Г. Я. Мартыненко

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ТИПОЛОГИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФИБОНАЧЧИ

Комментарий А.П. Стахова

Профессор Г.Я. Мартыненко опубликовал на сайте «Академия Тринитаризма» несколько работ. В рецензируемой работе хочется привлечь внимание прежде всего к обнаруженной Мартыненко связи чисел Фибоначчи и Люка с такой «сакральной» фигурой как «свастика», которая использовалась многими народами мира. Свастика у большинства древних народов была символом движения жизни, Солнца, света и благополучия и отражала главный вид движения в Мироздании – вращательное с его производной – поступательным. Мартыненко ввел в рассмотрение «Свастику Фибоначчи» и «Свастику Люка», которые «вращаются» с некоторым сдвигом по фазе. Обращает на себя внимание и то, что такая конструкция наряду с идеей вращения символизирует также и идею поступательного движения, имея облик «шагающего человечка». Любопытно, что Все ряды Фибоначчи образуют орнаментальную конфигурацию в виде крестообразного пересечения двух клотоид, напоминающих «Водовороты» Морица Эшера. Заслуживают уважения ранговые распределения последовательностей типа Фибоначчи и теория так называемых «фиботипов» и их связь со статичтическими распределениями типа «функции Вейбулла». Всего этого достаточно, чтобы сделать вывод о том, что в лице Г.Я. Мартыненко мы имеем серьезного исследователя, которому удалось получить новые результаты в области «теории чисел Фибоначчи».

«Всегда найдутся эскимосы, которые напишут для жителей Бельгийского Конго правила поведения в тропическую жару»
Ежи Лец, Непричесанные мысли

Введение

В конце 50-х гг. XX в. родилась научная дисциплина под названием математическая лингвистика. Ее ядром стали формальные и порождающие грамматики. С помощью этой новой лингвистики (или математики?) гуманитарии, тяготевшие к естественно-научному видению мира и естественники, приобщившиеся к словесности, пытались решить некоторые серьезные и даже эпохальные проблемы, подобные пониманию речи и машинному переводу. И хотя до сих пор эти проблемы далеки от окончательного решения, все-таки кое-что удалось сделать и порой даже такое, что раньше и в голову не приходило. Взять хотя бы порождающие грамматики – методическую основу ранней математической лингвистики. Известно, например, что они помимо своего прямого назначения с успехом применялись при описании генетического кода, а некоторые синтаксические идеи явились толчком для рождения чисто математической дисциплины, которая стала называться математической лингвистикой (не путать с математической

лингвистикой – дисциплиной лингвистической). Значительную роль лингвистические идеи сыграли в формировании теории классификации, развитии информационных технологий и разработке языков программирования.

Одной из разновидностей упорядочивания в математике являются числовые структуры, среди которых важное место занимают рекуррентные последовательности типа Фибоначчи. Эти структуры могут быть рассмотрены и в математико-лингвистическом контексте. В языке Фибоначчи есть свой словарь, свои предложения, текст, есть свои грамматические правила, в том числе правила порождения линейных последовательностей чисел. Применительно к этим числовым структурам можно говорить о структуре предложений, трансформациях синтаксических структур и их типологии. Всего этого мы касаемся вскользь, в сущности, декларативно, сознавая, что эта проблема достойна того, чтобы вернуться к ней позднее для более основательной рефлексии.

Для нас важно то, что лингвистические структуры, конечно же, могут рассматриваться с позиций математики, но и обратный подход (лингво-математический) тоже имеет право на существование.

В данной работе этот подход реализован лишь частично. В его основе лежит типологический подход, свойственный лингвистике и гуманитарным наукам в целом. Типологическое отношение к реальности на авансцену исследования выдвигает различные способы визуализации материала, разработку формализмов выделения единиц текста, «картинного» представления материала и результатов исследования, методов работы с количественными данными, принятыми в лингвистике и ее типологических ответвлениях, таких как квантитативная типология языков, стилистическая диагностика, методы атрибуции анонимных и псевдонимных текстов. Именно это мы пытались реализовать в данной работе. Использованные нами несложные математико-лингвистические приемы, быть может, и лишены математической воспаренности и самоупоенности, но в силу своей «непритязательности» и тяготения к реальности весьма полезны при реализации продекларированного подхода.

Отметим также, что последовательности типа Фибоначчи являются краеугольным камнем междисциплинарной математической теории гармонии (Стахов, 2003). Но категория гармонии является в то же время важной темой теории текста, вербального. музыкального и визуального (Мартыненко, 2008). Такое пересечение является дополнительным активизатором наших усилий.

Завершая вводную часть работы, мы надеемся что наш непритязательный труд будет способствовать возвращению математики не только в естествознание, но и в математическую лингвистику, откуда математики в последние годы ушли, вкусив, но не раскусив плод лингвистического познания.

Представляется, что такой подход перекликается с призывом А.П. Стахова (Стахов, 2008) к отвлеченным математикам эпохи постмодернизма не стыдиться своего прошлого, убогого настоящего и вернуться в лоно увлекательной реальности, минувшей, настоящей и предстоящей.

1. Постановка задачи

Любая числовая последовательность типа Фибоначчи строится по правилу, согласно которому каждый последующий член равен сумме двух предыдущих. Конкретный числовой облик последовательности определяется двумя начальными «затравочными» числами и порядком их следования. Обычно различного рода закономерности, связанные с рядами Фибоначчи и их свойства обсуждаются на примере рядов классического типа. Иногда приводятся и другие примеры. При этом утверждается, что число потенциально возможных типов бесконечно.

В связи с этим возникает несколько вопросов:

Каково разнообразие числовых вариантов последовательностей типа Фибоначчи?

Возможна ли и на каких принципах квантитативная типология таких рядов?

Каково соотношение классических (собственно Фибоначчи и Люка) и прочих последовательностей типа Фибоначчи?

Каким образом организованы классические и неклассические типы последовательностей в пространстве, порождаемом затравочными числами?

2. Первичное упорядочивание данных

Чтобы ответить на поставленные вопросы, попытаемся просмотреть все потенциальное множество целочисленных рядов при заданной верхней количественной границе затравочных коэффициентов *a* и *k.* Пусть нижняя граница их значений равна –5, а верхняя – +5. Построим серию таблиц, в строках которых коэффициент *a* пробегает все значения выбранного интервала, а коэффициент *k* в каждой таблице имеет фиксированное значение. Две такие таблицы (табл.1 и 2) приведены ниже, а остальные размещены в Приложении.

Таблица 1

Числовые варианты рядов Фибоначчи при $-1 < a < 5$ и $k = 1$

Уровень ряда	Формула уровня	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	Среднее
–10	$89a-55k$	–500	–411	–322	–233	–144	–55	34	123	212	301	390	–55
–9	$34k-55a$	309	254	199	144	89	34	–21	–76	–131	–186	–241	34
–8	$34a-21k$	–191	–157	–123	–89	–55	–21	13	47	81	115	149	–21
–7	$13k-21a$	118	97	76	55	34	13	–8	–29	–50	–71	–92	13
–6	$13a-8k$	–73	–60	–47	–34	–21	–8	5	18	31	44	57	–8
–5	$5k-8a$	45	37	29	21	13	5	–3	–11	–19	–27	–35	5
–4	$5a-3k$	–28	–21	–18	–13	–8	–3	2	7	12	17	22	–3
–3	$2k-3a$	17	14	11	8	5	2	–1	–4	–7	–10	–13	2
–2	$2a-k$	–11	–9	–7	–5	–3	–1	1	3	5	7	9	–1
–1	$k-a$	6	5	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4	1
0	a	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**
1	k	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
2	$a+k$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	1
3	$A+2k$	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	2
4	$2a+3k$	–7	–5	–3	–1	1	3	5	7	9	11	13	3
5	$3a+5k$	–10	–7	–4	–1	2	5	8	11	14	17	20	5
6	$5a+8k$	–17	–12	–7	–2	3	8	13	18	23	28	33	8
7	$8a+13k$	–27	–19	–11	–3	5	13	21	29	37	45	53	13
8	$13a+21k$	–44	–31	–18	–5	8	21	34	47	60	73	86	21
9	$21a+34k$	–71	–50	–29	–8	13	34	55	76	97	118	139	34
10	$34a+55k$	–115	–81	–47	–13	21	55	89	123	157	191	225	55
Тип ряда				*Л*	*Ф*	*Ф*	*Ф*	*Ф*	*Л*				*Ф*

Таблица 2

Числовые варианты рядов Фибоначчи при $-1 < a < 5$ и $k = 4$

Уровень ряда	Формула уровня	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	Среднее
–10	$89a-55k$	–655	–576	–487	–398	–309	–220	–131	–42	37	136	225	–220
–9	$34k-55a$	401	356	301	246	191	136	81	26	–29	–84	–139	136
–8	$34a-21k$	–254	–220	–186	–152	–118	–84	–50	–16	18	52	86	–84
–7	$13k-21a$	157	136	115	94	73	52	31	10	–11	–32	–53	52
–6	$13a-8k$	–97	–84	–71	–58	–45	–32	–19	–6	7	20	33	–32
–5	$5k-8a$	60	52	44	36	28	20	12	4	–4	–12	–20	20
–4	$5a-3k$	–37	–32	–27	–22	–17	–12	–7	–2	3	8	13	–12
–3	$2k-3a$	23	20	17	14	11	8	5	2	–1	–4	–7	8
–2	$2a-k$	–14	–12	–10	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	–4
–1	$k-a$	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–1	4
0	a	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**
1	k	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
2	$a+k$	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	4
3	$a+2k$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	4
4	$2a+3k$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	8
5	$3a+5k$	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	12
6	$5a+8k$	7	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	20
7	$8a+13k$	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	32
8	$13a+21k$	19	32	45	58	71	84	97	110	123	136	149	52
9	$21a+34k$	31	52	73	94	115	136	157	178	199	220	241	84
10	$34a+55k$	50	84	118	152	186	220	254	288	322	356	400	136
Тип ряда			*4Ф*		*2Л*		*4Ф*		*2Ф*	*Л*	*4Ф*		*4Ф*

Классические однократные типы последовательностей мы обозначаем через *Ф* (ряд Фибоначчи) и через *Л* (ряд Люка). В нескольких колонках (см. табл. 2) мы имеем учетверенные (*4Ф*) и удвоенные (*2Ф*) ряды Фибоначчи и Люка (*2Л)*.

