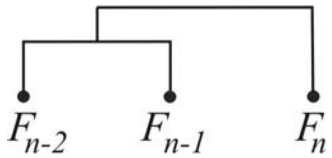
Мартыненко Г.Я.

Стахов, Газале, Файнберг: система обобщенных рекурсий

«Не думайте, смотрите!»
Л. Витгенштейн, «Философские исследования»

В статье (Мартыненко, 2008) было обещано продолжение рекурсионной темы Фибоначчи. Данная статья частично реализует это обещание, включая при этом и прежний текст.

В классической последовательности Фибоначчи каждый последующий член равен сумме двух предшествующих. В этой последовательности элементы связаны двумя типами отношений: структурными, основанными на отношении включения (сумма включает два слагаемых или сумма состоит из двух слагаемых) и линейными: слагаемые предшествуют сумме в развертывании последовательности. В итоге образуется рекурсивная (регрессивная) последовательность. Схематически классическую триаду Фибоначчи можно представить в виде линеаризованного дерева составляющих, используемого для представления синтаксических структур естественных языков (Гладкий, 1985):

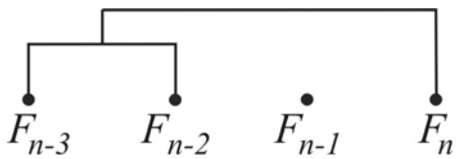


В теории порождающих грамматик такие конструкции именуются левоветвящимися или регрессивными – ступеньки линеаризованного дерева образуют лестницу, ориентированную влево, в отличие от правоветвящихся, прогрессивных структур, для которых характерен «спуск по лестнице» в противоположном направлении (Хомский, 1972; Ингве, 1964). Рассмотренная рекурсия является простейшей. Ее усложнение может осуществляться благодаря увеличению числа суммируемых членов и нарастанию дистантности (числа вставных элементов) между слагаемыми. Рассмотрим более сложные варианты.

Начнем с последовательности М. Газале (Газале, 2003), задаваемой уравнением:

$$x^n - x - 1 = 0\ .$$

При n=3 данное уравнение становится уравнением Падована, корень которого равен 1,325. Этому уравнению соответствует рекурсия вида:



В этом дереве появляется разрыв (вставка, дистантность) между значением суммы и вторым слагаемым. Попытаемся теперь наращивать дистантность *d* при одновременном увеличении числа рекурсирующих слагаемых *n*. В качестве затравочных чисел будем использовать числа натурального ряда, начиная с единицы, которые при этом заполнят и дистанционную «лакуну» между значением суммы и последним затравочным числом.

А теперь построим таблицу, в которой разместим предельное отношение последующего члена к предыдущему при нарастании *n* и *d*.

Таблица 1

От Газале к Стахову и Трибоначчи

D N	0	1	2	3	4	5	6	7		100
2	1,618	1,325	1,221	1,167	1,135	1,116	1,098	1,081		1,012
3	1,839	1,466	1,325	1,250	1,203	1,171	1,148	1,130		1,012
4	1,928	1,534	1,380	1,296	1,243	1,207	1,180	1,159		1,013
5	1,966	1,570	1,412	1,325	1,269	1,229	1,200	1,178		1,014
6	1,984	1,590	1,431	1,343	1,285	1,244	1,215	1,191		1,014
7	1,992	1,601	1,443	1,354	1,296	1,255	1,225	1,201		1,015
8	1,996	1,608	1,451	1,362	1,305	1,263	1,232	1,208		1,016
9	1,998	1,612	1,456	1,368	1,310	1,269	1,238	1,213		1,017
10	1,999	1,614	1,459	1,371	1,314	1,273	1,244	1,217		1,019
100	2,000	1,618	1,466	1,380	1,325	1,285	1,255	1,232		1,034

Что же мы получили в итоге?

1. В строке *n*=2 имеем *числа обобщенного серебряного сечения М. Газале с нарастающей дистантностью рекурсирующих членов*.
2. Самое интересное содержится в последней строке – *предельные числа имеют вид корней уравнений обобщенного золотого сечения А. Стахова* (Стахов,1979)
3. Интересно также и то, что *стаховские числа образуют диагональ таблицы*
4. В столбце *n*=0 располагаются *обобщенные числа Трибоначчи* (Feinberg,1963) в расширительном толковании - не только с тремя, но и любым числом рекурсирующих членов

Итак, все рекурсии, построенные на базе обобщения М. Газале, образуют единую систему, в которой центральную роль играет обобщение А. Стахова. Прибегнув к аналогии с шахматной доской, можно сказать, что последовательность А. Стахова обладает возможностями ферзя, а последовательности М. Газале и Трибоначчи совместно - возможностями ладьи.

