными машинами» техногенных катастроф рассмотрен в монографии: Ю.Петров, Л.Петров. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. СПб., 2005.

[40] В.И.Арнольд. Антинаучная революция и математика // Вестник РАН, 1999, № 6, С.553-558.

Иначе говоря, дисгармонично развитый аналитический ум не менее иррационален, чем непропорционально развитое художественно-синкретичное мышление. В одном случае происходит утрата способности к целостному восприятию и, как следствие, к неумению находить системные противоречия и ошибки. В другом становится затруднительно само определение истинного и ложного, так как особенностью этого мышления является то, что в нем не происходит четкого различения представлений. Поскольку в так называемой глобальной информационной среде мы сталкиваемся с энтропией смешения истинных и ложных представлений, то скачкообразное повышение иррационализма в обществе становится неизбежным. Сознание одних, пытаясь оградить себя от безумия окружающего мира, сужается до выполнения простых машинальных операций, другие же эмоционально сливаются с хаосом или погружаются в религиозные переживания, в значительной мере прекращая рассудочную деятельность по той же самой причине, чтобы нивелировать разрушительное воздействие на психику логических противоречий.[41]

Рис.14. *Гравюра XVII века. Алхимический ребис как иррациональное созерцание достижения гармонии.*

Касательно нашего исследования непротиворечивое представление о бесконечных множествах и пространственной непрерывности по сей день не имеет научного решения потому, что постановка данной задачи ставит перед аналитическим умом несовместимый с ним вопрос о целостности мировосприятия и самоопределения. Нам хорошо известно из философской и художественной литературы, какой ужас испытывает эмоциональный человек перед «мертвящим» детерминизмом, но большинство из нас даже не подозревает, насколько велико бывает давление на психику ученого, сталкивающегося с небулевой логической структурой изучаемого объекта, собственного «подсознания» и всей нашей культуры. Не проявляя должной хваткости и строгости мышления, одна только попытка познать непознанное лишала бы рассудка всякого человека, стоящего на передовой научного познания.[42]

Вот как описывает этот процесс специалист в области квантовой физики профессор А.А.Гриб: «Однако возможность задать такой несовместимый вопрос представляет собой потенциальную угрозу, угрозу, сводимую в нормальной психике к *0* в силу наличия некоей жесткой системы самозащиты… Если несовместимый вопрос задается и задается в полную силу, так что вся физиологическая защита ломается, прежняя личность – система совместимых вопросов – исчезает, возникает новая личность с новым поведением и, что важно, с новым прошлым, так как прошлое тоже определено относительно средства измерения (в нашем случае – системы вопросов). Но имеются абсолютные, не зависящие от постановки вопросов элементы, являющиеся вопросами, совместимыми с любыми системами вопросов… хотя обычно реализуется средний случай, когда мы знаем неточные ответы на оба вопроса (совместимый и несовместимый), причем, чем точнее узнаем ответ на один вопрос, тем менее точным получаем ответ на другой».[43]

Постановка вопроса, совместимого с любой системой вопросов, и есть задача, возникающая при рассмотрении явлений непрерывности и бесконечности. Сталкиваясь с этой задачей, аналитический ум обнаруживает целую бездну сходств иррационализма научного и созерцательного, практикуемого в мистических учениях. Переход в таком состоянии к религиозному восприятию становится иногда единственной возможностью для сохранения целостного сознания. Именно страх перехода к недифференцированному сознанию накладывает для аналитического ума табу на изучение некоторых важных проблем в математике и естествознании. «Когда я сидел на берегу, в моем сознании всплыли ранее приобретенные знания; я «*увидел*» каскады энергии из открытого космоса, в которых с ритмической пульсацией возникали и исчезали частицы; «*увидел*», как атомы различных элементов и моего собственного тела участвуют в космическом танце энергии; я почувствовал ритм этого танца и «*услышал*» его звучание, и в этот момент я *узнал*, что это и есть танец Шивы, Владыки Танца, почитаемого индуистами».[44] Ф.Капра в своей знаменитой книге «Дао физики» сумел передать захватывающее взаимодействие мировоззрения научного и религиозного, гармонизирующего мышление ученого и пробуждающего в нем скрытые творческие силы. В то же время Ф.Капра верно заметил, что абсолютное знание, к которому стремятся восточные мистики, невыразимо в своей синкретичности, так же, как непереводимы на привычный язык логики результаты, известные нам из квантовой физики, ибо высшая реальность «не может быть адекватно описана словами, поскольку лежит вне области чувств и интеллекта, из которой происходят наши слова и понятия».[45]