Затравочные числа, порождающие ряды типа Фибоначчи, сами являются частью ряда Фибоначчи и реализуются в том порядке, в каком они реализуются в конкретной последовательности. Например, для классического ряда Фибоначчи без учета знака

такими числами будут: 1 и 1 , 1 и 2, 2 и 3, 3 и 5, 5 и 8 и т. д. Относительно этих двух чисел ряд разворачивается вправо и влево.

Последовательность чисел на каждом уровне, т. е. по строкам, при увеличении k возрастает в арифметической прогрессии c постоянным приростом. Так, на уровне 10 постоянный прирост в табл.1 равен 21, а в табл. 2 - 34. Что касается итоговых столбцов, то средние значения образуют ряд Фибоначчи или ряд Люка соответствующей кратности. Обращает на себя внимание и то, что средние значения полностью совпадают с рядом, для которого $k = 0$.

3. Геометрическая организация классических последовательностей

А теперь приступим к обобщению данных, размещенных в 12 таблицах (табл. 1 и 2 плюс 10 таблиц Приложения). Сделаем мы это также с помощью таблиц. Начнем с двух самых простых. В первой таблице мы поместим (табл. 3) индексы рядов, кратных классическим, т е удвоенных, утроенных и т д. рядов, а во второй (табл. 4) – только классические, т. е. однократные последовательности Фибоначчи и Люка. По обеим осям мы ограничились 11 значениями от –5 до 5, включая нулевое.

Семейство рядов Фибоначчи при различных a и k обладает еще рядом интересных свойств, с которым мы познакомимся, обратившись к серии таблиц второго порядка, построенных на материале первичных табл. 1 и 2 и табл. I–X Приложения.

Поскольку в этих новых таблицах содержится много разнообразной информации, попытаемся расщепить ее на несколько частей.

На рис. 1 приведена та часть кратных рядов Фибоначчи, которая имеет центробежную лучевую структуру. Число таких рядов устремляется в бесконечность, но все они предсказуемы.

k\a	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	**-5Ф**					**-5Ф**					**-5Ф**
-4		**-4Ф**				**-4Ф**				**-4Ф**	
-3			**-3Ф**			**-3Ф**			**-3Ф**		
-2				**-2Ф**		**-2Ф**		**-2Ф**			
-1					**-Ф1**	**-1Ф**	**1Ф**				
0	**-5Ф**	**-4Ф**	**-3Ф**	**-2Ф**	**-1Ф**		**1Ф**	**2Ф**	**3Ф**	**4Ф**	**5Ф**
1					**-1Ф**	**1Ф**	**1Ф**				
2				**2Ф**		**2Ф**		**2Ф**			
3			**3Ф**			**3Ф**			**3Ф**		
4		**4Ф**				**4Ф**				**4Ф**	
5	**5Ф**					**5Ф**					**5Ф**

Рис. 1. Центробежные кратные последовательности Фибоначчи

k\a	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5			**Ф**								
-4			**Л**								
-3				**Ф**	**Л**					**Л**	**Ф**
-2					**Ф**		**Л**		**Ф**		
-1				**Л**	**Ф**	**Ф**	**Ф**	**Ф**	**Л**		
0					**Ф**		**Ф**				
1			**Л**	**Ф**	**Ф**	**Ф**	**Ф**	**Л**			
2			**Ф**		**Л**		**Ф**				
3	**Ф**	**Л**					**Л**	**Ф**			
4									**Л**		
5									**Ф**		

Рис. 2. Однократные последовательности Фибоначчи и Люка

Однократные классические последовательности показаны на рис. 2. В квадрате они располагаются довольно причудливым образом. Перед нами откровенная крестообразная структура, несколько развернутая по часовой стрелке относительно горизонтальной и вертикальной осей симметрии.

Данную фигуру можно сделать еще более наглядной следующим образом.

Из центра симметрии квадрата будем двигаться через индексы *Ф* или *Л* в сторону конечных клеток, фиксируя каждый переход из клетки в клетку с помощью отрезка прямой. В результате этих действий получаем две фигуры – для совокупности клеток *Ф и Л* в отдельности (см. рис. 3 и 4). Обе фигуры имеют вид двойной свастики. Причем Свастика *Ф* и Свастика *Л* слегка сдвинуты относительно «оси вращения». При их совмещении на одном рисунке (см. рис. 4) они многократно пересекаются. Обращает на себя внимание и то, что такая конструкция наряду с идеей вращения символизирует также и идею поступательного движения, имея облик «шагающего человечка». Не безразлична данная фигура и к колебательному движению, что проявляется в подъеме и опускании «ног» «человечка» при поочередном изменении направления вращения фигуры и ее поступательного движения вперед. Таким образом, в данной конструкции концентрируются в застывшем виде все основные разновидности пространственного движения системы материальных точек.

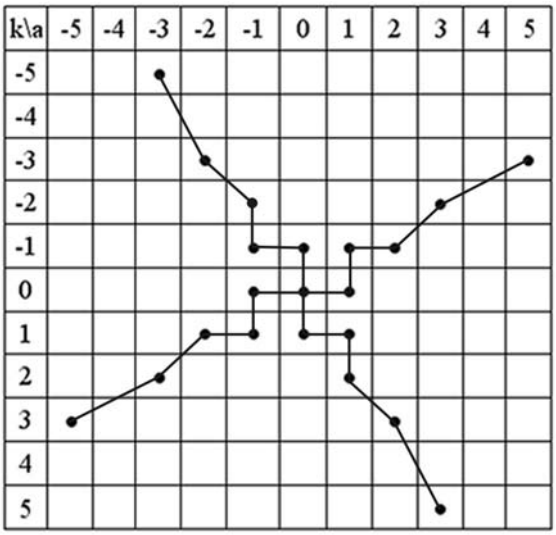

Рис. 3. Свастика Фибоначчи

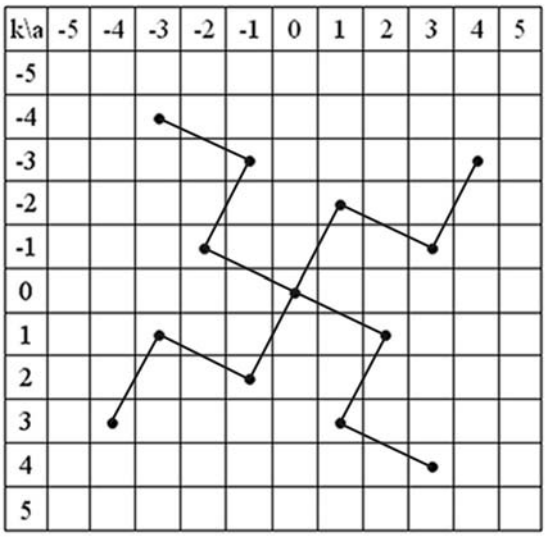

Рис. 4. Свастика Люка

Прибегнем к еще одному способу пространственного структурирования конструкции, показанной на рис.5 и 6.

Легко видеть, что в этой конструкции, начиная от центра, для Ф и Л прорисовывается система квадратов . Причем квадраты (см. рис. 4) имеют переменный угол наклона сторон относительно горизонтальной и вертикальной осей симметрии.

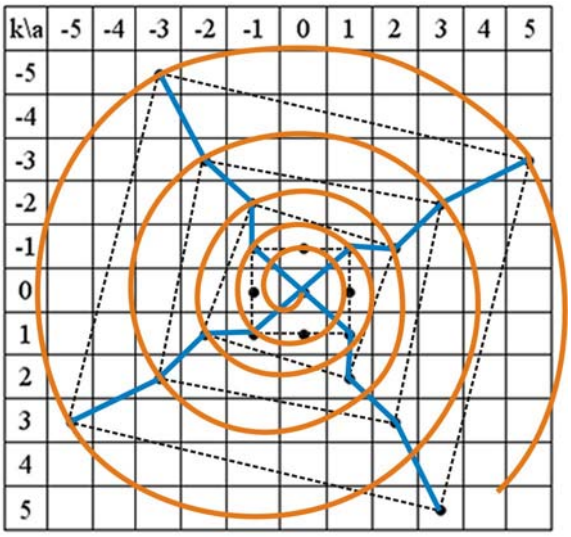

Рис. 5. Система квадратов, свастика и спираль для однократных последовательностей Фибоначчи

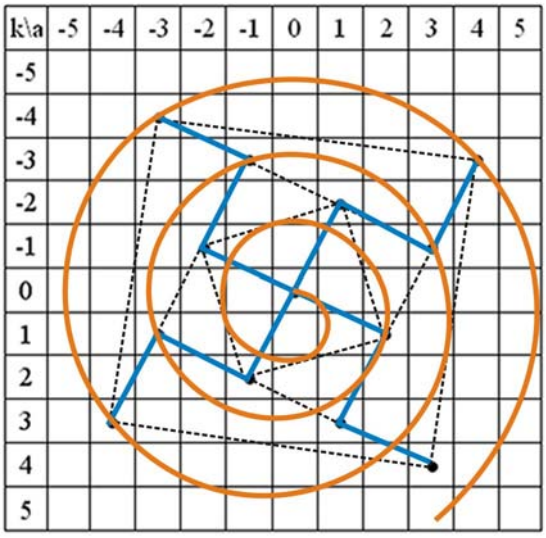

Рис. 6. Система квадратов, свастика и спираль для однократных последовательностей Люка

Пространственная структура последовательностей на основе системы квадратов может быть эксплицирована следующим образом.

Соединим центр симметрии нашей таблицы с четырьмя углами первого квадрата, а затем соединяем все вершины следующих по мере удаления от центра углов с предыдущими. В итоге опять получаем свастикоподобную фигуры (см. рис. 5 и 6) для обеих последовательностей. В квадраты, начиная от центра, последовательно вписываются и «кольца» спиралей, образующие совместно с квадратами нечто вроде паутины для паукообразной свастики

4. Ковер Фибоначчи

А теперь ознакомимся не только с классическими, но и с другими типами целочисленных последовательностей и их размещением в нашей координатной сетке. Новых типов появилось совсем немного -8. Причем все они только однократные. Полный список типов, проранжированных по частоте возможных реализаций, приведен в табл. 3.