Но в табл. 1 есть еще одно любопытное свойство, связанное с числом Падована-Газале. Чтобы не загромождать табл. 1 новой информацией, повторим ее и графически выделим новое свойство – см. табл. 1а.

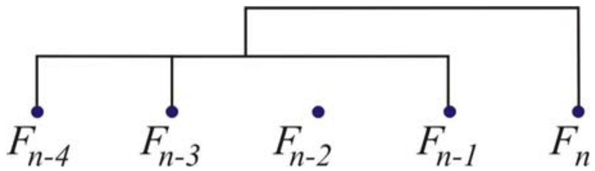
Стаховские диагональные числа тесно соприкасаются с двумя последовательностями, содержащими пары повторяющихся чисел 1,325-1,325, 1,296-1,296, 1,269-1,269, 1,244-1,244 и т. д. Природу и математическое содержание этой последовательности мы пока не раскусили. Пока можно лишь отметить, что она открывается тройным повторением газалевского числа 1,325, при этом ее члены обладают мультипликативным свойством ряда Фибоначчи: центральный член (например, в триаде) равен среднему геометрическому крайних членов. Кроме того, бросается в глаза то, что при переходе от одного числа пары к другому необходимо сделать шаг вправо и спуститься вниз. Это напоминает ход шахматного коня. Такая *Г*-образность расширяет шахматную интерпретацию таблиц 1 и 1а.

Таблица 1a

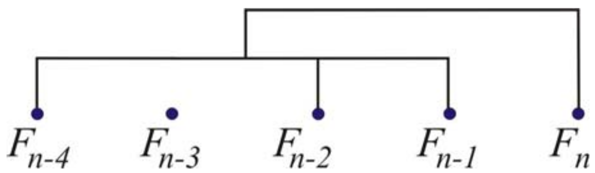
Г-образный Газале

d / *n*	0	1	2	3	4	5	6	7
2	1,618	1,325	1,221	1,167	1,135	1,116	1,098	1,081
3	1,839	1,466	1,325	1,250	1,203	1,171	1,148	1,130
4	1,928	1,534	1,380	1,296	1,243	1,207	1,180	1,159
5	1,966	1,570	1,412	1,325	1,269	1,229	1,200	1,178
6	1,984	1,590	1,431	1,343	1,285	1,244	1,215	1,191
7	1,992	1,601	1,443	1,354	1,296	1,255	1,225	1,201
8	1,996	1,608	1,451	1,362	1,305	1,263	1,232	1,208
9	1,998	1,612	1,456	1,368	1,310	1,269	1,238	1,213
10	1,999	1,614	1,459	1,371	1,314	1,273	1,244	1,217
								1,225
20	2,000	1,618	1,465	1,380	1,325	1,284	1,254	1,230
30	2,000	1,618	1,466	1,380	1,325	1,285	1,255	1,232

А теперь в качестве точки отсчета выберем обобщение А. Стахова. Рассматривая данное обобщение, нужно иметь в виду, что ему соответствуют два типа рекурсий. Так, если число рекурсирующих членов равно 3, а дистантность равна 1, то возможны два дерева составляющих:



Рекурсия А. Стахова – тип 1



Рекурсия А. Стахова – тип 2

Для обеих типов рекурсий получаем существенно разные таблицы. Начнем с рекурсии, соответствующей рекурсии Стахова-тип 1 – см. табл. 2.

Таблица 2

От Стахова-1 к Газале и Трибоначчи

D / *N*	0	1	2	3	4	5	6	7	8		100
2	1,618	1,466	1,380	1,325	1,285	1,255	1,232	1,213	1,197		1,035
3	1,839	1,618	1,497	1,420	1,365	1,325	1,293	1,268	1,247		1,042
4	1,927	1,685	1,552	1,466	1,405	1,360	1,325	1,296	1,273		1,047
5	1,965	1,718	1,580	1,490	1,428	1,380	1,343	1,314	1,289		1,050
6	1,983	1,735	1,596	1,505	1,441	1,392	1,355	1,325	1,300		1,052
7	1,991	1,744	1,605	1,514	1,450	1,400	1,363	1,332	1,307		1,054

