

## Обобщенные «золотые» $pk$ -пропорции

Абстрагируемся от таких понятий, как изящность, всеобщая гармония и другие красочные образы, приписываемые «золотому» сечению, поскольку традиционного эпитета «золотое» вполне достаточно.

Точно можно утверждать лишь то, что в своем классическом проявлении оно отражает, прежде всего, один из законов пропорциональной связи целого (формализуемого единицей) и его составляющих частей, описываемый в математике квадратным уравнением  $x(x-1)=1$ .

Его эстетическая сторона, как и некоторые присущие только ему свойства – несомненны. Однако это все равно только частный (хотя и особый!) случай отношения целого к своим частям  $x$ .

В последние годы рядом авторов выполнены обобщения «золотой» пропорции так, чтобы в частном случае они вырождались в обычное «золотое» сечение. В частности, А. Стаховым подобное расширение осуществлено для уравнения  $x^p(x-1)=1$ .

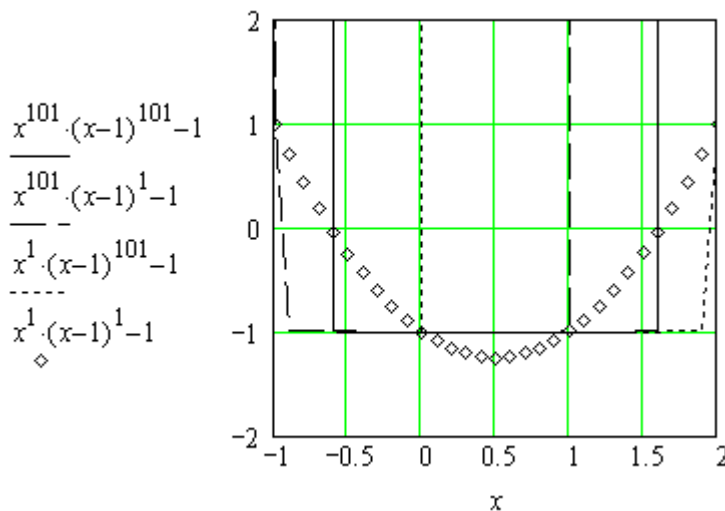
Целью настоящей работы является его дальнейшее обобщение, которое образуют положительные решения действительного алгебраического уравнения степени  $p+k$  с неизвестным  $x$  и целыми взаимно простыми (не имеющими общих делителей, отличных от 1) положительными числами  $p, k$

$$x^p(x-1)^k = 1 \quad (1)$$

или  $f(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j x^{p+k-j} - 1 = 0$ , где  $C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$  – биномиальные коэффициенты.

Соотношение (1), которое условно назовем уравнением «золотых»  $pk$ -пропорций или сечений, имеет  $p+k$  корней  $x_i$ .

Последовательность коэффициентов алгебраического многочлена  $f(x)$ :



$1, -C_k^1, C_k^2, -C_k^3 \dots (-1)^k C_k^k, -1$  имеет нечетное число  $N=k+\xi$  перемен знаков ( $\xi=0$ , если  $k$  – нечетное;  $\xi=1$ , если  $k$  – четное), поэтому согласно правилу знаков Декарта количество положительных корней уравнения (1) либо равно  $N$ , либо меньше числа  $N$  на четное число. То есть в любом случае существует хотя бы один действительный корень  $x_s > 0$ .

Большой из положительных корней, который находится (рис. 1) в интервале значений  $(1, 2)$  обозначим  $x_{\max} = \tilde{\Phi}_{pk} = \tilde{\Phi}$ , где значком  $\sim$

отмечено отличие от традиционного значения  $\Phi = (\sqrt{5}+1)/2$ , соответствующего решению уравнения (1) при  $p=k=1$ .

При  $p > k$  положительный корень  $x_{\max}$  смещается к единице, при  $p < k$  – к двум.

Остальные корни могут быть комплексными либо иррациональными.

По аналогии с работой [1] можно доказать следующие свойства корней уравнения (1):

$$\sum_{i=1}^{p+k} x_i = \sum_{i=1}^{p+k} (x_i)^v = k, \quad \prod_{i=1}^{p+k} x_i = (-1)^{p+k-1}, \quad v = \overline{1, p+k-1}.$$

«Золотые»  $pk$ -сечения  $\tilde{\Phi}$  удовлетворяют математическому тождеству, связывающему степени «золотых»  $pk$ -пропорций ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ):  $\tilde{\Phi}^{n+1} = \tilde{\Phi}^n + \tilde{\Phi}^{n-p'}$ ,  $p' = p/k$ .

При  $n=0$  следуют другое математическое тождество:

$$\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}^{-p'} = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\Phi}^{-i(1+p')-1} = 1,$$

которое отражает некий общий механизм разложения единицы на составляющие, обобщая принцип «золотого» сечения на множество целых положительных чисел ( $p, k$ ) и образуя дискретную поверхность  $(\tilde{\Phi}_{pk, p, k})$  с базовым «золотым» числом Фидия  $\Phi$  ( $p' = 1$ ).