Таблица 3

Перечень типов однократных рядов типа Фибоначчи

№	Тип ряда	Имя ряда	Число реализаций
1	0-1-1-2-3-5	Фибоначчи	20
2	2-1-3-4-7-11	Люка	12
3	3-1-4-5-9-14	Ф-3	11
4	3-2-5-7-12-19	Ф-4	11
5	4-1-5-6-11-17	Ф-5	6
6	4-3-7-10-17-27	Ф-6	5
7	5-1-6-7-13-20	Ф-7	3
8	5-3-8-11-19-30	Ф-8	4
9	5-4-9-13-22-35	Ф-9	4
10	2-7-9-16-25-41	Ф-10	4
			80

Доминирующие позиции в нашем списке занимают 4 последовательности. Причем, если лидерские позиции последовательности Фибоначчи выглядят безоговорочными, то ряду Люка по числу реализаций практически не уступают *Ф-3* и *Ф-4*. Вместе эти 4 ряда дают 70% реализаций.

Все ряды, размещенные в табл. 3, могут быть расставлены и по клеткам нашей координатной сетки – см. рис. 7. В заштрихованных клетках расположены кратные ряды типа Фибоначчи, в незаштрихованных – типы однократных рядов.

k\a	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5		3	Ф	4	5		9	8	10	7	
-4	9		Л		3		6		5		4
-3	8	6		Ф	Л		4	3		Л	Ф
-2	10		4		Ф		Л		Ф		3
-1	7	5	3	Л	Ф	Ф	Ф	Ф	Л	4	6
0					Ф		Ф				
1	6	4	Л	Ф	Ф	Ф	Ф	Л	3	4	5
2	3		Ф		Л		Ф		4		10
3	Ф	Л		3	4		Л	Ф		3	8
4	4		5		6		3		Л		9
5		7	10	8	9		5	4	Ф	3	

Рис. 7. Ковер Фибоначчи

Заштрихованные ячейки рис. 7 образуют затейливый орнамент с большим центральным перекрестьем и четырьмя крестами в углах картинки, элементы которых расположены в шахматном порядке.

Через незаштрихованные клетки в каждом квадранте может быть проведена спираль, а в целом вся структура может быть представлена в виде двух пересекающихся спиралей Корню (клотоид), образующих свастикоподобную фигуру (см. рис. 8). Правая половина этой конструкции очень похожа на фигуру, изображенную на картине голландского художника М.К Эшера «Водовороты». Эта картина приведена на цветной вставке книги М. Газале (Газале, 2002) в качестве ярчайшего примера спиралевидных образований.

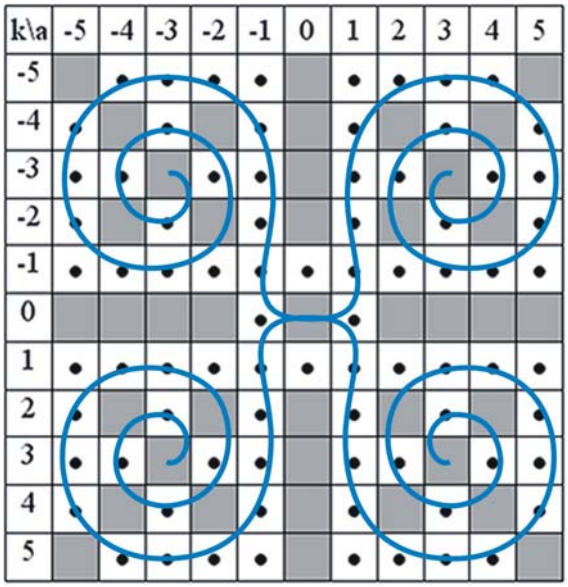

Рис. 8. Ковер и клотоиды Фибоначчи

Неклассические типы также подчиняются строгим закономерностям. Одна из таких закономерностей просто бросается в глаза: одинаковые типы, например, типы *Ф-3* и *Ф-4* располагаются на параллельных линиях, образующих не квадраты, а параллелограммы – см. рис.8 . Эти квадраты и параллелограммы в сочетании со свастиками и спиралями, характерными для каждой последовательности, образуют затейливое переплетение линий, которое взывает о том, чтобы назвать его *паутиной Фибоначчи.* Можно ожидать, что при расширении пространства наблюдения такие же прямые и возникающие на из пересечении многоугольники будут наблюдаться и для других типов.

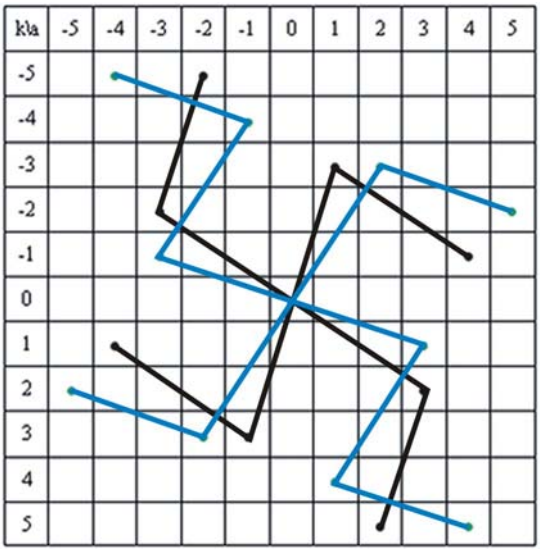

Рис. 9. Свастики рядов Фибоначчи *Ф-3* и *Ф-4*

Обсуждение этих закономерностей, как, впрочем, и некоторых других, не менее любопытных, мы оставим вне пределов данной работы.

Следует, однако, иметь в виду, что наши констатации выполнены на сравнительно небольшом интервале варьирования *a* и *k*. Желательно расширить поле нашего наблюдения, чтобы пространственная структура обозначилась более четко и недвусмысленно.

Увеличим интервал варьирования обоих коэффициентов вдвое и разместим на рис. 9 не только однократные, но и многократные последовательности за исключением центробежных рядов Фибоначчи (последние показаны на рис.1).

k\a	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-10					2Ф		5Ф									5Л					
9					3Ф			3Л													
-8					2Л	Ф	4Ф								4Л						
-7							Л														
-6							2Ф	3Ф	2Л					3Л					2Л	3Ф	2Ф
-5	5Л							Ф											Ф		5Ф
-4			4Л					Л	2Ф				2Л				2Ф	Л	4Ф		
-3					3Л				Ф	Л					Л	Ф	3Ф			3Л	
-2							2Л			Ф		Л		Ф	2Ф		2Л				
-1									Л	Ф	Ф	Ф	Ф	Л							
0										Ф		Ф									
1								Л	Ф	Ф	Ф	Ф	Л								
2					2Л		2Ф	Ф		Л		Ф			2Л						
3		3Л			3Ф	Ф	Л					Л	Ф				3Л				
4			4Ф	Л	2Ф				2Л				2Ф	Л	4Ф				4Л		
5	5Ф		Ф											Ф							5Л
6	2Ф	3Ф	2Л					3Л						2Л	2Ф						
7															Л						
8							4Л								4Ф	Ф	2Л				
9														3Л				3Ф			
10						5Л										5Ф	2Ф				

Рис. 10. Пространственная система последовательностей типа Фибоначчи

Ознакомившись с рис. 10 , можно отметить следующие его особенности:

1. Кроме отмеченных выше (см. рис.1), последовательности Фибоначчи имеют еще одну диагональную кратную структуру: например, в правом верхнем квадранте это будет луч с координатами: 4/-2; 6/-3; 8/-4; 10/-5. Особенностью данного луча и трех остальных в других квадрантах является то, что они прерывисты, реализуясь через клетку.

2. Что касается рядов Люка, то здесь мы имеем две кратные последовательности. Первая является кратной с шагом через одну клетку, ее координаты: 2/-4, 3/-6, 4/-8, 5/-10, вторая – является только трехкратной с шагом через две клетки, ее координаты: 6/-2, 9/-3, 12/-4.
3. Между этими двумя люковскими лучами располагаются две ломаные линии, состоящие из однократных рядов. Эти ломаные по мере удаления от центра симметрии сливаются в одну линию.

   Первая ломаная проходит через координаты, образующие два ряда Фибоначчи : 3/-2, 5/-3,8/-5. Далее следуют пары, выходящие за пределы нашей координатной сетки: 13/-8, 21/-13, 34/-21 и т. д., т. е. координаты образуют два смещенных на одну позицию друг относительно друга ряда Фибоначчи. Интересно, что сумма и разность пар чисел-координат на каждом шаге также образует ряд Фибоначчи. Еще одним интересным свойством этих координат является то, что они образуют катеты прямоугольного треугольника, бессектриса которого, вычисленная по теореме Пифагора, представляет собой расстояние точки локализации данного типа от центра симметрии нашей координатной сетки. Эти расстояния последовательно равны: $\sqrt{13} = 3{,}605 = 0{,}721 \cdot 5$, $\sqrt{34} = 5{,}830 = 1{,}166 \cdot 5$, $\sqrt{89} = 9{,}434 = 1{,}887 \cdot 5$, $\sqrt{233} = 15{,}264 = 3{,}053 \cdot 5$, $\sqrt{610} = 24{,}698 = 4{,}94 \cdot 5$, $\sqrt{1597} = 39{,}962 = 7{,}99 \cdot 5$ и т. д.

   Подкоренные числа данной последовательности являются числами Фибоначчи (с пропуском одного), а результаты извлечения корня квадратного сходятся к пятикратному ряду Фибоначчи.

   Вторая ломаная состоит из рядов Люка с координатами: 3/-1, 4/-3,7/-4 и далее за пределами обозначенной нами координатной сетки: 11/-7, 18/-11, 29/-18 и т.д. Суммы и разности этих координатных пар также образуют ряд Люка. Что касается координат этого ряда, то суммы квадратов катетов в данном случае образуют пятикратную последовательность чисел Фибоначчи (с пропуском одного), а корни квадратные из этих чисел также образуют ряд Фибоначчи, но уже не целочисленный: $\sqrt{10} = \sqrt{2 \cdot 5} = 3{,}162$, $\sqrt{25} = \sqrt{5 \cdot 5} = 5$, $\sqrt{65} = \sqrt{13 \cdot 5} = 8{,}062$, $\sqrt{170} = \sqrt{34 \cdot 5} = 13{,}038$, $\sqrt{445} = \sqrt{89 \cdot 5} = 21{,}095$.
4. Аналогичным образом ведут себя двухкратные, трехкратные, в общем случае многократные ряды Фибоначчи и Люка, координаты которых представлены парами удвоенных, утроенных и т.д. чисел этих классических рядов, каждый из которых может быть также представлен в виде ломаной линии.Причем число таких ломаных целиком определяется величиной кратности, которая устремляется в бесконечность.