---

[41] Такого рода воздействие на душевное состояние человека оказывает просмотр новостных телепередач или длительное нахождение в сети, когда череда логически несвязанных и, зачастую, противоречащих друг другу кластеров информации снижает критичность мышления и приводит к ненаправленному внушению. В результате массового гипноза борьба с тоталитаризмом оборачивается построением подлинно-тоталитарной мировой системы, которая по определению не может быть устойчивой; бездумное декларирование демократических свобод приводит к вопиющей безнравственности и лжегуманизму, отмеченному кодификацией и обезличиванием человека, иначе говоря, фактическим его порабощением. Слова, с помощью которых некоторые мнят, будто бы им удается управлять обществом, (слова о «возрождении духовности», «восстановлении исторической справедливости» и «достижениях» современной цивилизации) иногда прямо-таки поражают своим кощунством, хотя иллюзорность и иррационализм сами по себе не столь опасны, как их последствия. Наиболее показательны в этом смысле внутренние противоречия средневекового католического мира, приведшие к тяжелым последствиям крестовых походов и бесчинству священной инквизиции, или преступная неадекватность монархии в дореволюционной России, которую нынче выдают за образец стоической мудрости. Поэтому не будет лишним заметить, что по нежеланию усваивать уроки истории в теперешней России глубоко заложен аналогичный сценарий саморазрушения.

[42] Если бы для совершенствования и выживания человеческого рода было бы достаточно синкретичного плохо детерминированного мышления, то наука, как таковая, никогда бы не зародилась. Несмотря на заверения всех идеалистов, метафизиков и теологов о том, что они чуть ли не познали саму истину, никто из них не в состоянии ни задавать, ни разрешать вопросы, которые задает и решает настоящий ученый.

[43] А.А.Гриб. Методологическое значение квантовой теории для психологии // Квантовая механика и теория относительности / под ред. П.П.Павлюченко и А.М.Мостепаненко. Л., 1980, С.139-140.

[44] Ф.Капра. Дао физики. СПб., 1994.

[45] Подобный разрыв высшей реальности и «области чувств и интеллекта» дискредитирует не столько человеческое сознание, сколько саму высшую реальность, которая не способна себя проецировать в эту область, стало быть, не абсолютна, раз слова и понятия исходят не из нее.

В признании тезиса о том, что мы не в состоянии продвинуться в квантовой физике дальше вероятностного описания физических процессов, содержится великое разочарование в современной фундаментальной науке. Если принцип неопределенности В.Гейзенберга не может быть уточнен, так как отсутствие причинных связей квантовых явлений есть объективно присущее свойство тонкой материи микромира, то тогда, действительно, следует согласиться с теми, кто говорит об исчерпании научного познания и призывает к обращению общества в религиозное миросозерцание. Однако известно, какого мнения придерживался по этому поводу А.Эйнштейн, создатель общей теории относительности. В коллективной работе А.Эйнштейна, Б.Подольского и Н.Розена о неполноте волновой механики, опубликованной в 1935 году в журнале «Physical Review», говорится, что «со временем должна появиться статистическая квантовая теория, аналогичная статистической механике. Движения отдельных частиц (как, например, молекул газа) должны быть детерминированы, но вследствие большого числа частиц эта теория должна использовать статистику и теорию вероятностей».[46] Об этой вот относительности современной квантовой механики многие ученые забывают, стремясь подтвердить свою вероятностную модель экспериментами вместо того, чтобы с помощью теории стремиться получать практические результаты. Поэтому подход Ф.Капра и некоторых других исследователей, которые предпринимают попытки смешения науки и мистицизма на основе иррационализма, тоже нельзя признать конструктивным, так как *не*-знание ведет науку в тупик и не может быть подлинным Дао физики.[47]