Уравнение (1) имеет достаточно простую геометрическую интерпретацию: число  $\tilde{\Phi}_{pk}$  соответствует делению отрезка АВ точкой С в пропорции

$$\left(\frac{CB}{AC}\right)^k = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p.$$

Обобщенные  $pk$ -числа Фибоначчи генерируются с помощью рекуррентного соотношения ( $n \geq p+k$ )

$$\tilde{F}(n) = \tilde{F}(n-p-k) + \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} C_k^j \tilde{F}(n-j)$$

при начальных условиях  $\tilde{F}(0) = 0$ ,  $\tilde{F}(i) = 1$ ,  $i = \overline{1, p+k-1}$ .

В частности, при  $k=1$  образуются  $p$ -числа Фибоначчи [2]  $F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-1-p)$ , для которых сравнительно легко выводится формула их взаимосвязи через биномиальные коэффициенты:

$$F_p(n+1) = \sum_{j=0}^{\lfloor n(1+p)^{-1} \rfloor} C_{n-p \cdot j}^j,$$

где  $\lfloor \xi \rfloor$  – целая часть  $\xi$  (наибольшее целое число, не превосходящее  $\xi$ ).

По аналогии с работой [2], в которой введены так называемые  $p$ -числа Люка, можно показать, что сумма  $n$ -х степеней корней  $x_1, x_2, \dots, x_{p+k}$  уравнения (1)  $S_n$  удовлетворяет соотношениям ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ):

$$S_n = S_{n-p-k} + \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} C_k^j S_{n-j}, \quad S_n = \sum_{i=1}^{p+k} (x_i)^n. \quad (2)$$

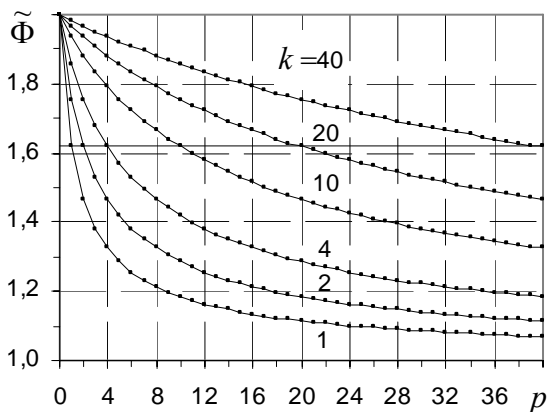


Рис. 2. Графики изменения значений «золотых»  $pk$ -сечений

В частности,

$$S_0 = p+k, \quad S_i = k, \quad i = \overline{1, p+k-1},$$

что обуславливает расширенный класс рекуррентных числовых последовательностей, которые назовем  $pk$ -числами Люка

$$L_{pk}(n) = \tilde{L}(n) = \sum_{i=1}^{p+k} (x_i)^n.$$

С использованием свойств (2) корней алгебраического уравнения (1) эти числа Люка могут быть вычислены по рекуррентной формуле ( $n \geq p+k$ )

$$\tilde{L}(n) = \tilde{L}(n-p-k) + \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} C_k^j \tilde{L}(n-j)$$

при начальных условиях  $\tilde{L}(0) = p+k$ ,  $\tilde{L}(i) = k$ ,  $i = \overline{1, p+k-1}$ .

Множество значений «золотых»  $pk$ -сечений ограничено интервалом  $1 < \tilde{\Phi} < 2$  (рис. 2).  
Некоторые характеристические числа «золотых»  $pk$ -сечений представлены в табл. 1.

Таблица 1

**Характеристические числа расширенного класса «золотых»  $pk$ -сечений**  
/в скобках указаны сочетания пар чисел  $(p, k)$ /

$p$	$k$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\Phi$	1,75487767	1,81917251	1,85667488	1,88127146	1,89865371	1,91159235	1,92159932
2	1,46557123	$\Phi$	1,70160689	(1, 2)	1,79190643	(1, 3)	1,84010006	(1, 4)
3	1,38027757	1,52894635	$\Phi$	1,67821130	1,72179137	(1, 2)	1,78088128	1,80186959
4	1,32471796	(2, 1)	1,55505758	$\Phi$	1,66505450	(2, 3)	1,73088186	(1, 2)
5	1,28519903	1,41779675	1,50560766	1,56932376	$\Phi$	1,65662016	1,68800328	1,71405874
6	1,25542287	(3, 1)	(2, 1)	(3, 2)	1,57831789	$\Phi$	1,65075207	(3, 4)
7	1,23205463	1,34990020	1,43237912	1,49483600	1,54424741	1,58450740	$\Phi$	1,64643347
8	1,21314972	(4, 1)	1,40433680	(2, 1)	1,51464106	(4, 3)	1,58902746	$\Phi$