По мере удаления от центра симметрии все ломаные сливаются в одну прямую линию с угловым коэффициентом, равным золотому числу 0,618, к которому в пределе сходятся отношения чисел в упомянутых выше координатных парах. Это означает что классические однократные ряды, независимо от того являются ли они рядами Фибоначчи или рядами Люка, будут ложиться на одну прямую линию с угловым коэффициентом 0,618 относительно горизонтальной оси симметрии. При этом появление «новых» однократных чисел Фибоначчи или Люка по мере удаления от центра симметрии будет происходить все реже по мере увеличения разности между координатными числами Фибоначчи или Люка, а разность эта растет тоже по правилам Фибоначчи и Люка.

Характер сходимости ломаных Фибоначчи и Люка на примере однократных рядов показан на рис. 11.

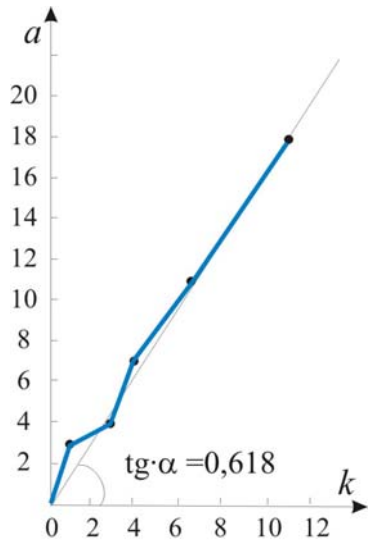

Рис. 11. Сходимость ломаной Люка к прямой линии

Из рис. 11 видно, что координаты ломаных Фибоначчи и Люка по мере удаления от центра симметрии сначала колеблются около прямой с угловым коэффициентом, равным 0,618, а затем очень быстро сливаются с ней. Именно этим, в значительной мере объясняется свастикоподобный контур группирования в пространстве однократных последовательностей Фибоначчи и Люка. Это хорошо демонстрирует условный рисунок с четырьмя ветвями классических последовательностей, образующих некую четырех-крылую фигуру, напоминающую бабочку.

Рис. 12. Цветок классических последовательностей Фибоначчи

Можно предположить, что любые однократные последовательности типа Фибоначчи, будут тяготеть к размещению в пределах крыльев бабочки, показанной на рис.12.

5. Ранговые распределения последовательностей типа Фибоначчи

5.1. Фиботипы и фибоупотребления

В предыдущем разделе мы сосредоточили свое внимание на классических последовательностях Люка и Фибоначчи. Конечно же, существуют и другие ряды. При этом возникает несколько вопросов: Какие именно это ряды? Сколько их? Как они распределены по координатной сетке? Какова частота их реализации на фоне классических рядов? и др.

Ответ на эти вопросы можно получить с помощью ранговых распределений, построенных на материале совокупностей, единицы которых являются типами последовательностей, выявленных в исследованном материале. Эти типы строились на

основе устойчивой тройки следующих друг за другом чисел каждой реальной последовательности. Эти тройки возникают в результате «переваривания» затравочных чисел правилом Фибоначчи и приобретения рядом в результате этого переваривания свойств золотого сечения. Для идентификации типа последовательности достаточно взять какую-либо тройку чисел. В качестве таковой мы в каждом ряду выбрали начальное число, находящееся в пределах третьего десятка. Если таковое обнаружено не было, то выбор останавливался на первом числе из четвертого десятка. Полученные «числовые образы» мы назвали *фиботипами* (*ф/т*), а число их реализаций *фибоупотреблениями* (*ф/у*). Начнем с минимального поля наблюдения, когда оба затравочных числа варьируют от -5 до +5.

Ранговое распределение мы разместим в табл. 4.

Таблица 4

Ранговое распределение фиботипов по числу фибоупотреблений

Ранг	Тип ряда	*ф/т*	*ф/у*	Золотое число
1	21-34-55	*Фибоначчи*	67	0,618
2	29-47-76	*Люка*	17	0,618
3	23-37-60	*Ф-3*	11	0,617
4	31-50-81	*Ф-4*	11	0,617
5	28-45-73	*Ф-5*	6	0,616
6	27-44-71	*Ф-6*	6	0,620
7	33-53-86	*Ф-7*	5	0,616
8	30-49-79	*Ф-8*	4	0,620
9	22-35-57	*Ф-9*	4	0,614
10	25-41-66	*Ф-10*	3	0,621

Из табл. 4 видно, что отношение предыдущего члена к последующему числу в каждой тройке удовлетворяют правилу золотого сечения, т. е. наши триады устойчивы и по ним можно осуществлять практически безошибочное опознание типа последовательности (золотое число вычислялось как отношение срединного числа в тройке чисел к максимальному).

В данном ранговом распределении безусловным лидером является ряд Фибоначчи, который дает около половины всех реализаций. Ряд Люка существенно уступает «неограниченному властителю», но оба ряда «с именем» совместно дают 60% суммарной реализации всех рядов, что совсем не намного отличается от уровня золотого сечения, если ряды Фибоначчи и Люка рассматривать как «большее», а все остальные ряды - как «меньшее».

Представляет определенный интерес познакомиться и с другими частотными рядами Фибоначчи.

2. Аналитическая система фиботипов

Рассмотрим несколько последовательностей, следующих за абсолютными лидерами – рядом Фибоначчи и рядом Люка (см. табл. 5).

Таблица 5

Наиболее частотные ряды типа Фибоначчи

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Л	2	1	3	4	7	11	18	**29**	**47**	**76**	123
Ф	0	1	1	2	3	5	8	13	**21**	**34**	**55**
Ф-3	3	1	4	5	9	14	**23**	**37**	**60**	97	1 57
Ф-4	3	2	5	7	12	19	**31**	**50**	**81**	131	212
Ф-5	4	1	5	6	11	17	**28**	**45**	**73**	118	191

Ф-6	4	3	7	10	17	**27**	**44**	**71**	115	186	301

Согласно формуле Бине отношение чисел Фибоначчи к одноуровневым числам Люка стремится к $\sqrt{5} = 2{,}236$. Так, для уровня 10 отношение 123 к 55 действительно равно 2,236. В паре следующих рядов отношение 157/123 равно 1,276, а отношение 212/123 равно 1,724. Что стоит за этими числами? Легко видеть, что сумма этих чисел равна 3. Нетрудно догадаться, что $1{,}724 = 1 + \frac{1{,}618}{1{,}618 \cdot 1{,}382} = 1 + \frac{\varphi}{\sqrt{5}}$. Следовательно, $1{,}276 = 3 - \left(1 + \frac{\varphi}{\sqrt{5}}\right) = 2 - \frac{\varphi}{\sqrt{5}}$. Итак, здесь мы также имеем дело с замечательными соотношениями, основанными на $\sqrt{5}$ и золотом числе φ.

Можно показать, что отношение последовательности, занимающей в ранговом распределении пятое место, к последовательности Люка будет характеризоваться числом $1{,}552 = 3 - \frac{2\varphi}{\sqrt{5}}$, а отношение последовательности ранга 6 к тому же ряду выглядит так: $2{,}448 = 1 + \frac{2\varphi}{\sqrt{5}}$. Любопытно, что сумма двух последних чисел равна 4.

Всю систему отношений между эталонным рядом Люка и другими рядами можно представить в виде таблицы см. табл. 6. (Заметим, что то же самое можно сделать, если за эталон взять ряд Фибоначчи).

Таблица 6

Система отношений рядов фиботипов к ряду Люка

Порядок отношения *n*	Маршрут 1	Маршрут 2	Маршрут 3
1	$1 + \frac{\varphi}{\sqrt{5}} = 1{,}724$ **Ф-4**		
2	$1 + \frac{2\varphi}{\sqrt{5}} = 2{,}448$ **Ф-6**	$2 + \frac{\varphi}{\sqrt{5}} = 2{,}724$ **Ф-8**	
3	$1 + \frac{3\varphi}{\sqrt{5}} = 3{,}171$ **Ф-9**	$3 + \frac{\varphi}{\sqrt{5}} = 3{,}724$	$3 + \frac{2\varphi}{\sqrt{5}} = 4{,}447$
4	$1 + \frac{4\varphi}{\sqrt{5}} = 3{,}894$	$4 + \frac{\varphi}{\sqrt{5}} = 4{,}724$	$4 + \frac{3\varphi}{\sqrt{5}} = 6{,}171$
Прирост	0,724	1	1,724
Порядок отношения *n*	Маршрут 4	Маршрут 5	Маршрут 6
1	$1 - \frac{\varphi}{\sqrt{5}} = 0{,}276$		
2	$1 - \frac{2\varphi}{\sqrt{5}} = -0{,}553$	$2 - \frac{\varphi}{\sqrt{5}} = 1{,}276$ **Ф-3**	

3	$1-\frac{3\varphi}{\sqrt{5}}=-1{,}171$	$3-\frac{\varphi}{\sqrt{5}}=2{,}276$ **Ф-10**	$3-\frac{2\varphi}{\sqrt{5}}=1{,}553$ **Ф-5**
4	$1-\frac{4\varphi}{\sqrt{5}}=-1{,}894$	$4-\frac{\varphi}{\sqrt{5}}=3{,}276$	$4-\frac{3\varphi}{\sqrt{5}}=1{,}829$ **Ф-7**
Прирост	-0,724	1	0,276

Возможно, арсенал предсказывающих формул должен быть расширен. Причем пути расширения очевидны. С другой стороны, маршруты 3 и 4, по-видимому, являются избыточными, первый – из-за чрезмерно быстрого роста, второй – из-за своей отрицательности.