Между тем, ответ на волнующий физиков вопрос, почему математика, эта абстрактная наука (по крайней мере, так утверждают сами математики) настолько хорошо описывает физические явления, лежит на поверхности. Из решения инженерных задач и простейших волновых опытов известно, что значение $\sqrt{2}$ является в физике выделенным среди прочих значений. Данным числом определяется наибольшая упругость прямоугольной балки, прочность конструкций и архитектурных сооружений, связанные со свойствами электромагнитного поля, с помощью его же происходит построение гармонической музыкальной октавы как наиболее устойчивого ряда частот. На соответствие цветового спектра и музыкальной гаммы указывал в своей «Оптике» сэр И.Ньютон, хотя можно предположить, что задолго до него данное соответствие было обнаружено в высокоразвитых культурах древнего мира. Принцип октавного повторения наблюдается в приближении к гармоническим значениям траекторий обращения планет вокруг солнца, в квантовых числах элементов таблицы Менделеева и т.д. Другим выделенным в физике гармоническим числом, безусловно, является число *Ф*, неисчислимое разнообразие проявлений которого также обусловлено свойствами динамической стабильности.[48] Из чего следует заключить, что эти и другие иррациональные числа есть не просто формально геометрическое описание тех или иных объектов, но являются их непосредственными энергетическими параметрами.[49]

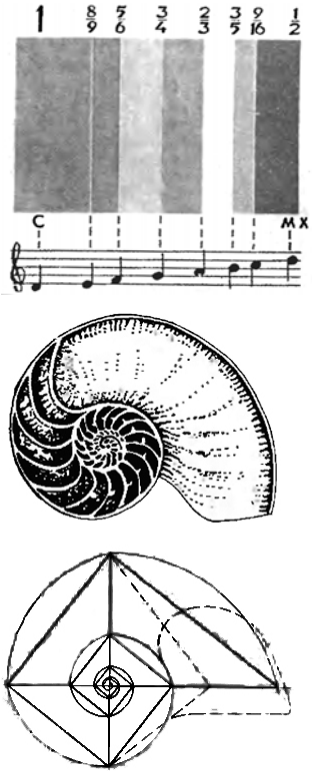


Рис.15. *Дорийский лад и цветовой спектр. Строение раковины и повторяемость числа Ф. (Иллюстрации из книги «Золотое сечение: три взгляда на природу гармонии»).*

Предвзятое отношение научного сообщества к изучению последовательностей и связанных с ними явлений порядка и хаоса во многом обязано их частому (во всяком случае, числа *Ф*) упоминанию в метафизических, идеалистических и религиозных учениях. Но сама наша наука, самые современные ее приложения, в сущности своей мало чем отличается от средневековой схоластики или религии. Точно так же мыслители древних цивилизаций стремились к постижению истины, и точно так же они сталкивались с иррационализмом и парадоксами актуальной бесконечности, не подозревая, что сей угрызающий себя уроборос уже ведет обратный отсчет существования их культуры. Потому что таково его завершенное выражение – противоречивая иллюзия достижения предельного знания, прерывающая самосовершенствование структуры.

Можно соглашаться или не соглашаться с идеей о существовании актуальной бесконечности, с метафизическим, иррациональным или мистическим подходом, но логические противоречия в основаниях математики делают с наукой то, чего не смогли сделать ни кровопролитные войны, ни костры священной инквизиции, приводя к ее вырождению и распаду. Для кого-то представление о потенциальной бесконечности,

---

[46] М.Клайн. Математика. Поиск истины. М., 1988, С.271. В другой книге М.Клайна «Утрата определенности» содержится еще более развернутое изложение истории разногласий в математической науке и ее драматического размежевания с естествознанием, произошедшим в XX веке.

[47] Если мы говорим о пустоте в Дао, то подлинная пустота не пуста. Если мы говорим об угасании и прекращении рассудочного мышления, то переживание это состоит не в том, чтобы войти в нирвану, но в том, где находится выход из нее. Древние говорили: «Кто скажет, тот не знает, кто знает, тот не кажет», для приближения к пониманию этого невыразимого знания, достаточно отнести его к самому высказыванию древних, к даосизму или к мистицизму в целом, поэтому в книге Гуань Инь Цзы мы находим следующие строки: «Мудрый не делает различия между пребыванием в Дао и отстранением от него. В том, что его нет, залог того, что оно есть. В том, что мудрый не держится за Дао, залог того, что он его не потеряет».

[48] И.Шевелев, М.Марутаев, И.Шмелев. Золотое сечение: три взгляда на природу гармонии. М., 1990. В книге предпринята попытка рассмотрения гармонических явлений в их целостной взаимосвязи, авторами приводятся интересные взаимные преобразования $\sqrt{2}$, числа *Ф* и других числовых значений. Хотя точность вычислений выводимых закономерностей оставляет желать лучшего, но ценные наблюдения, касающиеся систематизации проявлений хаоса и дисгармонии, компенсируют этот недостаток. В частности, устанавливается взаимосвязь $\sqrt{2}$ с явлением диссонансов и деструктивная роль качественной симметрии. С точки зрения физики заслуживает внимания сравнение фундаментальных физических констант с теми десятичными значениями, которые выводятся из гармонических пропорций (например, отношение гравитационного притяжения к электромагнитному отталкиванию).