8	1,996	1,748	1,610	1,519	1,455	1,406	1,368	1.337	1,312		1,056
9	1,998	1,751	1,613	1,523	1,458	1,410	1,372	1,341	1,315		1,058
10	1,999	1,753	1,615	1,525	1,461	1,412	1,374	1,343	1,318		1,059
100	2,000	1,755	1,618	1,528	1,466	1,417	1,380	1,350	1,325		1,062

В столбце *d=0* располагаются обобщенные числа Трибоначчи, а в строке *n=2* – обобщенные числа А. Стахова. Интересно, что *по диагонали таблицы с шагом через клетку располагаются числа А. Стахова, а между ними, но уже в строке предельных значений* (при *n=100*) *мы видим те же самые числа*. Обращает на себя внимание присутствие в табл. 2 четырех серебряных сечений, которые рассыпаны по клеткам с координатами *d* и *n* 3,2; 5,3; 6,4;7,6, устремляясь по ломаной линии к верхнему пределу в столбце 8 и при этом пересекаясь в клетке 7,6 с числами Стахова.

Теперь обратимся к рекурсии А. Стахова – тип 2.

Таблица 3

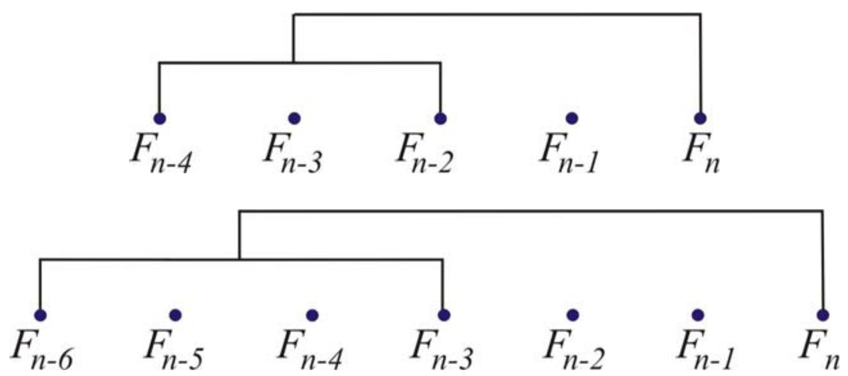
От Стахова-2 к Трибоначчи и *Const*=2

D *N*	0	1	2	3	4	5	6	7		100
2	1,618	1,466	1,380	1,325	1,285	1,255	1,232	1,213		1,035
3	1,839	1,755	1,705	1,674	1,654	1,641	1,632	1,627		1,618
4	1,928	1,886	1,867	1,854	1,848	1,844	1,842	1,841		1,839
5	1,966	1,948	1,948	1,933	1,931	1,929	1,928	1,928		1,928
6	1,984	1,975	1,971	1,968	1,967	1,967	1,966	1,966		1,996
7	1,992	1,988	1,986	1,985	1,984	1,984	1,984	1,984		1,984
8	1,996	1,994	1,992	1,992	1,992	1,992	1,992	1,992		1,992
9	1,998	1,997	1,997	1,996	1,996	1,996	1,996	1,996		1,996
10	1,999	1,999	1,998	1,998	1,998	1,998	1,998	1,998		1,998
100	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000		2,000

В табл. 3 ситуация несколько иная. Здесь любопытно то, что *в строках предельными величинами чисел Трибоначчи являются также числа Трибоначчи, но со сдвигом на одну строку, а в столбцах числа А. Стахова стремятся в пределе к постоянной величине, равной 2*. Интересно, что классическое число Трибоначчи 1,839 по мере увеличения *d* стремится к числу φ, а число φ где-то в очень далекой бесконечности стремится приблизиться к 1.

Итак, все самые *популярные обобщения вариаций на тему Фибоначчи (последовательности М. Газале, А. Стахова и Трибоначчи) образуют единую систему в пространстве рекурсий, формируемых числом рекурсирующих элементов и дистантностью (количеством вставных членов) между ними.*

Обратим внимание на еще одну интригующую рекурсию, построенную на принципе пропуска одного и более, но обязательно равного числа членов. Речь идет о цепочках вида:



Попытаемся разобраться с числами, стоящими за этими рекурсиями.