Легко видеть, что после устранения из табл. 13 маршрутов 3 и 4 высокочастотные отношения выстраиваются по диагонали в довольно узком коридоре, который при расширении поля наблюдения также будет расширяться, при этом некоторые последовательности в этом коридоре могут поменяться местами, но незначительно.

Интересно, что в построенной нами системе, некоторые отношения являются взаимнодополнительными. Такими будут: *Ф-3* (1,276) и *Ф-4* (1,724) - их сумма равна 3; *Ф-6* (2,447) и *Ф-5* (1,553) - сумма равна 4, *Ф-8* (2,724) и *Ф-10* (2,276) – сумма равна 5, *Ф-9* (3,171) и *Ф-7* (1,829) – сумма также равна 5, т.е. сумма взаимно-дополнительных отношений равна небольшому целому числу.

Отметим также, что в каждой колонке цифры возрастают линейно: соответствующий постоянный прирост показан в последней строке табл. 7.

Для того, чтобы получить более полное представление о структуре и разнообразии фиботипов, расширим поле нашего наблюдения до 10 квадратов.

Будем действовать следующим образом. Сосчитаем число разных типов в минимальном квадрате, обрамляющем центр равновесия (см. рис. 7). Затем то же самое сделаем в расширенном на один шаг в четырех направлениях квадрате и продолжим это делать последовательно в расширяющемся квадрате, пока не будут преодолена внешняя граница максимального в пределах нашего наблюдения квадрата.

Для десяти квадратов были получены следующие данные о разнообразия Фиботипов (см. табл. 7).

Таблица 7.

Ранговое распределение Фиботипов

Ранг	Имя или индекс *ф/т*	Формула $\frac{ф/т}{Люка}$	Число *ф/т*	Число *ф/у*	Накопл. число *ф/у*
1	Фибоначчи	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	1	131	131
2	Люка	1	1	41	172
3-4	23-37-60	$2-\frac{\varphi}{\sqrt{5}}=1{,}276$	2	35	242
	31-50-81	$1+\frac{\varphi}{\sqrt{5}}=1{,}724$			
5	27-44-71	$1+\frac{2\varphi}{\sqrt{5}}=2{,}447$	1	23	265
6	22-35- 57	$1+\frac{3\varphi}{\sqrt{5}}=3{,}171$	1	21	286

7-8	28-45-73	$3-\frac{2\varphi}{\sqrt{5}}=1{,}553$	2	18	322
	33-53-86	$4-\frac{3\varphi}{\sqrt{5}}=1{,}829$			
9	30-49-79	$2+\frac{\varphi}{\sqrt{5}}=2{,}724$	1	17	339
10	25-41-66	$3-\frac{\varphi}{\sqrt{5}}=2{,}276$	1	12	351
11-12	22-37-59	$1+\frac{6\varphi}{\sqrt{5}}=5{,}341$	2	9	360
	23-36-59	$4-\frac{\varphi}{\sqrt{5}}=3{,}276$			
13-15	27-43-70	$2+\frac{4\varphi}{\sqrt{5}}=3{,}894$	3	8	385
	26-43-69	$6-\frac{5\varphi}{\sqrt{5}}=2{,}382$			
	23-39-62	$2+\frac{5\varphi}{\sqrt{5}}=5{,}618$			
16	25-39-64	$5-\frac{2\varphi}{\sqrt{5}}=3{,}553$	1	6	391
17-18	29-46-75	$2+\frac{3\varphi}{\sqrt{5}}=4{,}171$	2	5	401
	32-51-83	$1+\frac{5\varphi}{\sqrt{5}}=4{,}618$			
19-20	23-41-64	$8-\frac{3\varphi}{\sqrt{5}}=5{,}829$	2	4	409
	29-48-77	$7-\frac{6\varphi}{\sqrt{5}}=2{,}658$			
21-26	30-47-77	$5-\frac{\varphi}{\sqrt{5}}=4{,}276$	6	3	427
	33-52-85	$4+\frac{\varphi}{\sqrt{5}}=4{,}724$			
	25-42-67	$1+\frac{7\varphi}{\sqrt{5}}=6{,}065$			
	21-32-53	$8-\frac{7\varphi}{\sqrt{5}}=2{,}935$			
	28-47-75	$1+\frac{8\varphi}{\sqrt{5}}=6{,}789$			
	23-35-58	$9-\frac{8\varphi}{\sqrt{5}}=3{,}211$			
27-30	31-52-83	$10-\frac{4\varphi}{\sqrt{5}}=7{,}106$	4	2	435

	24-37-61	$7-\frac{5\varphi}{\sqrt{5}}=3{,}382$			
	24-41-65	$3+\frac{4\varphi}{\sqrt{5}}=5{,}894$			
	23-32-55	$5+\frac{4\varphi}{\sqrt{5}}=7{,}894$			
30-35	23-43-66	$14-\frac{11\varphi}{\sqrt{5}}=6{,}041$	5	1	440
	29-45-74	$7-\frac{4\varphi}{\sqrt{5}}=4{,}106$			
	28-35-63	$14-\frac{7\varphi}{\sqrt{5}}=8{,}935$			
	23-45-68	$20-\frac{19\varphi}{\sqrt{5}}=6{,}252$			
	23-42-65	$11-\frac{7\varphi}{\sqrt{5}}=5{,}935$			
			35		

Заключая данный раздел, отметим, что при построении фиботипов мы опирались исключительно на знакопостоянную часть рядов типа Фибоначчи. При переключении внимания на знакопеременную часть обнаруживаются крайне важные особенности их организации.

В первую очередь обращает на себя внимание то, что по модулю знакопеременная часть классических рядов Фибоначчи и Люка тождественна знакопостоянной.

Иначе обстоит дело с неклассическими рядами. В них знакопеременная часть по модулю представлена рядом, отличным от того, который представлен в знакопостоянной части. Например, ряд под индексом *Ф3* , соответствующий в знакопостоянной части ряду, показанному в табл. 8, в знакопеременной части соответствует ряду *Ф4* и наоборот, ряд, обозначенный в табл. 8 как *Ф4* в знакопеременной части превращается в *Ф3*. Это означает, что в данной ситуации происходит симметричное переключение фиботипов.

Данное переключение имеет интересную особенность, перекликающуюся с особенностями формул фиботипов, показанных в табл. 6. В этой таблице формулы для *Ф3* и *Ф4* и полученные по ним числа (1,276 и 1,714) находятся в дополнительных отношениях – их сумма равна 3. В аналогичных отношениях находятся и другие пары.

Попробуем проинтерпретировать данную ситуацию через показательную функцию в духе Бине, моделирующую ряд Люка. Согласно нашим формулам значения *Ф3* должны быть разделены на 1,276, а значения *Ф4* – на 1,724. Результаты наших вычислений представлены в табл. 8, в которой при движении сверху вниз происходит переключение *Ф3* в *Ф4* (жирный шрифт) и переключение *Ф4* в *Ф3* (курсив)

Таблица 8

Симметричное переключение *Ф3 и Ф4*

	Ряд Люка	Показательная Функция	*Ф4*	*Ф3*	*Ф3*	*Ф4*
-10	123	0,010	212	167	**0,006**	*0,008*
-9	-76	0,012	-131	-97	**0,007**	*0,009*
-8	47	0,022	81	60	**0,013**	*0,017*
-7	-29	0,034	-50	-37	**0,032**	*0,027*
-6	18	0,056	31	23	**0,096**	*0,071*
-5	-11	0,090	-19	-14	**0,155**	*0,115*
-4	7	0,146	12	9	**0,252**	*0,186*
-3	-4	0,236	-7	-5	**0,407**	*0,301*
-2	3	0,382	5	4	**0,659**	*0,487*
-1	-1	0,618	-2	-1	**1,065**	*0,789*
0	2	1	3	**3**	**2**	*1*
1	1	1,618	1	**2**	*2,789*	**2,065**
2	3	2,618	4	5	*4,513*	**3,341**
3	4	4,236	5	7	*7,303*	**5,405**
4	7	6,854	9	12	*11,817*	**8,745**
5	11	11,089	14	19	*19,119*	**14,151**
6	18	17,942	23	31	*30,935*	**22,289**
7	29	29,034	37	50	*50,055*	**37,047**
8	47	46,978	60	81	*80,990*	**59,944**
9	76	76,012	97	131	*131,045*	**96,991**
10	123	122,990	157	212	*212,034*	**156,94**
					Ф4	*Ф3*

У нас есть осторожное, пока не проверенное предположение, что возможны не только взаимно-дополнительные бинарные переключения, но и переключения для триад, тетрад и более сложных конфигураций фиботипов.

4. О статистической неоднородности фиботипов

Теперь ознакомимся со статистиками распределения, представленного в табл. 7.

Среднее арифметическое данного распределения равно 12,27 Оно отсекает ряд Фибоначчи и ряд Люка и 8 других «активных» фиботипов от всех остальных. Если же обратиться к дисперсии и стандартному отклонению, то мы увидим, что они патологически велики в сравнении со средней: имеем, соответственно, 521 и 12,57. Это особенно четко проявляется в коэффициенте вариации, который по статистическим меркам просто огромен (181,6%). Столь высокие значения показателей вариации говорят о неоднородности данного распределения, за которой стоит некоторое скрытое качество, отличающее 10 классические последовательности от всех остальных.

В работе (Мартыненко, 1988) предложено несколько способов разрешения неоднородности подобных распределений. Один из них заключается в ее визуализации с помощью распределения плотности в билогарифмических координатах. Логарифмическое сжатие шкалы создает благоприятные условия для выявления геометрического типа распределения. В табл. 9 представлено такое распределение, построенное путем преобразования чисел табл. в десятичные логарифмы этих чисел. Соответствующий график приведен на рис.12.