[49] Природа чисел, которые принято называть иррациональными, полностью зависит от явлений пространственной непрерывности, с которой мы имеем дело при описании волновых процессов. Независимо от того, готовы мы или нет рассматривать их в качестве фундаментальных физических констант, подобно скорости света или постоянной Планка, но в описании физических явлений они используются именно в этом качестве. Разница в масштабах, при которых становится значительной сила гравитационного притяжения или электромагнитного взаимодействия, разница в параметрах известных нам частиц, обнаруженных экспериментально, и гипотетических частиц, из которых слагается единое поле вполне сопоставима с колоссальной размерностью периодической последовательности, которой должны обладать вышеназванные гармонические величины.

может быть, покажется не столь привлекательным и даже скучным в сравнении с поражающими воображение парадоксами актуальной бесконечности, но по-настоящему удивительные явления, связанные с гармоническими последовательностями, еще только предстоит открыть. Их поиск требует более сбалансированного и устойчивого сознания, но и отдачи от них значительно больше, чем от блужданий по лабиринтам иррациональных умствований. Гармония и дисгармония мира тесно переплетены, поэтому познание, какой бы области исследований оно ни касалось, никогда не станет скучным занятием. Возможности человеческого разума много больше тех, которые отводит нам информационная среда, но раскрытие рационального порядка и гармонии, действительно, невозможно в обществе, лишенном нравственности и приводящем к угнетению в человеке *со*-вести, то есть его внутреннего сообщения с этим порядком и гармонией. Для того же, кто продолжает следовать пути познания, всегда открыта «неизъяснимая красота мира, переполняющая душу восторгом». Так о ней написал И.Кеплер, который в своей «Гармонии мира» впервые обосновал гелиоцентрическую теорию движения планет, и, вполне возможно, в будущем нас ожидают не менее значимые для естествознания открытия.

Гравюра Л.Дженниса из книги алхимических эмблем.
Уроборос, охраняющий философский камень.

Список литературы:

1. П.А.Флоренский. Столп и утверждение истины / под ред. В.В.Степина, М., 1990, ТI.
2. П.А.Флоренский. Столп и утверждение истины / под ред. В.В.Степина, М., 1990, ТI(II).
3. А.Ф.Лосев. Диалектика мифа. М., 1990.
4. Г.Кантор. Труды по теории множеств. М., 1985.
5. Е.Вигнер. Этюды о симметрии. М., 1971.
6. А.Френкель. О диагональном методе Г.Кантора // перевод Я.В.Шрамко. Вестник Московского университета. Серия 7. Философия. №5, 2003.
7. А.В.Васильев. Вступительная статья «От Евклида до Гильберта» // Д.Гильберт. Основания геометрии. Петроград, 1923, С.XXVIII.
8. А.Зенкин. Infinitum Actu Non Datur. (Из последнего текста для журнала «Вопросы философии»)
9. Фрагменты ранних греческих философов / ответ. ред. И.Д.Рожанский. М., 1989, Ч.I.
10. Е.С.Кочетков, Е.С.Кочеткова. Алгебра и элементарные функции. М., 1966, Ч.I.
11. Ю.Петров, Л.Петров. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. СПб., 2005.
12. А.А.Гриб. Методологическое значение квантовой теории для психологии // Квантовая механика и теория относительности / под ред. П.П.Павлюченко и А.М.Мостепаненко. Л., 1980.
13. Ф.Капра. Дао физики. СПб., 1994.
14. М.Клайн. Математика. Поиск истины. М., 1988.
15. М.Клайн. Утрата определенности. М., 1984.
16. И.Шевелев, М.Марутаев, И.Шмелев. Золотое сечение: три взгляда на природу гармонии. М., 1990.

А также:

Артуро Перес Реверте. «Клуб Дюма, или Тень Ришелье».
Апокалипсис. Откровение Св.Иоанна Богослова.
Ф.Ницше. «Так говорил Заратустра. Книга для всех и для никого».
Мэнли Палмер Холл. «Тайное учение всех времен».
Михаэль Майер. «Убегающая Аталанта».
Гуань Инь Цзы.
И.Кеплер. «Гармония мира».
Книга Лэмбспринка. «О Философском Камне».
и другие.