В общем случае они находятся численными методами, отдельные из них можно вычислить аналитически, в частности:

$$(p, k) = (p, p) \rightarrow \tilde{\Phi}_{pp} = \Phi;$$

$$(p, k) = (1, 2): \tilde{\Phi}_{12} = \frac{a}{6} + \frac{2}{3a} + \frac{2}{3}, \quad a = \sqrt[3]{100 + 12\sqrt{69}};$$

$$(p, k) = (2, 1): \tilde{\Phi}_{21} = \frac{b}{6} + \frac{2}{3b} + \frac{1}{3}, \quad b = \sqrt[3]{116 + 12\sqrt{93}};$$

$$(p, k) = (4, 1): \tilde{\Phi}_{41} = \frac{c}{6} + \frac{2}{c}, \quad c = \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{69}}.$$

Характерно, что линия  $\Phi$  делит график (рис. 2) в соотношении «золотой» пропорции (верхняя часть соответствует  $p' < 1$ , нижняя –  $p' > 1$ ), в то время как множество неповторяющихся  $pk$ -сечений – ровно пополам.

Таблица 2

**Числа Фибоначчи «золотых»  $pk$ -сечений**

$n$	$p=1$					
	$k$					
	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1	1
4	3	2	1	1	1	1
5	5	4	2	1	1	1
6	8	7	5	2	1	1
7	13	12	11	6	2	1
8	21	21	21	16	7	2
9	34	37	37	36	22	8
10	55	65	64	71	57	29
11	89	114	113	128	127	85
12	144	200	205	220	253	211
13	233	351	377	376	464	463
14	377	616	693	661	804	925
15	610	1081	1266	1211	1354	1718
16	987	1897	2301	2290	2289	3017
17	1597	3329	4175	4382	4005	5097
18	2584	5842	7581	8347	7372	8464
19	4181	10252	13785	15706	14198	14197
20	6765	17991	25088	29191	28033	24753

$n$	$p=2$					
	$k$					
	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	2	1	1	1	1	1
5	3	2	1	1	1	1
6	4	4	2	1	1	1
7	6	7	5	2	1	1
8	9	11	11	6	2	1
9	13	17	21	16	7	2
10	19	27	36	36	22	8
11	28	44	58	71	57	29
12	41	72	92	127	127	85
13	60	117	149	212	253	211
14	88	189	250	340	463	463
15	129	305	431	541	794	925
16	189	493	750	881	1299	1717
17	277	798	1299	1497	2069	3005
18	406	1292	2227	2653	3290	5019
19	595	2091	3784	4825	5370	8100
20	872	3383	6401	8829	9192	12832

Таблица 3

Числа Люка «золотых»  $pk$ -сечений

$n$	$p=1$					
	$k$					
	1	2	3	4	5	6
0	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6
2	3	2	3	4	5	6
3	4	5	3	4	5	6
4	7	10	7	4	5	6
5	11	17	18	9	5	6
6	18	29	39	28	11	6
7	29	51	73	74	40	13
8	47	90	127	164	125	54
9	76	158	219	319	320	195
10	123	277	388	569	705	566
11	199	486	707	972	1391	1392
12	322	853	1303	1660	2531	3030
13	521	1497	2395	2929	4360	6012
14	843	2627	4371	5394	7320	11101
15	1364	4610	7938	10239	12380	19401
16	2207	8090	14399	19620	21741	32662
17	3571	14197	26149	37353	40227	54151
18	5778	24914	47559	70183	77816	90915
19	9349	43721	86567	130249	154000	159074
20	15127	76725	157572	239929	305105	295126

$n$	$p=2$					
	$k$					
	1	2	3	4	5	6
0	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	4	5	6
3	4	2	3	4	5	6
4	5	6	3	4	5	6
5	6	12	8	4	5	6
6	10	20	21	10	5	6
7	15	30	45	32	12	6
8	21	46	83	84	45	14
9	31	74	138	184	140	60
10	46	122	218	354	355	216
11	67	200	344	620	775	622
12	98	324	561	1018	1517	1518
13	144	522	952	1616	2735	3282
14	211	842	1655	2566	4632	6474
15	309	1362	2888	4204	7505	11886
16	453	2206	4995	7220	11885	20606
17	664	3572	8537	12924	18892	34142
18	973	5780	14466	23644	31010	54762
19	1426	9350	24437	43324	53604	86456
20	2090	15126	41338	78474	97655	137416

Литература

1. *Stakhov A., Rozin B.* The «golden» algebraic equations // *Chaos, Solitons & Fractals.* – 2006. – V. 27, Issue 5. – P. 1415–1421.
2. *Stakhov A., Rozin B.* Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas  $p$ -numbers // *Chaos, Solitons & Fractals.* – 2005. – V. 27 (5). – P. 1162–1177.