Таблица 9

Плотность распределения рядов типа Фибоначчи в логарифмической шкале

Номер интервала	Частотный интервал	Число типов *k*	*Logk*
1	0,000-0,302	9	0,954
2	0,302-0,604	8	0,903
3	0,604-0,906	6	0,778
4	0,906-1,208	2	0,301
5	1,208-1,510	1	0,000
6	1,510-1,812	5	0,699
7	1,812-2,114	4	0,602

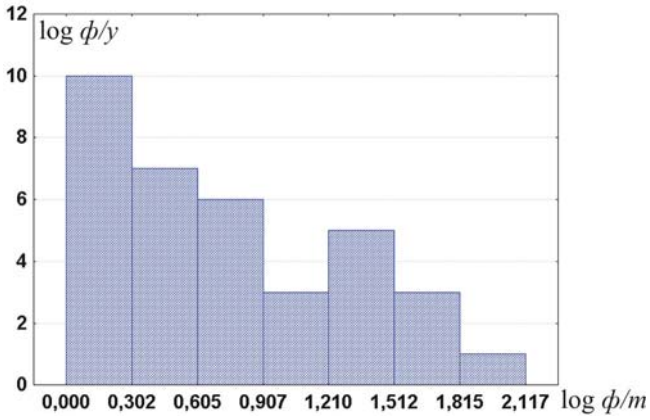

Рис. 12. Гистограмма распределения последовательностей типа Фибоначчи

Из рис. 12 видно, что гистограмма откровенно бимодальна. Это может быть связано с тем, что совокупность рядов типа Фибоначчи качественно неоднородна. Она распадается на две групп: группу высокоактивных, структурообразующих, ядерных объектов и совокупность низкоактивных, периферийных элементов. Границей между этими множествами можно считать условный минимум (см. рис.12). Такие распределения принадлежат к так называемым статусным распределениям, с помощью которых единицы совокупности упорядочиваются по их значимости, активности, распространенности в конкретной системе (Мартыненко, 1978), т. е. данные распределения представляют собой некоторую табель о рангах.

5. Динамика разнообразия фиботипов

В табл. 10 приведены данные, отражающие динамику увеличения числа Фиботипов по мере расширения поля наблюдения, т. е. последовательного увеличения числа квадратов наблюдения.

Данная зависимость является типичным представителем в длинной цепи зависимостей, которые исследуются в лингвистике, биологии, науковедении, культурологи и др. дисциплинах. В 1964 г. классик квантитативной лингвистики Г.Хердан дал общее имя этим зависимостям, назвав их *распределениями знакотип-знакоупотребление,* а область статистики, занимающейся изучением этих распределений, - *Tape-token Mathematics* (G. Herdan,1960).

Таблица 10

Динамика разнообразия Фиботипов

№ квадрата (W)	Эмпирическое число $ф/m$	Теоретическое число $ф'/m$ $c = 0{,}0025$ $b = 2{,}26$
1	1	1,00
2	2	1,14
3	4	2,83
4	6	5,37
5	10	8,74
6	13	12,90
7	18	17,78
8	22	23,23
9	29	29,15
10	35	35,36
15 (прогноз)		65,47
25 (прогноз)		92,71
35 (прогноз)		94,96

Из табл. 10 видно, что что по мере расширения поля наблюдения (номера квадрата) количество фиботипов неуклонно возрастает, но характер этого возрастания не совсем ясен. Можно предположить, что здесь возрастание происходит или по степенному, или экспоненциальному типу, но тогда путем логарифмирования можно перейти к линейному варианту. Однако оба варианта оказываются неработоспособными, так как зависимость оказывается достаточно сложной.

Была видвинута гипотеза, что возрастание в данном случае имеет в данном случае асиптотический характер, т. е. словарь фиботипов асиптотически конечен.

При исследовании зависимости такого типа исполь зуются разные функции асимптотического роста, но наиболее популярна функции Вейбулла (Горькова, Нешитой, Тулдава, Мартыненко) вида

$$y = k - ke^{-\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}}},$$

где k - асимптота.

В связи с тем, что система нормальных уравнений для линейной зависимости является самой простой, при аппроксимации разумно прибегнуть к линеаризации Линейный вариант функции Вейбулла имеет вид:

$$\ln \ln \frac{k}{k-y} = \ln a - b \ln x$$

Однако в нашем случае один из параметров (асимптота) входит в состав зависимой переменной, что исключает использование метода наименьших квадратов в чистом виде. Нами был найден следующий выход из сложившейся ситуации:

1) асимптоте k мы задавали конкретные значения через фиксированный шаг, начиная с максимального значения конкретного параметра, достигнутого в эмпирическом ряду;

2) далее на каждом шаге при фиксированном значении асимптоты методом наименьших квадратов вычисляли значения других коэффициентов (a и b) с помощью системы уравнений, упомянутой выше;

3) на каждом шаге вычислялась сумма отклонений по модулю теоретической кривой от эмпирической;

4) затем строился график зависимости величины отклонений от последовательности пошагово задаваемых значений асимптоты; график такой зависимости имеет вид *U*-образной кривой с ярко вы минимумум ;

5) среди множества величин отклонений выбиралось минимальное, которое и принималось за теоретическое значение асимптоты.

Исходные данные представлены в первом и втором столбце табл. 10.

Результаты аппроксимации таковы.

Значения постоянных коэффициентов и теоретические значения функции при разных объемах выборки, включая прогностические данные, приведены в табл. 10. Соответствующие кривые для этих данных показаны на рис. 13.

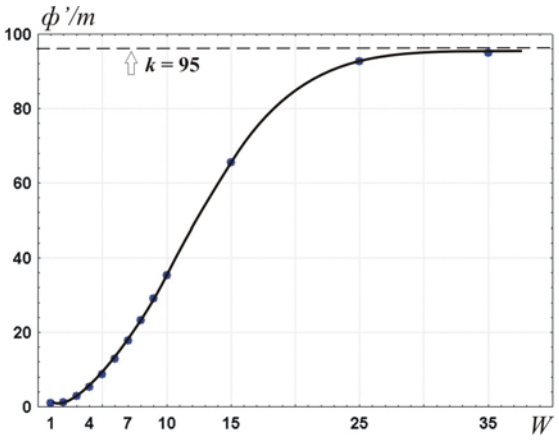

Рис. 13. Зависимость числа фиботипов от ширины поля наблюдения (числа квадратов)

Из табл. 10 и рис. 13 видно, что согласование эмпирических и теоретических данных очень хорошее. Несколько озадачивает то, что гипотеза о конечности объема словаря фиботипов нашла подтверждение. Причем словарь этот сравнительно невелик и по мере расширения объема наблюдения вычерпываеся довольно быстро. Это вступает в противоречие с обычными представлениями о бесконечном разнообразии последовательностей типа Фибоначчи. Тот объем наблюдения, который достигнут в нашей работе, говорит о том, что бесконечное разнообразие фиботипов – иллюзия, создаваемая бесконечной массой фибоупотреблений, которая формируется в первую очередь кратными вариантами фиботипов, число которых действительно является бесконечным как и степень кратности, которая также устремляется в бесконечность

В заключение, приведем еще один любопытный эмпирический факт. Если предположить, что фиботипы образуют единую целостную систему, в которой асимптотическое число 95 с позиций золотого сечения будет «целым», то «большим» будет 95/1,618=58,71, а «меньшим» – 58,71/1,618= 36,29. Это число практически совпадает с тем (35), которое было получено в эксперименте.

6. Констатации и выводы

1. В пространстве затравочных чисел классические последовательности Фибоначчи и Люка на начальной стадии формирования ряда имеют вид двойной свастики, а объединенная – тройной. Причем Свастика *Ф* и Свастика *Л* «вращаются» с некоторым сдвигом по фазе. Обращает на себя внимание и то, что такая конструкция наряду с идеей вращения символизирует также и идею поступательного движения, имея облик «шагающего человечка». Не безразлична данная фигура и к колебательному движению, что проявляется в подъеме и опускании «ног» человечка при поочередном изменении направления вращения фигуры и ее поступательного движения вперед. Таким образом, в данной конструкции концентрируются в застывшем виде все основные разновидности

пространственного движения системы материальных точек Аналогичную геометрическую структуру имеют и другие типы рядов обсуждаемого класса..

2. Последовательности Фибоначчи и Люка в пространстве затравочных чисел имеют прерывистую лучевую структуру, причем эта прерывистость задается правилом и рядом Фибоначчи, числа которого по мере удаления от центра симметрии также образуют ряд Фибоначчи. Это позволяет получать числовые значения классических рядов на любом расстоянии от центра симметрии пространства Фибоначчи. Примечательно, что лучи классических рядов Фибоначчи устремляются к прямой, угловой коэффициент которой равен золотому числу 0,618.

3. Все ряды типа Фибоначчи в пространстве затравочных чисел образуют орнаментальную конфигурацию в виде крестообразного пересечения двух клотоид, напоминающих «Водовороты» Морица Эшера.

4. Последовательности, в которых в качестве затравочных используются золотые числа часто *представленны в нижней зоне однократным рядом Фибоначчи, а в верхней – двукратным* и наоборот.

5. Предложена система взаимосвязанных формул, генерирующих типы рядов Фибоначчи. Эта система основана на пионерских идеях Бине.

6. По модулю знакопеременная часть классических рядов Фибоначчи и Люка тождественна знакопостоянной. В неклассических рядах знакопеременная часть по модулю представлена рядом, отличным от того, который представлен в знакопостоянной части. Например, ряд, являющийся в знакопостоянной части фиботипом *Ф3*, в знакопеременной части соответствует ряду *Ф4* и наоборот, т. е. что в данной ситуации происходит симметричное переключение фиботипов.

7. Распределение фиботипов качественно неоднородно, что проявляется, в частности, в бимодальности их распределения по числу фибоупотреблений.

8. Построена прогностическая модель, основанная на функции Вейбулла и предсказывающая число фиботипов при расширении поля наблюдения. Согласно модели число фиботипов конечно и равно сравнительно небольшому числу. Разнообразие фиботипов за пределами этого числа формируется исключительно благодаря разнообразию кратных рядов, соответствующих основному конечному набору однократных фиботипов.

Литература

Васютинский Н.А. Золотая пропорция. М.: Молодая гвардия, 1990.

Газале М. Гномон. От фараонов до фракталов. Перевод с англ. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

Горькова В.И. Ранговое распределение на множествах научно-технической информации // Научно-техническая информация. Сер.2, 1968, № 5. С.5-11.

Мартыненко Г.Я. Основы стилеметрии. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1988

Мартыненко Г.Я., Фомин С.В. Ранговые моменты. // Научно-техническая информация. Серия 2,1989, № 8. С.9-14.