Отметим, что такие конструкции состоят из нечетного количества членов и симметричны относительно центрального члена. Они обладают следующими свойствами:

1. В отличие от обобщений, рассмотренных выше, *отношение последующего члена к предыдущему здесь характеризуется не одной, а несколькими предельными величинами, число которых равно* $z = d + 1$.

2. *Произведение этих предельных величин всегда равно одному из чисел обобщенной последовательности Трибоначчи.* Например, если $d = 1$, то $z = 2$, при этом эти два предельных числа равны, соответственно, 1,447 и 1,118. *Произведение этих чисел приблизительно равно 1,618, а их среднее геометрическое, т. е. средний относительный прирост, - 1,272.* Еще один пример. При $z = 3$ набор предельных чисел таков: 0,951; 1,350; 1,259. Произведение этих чисел приблизительно равно 1,618, а среднее геометрическое, как и в первом примере, равно 1,272. Полученные данные в виде фрагмента представлены в табл. 4. Привести все данные не представляется возможным ввиду их исключительной громоздкости.

3. *Полученные произведения в свою очередь равны отношению предыдущего члена к предпредыдущему, т. е. 1,618.*

Приведенные результаты можно свести в одномерную табл. 4, в которой число рекурсирующих членов не оказывает никакого влияния на величину произведения предельных величин. Оно всегда равно одному из чисел обобщенной последовательности Трибоначчи при любом *n* – см. табл. 5.

Таблица 4

Рекурсии обобщенной последовательности Трибоначчи

D N	0	**1**	2	3
2	1,618	$1{,}118 \cdot 1{,}447 = 1{,}618$	$0{,}981 \cdot 1{,}304 \cdot 1{,}455 =$ 1,618	$1{,}1 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}183 \cdot 1{,}224 =$ 1,618
3	1,839	$1{,}296 \cdot 1{,}419 = 1{,}839$	$1{,}218 \cdot 1{,}28 \cdot 1{,}118 =$ 1,839	$1{,}091 \cdot 1{,}104 \cdot 1{,}19 \cdot 1{,}283 =$ 1,839
4	1,928	$1{,}246 \cdot 1{,}547 = 1{,}928$	$1{,}2 \cdot 1{,}14 \cdot 1{,}409 = 1{,}928$	
5	1,966	$1{,}294 \cdot 1{,}52 = 1{,}966$		

Таблица 5

Мультипликативные рекурсии обобщенной последовательности Трибоначчи

D N	0	1	2	3	4	5	6	7
2	1,618	1,618	1,618	1,618	1,618	1,618	1,618	1,618
3	1,839	1,839	1,839	1,839	1,839	1,839	1,839	1,839
4	1,928	1,928	1,928	1,928	1,928	1,928	1,928	1,928
100	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000

Позволим себе повторить, что сказанное относится только к последовательностям с нечетным числом членов. Если число членов будет четным, то возникает необходимость во введении фиктивного члена, численное значение которого будет равно среднему геометрическому из значений обрамляющих чисел. Введение фиктивного («нулевого») члена очень напоминает прием, которым пользуются лингвисты для восстановления синтаксической структуры в случае эллипсиса какого-либо узла в дереве предложения.

Интересной особенностью последовательностей данного типа является то, что во всех столбцах пределом является значение, равное 2.

Итак, синтез лингвистического и математического подходов ведет к открытию нетривиальных свойств последовательностей Фибоначчи и типологизации последних на основе количества рекурсирующих членов и дистантности между ними.

Полученные данные могут быть выражены и аналитически. Этому мы посвятим следующую публикацию.

Литература

Газале М. Гномон. От фараонов до фракталов. Перевод с англ. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 325 с.

Гладкий А.В. Синтаксические структуры естественного языка в автоматизированных системах общения. М.: Наука, 1985. 144 с.

Ингве В. Гипотеза глубины // Новое в лингвистике. Вып.4. М.: Прогресс,1964. С.126-138

Мартыненко Г.Я. "Числа Стахова как предельное обобщение рекурсий Газале и Трибоначчи" // // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14842, 10.07.2008. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321088.htm

Стахов А. Алгоритмическая теория измерения. М.: Знание, 1979. 64 с.

Хомский Н. Аспекты теории синтаксиса. Перевод с англ. М.: Изд-во Московского ун-та, 1972. 259 с.

Feinberg M. “Fibonacci-Tribonacci». Fibonacci Quart. 1. 1963. P. 71-74.