Мартыненко Г.Я. Числовая гармония текста. М., 2008 (в печати).

Нешитой В.В. Длина текста и объем словаря. Показатели лексического богатства текстов //Методы изучения лексики. Минск, 1975. С.110-118.

Стахов А.П. Сакральная геометрия и математика гармонии // Проблеми гармонії, симетрії і золотого перетину в природі, науці та містецтві. Вінниця, 2003. С. 8-26.

Стахов А., Слученкова А., Щербаков И. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. СПб.: Питер, 2006.

Стахов А.П. Роль «Золотого Сечения» и «Математики Гармонии» в преодолении «стратегических ошибок» в развитии математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14688, 12.01.2008. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321074.htm.

Тулдава Ю.А. О квантитативных характеристиках богатства лексическогог состава художественных текстов // Уч.зап. Тартуск. Ун-та. Вып. 437. Studia metrica et poetica. II. Тарту, 1977. С.82-93.
Herdan G. Type-Token Mathematiks. London, 1960.

Приложение

Типы целочисленных рядов Фибоначчи

Таблица I

Уровень ряда	Формула уровня	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	Среднее
–10	*89a– 55k*	–555	–466	–377	–288	–199	–110	–21	68	162	246	335	–110
–9	*34k–55a*	343	288	233	178	123	68	13	–42	–102	–152	–207	68
–8	*34a–21k*	–212	–178	–144	–110	–76	–42	–8	26	60	94	128	–42
–7	*13k–21a*	131	110	89	68	47	26	5	–16	–37	–58	–79	26
–6	*13a–8k*	–81	–68	–55	–42	–29	–16	–3	10	23	36	49	–16
–5	*5k–8a*	50	42	34	26	18	10	2	–6	–14	–22	–30	10
–4	*5a–3k*	–31	–26	–21	–16	–11	–6	–1	4	9	14	19	–6
–3	*2k–3a*	19	16	13	10	7	4	1	–2	–5	–8	–11	4
–2	*2a–k*	–12	–10	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8	–2
–1	*k–a*	7	6	5	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	2
1	*A*	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**
2	*K*	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
3	*a+k*	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	2
4	*a+2k*	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	4
5	*2a+3k*	–4	–2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	6
6	*3a+5k*	–5	–2	1	4	7	10	13	16	19	22	25	10
7	*5a+8k*	–9	–4	1	6	11	16	21	26	31	36	41	16
8	*8a+13k*	–14	–6	2	10	18	26	34	42	50	58	66	26
9	*13a+21k*	–23	–10	3	16	29	42	55	68	81	94	107	42
10	*21a+34k*	–37	–16	5	26	47	68	89	110	131	152	173	68
Тип ряда			-2Ф	2Ф	2Ф	Л	2Ф	2Ф	2Ф		2Л		2Ф

\

Таблица II

Уровень ряда	Формула уровня	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	Среднее
–10	*89a– 55k*	–445	–356	–267	–178	–89	0	89	178	267	356	445	0
–9	*34k–55a*	–275	–220	–165	–110	–55	0	55	110	165	220	275	0
–8	*34a–21k*	–170	–136	–102	–68	–34	0	34	68	102	136	170	0
–7	*13k–21a*	105	84	63	42	21	0	–21	–42	–63	–84	–105	0
–6	*13a–8k*	–65	–52	–39	–26	–13	0	13	26	39	52	65	0
–5	*5k–8a*	40	32	24	16	8	0	–8	–16	–24	–32	–40	0
–4	*5a–3k*	–25	–20	–15	–10	–5	0	5	10	15	20	25	0
–3	*2k–3a*	15	12	9	6	3	0	–3	–6	–9	–12	–15	0
–2	*2a–k*	–10	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8	10	0
–1	*k–a*	5	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4	–5	0
0	*A*	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**
1	*K*	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
2	*a+k*	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	0
3	*a+2k*	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	0
4	*2a+3k*	–10	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8	10	0
5	*3a+5k*	–15	–12	–9	–6	–3	0	3	6	9	12	15	0
6	*5a+8k*	–25	–20	–15	–10	–5	0	5	10	15	20	25	0
7	*8a+13k*	–40	–32	–24	–16	–8	0	8	16	24	32	40	0
8	*13a+21k*	–65	–52	–39	–26	–13	0	13	26	39	52	65	0
9	*21a+34k*	–105	–84	–63	–42	–21	0	21	42	63	84	105	
10	*34a+55k*	–170	–136	–102	–68	–34	0	34	68	102	136	170	0
Тип ряда		–5Ф	–4Ф	–3Ф	–2Ф	–Ф	0	Ф	2Ф	3Ф	4Ф	5Ф	0

Таблица III

Уровень ряда	Формула уровня	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	Среднее
–10	*89a– 55k*	–396	–307	–208	–123	–34	55	144	233	322	411	500	55
–9	*34k–55a*	237	182	127	76	21	–34	–89	–144	–199	–254	–309	–34
–8	*34a–21k*	–159	–125	–81	–47	–13	21	55	89	123	157	191	21
–7	*13k–21a*	118	97	76	55	34	–13	–34	–55	–76	–97	–118	–13
–6	*13a–8k*	–57	–34	–31	–18	–5	8	21	34	47	50	63	8
–5	*5k–8a*	35	27	19	11	3	–5	–13	–21	–29	–37	–45	–5
–4	*5a–3k*	–22	–17	–12	–7	–2	3	8	13	18	23	28	3
–3	*2k–3a*	13	10	7	4	1	–2	–5	–8	–11	–14	–17	–2
–2	*2a–k*	–9	–7	–5	–3	–1	1	3	5	7	9	11	1
–1	*k–a*	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4	–5	–6	–1
0	*A*	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**
1	*K*	**–1**	**–1**	**–1**	**–1**	**–1**	**–1**	**–1**	**–1**	**–1**	**–1**	**–1**	**–1**
2	*a+k*	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	–1
3	*a+2k*	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	–2
4	*2a+3k*	–13	–11	–9	–7	–5	–3	0	1	3	5	7	–3
5	*3a+5k*	–20	–17	–14	–11	–8	–5	–1	1	4	7	10	–5
6	*5a+8k*	–33	–28	–23	–18	–13	–8	–1	2	7	12	17	–8
7	*8a+13k*	–53	–45	–37	–29	–21	–13	–2	3	11	19	27	–13
8	*13a+21k*	–86	–73	–60	–47	–34	–21	–3	5	18	31	44	–21
9	*21a+34k*	–139	–118	–97	–76	–55	–34	–5	8	39	50	71	–34
10	*34a+55k*	–225	–191	–157	–123	–89	–55	–8	13	57	81	115	–55
Тип ряда					Л	–Ф	–Ф	–Ф	Ф	Л			–Ф

Таблица IV

Уровень ряда	Формула уровня	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	Среднее
–10	*89a– 55k*	–335	–246	–157	–68	21	110	199	288	377	466	555	110
–9	*34k–55a*	207	152	97	42	–13	–68	–123	–178	–233	–268	–323	–68
–8	*34a–21k*	–118	–84	–50	–26	8	42	76	110	144	178	214	42
–7	*13k–21a*	79	58	37	16	–5	–26	–47	–68	–89	–110	–131	–26
–6	*13a–8k*	–49	–36	–23	–10	3	16	29	42	55	68	81	16
–5	*5k–8a*	30	22	14	6	–2	–10	–18	–26	–34	–42	–50	–10
–4	*5a–3k*	–19	–14	–9	–4	1	6	11	16	21	26	31	6
–3	*2k–3a*	11	8	5	2	–1	–4	–7	–10	–13	–16	–19	–4
–2	*2a–k*	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8	10	12	2
–1	*k–a*	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4	–5	–6	–7	–2
0	*A*	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**
1	*K*	**–2**	**–2**	**–2**	**–2**	**–2**	**–2**	**–2**	**–2**	**–2**	**–2**	**–2**	**–2**
2	*a+k*	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	+1	2	3	–2
3	*a+2k*	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	–4
4	*2a+3k*	–16	–14	–12	–10	–8	–6	–4	–2	0	2	4	–6
5	*3a+5k*	–23	–22	–19	–16	–13	–10	–7	–4	–1	2	5	–10
6	*5a+8k*	–39	–36	–31	–26	–21	–16	–11	–6	–1	4	9	–16
7	*8a+13k*	–62	–58	–50	–42	–34	–26	–18	–10	–2	6	14	–26
8	*13a+21k*	–101	–94	–81	–68	–55	–42	–29	–16	–3	10	23	–42
9	*21a+34k*	–163	–152	–131	–110	–89	–68	–47	–26	–5	16	37	–68
10	*34a+55k*	–264	–246	–212	–178	–144	–110	–76	–42	–8	26	60	110
Тип ряда			–2Л		–2Ф	–Ф	–2Ф	–Л	–2Ф	–Ф	2Ф		–2Ф

Таблица V

Уровень ряда	Формула уровня	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	Среднее
–10	*89a– 55k*	–610	–521	–432	–343	–254	–147	–76	13	102	191	280	–147
–9	*34k–55a*	377	322	267	212	157	102	47	–8	–63	–118	–173	102
–8	*34a–21k*	–233	–199	–165	–131	–97	–63	–29	5	39	73	107	–63
–7	*13k–21a*	144	123	102	81	60	39	18	–3	–24	–45	–66	39
–6	*13a–8k*	–89	–76	–63	–50	–37	–24	–11	2	15	28	41	–24
–5	*5k–8a*	55	47	39	31	23	15	7	–1	–9	–17	–25	15
–4	*5a–3k*	–34	–29	–24	–19	–14	–9	–4	1	6	11	16	–9
–3	*2k–3a*	21	18	15	12	9	6	3	0	–3	–6	–9	6
–2	*2a–k*	–13	–11	–9	–7	–5	–3	–1	1	3	5	7	–3
–1	*k–a*	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–1	–2	3
0	*A*	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**
1	*K*	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**
2	*a+k*	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	3
3	*a+2k*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	6
4	*2a+3k*	–1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	9
5	*3a+5k*	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	15
6	*5a+8k*	–1	4	9	14	19	24	29	34	39	44	49	24
7	*8a+13k*	–1	7	15	23	31	39	47	55	63	71	79	39
8	*13a+21k*	–2	11	24	37	50	63	76	89	102	115	128	63
9	*21a+34k*	–3	18	39	60	81	102	123	144	165	186	207	102
10	*34a+55k*	–5	29	63	97	131	165	199	233	267	301	335	165
Тип ряда		–Ф	Л	3Ф			3Ф	Л	Ф	3Ф			3Ф

Таблица VI

Уровень ряда	Формула уровня	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	Среднее
–10	*89a– 55k*	–280	–191	–102	–13	76	165	254	343	432	521	610	165
–9	*34k–55a*	173	118	63	8	–47	–102	–157	–212	–267	–322	–377	–102
–8	*34a–21k*	–107	–73	–39	–5	29	63	97	131	165	199	233	63
–7	*13k–21a*	66	45	24	3	–18	–39	–60	–81	–102	–123	–144	–39
–6	*13a–8k*	–41	–28	–15	–2	11	24	37	50	63	76	89	24
–5	*5k–8a*	25	17	9	1	–7	–15	–23	–31	–39	–47	–55	–15
–4	*5a–3k*	–16	–11	–6	–1	4	9	14	19	24	29	34	9
–3	*2k–3a*	9	6	3	0	–3	–6	–9	–12	–15	–18	–21	–6
–2	*2a–k*	–7	–5	–3	–1	1	3	5	7	9	11	13	3
–1	*k–a*	2	1	0	–1	–2	–3	–4	–5	–6	–7	–8	–3
0	*A*	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**
1	*K*	**–3**	**–3**	**–3**	**–3**	**–3**	**–3**	**–3**	**–3**	**–3**	**–3**	**–3**	**–3**
2	*a+k*	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	–3
3	*a+2k*	–11	–10	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	–6
4	*2a+3k*	–19	–17	–15	–13	–11	–9	–7	–5	–3	–1	1	–9
5	*3a+5k*	–30	–27	–24	–21	–18	–15	–12	–9	–6	–3	0	–15
6	*5a+8k*	–49	–44	–39	–34	–29	–24	–19	–14	–9	–4	1	–24
7	*8a+13k*	–79	–71	–63	–55	–47	–39	–31	–23	–15	–7	1	–39
8	*13a+21k*	–128	–115	–102	–89	–76	–63	–50	–37	–24	–11	2	–63
9	*21a+34k*	–207	–186	–165	–144	–123	–102	–81	–60	–39	–18	3	–102
10	*34a+55k*	–335	–301	–267	–233	–199	–165	–131	–97	–63	–39	5	–165
Тип ряда				–3Ф	–Ф	–Л	–3Ф			–3Ф	–Л	Ф	–3Ф

Таблица VII

Уровень ряда	Формула уровня	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	Среднее
–10	*89a– 55k*	661	572	483	394	305	–220	–131	–42	37	136	225	–220
–9	*34k–55a*	401	356	301	246	191	136	81	26	–29	–84		136
–8	*34a–21k*	–254	–220	–186	–152	–118	–84	–50	–16	18	52	86	–84
–7	*13k–21a*	157	136	115	94	73	52	31	10	–11	–32	–53	52
–6	*13a–8k*	–97	–84	–71	–58	–45	–32	–19	–6	7	20	33	–32
–5	*5k–8a*	60	52	44	36	28	20	12	4	–4	–12	–20	20
–4	*5a–3k*	–37	–32	–27	–22	–17	–12	–7	–2	3	8	13	–12
–3	*2k–3a*	23	20	17	14	11	8	5	2	–1	–4	–7	8
–2	*2a–k*	–14	–12	–10	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	–4
–1	*k–a*	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–1	4
0	*A*	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**
1	*K*	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
2	*a+k*	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	4
3	*a+2k*	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	8
4	*2a+3k*	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	12
5	*3a+5k*	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	20
6	*5a+8k*	7	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	32
7	*8a+13k*	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	52
8	*13a+21k*	19	32	45	58	71	84	97	110	123	146	159	84
9	*21a+34k*	31	52	73	94	115	136	157	178	199	220	241	136
10	*34a+55k*	50	84	118	152	186	220	254	288	322	366	400	220
Тип ряда			4Ф		2Ф		4Ф		2Ф	Л	4Ф		4Ф

Таблица VIII

Уровень ряда	Формула уровня	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	Среднее
–10	*89a– 55k*	–225	–136	–47	42	131	220	309	398	487	576	665	220
–9	*34k–55a*	139	84	29	–26	–81	–136	–191	246	301	356	411	–136
–8	*34a–21k*	–86	–52	–18	16	50	84	118	152	186	220	254	84
–7	*13k–21a*	53	32	11	–10	–31	–52	–73	–94	–115	–136	–157	–52
–6	*13a–8k*	–33	–20	–7	6	19	32	45	58	71	84	97	32
–5	*5k–8a*	20	12	4	–4	–12	–20	–28	–36	–44	–52	–60	–20
–4	*5a–3k*	–13	–8	–3	2	7	12	17	22	27	32	37	12
–3	*2k–3a*	10	7	4	1	–2	–8	–11	–14	–17	–20	–23	–8
–2	*2a–k*	–6	–4	–2	0	2	4	6	8	10	12	14	4
–1	*k–a*	1	0	–1	–2	–3	–4	–5	–6	–7	–8	–9	–4
0	*A*	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**
1	*K*	**–4**	**–4**	**–4**	**–4**	**–4**	**–4**	**–4**	**–4**	**–4**	**–4**	**–4**	**–4**
2	*a+k*	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	–4
3	*a+2k*	–13	–12	–11	–10	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–8
4	*2a+3k*	–22	–20	–18	–16	–14	–12	–10	–8	–6	–4	–2	–12
5	*3a+5k*	–35	–32	–29	–26	–23	–20	–17	–14	–11	–8	–5	–20
6	*5a+8k*	–57	–52	–47	–42	–37	–32	–27	–22	–17	–12	–7	–32
7	*8a+13k*	–92	–84	–76	–68	–60	–52	–44	–36	–28	–20	–12	–52
8	*13a+21k*	–149	–136	–123	–110	–97	–84	–71	–58	–45	–32	–19	–84
9	*21a+34k*	–241	–220	–199	–178	–157	–136	–115	–94	–73	–52	–31	–136
10	*34a+55k*	–390	–356	–322	–288	–254	–220	–186	–152	–118	–84	–50	–220
Тип ряда			–4Ф	–Л	–2Ф		–4Ф		–2Л		–4Ф		–4Ф

Таблица IX

Уровень ряда	Формула уровня	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	Среднее
–10	*89a– 55k*	–720	–631	–542	–453	–364	–275	–186	–97	–8	81	170	–275
–9	*34k–55a*	445	390	335	280	225	170	115	60	5	–50	–105	170
–8	*34a–21k*	–275	–241	–207	–173	–139	–105	–71	–37	–3	31	65	–105
–7	*13k–21a*	170	149	128	107	86	65	44	23	2	–19	40	65
–6	*13a–8k*	–105	–92	–79	–66	–53	–40	–27	–14	–1	12	25	–40
–5	*5k–8a*	65	57	49	41	33	25	17	9	1	–7	–15	25
–4	*5a–3k*	–40	–35	–30	–25	–20	–15	–10	–5	0	5	10	–15
–3	*2k–3a*	25	22	19	16	13	10	7	4	1	–2	–5	10
–2	*2a–k*	–15	–13	–11	–9	–7	–5	–3	–1	1	3	5	–5
–1	*k–a*	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	5
0	*A*	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**
1	*K*	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
2	*a+k*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5
3	*a+2k*	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	10
4	*2a+3k*	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	15
5	*3a+5k*	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	25
6	*5a+8k*	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	40
7	*8a+13k*	25	33	41	49	57	65	73	81	89	97	105	65
8	*13a+21k*	40	53	66	79	92	105	118	131	144	157	170	105
9	*21a+34k*	65	86	107	128	149	170	191	212	233	254	275	170
10	*34a+55k*	105	139	173	207	241	275	309	343	377	411	445	175
Тип ряда		5Ф					5Ф			Ф		5Ф	

Таблица X

Уровень ряда	Формула уровня	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	Среднее
–10	*89a– 55k*	–90	–81	8	97	186	275	364	453	542	631	720	275
–9	*34k–55a*	105	50	–5	–60	–115	–170	–225	–280	–335	–390	–445	–170
–8	*34a–21k*	–65	–31	3	37	71	105	139	173	207	241	275	105
–7	*13k–21a*	40	19	–2	–23	–44	–65	–86	–107	–128	–149	–170	–65
–6	*13a–8k*	–25	–12	1	14	27	40	53	66	79	92	105	40
–5	*5k–8a*	15	7	–1	–9	–17	–25	–33	–41	–49	–57	–65	–25
–4	*5a–3k*	–10	–5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	15
–3	*2k–3a*	5	2	–1	–4	–7	–10	–13	–16	–19	–22	–25	–10
–2	*2a–k*	–5	–3	–1	1	3	5	7	9	11	13	15	5
–1	*k–a*	0	–1	–2	–3	–4	–5	–6	–7	–8	–9	–10	–5
0	*A*	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**
1	*K*	**–5**	**–5**	**–5**	**–5**	**–5**	**–5**	**–5**	**–5**	**–5**	**–5**	**–5**	**–5**
2	*a+k*	–10	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	–5
3	*a+2k*	–15	–14	–13	–12	–11	–10	–9	–8	–7	–6	–5	–10
4	*2a+3k*	–25	–23	–21	–19	–17	–15	–13	–11	–9	–7	–5	–15
5	*3a+5k*	–40	–37	–34	–31	–28	–25	–22	–19	–16	–13	–10	–25
6	*5a+8k*	–65	60	–55	–50	–45	–40	–35	–30	–25	–20	–15	–40
7	*8a+13k*	–105	–97	–89	–81	–73	–65	–57	–49	–41	–33	–25	–65
8	*13a+21k*	–170	–157	–144	–131	–118	–105	–92	–79	–66	–53	–40	–105
9	*21a+34k*	–275	–254	–233	–212	–191	–170	–149	–128	–107	–86	–65	–170
10	*34a+55k*	–445	–411	–377	–343	–309	–275	–241	–207	–173	–139	–105	–285
Тип ряда		5Ф		–Ф			5Ф					5Ф	